数学・物理通信

1巻11号　　2011年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2011年12月19日

目 次

指数関数と対数関数の構成 (II) **3**

1.1 はじめに 3
1.2 記号と準備 3
1.3 指数と対数 7
1.4 指数関数と対数関数 9
1.5 指数関数と対数関数とのかかわり 13

四元数の発見へ **16**

2.1 はじめに 16
2.2 数のもつべき性質 16
2.3 第 3 の元の導入 17
2.4 四元数の発見 17
2.5 四元数の代数系 20
2.6 絶対値の条件 21
2.7 四元数の除法 22
2.8 四元数の数の性質 22
2.9 おわりに 23

編集後記 **24**

Contents

1. Shozo NIIZEKI, Masaharu IWASAKI: Construciton of Exponential and Logarithmic Functions (II)
2. Tadashi YANO: Discovery of Quaternion
3. Tadashi YANO: Editorial Comments

指数関数と対数関数の構成 (II) Construciton of Exponential and Logarithmic Functions (II)

新関章三[1], 岩崎正春 [2]
Shozo Niizeki [3], Masaharu Iwasaki [4]

1.1 はじめに

“ 数学・物理通信 (1 巻 7 号) ”で与えた，指数関数と対数関数の構成 (I) では直観的で素朴な考えから一般の指数関数 c^x を構成し，その性質を色々調べて指数関数 e^x は $\boldsymbol{R}$ 上で微分可能でその導関数も e^x であることを示した.

この論文では指数関数と対数関数の構成 (I) とは少し異なった立場から，簡潔な構成法を考えてみた．本稿の特色は定理 4.2 の証明法にある．この定理は指数関数構成の根本となる基本不等式であると同時に外にも色々な応用が考えられる．さらに定理 4.6 と定理 5.3 を提示したのも本稿の特色であり，これらは一様収束にまで達する強力な収束定理である.

1.2 記号と準備

先ず，数の記号については次のように定める.

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} & : \text{実数の全体} \\ \boldsymbol{Q} & : \text{有理の数全体} \\ \boldsymbol{Z} & : \text{整数の全体} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \boldsymbol{R}^+ & : \text{正の実数全体} \\ \boldsymbol{Q}^+ & : \text{正の有理数全体} \\ \boldsymbol{Z}^+ & : \text{正の整数全体} \end{cases}$$

2 つの集合 E, F に対し $E \setminus F$ とは集合 E から集合 F の元を全て取り去った残りの元から成る集合とする．例えば $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{R}^+ \setminus \boldsymbol{Q}^+$ とはそれぞれ無理数の全体及び正の無理数全体から成る集合となる.

定義 2.1 以下，c^b は c の b 乗と読み，これを

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R} \\ c \in (0,1) \ \cup (1,\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow c^b \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1)\ 1 & : b = 0 \\ 2)\ \overbrace{c \cdot c \ \cdots \ c}^{b \text{ 個の積}} & : b \in \boldsymbol{Z}^+ \\ 3)\ \sqrt[q]{c^p} & : \{p, q\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \ \& \ b = p/q \\ 4)\ \lim\limits_{n\to\infty} c^{r_n} & : \{r_n\} \subset \boldsymbol{Q}^+ \ \& \ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = b \\ 5)\ (c^{|b|})^{-1} & : b < 0 \end{cases}$$

と定義する．ここで 4) の妥当性は補題 2.7 と同 2.8 による．♦

[1]niizekishozo@gmail.com
[2]miwasaki@cure.ocn.ne.jp
[3]Professor Emeritus, Kochi University
[4]Professor Emeritus, Kochi University

次の命題は初等的で簡単ながら応用上も重要で数多くの有意義な不等式を生み出す.

命題 2.2 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ \{a,b\} \subset \boldsymbol{R}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ n(a-b)b^{n-1} \le a^n - b^n \le n(a-b)a^{n-1} \\ 2)\ n(a-1) \le a^n - 1 \le n(a-1)a^n \end{cases}$$

証明
1) 因数分解 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \cdots \ + b^{n-1})$ から明らかである.
2) 上の 1) で $b=1$ とおいてから $a>1$ か $a \le 1$ かの場合に分けて考える．あるいは $(a-1)a^n - (a-1)a^{n-1} = (a-1)^2 a^{n-1} \ge 0$ を用いる．□

$\boldsymbol{R}$ における有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ と無理数の全体 $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ とがそれぞれ $\boldsymbol{R}$ で稠密であることを示す手段として，実数に関する Archimedes (アルキメデス 287–212 B.C.) の原理と呼ばれる次の命題がある.

命題 2.3 (Archimedes の原理) 下記の事実が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \forall\{a,b\} \subset \boldsymbol{R}^+ \\ \exists n \in \boldsymbol{Z}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \ b < na$$

証明 背理法による．即ち，上に有界な増加列は収束するという Weierstrass (ワイエルシュトラス 1815–1897) の定理を用いればよい．□

この命題を用いて稠密性に関する次の定理を証明しよう.

定理 2.4 (稠密定理) 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \{a,b\} \subset \boldsymbol{R} \\ \forall a < \forall b \\ I^\circ \stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} I^\circ \cap \boldsymbol{Q} \ne \phi \\ I^\circ \cap (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}) \ne \phi \end{cases}$$

証明 2 つの実数 $\sqrt{2}$ 及び $b-a$ に対し Archimedes の原理を用いれば，或る $n \in \boldsymbol{Z}^+$ 存在して $\sqrt{2} < n(b-a)$ となるから

$$nb > na + \sqrt{2} \ge [na] + \sqrt{2} > [na] + 1 > na$$

$$\therefore \begin{cases} ([na]+1)/n \in (a,b) \cap \boldsymbol{Q} \\ ([na]+\sqrt{2})/n \in (a,b) \cap (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}) \end{cases}$$

が同時に成り立つ．これで目的は達成された．□

指数関数は Cauchy (コーシー 1789–1857) 列を Cauchy 列に写す．これを示すには次の補題が大きな役割を果たす.

補題 2.5 下記のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} a \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ (n,x) \in \boldsymbol{Z}^+ \times \boldsymbol{R} \\ |x| \le 1/n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1) \quad \left|a^{\pm\frac{1}{n}} - 1\right| \le \dfrac{1}{n}\left|a - \dfrac{1}{a}\right| \\ \\ 2) \quad |a^x - 1| \le \dfrac{1}{n}\left|a - \dfrac{1}{a}\right| \end{cases}$$

証明

1) $a^{\frac{1}{n}}$ の場合が正しければ $a^{-\frac{1}{n}}$ の場合も正しいことは明らかである．前者の場合を証明しよう．命題 2.2 の 2) において $a^n \to a$ & $b \to 1$ と変換すれば

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1) \le a-1 \le n(a^{\frac{1}{n}}-1)a$$
$$\therefore \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{a}\right) \le a^{\frac{1}{n}}-1 \le \frac{1}{n}(a-1)$$
$$\therefore \left|a^{\frac{1}{n}}-1\right| \le \frac{1}{n}|a-1|+\frac{1}{n}\left|1-\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{n}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

が成り立つ．これで 1) が示された．
2) $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し $|x| \le 1/n$ のとき

$$\begin{cases} a^{-\frac{1}{n}} \le a^x \le a^{\frac{1}{n}} & : a \in (1,\infty) \\ a^{\frac{1}{n}} \le a^x \le a^{-\frac{1}{n}} & : a \in (0,1) \end{cases}$$

が成り立つ．これらの不等式および 1) の結果により $a \in (1,\infty)$ の場合は

$$a^{-\frac{1}{n}} \le a^x \le a^{\frac{1}{n}}$$
$$\therefore\ a^{-\frac{1}{n}}-1 \le a^x-1 \le a^{\frac{1}{n}}-1$$
$$\therefore\ |a^x-1| \le \max\left\{\left|a^{-\frac{1}{n}}-1\right|, \left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|\right\} \le \frac{1}{n}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

が成り立つ．$a \in (0,1)$ のときも $a^{-1} = 1/a$ に注意して今と同様に導くことが出来る．□

上の補題から直ちに次の系が得られる．

系 2.6 次の極限式が成り立つ：

$$a \in \boldsymbol{R}^+ \implies \lim_{x\to 0}|a^x-1| = 0$$

証明 補題 2.5 により $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し次のことが成り立つ：

$$|x| \le \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ |a^x-1| \le \frac{1}{n}\left|a-\frac{1}{a}\right| \ \Rightarrow\ \sup_{|x|<1/n}|a^x-1| \le \frac{1}{n}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$
$$\Rightarrow\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|a^x-1| = \lim_{n\to\infty}\sup_{|x|<1/n}|a^x-1| \le 0\cdot\left|a-\frac{1}{a}\right| = 0$$

これで系は証明された．□

定義 2.1 の 4) の $\lim\limits_{n\to\infty} c^{r_n}$ の存在及びその一意性は次の補題 2.7 と同 2.8 とによる．

補題 2.7 次の 2 つが成り立つ：

$$\begin{cases} 1)\ a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \boldsymbol{Q}^+ \implies \exists\{r_n\} \subset \boldsymbol{Q}^+ \ \&\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = b \\ 2)\ \{r_n\} : \text{Cauchy 列} \implies \{a^{r_n}\} : \text{Cauchy 列} \end{cases}$$

証明
1) は補題 2.4 から明らかである．
2) は補題 2.5 の 2) から次のようにして分かる．列 $\{r_n\}$ は有界であるから

$$\exists M \in \boldsymbol{R}^+ \ \&\ \forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \ \&\ a^{r_n} \le M$$

が成り立つ．従って，十分大きな $N \in \boldsymbol{Z}^+$ を取れば $N \le \forall m \le \forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対して

$$|a^{r_n}-a^{r_m}| \le M|a^{r_n-r_m}-1|$$

が成り立つ．よって 補題 2.5 の 2) により 2) は証明された．□

c^b の定義式 4) について考えると，この極限値は Cauchy 列 $\{r_n\}$ の選び方には無関係に唯一つ存在する．これは，次の補題から分かる．

補題 2.8 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\{p_n\}\\ \{q_n\}\end{array}\right\} \subset \boldsymbol{Q} : \text{Cauchy 列} \\ \lim_{n\to\infty} |p_n - q_n| = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |c^{p_n} - c^{q_n}| = 0$$

証明 条件より $\exists M \in \boldsymbol{R}^+ \ \& \ e^{q_n} \le M \ (\forall n \in \boldsymbol{Z}^+)$ であるから

$$|c^{p_n} - c^{q_n}| = c^{q_n}|c^{p_n - q_n} - 1| \le M|c^{p_n - q_n} - 1|$$

を得る．ここで補題 2.5 の 2) を用いればよい．□

以上の記述内容から，次の指数の法則も容易に導くことが出来る：

定理 2.10 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \{x, y\} \subset \boldsymbol{R} \\ \{c, c_1, c_2\} \subset (0,1) \cup (1,\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ c^{x+y} = c^x c^y \\ 2)\ (c^x)^y = c^{xy} \\ 3)\ (c_1 c_2)^x = {c_1}^x {c_2}^x \end{cases}$$

証明 いずれも定義 2.1 から明らかである．□

次の定理は指数関数の増加・減少を調べる際に大変重要である．

定理 2.11 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} c \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ \{x, y\} \subset \boldsymbol{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ x < y \Leftrightarrow c^x < c^y \\ 2)\ x = y \Leftrightarrow c^x = c^y \\ 3)\ x < y \Leftrightarrow c^x > c^y \end{cases}$$

証明 先ず $c \in (1, \infty)$ 及び $y = 0$ の場合を考える．転換法によれば 1) ∼ 3) の何れの場合にも ⇒ だけを示せば 1) ∼ 3) で ⇔ が示されたことになる．
1) $x < 0 \Rightarrow c^x < 1$ を示す．定理 2.4 により $x < \alpha < 0$ なる $\alpha \in \boldsymbol{Q}$ が存在する．さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 及び $\forall n \in \boldsymbol{Z}^*$ に対し $x_n \le \alpha$ を満たす列 $\{x_n\} \subset \boldsymbol{Q}$ を取ることが出来る．ここで $\alpha \in \boldsymbol{Q}$ でかつ $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \ \&$ $\{x_n\} \subset \boldsymbol{Q}$ であることから $e^{x_n} \le e^{\alpha}$ が成り立つ．従って

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} \le e^{\alpha} < 1$$

が成り立ち 1) が示された．
2) は定義 2.1 の 2) から自明である．
3) は 1) と同じ考えで証明することが出来る．以上の結果に転換法を用いれば定理の証明が得られた．□

命題 2.2 の不等式は実に簡単な形ながら，応用上極めて重要である．その不等式からは多くの役に立つ不等式が導かれる．

さて，次節以降で展開する指数関数と対数関数の世界で最も重要な定数は Napier 数 e である．これを具体的に与えよう．先ず，命題 2.2 の不等式 1) の右側の不等式において $n \to n+1$ と変換してから

$$a = \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) \quad \& \quad b = \left(1 \pm \frac{1}{n+1}\right) \ (\text{複号同順})$$

とおけば，次の 2 つの不等式：

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \implies \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 \pm \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

が得られる．上の 2 つの不等式の辺々を掛けあわせると

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} < 1$$

が得られる．“ 上に有界な増加列は収束する ”という Weierstrass の定理により，2 つの極限値 $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}^+$ が存在する：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \alpha \quad \& \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \beta$$

従って次の極限式が成り立ち，Napier 数 e は

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\beta}{\alpha} > 0$$

で与える．ここで，命題 2.2 の不等式 1) で $a = 1, \ \ b = 1 - \frac{1}{n^2}$ とおけば，

$$0 \leq 1 - \beta \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} < \frac{1}{n}$$

が成り立つから $\beta = 1$ となることが分かる．従って

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

を得る．以上の準備をすれば，次の補題 2.12 が成り立つ．

補題 2.12 次の不等式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \{m, n\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \\ x \in \boldsymbol{R} \ \& \ |x| \leq m \\ \forall n > m \end{array}\right\} \implies \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{(1)}{\leq} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{(2)}{\leq} e^m$$

証明 命題 2.2 及び条件より，上の不等式 (1) は明らかである．次に，不等式 (2) は

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{m}{nm}\right)^{nm} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nm} \leq e^m$$

から分かる．以上で，補題は証明された．□

1.3 指数と対数

まず，指数と対数とを定義し，それらの関わり合いや性質等を調べる．指数と対数とは一体不離の関係にあり，2 つを別々に取り上げて論ずることは出来ない．

定義 3.1 定義 2.1 で与えた 3 つの数 $\{a, b, c\}$ が $a = c^b$ を満たすとき，本稿では

$$\{\ b\ \} \text{ は } c \text{ を底とする } \{\ a\ \} \text{ の } \{\ \text{対数}\ \}$$

と呼ぶ．このとき，“ b は c を底とする a の対数 ”を記号で $b = \log_c a$ と書けば $a = c^b \Leftrightarrow b = \log_c a$ なる関係が成り立つ．したがって，対数 b はまた指数 b といってもよい [1]．♦

上記の関係式：$a = c^b$ について a 及び b の一意性については次の定理がある．

定理 3.2 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{a_1, a_2\} \subset \boldsymbol{R}^+ \\ \{b_1, b_2\} \subset \boldsymbol{R} \\ c \in (0,1) \cup (1,\infty)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}1)\ c^{b_1} = c^{b_2} \ \Leftrightarrow\ b_1 = b_2 \\ 2)\ \log_c a_1 = \log_c a_2 \ \Leftrightarrow\ a_1 = a_2\end{cases}$$

証明

1) 定理 2.11 の 2) より自明である．

2) $\log_c a_1 = \log_c a_2 = A$ とおけば定義 3.1 の最後の記述により $a_1 = c^A = a_2$ が得られる．□

定義 3.1 からは指数と対数との密接な関係を示す次の重要な定理が得られる．

定理 3.3 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R} \\ c \in (0,1) \cup (1,\infty)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}a = c^{\log_c a} \\ b = \log_c c^b\end{cases}$$

証明 定義 3.1 より，$a = c^b \Leftrightarrow b = \log_c a$ であるから

$$\begin{cases}a = c^b = c^{\log_c a} \\ b = \log_c a = \log_c c^b\end{cases}$$

が同時に成り立つ．これで定理 3.3 は証明された．□

以下に述べる定理 3.4 とその系とは，一見，対数だけの性質を述べたように思えるが背後には指数の大きな働きが潜んでいる．これは，それらの証明を見れば分かる．

定理 3.4 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}^+ \\ \alpha \in \boldsymbol{R} \\ c \in (0,1) \cup (1,\infty)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}1)\ \log_c ab = \log_c a + \log_c b \\ 2)\ \log_c a^\alpha = \alpha \log_c a \\ 3)\ \log_a b = (\log_c b)/(\log_c a) \quad (a \neq 1)\end{cases}$$

証明 先ず，$\{A, B, C, D, E\} \subset \boldsymbol{R}$ を

$$\begin{cases}A \overset{\text{def}}{=} \log_c ab \\ B \overset{\text{def}}{=} \log_c a \\ C \overset{\text{def}}{=} \log_c b\end{cases} \quad \& \quad \begin{cases}D \overset{\text{def}}{=} \log_c a^\alpha \\ E \overset{\text{def}}{=} \log_a b\end{cases} \tag{*}$$

とおく．これを基に 1) ～ 3) を示そう．

1) (∗) より

$$\left.\begin{array}{l}ab = c^A \\ a = c^B \\ b = c^C\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}c^A = c^{B+C} \\ \therefore\ A = B + C\end{cases}$$

が得られるから，これで 1) は証明された．

2) (∗) より

$$\left.\begin{array}{l}a^\alpha = c^D \\ a = c^B\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}c^D = c^{\alpha B} \\ \therefore\ D = \alpha B\end{cases}$$

が得られ，従って 2) が証明された．

3) $(*)$ より

$$\left.\begin{array}{l} b = a^E \\ a = c^B \\ b = c^C \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} b = c^{BE} = c^C \\ \therefore\ C = BE \\ \therefore\ E = C/B \end{cases}$$

が得られて 3) が証明された．□

上の定理から次の系は直ちに得られる．

系 3.5 次の式が成り立つ：

$$\{a, b, c\} \subset (0,1) \cup (1, \infty) \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ \log_c 1 = 0 \\ 2)\ \log_c a^{-1} = -\log_c a \\ 3)\ \log_a b = (\log_b a)^{-1} \\ 4)\ \log_c c = 1 \end{cases}$$

証明

1) は定義 2.1 から自明

2) は定理 3.4 の 2) から明らか

3) は定理 3.4 の 3) で $c = b$ をとれば導くことができる

4) は定理 3.4 の 3) で $a = b, b = c$ とおけば，直ちに導くことができる□

1.4 指数関数と対数関数

本節では指数関数と対数関数とを定義し，２つの関数の微分可能性を証明してそれらの性質を調べる．前節で調べた指数と対数の性質は a や b を変数に見立てるとそっくりそのまま指数関数と対数関数の性質となる．

さて，指数関数の定義から始めよう．

定義 4.1 (指数関数) $c \in (0,1) \cup (1, \infty)$ とする．$\forall x \in \boldsymbol{R}$ に対し定理 3.2 の 1) により，c^x の値は一意に確定している．このとき x を変数とする関数 c^x を，c を底とする指数関数と呼ぶ．特に，c として Napier 数 e を取ったとき e^x を単に指数関数と呼ぶ．♦

指数関数の重要な性質はほとんど次の定理に起源がある．

定理 4.2 (指数関数の基本定理) Napier 数 e に対し，次の不等式が成り立つ：

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \Longrightarrow 1 + x \leq e^x$$

証明

$x \in (-\infty, -1] \cup \{0\}$ ならば明らかなので，以下，$x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ の場合だけを考える．このとき

$$\forall x \in \boldsymbol{Q}^+ \ \ \& \ \ \exists \{p, q\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \ \ \& \ \ x = \frac{q}{p}$$

が成り立ち，そして補題 2.12 の証明より

$$\left(1 + \frac{q}{p}\right)^p \leq \left(1 + \frac{q}{pq}\right)^{pq} = \left\{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right\}^q \leq e^q$$

$$\therefore 1 + \frac{q}{p} \leq e^{\frac{q}{p}} \qquad \therefore 1 + x \leq e^x$$

が成り立つ．さらに，$x \in (-1,0) \cap \boldsymbol{Q}$ の時も，今と同様にして目指す不等式を示すことができる．よって，$x \in \boldsymbol{Q} \cap \{(-1,0) \cup (0,\infty)\}$ のときには証明は終わった．最後に，$x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ の時は，(1.1) により

$$\exists \{x_n\} \subset \boldsymbol{Q} \cap \{(-1,0) \cup (0,\infty)\} \quad \& \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

であるから $1 + x_n \leq e^{x_n}$ が得られ $n \to \infty$ とすれば，定理 4.2 は証明された．□

上の定理から直ちに導かれる次の 2 つの系は応用上大変重要である．

系 4.3 指数関数 e^x に対し次の評価式及び極限式が成り立つ：

$$\begin{cases} 1) \quad |x| < 1 \ \Rightarrow \ 1 + x \overset{(1)}{\leq} e^x \overset{(2)}{\leq} \dfrac{1}{1-x} \\ 2) \quad \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

証明
1) 不等号 (1) は定理 4.2 から自明であり，不等号 (2) は定理 4.2 において変換 $x \to -x$ を行ってから逆数を取ればよい．
2) $|x| < 1$ に対して

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \ \Rightarrow \ x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \ \Rightarrow \ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成り立つから 2) は証明された．□

系 4.4 次の 2 つの連立不等式が成り立つ：

$$x \in (-1,\infty) \implies e^{\frac{x}{1+x}} \overset{(1)}{\leq} 1 + x \overset{(2)}{\leq} e^x$$

証明 不等式 (2) は系 4.3 から自明である．そして次の関係：

$$x > -1 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow 1/(x+1) > 0 \Leftrightarrow -x/(1+x) > -1$$
$$\therefore \ x \in (-1,\infty) \iff -x/(1+x) \in (-1,\infty)$$

が成り立つ．従って定理 4.2 の不等式において x を $-x/(1+x)$ で置き換えて少し計算すれば 不等式 (1) が得られる．□

系 4.3 の応用で特に重要なのは指数関数 e^x の微分可能性を示すことである．

定理 4.5 (e^x の微分可能性) 次の式が成り立つ：

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \implies \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

証明 系 4.3 の 2) より次の式を得る：

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

これで定理は証明された．□

系 4.4 の不等式は指数関数では極めて重要で，次の結果もこの系による．

定理 4.6 $\nu \in \boldsymbol{R}^+$ とする．この時，次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \forall K \in \boldsymbol{R}^+ \ \ \& \ \ I_K \overset{\mathrm{def}}{=} [-K, K] \\ \text{関数 } f \text{ は } \boldsymbol{R} \text{ で局所有界：} \\ \sup_{x \in I_K} |f(x)| = M_K < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{|\nu| \to \infty} \sup_{x \in I_K} \left| \left(1 + \frac{f(x)}{\nu}\right)^\nu - e^{f(x)} \right| = 0$$

証明 系 4.4 の 2 つの連立不等式において変換 $x \to f(x)/\nu$ を行い各辺を ν 乗すると

$$\begin{cases} e^{\frac{\nu f(x)}{\nu + f(x)}} \leq \left(1 + \dfrac{f(x)}{\nu}\right)^\nu \leq e^{f(x)} : \nu > 0 \\ e^{f(x)} \leq \left(1 + \dfrac{f(x)}{\nu}\right)^\nu \leq e^{\frac{\nu f(x)}{\nu + f(x)}} : \nu < 0 \end{cases}$$

が得られ，従って次の一連の評価式：

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{f(x)}{\nu}\right)^\nu - e^{f(x)} \right| &\leq \left| e^{\frac{\nu f(x)}{\nu + f(x)}} - e^{f(x)} \right| \\ &= e^{f(x)} \left| e^{\frac{-f(x)^2}{\nu + f(x)}} - 1 \right| \leq e^{M_K} \left(e^{\frac{(M_K)^2}{|\nu| - M_K}} - 1 \right) \end{aligned}$$

を得る．これより定理の結果は容易に導くことができる．□

注意 本稿で示さないが定理 4.6 はもっと一般の形で定式化することが出来る．♦

さて，今度は対数関数を定義しよう．そのためには，以下，少し準備が必要である．指数関数を振り返ってみると，この関数には次の性質がある．

補題 4.7 次の式が成り立つ：

$$p \in \boldsymbol{Z}^+ \ \Longrightarrow \begin{cases} c^{-p} < 1 < c^p : c \in (1, \infty) \\ c^{-p} > 1 > c^p : c \in (0, 1) \end{cases}$$

証明 上段を考えると論理式：

$$c \in (1, \infty) \ \Leftrightarrow \ c > 1 \ \Leftrightarrow \ c^p = (1 + c - 1)^p > 1 + p(c - 1) > 1 > c^{-p}$$

が得られ，これで上段は証明された．$c^{-1} = 1/c$ に注意すれば下段も同様である．□

この補題から，次の補題は容易に得られる．

補題 4.8 $\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}$ とする時，次の論理式が成り立つ：

$$\begin{cases} x < y \Leftrightarrow c^x < c^y : c \in (1, \infty) \\ x > y \Leftrightarrow c^x > c^y : c \in (0, 1) \end{cases}$$

証明 上段を考える．補題 4.5 より

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow c^y - c^x = c^x(c^{y-x} - 1) > 0$$

が成り立つ．下段は $c^{-1} = 1/c$ である事に注意して上段の結果を用いればよい．□

以上の準備から次の定理は直ちに得られる．

定理 4.9 次の極限式が成り立つ：

$$\begin{cases} 1) \lim_{x\to\infty} \begin{pmatrix} c^x \\ c^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \\ 0 \end{pmatrix} : c \in (1,\infty) \\ 2) \lim_{x\to\infty} \begin{pmatrix} c^x \\ c^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix} : c \in (0,1) \end{cases}$$

証明
1) $\alpha \overset{\mathrm{def}}{=} c-1 \in \boldsymbol{R}^+$ であり，補題 4.5 より，指数関数 c^x は増加関数であるから， $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$ となることを示せばよい．以下，これを示そう．

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \implies c^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

であり， $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$ を得る．次に $c^{-1} = 1/c$ であることに注意すると，残る性質は 2) をも含めて全て証明することが出来る．□

ここで指数関数 e^x はどのような形で特徴付けることが出来るのかを考えてみよう．次の定理が成り立つ．

定理 4.10 (指数関数の特徴付け) f は $\boldsymbol{R}$ で定義された関数とするとき，次のことが成り立つ：

$$f(x) = e^x \iff \begin{cases} 1)\ 1 + x \leq f(x) \\ 2)\ f(x+y) = f(x)f(y) \end{cases}$$

証明 $\Rightarrow$: 1) は定理 4.2 から，また 2) は定理 2.10 の 1) から明らかである．
$\Leftarrow$: 条件により $\forall n \in \boldsymbol{Z}$ に対し

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \implies \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f(x)$$

が成り立ち，従って定理 4.6 より

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f(x)$$

を得る．ここで $e^{-x} = 1/e^x$ & $f(-x) = 1/f(x)$ であるから $f(x) \leq e^x$ が得られる．これと上で求めた結果とを合わせて $f(x) = e^x$ が得られた．□

補題 4.8 と定理 4.9 により対数関数を次の形で定義することが出来る．

定義 4.11 (対数関数) $c \in (0,1) \cup (1,\infty)$ とする．中間値の定理により，$\forall x \in \boldsymbol{R}^+$ & $\exists_1 y \in \boldsymbol{R}$ & $x = c^y$ が成り立ち，y の一意性は定理 2.11 による．さらに y は c と x との関数となるから $\log_c x$ と記しこれを c を底とする対数関数と呼ぶ．$\log_c x$ の定め方から等式：$c^{\log_c x} = x$ を得る．♦

この定義から，対数関数には定理 3.3 で与えた性質が，そのまま当てはまる．また，Napier 数 e を底に持つ対数関数 $\log_e x$ は通常 e を省略して単に $\log x$ と書き，これは単に対数関数と呼ばれている．このときは $e^{\log x} = x$ が成り立つ．

上の定義から，本稿では対数関数の基本不等式と呼ばれる重要な不等式を導いてみよう．この不等式は指数関数の基本不等式つまり定理 4.2 に対応するものである．

定理 4.12 (対数関数の基本定理) 次のことが成り立つ：

$$x \in \boldsymbol{R}^+ \implies \log x \leq x - 1$$

証明 $c = e$ の場合，定理 4.2 の不等式において $x \to \log x$ と変換し，式に $e^{\log x} = x$ を適用すればよい．□

上の定理から直ちに導かれる次の系も重要である．この系は指数関数 e^x の場合の系 4.3 に対応している対数関数 $\log x$ の重要な性質であり，応用性も豊かで対数関数の重要な性質も大抵はこの不等式から導くことができる．

系 4.13 次のことが成り立つ：

$$\begin{cases} 1)\ x \in (-1,\infty) \implies \dfrac{x}{x+1} \overset{(1)}{\leq} \log(1+x) \overset{(2)}{\leq} x \\ 2)\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

証明
1) 定理 4.12 の不等式において変換 $x \to 1+x$ を施せば不等号 (2) が得られ，これに変換 $x \to -x/(1+x)$ を施せば不等号 (1) を得る．
2) 1) の結果から自明である．□

次に，系 4.13 から一般の対数関数 $\log_c x$ の導関数を求めてみよう．

系 4.14 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} c \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ x \in \boldsymbol{R}^+ \end{array}\right\} \implies \frac{d}{dx}\log_c x = \frac{1}{\log c} \cdot \frac{1}{x}$$

証明 $\log_c x = (\log c)^{-1} \log x$ が成り立ち，さらに系 4.13 の 2) から

$$\frac{d}{dx}\log x = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

が得られ，定理は証明された．□

1.5 指数関数と対数関数とのかかわり

指数関数と対数関数との間には切っても切れない密接な関係がある．ここでは定理 4.2 を中心に，それらを具体的な事実について調べてみよう．

そこで，指数関数の特徴付けである定理 4.10 に対応する対数関数の特徴付けについて考えてみたい．そのためにまず次の定義から始める．

定義 5.1 $\forall \nu \in \boldsymbol{R}^+$ に対し $L^\nu(x)$ を次のように定める：

$$L^\nu(x) \overset{\text{def}}{=} \nu(\sqrt[\nu]{x} - 1) : x \in \boldsymbol{R}^+ \qquad \blacklozenge$$

以下，$\{L^\nu(x)\}$ が $\log x$ に $\boldsymbol{R}^+$ で広義一様収束する事をみてみよう．

補題 5.2 $x \in \boldsymbol{R}^+$ に対し次の 2 つの連立不等式が成り立つ：

$$x \in \boldsymbol{R}^+ \implies \log x \leq L^{(\nu)}(x) \leq \sqrt[\nu]{x} \log x$$

証明 系 4.13 の 1) において $x \to x^{-1}$ と変換すると

$$\log x \leq x - 1 \ \Rightarrow\ 1 - x^{-1} \leq \log x \leq x - 1 \ \Rightarrow\ \log x \leq x - 1 \leq x \log x$$

が得られ，ここで $x \to \sqrt[\nu]{x}$ 変換すれば目指す不等式が得られる．□

上の補題 5.2 から，$\nu \in \boldsymbol{R}$ に対し一様収束性に関する次の重要な定理が得られる．

定理 5.3 次の極限式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\forall K > 1 \\ I_K \overset{\text{def}}{=} [K^{-1}, K]\end{array}\right\} \implies \lim_{|\nu|\to\infty} \sup_{x \in I_K} |L^\nu(x) - \log x| = 0$$

証明 $K > 1$ に注意すれば補題 5.2 により

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{\lim_{|\nu|\to\infty}} (L^\nu(x) - \log x) &\le \lim_{|\nu|\to\infty} \sup_{x \in I_K} (\sqrt[\nu]{x} - 1) \log x \\ &\le \lim_{|\nu|\to\infty} (\sqrt[|\nu|]{K} - 1) \log K = 0 \end{aligned}$$

が得られる．これより定理は証明された．□

指数関数 e^x の特徴付けである定理 4.10 に対応して次の定理がある..

定理 5.4 (対数関数の特徴付け) $\forall\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}^+$ に対し次の関係式が成り立つ：

$$g(x) = \log x \iff \begin{cases} 1)\ g(x) \le x - 1 \\ 2)\ g(xy) = g(x) + g(y) \end{cases}$$

証明 $\Rightarrow$：1) は定理 4.12 から直ちに分かり，2) は定理 3.4 の 1) より自明である．
$\Leftarrow$：条件 1) において $n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し $x \to \sqrt[n]{x}$ と変換すると条件 2) および定理 5.3 により以下の論理式：

$$\begin{aligned} g(\sqrt[n]{x}) = g(x)/n \ &\Rightarrow\ g(x) = ng(\sqrt[n]{x}) \le n(\sqrt[n]{x} - 1) = L^n(x) \\ &\Rightarrow\ g(x) \le L^n(x) \ \Rightarrow\ g(x) \le \lim_{n\to\infty} L^n(x) = \log x \\ &\Rightarrow\ g(x^{-1}) \le \log x^{-1} \ \Rightarrow\ \log x \le g(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って $g(x) = \log x$ が得られ $\Leftarrow$ が示された．□

指数と対数の重要な関連性を与える例として，一般の指数関数 a^x の微分式がある．ただし，$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ である．具体的には，指数関数を微分すると対数が現れるのである．これを定式化すると次のようになる．

定理 5.5 次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} a \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ x \in \boldsymbol{R} \end{array}\right\} \implies \frac{d}{dx} a^x = \log a \cdot a^x$$

証明 定理 5.3 において $\nu = 1/h$ とおけば

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{\nu\to\infty} \nu(\sqrt[\nu]{a} - 1) = \log a \cdot a^x$$

が得られ，定理 5.5 は証明された．□

注意 $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ および $x \in \boldsymbol{R}$ のとき，指数関数 a^x の微分は次のように考えることもできる．すなわち，定理 3.3 により $a^x = e^{x \log a}$ であるから

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = \log a e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$$

を得る．定理 5.3 とあわせて考えてみると面白い．♦

最後に，指数関数と対数関数とは互いに他の逆関数の関係にあることを示そう．

そこでまず，次の定義をする．

定義 5.6 $\boldsymbol{R}$ の 2 つの区間 J_1 と J_2 がある．そして，2 つの関数 f と g とは

$$\left.\begin{array}{l} f : J_1 \to J_2 \\ g : J_2 \to J_1 \end{array}\right\} \quad \& \quad \begin{cases} f \circ g(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)) = x & : x \in J_2 \\ g \circ f(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)) = x & : x \in J_1 \end{cases}$$

なる条件を満たしているとする．このとき，2 つの関数 f と g とは互いに他の逆関数の関係にあるという．♦

上の定義によれば，次の重要な定理を得る：

定理 5.7 指数関数 e^x と対数関数 $\log x$ とは互いに他の逆関数である．

証明 以下のようにおく：

$$\left.\begin{array}{l} J_1 \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{R} \\ J_2 \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}^+ \end{array}\right\} \quad \& \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \overset{\text{def}}{=} e^x \\ g(x) \overset{\text{def}}{=} \log x \end{array}\right.$$

そうすると，定理 3.3 で $c = e$ とおけば定理は証明されたことになる．□

参考文献

[1] 矢野　忠，対数とは何か，徳島科学史雑誌　第 27 号 (2008.1) 11-16

四元数の発見へ

Discovery of Quaternion

矢野　忠[5]
Tadashi Yano[6]

2.1 はじめに

エッセイ「四元数に近づく」 [1] で Cauchy-Lagrange の恒等式から四元数へと私が導かれたいきさつを述べたが，すでに「四元数の発見」というエッセイに書いている [2]．そこでは, Hamilton が 四つの元 $1, i, j, k$ の間の代数系を導いた推論の道筋を辿った．このエッセイにもとづいて再度四元数へと導かれた Hamilton の推論 [3] を述べてみよう．少しでも Hamilton の創造の秘密が伝わればと願っている．

2.2 数のもつべき性質

Hamilton の推論に入る前に, ちょっと寄り道のようだが, Crowe [4] にしたがって Hamilton が 1843 年に“ 三元数 ”がもつべきだと考えていた性質の概略を述べておこう．

1. 加法と乗法に対して結合則が成り立つ．すなわち, a, b, c を“ 三元数 ”として
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c$$
2. 加法と乗法に対して交換則が成り立つ．すなわち,
$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$
3. 分配則が成り立つ．すなわち,
$$a(b + c) = ab + ac$$
4. 除法がはっきり決まる．すなわち, a と b とが与えられたときに $ax = b$ となるような x が一つ, かつ唯一つ決まる．しかも, もちろんこの x は a, b と同じ種類の数であり, 数学的な表現をすれば除法に関しても閉じている．
5. 新しい数は絶対値の法則にしたがう．すなわち,
$$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = A + Bi + Cj$$
であれば,
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = A^2 + B^2 + C^2 \tag{2.1}$$
が成り立つ．

[5]yanotad@earth.ocn.ne.jp
[6]Professor Emeritus, Ehime University

6. “ 三元数 ”は 3 次元空間と関係づけられる．これは複素数が平面と関係づけられたのと同様に“ 三元数 ”は 3 次元空間と関係づけられると予想した．

以上のような性質をもつ数としての“ 三元数 ”が可能かどうかを Hamilton は探そうとした．

2.3 第 3 の元の導入

複素数は 2 つの元 1 と i から成り立っている．元 i は -1 の平方根 $\sqrt{-1}$ を表している．すなわち, $i \equiv \sqrt{-1}$ である．この i は図 1 のように線分 $\overline{01}$ （これを以後単に元 1 とよぶ）を原点 O を中心にして $\pi/2 = 90°$ だけ回転すれば得られる．すなわち, この i は実軸上の元 1 に垂直である[7]．さらに i を $\pi/2 = 90°$ だけ回転すれば -1 が得られる．

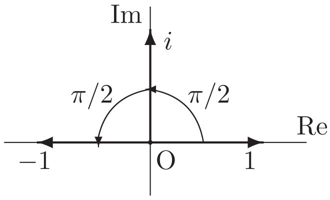

図 2.1: i と $i^2 = -1$ の図形表示

Hamilton はこの i 以外に 1 および i に対して垂直な第 3 の元があることに気がついた．これを j と表す．この j は図 2 のように表される．$i^2 = -1$ であるように図 2 から $j^2 = -1$ であることがわかる．したがって, $j = \sqrt{-1}$ である．また, $j \neq i$ であることもわかる．

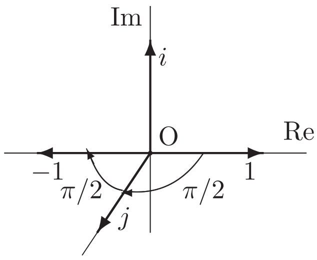

図 2.2: j と $j^2 = -1$ の図形表示

このように i とは異なる j という第 3 の元があることが予想されたから, Hamilton は 3 つの元 $1, i, j$ をもつ数を“ 三元数 ”とよんだ．

2.4 四元数の発見

結論を言ってしまうと“ 三元数 ”は存在しないことがわかったのだが, Hamilton の四元数の発見は“ 三元数 ”を探求した結果だから, Hamilton の“ 三元数 ”についての推論をたどってみよう．

3 つの元 $1, i, j$ をもつ“ 三元数 ” $a + bi + cj$ と $x + yi + zj$ を考え, これらの積がどういう法則にしたがっているかを調べる．そのために“ 三元数 ” $a + bi + cj$ と $x + yi + zj$ の積をつくってみよう．

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

[7]元 1 は始点 0 で終点 1 のベクトルと考えることもできる．同様に元 i は始点 0 で終点 i のベクトルと考えることもできる．以下同様である．

となる[8]．しかし, ここで積 ij はどうしたらいいのだろうか．一般に

$$ij = X + Yi + Zj$$

で表されるのだろうか[9]．

ところで $(ij)^2 = 1$ となるように思われる．なぜなら,

$$(ij)^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1$$

であるから．もしそうであるなら $ij = 1$ または $ij = -1$ となるであろう．

さて Hamilton は数が合理的な数であるための一つの条件（指導原理） [4] を考える．

いま, 実数 a, b を考え, この積を c としよう．すなわち $ab = c$ である．この数の絶対値をとれば

$$|c| = |a||b| \tag{2.2}$$

が得られる．これは実数 a, b, c が負数であっても正数であっても確かに成立する．さらに a, b, c が複素数であってもこの関係は成立する．

複素数の場合に (2.2) が成り立つことを確かめておこう．いま

$$\begin{aligned} a &= \alpha + i\beta \\ b &= \gamma + i\delta \\ c &= \epsilon + i\mu \end{aligned}$$

としよう．この場合

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) \end{aligned}$$

が

$$c = \epsilon + i\mu$$

に等しいから

$$\begin{aligned} \epsilon &= \alpha\gamma - \beta\delta \\ \mu &= \alpha\delta + \beta\gamma \end{aligned}$$

が成り立つ．

それでは $|c| = |a||b|$ は本当に成り立っているであろうか．

$$|c|^2 = \epsilon^2 + \mu^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$$

であり, 一方

$$|a|^2|b|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

である．そこで $(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$ を計算すれば,

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

が成り立つから, この式の正の平方根をとれば

$$|c| = |a||b| \tag{2.2}$$

[8]この積では $ij = ji$ を仮定している．以下 i と j の積の順序が問題となるところまで同じ仮定をしている．

[9]ij が三元 $1, i, j$ で張られると考えれば, このように表される．3 次元空間のベクトル $\mathbf{A}$ がすべて一次独立な基底ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の一次結合で $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$ と表されるのと同じ考えである．

が成り立っている．

いま, この式の正の平方根をとる前の式

$$|c|^2 = |a|^2|b|^2 \tag{2.3}$$

が成立することを一般的な数が合理的に成立する条件（「絶対値の条件」とよぶ）としよう[10].

これから 2 つの“ 三元数 ” $a+bi+cj$ と $x+yi+zj$ の積が絶対値の条件を満たしているかどうかを調べよう[11]．一挙にこの一般の場合を調べるのではなく，順を追って一般化して行こう．

一番簡単な場合として,“ 三元数 ” $a+bi+cj$ の 2 乗を考えよう．これは

$$(a+bi+cj)^2 = (a^2-b^2-c^2)+2abi+2acj+2bcij$$

となるであろう．ここで, 上の条件を考えると

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 \tag{2.4}$$

が成り立つが, これは積 ij の前の係数 $2bc$ を無視したときに成り立つ式である．そこで, 積 ij をどう取り扱ったらいいのか.

上で見たように積 ij のかかった項が余分というか邪魔である．それではひょっとして $ij=0$ が成立しているのではなかろうか．しかし, この予想は奇妙で居心地がわるいと Hamilton は感じた.

そこで，Hamilton はこんなことを思いついた． $ij=0$ と考えなくても $ji=-ij$ が成立すれば余分な項は 0 となるのではないか．確かに最後の項 $2bcij$ は $ji=-ij$ であることを考慮すれば, $bcij+bcji=(bc-bc)ij=0$ と変更され, ij の項は現れない．これが (2.4) が成り立った理由であろう.

それで $ij=k, ji=-k$ と仮定して k の前の係数が 0 となるかどうかを調べてみよう.

そのために“ 三元数 ”そのものの 2 乗ではなく, 少しだけ一般化したつぎの場合を考えよう． 2 つの“ 三元数 ” $a+bi+cj$ と $x+bi+cj$ の積を考えれば

$$\begin{aligned}(a+bi+cj)(x+bi+cj) &= (ax-b^2-c^2)+b(a+x)i+c(a+x)j+(bc-bc)k \\ &= (ax-b^2-c^2)+b(a+x)i+c(a+x)j\end{aligned}$$

となって, k の前の係数は $bc-bc=0$ となる．ここで

$$(ax-b^2-c^2)^2+[b(a+x)]^2+[c(a+x)]^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+b^2+c^2)$$

は確かに成立する．したがって, 絶対値の条件 (2.3) は成り立っている.

この結果から $ji=-ij$ であれば都合がいいことは確かめられたが, k の値についてはまだわからない.

さらに一般的な 2 つの“ 三元数 ” $a+bi+cj$ と $x+yi+zj$ の積は

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) = (ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz-cy)k$$

となる．ここで, $ji=-ij=-k$ となることを用いた.

ではこのとき k の前の係数 $bz-cy$ を除いて絶対値の条件 (2.3)

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2.5}$$

は成立するのだろうか．残念ながら答えは no である．すなわち, (2.5) の左辺は右辺と比べて $(bz-cy)^2$ だけ小さい．そしてこの $bz-cy$ は k の前の係数である.

すなわち,

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2.6}$$

が成り立っている.

[10] これは“ 三元数 ”に対しては (2.1), 具体的には後出の (2.5) である．実は (2.5) は成立しない.

[11] 以下では (2.5) が成立するかどうかを特別な場合から少しづつ一般化して考えている.

このことから Hamilton はどうしても第４番目の元 k があることを認めなければならなかった．すなわち，一般の“ 三元数 ”の積を考えれば“ 三元数 ”の中にはなかった第４番目の元 k が必然的に出て来るのだから，“ 三元数 ”の積は“ 三元数 ”としては表せない（数学的にいえば閉じていない）．したがって，“ 三元数 ”を“ 三元数 ”の範囲で合理的に定義することはできない[12].

この第４番目の元 k はもちろん i でも j でもない別の元である．それで４つの元をもった数 $a+bi+cj+dk$ が導入されなければならない．これを四元数という．

一般の四元数 $a+bi+cj+dk$ および $x+yi+zj+wk$ の積が絶対値の条件 (2.3) を満たすことの証明は 6 節に譲るが, いま出てきた特殊な場合（四元数が退化した場合）に絶対値の条件を満たすことを示しておこう．

積の各因子 $a+bi+cj$ と $x+yi+zj$ には四番目の元 k は現れないが, それは見かけであって実際はどちらも四元数である．すなわち, この場合は四元数 $a+bi+cj+dk$ および $x+yi+zj+wk$ で $d=0,\ \ w=0$ という特殊な（退化した）場合である．この結果として２数の積には $ij=k$ の元を含む項が現れる．したがって絶対値の条件 (2.3)

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2+0^2)(x^2+y^2+z^2+0^2)$$

が成り立つ．これは (2.6) であった．

このことから Hamilton は“ 三元数 ”は存在しないことを認識し, 四元数を発見したのであった．

2.5 四元数の代数系

前節の最後で四元数 $a+bi+cj+dk$ を導入したが, 2 つの四元数の積を考えれば 3 つの元 i,j,k の間の積

$$ij,\ \ ji,\ \ jk,\ \ kj,\ \ ki,\ \ ik$$

が現れる．そのうちの 2 つ ij と ji とはすでに

$$ij=k,\ \ ji=-k$$

とおいた．しかし, まだ jk,kj,ki,ik の 4 つの積が残っている．それらについて順々に考えていこう．

まず $k=ij$ であることから $ik=iij=i^2j=-j$ となる．同様に $kj=ijj=ij^2=-i$ であることがわかる．このことから Hamilton は

$$ki=j,\ \ jk=i$$

であろうと推察した．なぜなら, $ji=-ij=-k$ であるから,

$$ki=-jii=-ji^2=j,\ \ jk=-jji=-j^2i=i$$

が成り立つからである．

最後に残るのは k^2 の値であるが,

$$k^2=(ij)^2=ijij=-ijji=-ij^2i=i^2=-1$$

であるから, $k^2=-1$ となる．これですべての四元数の元の積がわかった．

まとめるとそれらは

$$i^2=j^2=k^2=-1 \tag{2.7}$$
$$ij=-ji=k \tag{2.8}$$
$$jk=-kj=i \tag{2.9}$$
$$ki=-ik=j \tag{2.10}$$

[12] この論理はちょっと難しいかもしれない．たとえを挙げると, 整数だけを考えてその割り算をすると有理数（分数）となり, その商はもう整数とは限らない．したがって, 整数だけの世界では加法, 乗法は整数の範囲で閉じているが, 整数の除法は整数には閉じていない．すなわち整数同士の割り算の答えはもはや整数とは限らない．

である．いうまでもないが, 1 と他の 3 つの元 i, j, k とはすべて交換可能であって

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i \tag{2.11}$$

$$1 \cdot j = j \cdot 1 = j \tag{2.12}$$

$$1 \cdot k = k \cdot 1 = k \tag{2.13}$$

である．これを乗積表にまとめれば表 1 となる．ただし, ここでは表 1 の左側の元 $1, i, j, k$ が積の左側の因子

表 2.1: 乗積表

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

となるようにとっている．すなわち, 左側の元に表の上に書かれた元をかけたものがその交差した箇所に書かれている．たとえば左側の 2 番目の i に上の 3 番目の j をかけたもの $ij = k$ という風に読む.

2.6　絶対値の条件

以上で四元数を定義し, その元のしたがう積の法則（四元数の代数系）を求めた.

さて, Hamilton が新しい数を求めるための指導原理 (guiding principle) とした絶対値の条件 (2.3) は四元数に対して成り立っているだろうか．もし, それが成立しないなら, せっかく四元数を導入したのに四元数は合理的には存在できない．このことを確かめよう.

２つの四元数を $a + bi + cj + dk$ と $x + yi + zk + wk$ とし, これらの積を $A + Bi + Cj + Dk$ としよう．２つの四元数の積をとれば,

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk)(x + yi + zk + wk) &= (ax - by - cz - dw) + (ay + bx + cw - dz)i \\ &\quad + (az + cx + dy - bw)j + (aw + dx + bz - cy)k\end{aligned} \tag{2.14}$$

であるから

$$A = ax - by - cz - dw \tag{2.15}$$

$$B = bx + ay - dz + cw \tag{2.16}$$

$$C = cx + dy + az - bw \tag{2.17}$$

$$D = dx - cy + bz + aw \tag{2.18}$$

とおく.

このとき絶対値の条件 (2.3)

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + x^2 + w^2) \tag{2.19}$$

が成り立つだろうか.

上の (2.15)-(2.18) に与えられた A, B, C, D のそれぞれの 2 乗を計算すれば,

$$\begin{aligned}A^2 &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2w^2 - 2abxy - 2acxz - 2adxw + 2bcyz + 2bdyw + 2cdzw \\ B^2 &= b^2x^2 + a^2y^2 + d^2z^2 + c^2w^2 + 2abxy - 2bdxz + 2bcxw - 2adyz + 2acyw - 2cdzw \\ C^2 &= c^2x^2 + d^2y^2 + a^2z^2 + b^2w^2 + 2cdxy + 2acxz - 2bcxw + 2adyz - 2bdyw - 2abzw \\ D^2 &= d^2x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + a^2w^2 - 2cdxy + 2bdxz + 2adxw - 2bcyz - 2acyw + 2abzw\end{aligned}$$

となるが, この計算の各行の右辺の各項を縦に加えれば xy, xz, xw, yz, yw, zw 等のいわゆる交差項 (cross terms) の係数は打ち消しあって 0 となり, また x^2, y^2, z^2, w^2 の前の係数はすべて $a^2+b^2+c^2+d^2$ となることがわかるので (2.19) が成り立ち, 絶対値の条件 (2.3) は確かに満たされる.

2.7 四元数の除法

四元数 $a+bi+cj+dk$ に四元数 $x+yi+zj+wk$ をかけると四元数 $A+Bi+Cj+Dk$ になるとき四元数 $x+yi+zj+wk$ を一義的に求められれば除法ができることになる. それには (2.15)-(2.18) が x, y, z, w で解ければよい. $a=0, b=0, c=0, d=0$ でなければ, (2.15)-(2.18) は逆に解くことができて

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\Delta}(aA+bB+cC+dD) \\
y &= \frac{1}{\Delta}(-bA+aB+dC-cD) \\
z &= \frac{1}{\Delta}(-cA-dB+aC+bD) \\
w &= \frac{1}{\Delta}(-dA+cB-bC+aD) \\
\Delta &= a^2+b^2+c^2+d^2
\end{aligned}
$$

となる. したがって, 除法はまったく問題がない[13].

2.8 四元数の数の性質

2.2 節で数のもつべき 6 つの性質について述べたが, それらが四元数ではどうなったか見ておこう.

1. 加法と乗法について結合法則は成立している.
2. 加法については交換則は成り立つが, 乗法については交換則は成立しない.
3. 分配則は成り立つ.
4. 除法は 0 による割り算を除いてはっきりと定義できる.
5. 絶対値の条件は成り立つ.
6. “ 三元数 ”は存在しなかったので, “ 三元数 ”を 3 次元空間と関係づけることはできなかった. しかし, 四元数の虚数部分 $bi+cj+dk$ は 3 次元空間と関係づけることができる. すなわち, 四元数の虚数部分は 3 次元ベクトルとも考えることができる.

   いま 2 つの純虚数 $ai+bj+ck$ と $xi+yj+zk$ との積を考えれば

   $$(ai+bj+ck)(xi+yj+zk) = -(ax+by+cz)+(bz-cy)i+(cx-az)j+(ay-bx)k$$

   となるが, この式の実部はベクトルのスカラー積に負号をつけたものであり, 虚部はベクトルのベクトル積と同じである.

[13] (2.15)-(2.18) の解法はいろいろ考えられる. 連立方程式を中学生のように加減法で解いてもよいし, 大学生風に Cramer の公式を用いてもよい. また (2.14) の両辺に左から四元数 $a+bi+cj+dk$ の逆数をかけてもよい.

2.9　おわりに

筆者が四元数に関心をもった動機は 4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の証明 [1] にあった．そして, やっと Hamilton が「どのようにして四元数を考えついたか」について述べることができた．

ベクトルの出現によって四元数はその役目をベクトルに譲り, 長い間半ば忘れられてきたが, 最近になって物体の回転等の記述が四元数で簡単にできることからリバイバルしている．四元数の物体の回転への応用についてはまた別の機会に譲りたい．

(2011. 10. 30)

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数に近づく，数学・物理通信　第 9 号 (2011.9) 18-23

[2] 矢野　忠，四元数の発見, 研究と実践（愛数協）第 101 号 (2009.9) 24-31

[3] W. R. Hamilton, Phil. Mag. 3rd series 25 (1844) 489-495

[4] M. J. Crowe, “ A History of Vector Analysis ”(Dover, 1994), 28

編集後記

10 号とあわせて 11 号を発行するつもりであったが，また都合で遅れてしまった．10 号の編集後記は共同編集者の新関章三氏にお願いをした．これからは原則として 1 号ごとに交替で編集後記を書くことにする．いままで，矢野ばかりが編集後記を書いてきたので，新関氏は幻の編集者と思われた方もあったかも知れないが，10 号ではじめての登場となった．

この 11 号をもって第 1 巻を閉じて，来年 3 月発行予定の次号から第 2 巻をはじめる．第 1 巻が 11 号で終わるという変な号数になってしまったが，読者の方々にご寛容をお願いしたい．

年の暮れが近づいてきた．皆様にはつつがなく新年を迎えられることをお祈りします.（矢野 忠）