数学·物理通信

1巻2号　　2010年3月

編集　新関章三·矢野　忠

2010 年 4 月 8 日

目 次

一つの円に内接・外接する円群に関する面白い定理

中 西　襄　(京都大学名誉教授)

1.1　円群に関する定理

初等数学での定理で，ずっと以前に偶然見つけたものであるが[1]，ちょっと面白いと思うので紹介させていただく．高校生にも分かる話である．

以下において，添え字 $n+1$ はつねに添え字 1 と同一視するものとする．

定理　円 O に点 A_j $(j=1,2,\cdots,n;\ n \geqq 3$ [2]$)$ において内接する円 O_j があり，円 O_j と円 O_{j+1} は互いに外接しているとする．さらに，点 A_j において円 O に外接する円 O'_j を，$j=1,2,\cdots,n-1$ に対し円 O'_j と円 O'_{j+1} が互いに接するように描く．**もし n が偶数ならば，**このとき必ず円 O'_n と円 O'_1 は互いに接する．

この定理の面白いところは,「n が偶数ならば」というところである．直感的には n が偶数でも奇数でも同じようにみえるが，奇数のときには成立するとはいえないのである．もちろん, n が奇数のときも円 O'_n と円 O'_1 が互いに接するようにすることはつねに可能である．円 O'_j をすべて円 O に関する円 O_j の反転とすればよい (付録 1 参照)．接点は反転で接点に写るから OK である．

しかし，定理での O'_j の構成は，もちろん反転に限定しない．O'_1 を描くとき，その半径 r'_1 は任意である．いったん O'_1 を決めると，$O'_2,\cdots,O'_n$ は一意的に決まる．ただし，それらが必ず存在するというためには,「互いに外接」ではない接し方の場合をも容認しなくてはならない (付録 2 参照)．そこで問題は O'_n と O'_1 が接するかどうかであるが，もし n が偶数だったら，はじめに r'_1 をどう選んでもつねにぴったり接するというのである．n が奇数だったら，必ずしもそうはならない．3 節に $n=3$ の場合の反例を与える．

1.2　定理の証明

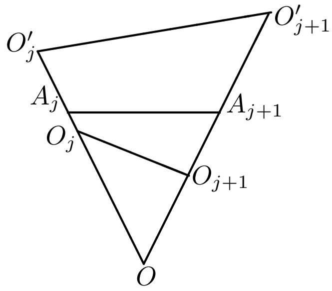
この定理の証明は，幾何学の問題というより代数学的な問題とみなした方が適当である．実際，この定理を初等幾何学または解析幾何学を用いて証明するのは，ほとんど絶望的であろう．幾何学の言葉である「2 つの円が接する」という命題は,「両円の中心の距離が両円の半径の差（内接の場合）または和（外接の場合）に等しい」という命題に置き換えられる．使う道具は余弦定理のみである．念のため，余弦定理を復習しておこう．$\triangle ABC$ において，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=a,\ \angle CAB=\theta$ と書くと，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

が成立する．

円 O の半径を r，円 O_j の半径を r_j，円 O'_j の半径を r'_j とする．

[1]既知のものかどうかは知らない．
[2]$n=2$ のときはトリヴィアル．



$\overline{OO_j} = r - r_j$
$\overline{OA_j} = r$
$\overline{OO'_j} = r + r'_j$
$\overline{O_jO_{j+1}} = r_j + r_{j+1}$
$\overline{A_jA_{j+1}} = s_j$
$\overline{O'_jO'_{j+1}} = r'_j + r'_{j+1}$
$\angle O_jOO_{j+1} = \theta_j$

$\angle O_jOO_{j+1} = \theta_j$ と書くと，$\triangle O_jOO_{j+1}$ に対する余弦定理から，

$$\cos\theta_j = \frac{(r-r_j)^2 + (r-r_{j+1})^2 - (r_j + r_{j+1})^2}{2(r-r_j)(r-r_{j+1})}$$

となる．ただし，3 つの円 O, O_j, O_{j+1} が互いに接するという条件を用いた．$\angle A_jOA_{j+1} \equiv \angle O_jOO_{j+1} = \theta_j$ なので，$\overline{A_jA_{j+1}} = s_j$ と書けば，$\triangle A_jOA_{j+1}$ に対する余弦定理から，

$$s_j^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta_j$$

である．$\cos\theta_j$ の式を代入して，この右辺を計算すると，

$$s_j^2 = \frac{4r^2 r_j r_{j+1}}{(r-r_j)(r-r_{j+1})}$$

を得る．ゆえに

$$F(x) \equiv \frac{2rx}{r-x}$$

と置けば，これは

$$s_j^2 = F(r_j)F(r_{j+1})$$

と書ける．従って，**もし n が偶数ならば，**

$$s_1^2 s_3^2 s_5^2 \cdots s_{n-1}^2 = \prod_{j=1}^{n} F(r_j) = s_2^2 s_4^2 s_6^2 \cdots s_n^2$$

という等式が成立することが分かる．

外接円についても，同様な考察から (r_j を $-r'_j$ に置き換えて)，ただし今度は $j \neq n$ に対して，

$$s_j^2 = \frac{4r^2 r'_j r'_{j+1}}{(r+r'_j)(r+r'_{j+1})} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

を得る．従って，

$$s_n^2 = \frac{s_1^2 s_3^2 s_5^2 \cdots s_{n-1}^2}{s_2^2 s_4^2 s_6^2 \cdots s_{n-2}^2} = \frac{4r^2 r'_n r'_1}{(r+r'_n)(r+r'_1)}$$

でなければならない．それゆえ，$\triangle A_nOA_1$ について，上に行った計算と逆方向の計算を行うことにより，

$$\cos\theta_n = \frac{(r+r'_n)^2 + (r+r'_1)^2 - (r'_n + r'_1)^2}{2(r+r'_n)(r+r'_1)}$$

と書けることがわかる．他方，$\overline{O'_nO'_1} = t$ と書けば，円 O'_n と円 O'_1 が円 O に外接するという条件と，$\triangle O'_nOO'_1$ に対する余弦定理から，

$$\cos\theta_n = \frac{(r+r'_n)^2 + (r+r'_1)^2 - t^2}{2(r+r'_n)(r+r'_1)}$$

を得る．ゆえに，両者を比較して

$$t^2 = (r'_n + r'_1)^2$$

でなければならないことが分かる．すなわち，円 O'_n と円 O'_1 は接する．□

1.3　$n = 3$ の場合の反例

定理は n が奇数の場合は成立しない．しかしその反例を実際に構成するのはかなり面倒である．以下では $n = 3$ の場合の反例を具体的に構成する．利用するのは，三辺の比が $3:4:5$ ならば直角三角形になるという事実である．

円 O（半径 r）の中心を原点とする直交座標系を考える．3 つの円 O_1, O_2, O_3 の中心の座標をそれぞれ $O_1 = (0, \frac{1}{2}r)$, $O_2 = (\frac{2}{3}r, 0)$, $O_3 = (0, -\frac{1}{2}r)$ にとる．これらの円の半径をそれぞれ $r_1 = \frac{1}{2}r$, $r_2 = \frac{1}{3}r$, $r_3 = \frac{1}{2}r$ とすれば，各円はそれぞれ $A_1 = (0, r)$, $A_2 = (r, 0)$, $A_3 = (0, -r)$ において円 O と内接する．また $\overline{O_1O_2} = \sqrt{(\frac{1}{2}r)^2 + (\frac{2}{3}r)^2} = \frac{5}{6}r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{3}r$ であるから，円 O_1 と O_2 とは外接する．同じく円 O_2 と O_3 も外接する．円 O_3 と O_1 が原点で外接することは自明である．

3 つの円 O'_1, O'_2, O'_3 の構成も同様に行う．中心の座標はそれぞれ，$O'_1 = (0, 4r)$, $O'_2 = (3r, 0)$, $O'_3 = (0, -4r)$, 半径はそれぞれ $r'_1 = 3r$, $r'_2 = 2r$, $r'_3 = 3r$ にとれば，これらはそれぞれ A_1, A_2, A_3 において円 O に外接する．また，$\overline{O'_1O'_2} = \sqrt{(4r)^2 + (3r)^2} = 5r = 3r + 2r$ であるから，円 O'_1 と O'_2 とは外接する．同様に，円 O'_2 と O'_3 も外接する．しかしながら，$\overline{O'_3O'_1} = 8r > 3r + 3r$ であるから，**円 O'_3 と O'_1 とは接していない．**

n がより大きい奇数の場合にも反例が作れるだろうが，実行はしていない．

1.4　調和円点

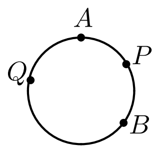
私がこんなことを考えたきっかけは，私が高校 2 年生のとき[3],「調和円点」なるものを考察したことに起因する．数学の公式集を見ると，調和列点なるものの記述があった．直線上に 4 点 A, P, B, Q があり，P と Q が線分 $\overline{AB}$ を同じ比でそれぞれ内分及び外分するとき，すなわち

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AQ} : \overline{BQ}$$

のとき，あるいは同じことだが,

$$\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{QA} \cdot \overline{BP}$$

のとき，これを調和列点という．そこで私は，これを 4 点が同一直線上の代わりに同一円周上にある場合に拡張して,「調和円点」と呼ぶことにした．



直線は円 O に関して反転すれば，中心点 O を通る円に写されるので，調和列点の性質を調和円点の性質に焼きなおすことはできる．しかし，調和円点に関する結果をすべて調和列点のそれに書き直すことはできない．その当時自分で見つけた調和円点の性質のうちのいくつかを挙げておこう．

[3] 1949 年 11 月.

命題 1　複素平面上の 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が調和円点をなすための必要十分条件は,

$$\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\beta-\gamma)(\delta-\alpha)}=-1$$

である.

命題 2　円 O の外にある点 R から円 O に 2 本の接線を引き，接点を P, Q とする．また R から O に任意に割線を引き，2 交点を A, B とする．このとき，4 点 A, P, B, Q は調和円点をなす.

命題 3　円 O 上の 4 点 A, P, B, Q が調和円点をなしているとする．円 O の内部に任意に 1 点 M をとり，直線 AM, PM, BM, QM と円 O とのもう一方の交点をそれぞれ A', P', B', Q' とすれば，4 点 A', P', B', Q' は調和円点をなす.

命題 4　円 O に内接する 4 つの円 O_1, O_2, O_3, O_4 があり，O_j と O_{j+1}（ただし $O_5 \equiv O_1$ とする）は互いに外接しているとする．このとき O 上の 4 つの接点は調和円点をなす．4 つの円が O に外接する場合も同様である.

命題 4 は，円 O 上の接点を $A_1(\equiv A_5), A_2, A_3, A_4$ とし，$\overline{A_jA_{j+1}}=s_j$ と書けば，内接の場合も外接の場合も同じ調和円点の条件 $s_1s_3=s_2s_4$ を与えるわけである．ずっと後になって[4]，この証明を 4 点から n 個の点に拡張したのが，この論説で述べた定理である.

1.5　一般化調和円点

以上のような状況をふまえて，調和円点の概念を一般の偶数 $n=2m$ の場合に拡張することを考えてみた[5].

定義　$m \geqq 2$ に対し，円に内接する $2m$ 角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_{2m}$ とする．辺 $\overline{A_jA_{j+1}}=s_j$（$A_{2m+1}\equiv A_1$）に対し

$$s_1s_3\cdots s_{2m-1}=s_2s_4\cdots s_{2m}$$

が成立するとき，$2m$ 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2m}$ は「一般化調和円点」をなすということにする.

そうすると，前節に述べた命題はすべて一般化調和円点に拡張される.

命題 $1'$　複素平面上の $2m$ 個の点 $z_1, z_2, \cdots, z_{2m}$ が一般化調和円点をなすならば,

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)\cdots(z_{2m-1}-z_{2m})}{(z_2-z_3)(z_4-z_5)\cdots(z_{2m}-z_1)}=-1$$

である.

[証明]　上の式の絶対値は一般化調和円点の条件式そのものであるから，偏角に関する式

$$\arg\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)\cdots(z_{2m-1}-z_{2m})}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)\cdots(z_{2m}-z_1)}\equiv\pi \pmod{2\pi}$$

[4] 1985 年 7 月.
[5] 2010 年 1 月.

が，$2m$ 個の点が同一円周上にあるという条件から導かれることをいえばよい．$m=2$ の場合は，向かい合う内角の和が π だから，明らかにこれは成立している．そこで一般の m については，m に関する数学的帰納法を用いる．

円に内接する $2m$ 角形 $[z_1, z_2, \cdots, z_{2m}]$ において，z_{2m-2} と z_1 を結ぶ対角線を導入して，$2m-2$ 角形 $[z_1, z_2, \cdots, z_{2m-2}]$ と 4 角形 $[z_{2m-2}, z_{2m-1}, z_{2m}, z_1]$ に分ける．帰納法の仮定を用いると，

$$\begin{aligned}
\arg & \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)\cdots(z_{2m-1}-z_{2m})}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)\cdots(z_{2m}-z_1)} \\
&\equiv \arg\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)\cdots(z_{2m-3}-z_{2m-2})}{(z_2-z_3)(z_4-z_5)\cdots(z_{2m-2}-z_1)} \\
&\quad -\arg\frac{(z_{2m-2}-z_{2m-1})(z_{2m}-z_1)}{(z_{2m-1}-z_{2m})(z_1-z_{2m-2})}+\arg(-1) \\
&\equiv \pi-\pi+\pi \\
&\equiv \pi \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

となる．□

残念ながら，逆はいえない．m の値に関係なくただ 1 個の条件式を仮定するだけでは，仮定が弱すぎて $2m$ 個（$m>2$）の点が同一円周上にあるというような強い結果は導けないのである．

命題 $2'$　円 O の外にある点 R から円 O に 2 接線と $m-1$ 本の割線を引くと，2 接点と $2m-2$ 交点は円周上の順序に従って一般化調和円点をなす．

[証明]　$\overline{A_jA_{j+1}}=s_j$, $\overline{A_jR}=t_j$ と書く．2 接点を A_{2m}, A_m とする．接点 A_{2m} を頂点とする 2 つの三角形 $\triangle A_1RA_{2m}$ と $\triangle A_{2m}RA_{2m-1}$ は相似であるから，

$$\frac{s_{2m}}{s_{2m-1}}=\frac{t_{2m}}{t_{2m-1}}=\frac{t_1}{t_{2m}}$$

が成立する．従って，

$$\left(\frac{s_{2m}}{s_{2m-1}}\right)^2=\frac{t_{2m}}{t_{2m-1}}\cdot\frac{t_1}{t_{2m}}=\frac{t_1}{t_{2m-1}}$$

である．同様に，もう一方の接点 A_m について

$$\left(\frac{s_{m-1}}{s_m}\right)^2=\frac{t_{m-1}}{t_{m+1}}$$

を得る．$j=1,2,\cdots,m-2$ については，$\triangle A_jRA_{j+1}$ と $\triangle A_{2m-j-1}RA_{2m-j}$ の相似から，

$$\left(\frac{s_j}{s_{2m-j-1}}\right)^2=\frac{t_j}{t_{2m-j-1}}\cdot\frac{t_{j+1}}{t_{2m-j}}$$

である．これらの式を番号順に**交互に逆数をとって**掛け合わせていけば，

$$\left(\frac{s_1s_3\cdots s_{2m-1}}{s_2s_4\cdots s_{2m}}\right)^2=\frac{t_1}{t_{2m-1}}\cdot\frac{t_{2m-1}t_{2m-2}}{t_1t_2}\cdot\frac{t_2t_3}{t_{2m-2}t_{2m-3}}\cdots\left(\frac{t_{m-1}}{t_{m+1}}\right)^{(-1)^{m-1}}=1$$

を得る．□

命題 $3'$　$2m$ 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2m}$ を，円 O 上の一般化調和円点とする．円 O 上にない 1 点 M をとり，直線 A_jM と円 O との他の交点を A'_j とすれば，$A'_1, A'_2, \cdots, A'_{2m}$ は一般化調和円点をなす．

[証明]　$\overline{A_jA_{j+1}} = s_j$, $\overline{A'_jA'_{j+1}} = s'_j$, $\overline{A_jM} = u_j$, $\overline{A'_jM} = u'_j$ と書く．$\triangle A_jMA_{j+1}$ と $\triangle A'_{j+1}MA'_j$ の相似から,

$$\left(\frac{s_j}{s'_j}\right)^2 = \frac{u_j}{u'_{j+1}} \cdot \frac{u_{j+1}}{u'_j}$$

である．従って,

$$\left(\frac{s_1}{s'_1}\right)^2\left(\frac{s_3}{s'_3}\right)^2 \cdots \left(\frac{s_{2m-1}}{s'_{2m-1}}\right)^2 = \frac{\prod_{j=1}^{2m} u_j}{\prod_{j=1}^{2m} u'_j} = \left(\frac{s_2}{s'_2}\right)^2\left(\frac{s_4}{s'_4}\right)^2 \cdots \left(\frac{s_{2m}}{s'_{2m}}\right)^2$$

を得る．ゆえに,

$$\left(\frac{s'_1s'_3\cdots s'_{2m-1}}{s'_2s'_4\cdots s'_{2m}}\right)^2 = \left(\frac{s_1s_3\cdots s_{2m-1}}{s_2s_4\cdots s_{2m}}\right)^2 = 1$$

である．□

命題 $4'$　円 O に内接する偶数個の円 $O_1, O_2, \cdots, O_{2m}$ があり，O_j と O_{j+1}（ただし $O_{2m+1} \equiv O_1$ とする）は互いに外接しているとする．このとき O 上の $2m$ 個の接点は一般化調和円点をなす．$2m$ 個の円が O に外接する場合も同様である．

[証明]　2 節参照.

付録 1　反転

2 点 P, P' が円 O に関して互いに他の反転であるとは，3 点 O, P, P' が同一直線上にあり，かつ $\overline{OP}$ と $\overline{OP'}$ の幾何平均が円 O の半径に等しいことである．定理に述べた状況設定で，すべての円 O'_j を円 O に関する円 O_j の反転で定義するものとしよう．直線 OA_j と円 O_j とのもう一方の交点を B_j，そして円 O'_j とのもう一方の交点を B'_j とすると，反転の定義により $\overline{OB_j} \cdot \overline{OB'_j} = \overline{OA_j}^2$，すなわち $(r - 2r_j)(r + 2r'_j) = r^2$ である．これから O'_j の半径は

$$r'_j = \frac{rr_j}{r - 2r_j}$$

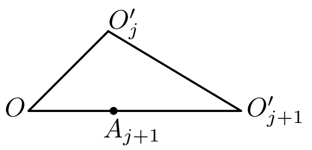
と決まる．3 節の例で反転すれば，$r'_1 = \infty, r'_2 = r, r'_3 = \infty$ となる．

付録 2　2 つの円に外接する円

補題　円 O 上の 1 点 A_{j+1} において円 O に外接し，かつ円 O に他点で外接する円 O'_j に接するような円 O'_{j+1} は，つねにただ 1 つ存在する.

ただし「円 O に外接する」とは，考えている円が円 O の外部にあって円 O と接していることであって，必ずしも円 O が考えている円に外接しているとは限らない．すなわち円 O'_j が円 O に外接するとは，両円が互いに外接する場合のほか，円 O が円 O'_j に内接する場合もあるということである．円 O, O'_j の半径をそれぞれ r, r'_j とすると，後者の場合 r'_j が負で，円 O'_j の幾何学的な意味での半径は $|r'_j|$ になる．ただし円 O'_j が円 O の外部にあるという条件から，$|r'_j| > r$ でなければならない.

[証明]　3 点 O, A_{j+1}, O'_j の位置関係は与えられている．点 O'_{j+1} は直線 OA_{j+1} 上になければならないので，次の図のような三角形ができる.



$$\overline{OO'_j} = r + r'_j$$
$$\overline{OO'_{j+1}} = r + r'_{j+1}$$
$$\overline{O'_jO'_{j+1}} = r'_j + r'_{j+1}$$

円 O'_{j+1} の半径を r'_{j+1} とすると，$\overline{OO'_{j+1}} = r + r'_{j+1}$, $\overline{O'_jO'_{j+1}} = r'_j + r'_{j+1}$ となるはずである．従って，そのような r'_{j+1} が一意的に存在し，もしそれが負ならば $|r'_{j+1}| > r$ であることを示せばよい．

$\angle O'_jOO'_{j+1} = \theta_j$ と書くと，余弦定理から，

$$(r'_j + r'_{j+1})^2 = (r + r'_j)^2 + (r + r'_{j+1})^2 - 2(r + r'_j)(r + r'_{j+1})\cos\theta_j$$

であるが，$(r'_{j+1})^2$ の項がキャンセルするので，r'_{j+1} について一意的に解けて，

$$r'_{j+1} = r\frac{(r + r'_j)(1 - \cos\theta_j)}{r'_j - r + (r + r'_j)\cos\theta_j}$$

を得る．

$r'_j > 0$ のときは分子は正だから，分母も正ならば $r'_{j+1} > 0$ である．分母が負の場合には，分子 (の絶対値) から分母の絶対値を引いたものが正（$2r'_j > 0$）だから，この分数式の絶対値は 1 より大である．すなわち，$|r'_{j+1}| > r$ である．

$r'_j < -r$ のときは分子分母とも負となり，$r'_{j+1} > 0$ となる[6]．□

[6]従って，r'_j も r'_{j+1} も負ということは起こりえない．

広田の公式の拡張について

世戸 憲治 [7]　吉田 文夫 [8]　中西　襄 [9]

2.1　広田の公式の拡張

ソリトン方程式の有力な解法として知られている広田の方法というのがあり, 次の広田の公式が用いられる. $f(x,y)$ を 2 変数 x, y の微分可能な関数とするとき,

$$D_x D_y (f \cdot f) = 2f^2 \partial_x \partial_y \log f = 2(f \partial_x \partial_y f - \partial_x f \cdot \partial_y f) \tag{2.1}$$

が成り立つ. ここに D_x は広田微分で, (2.1) の左辺は

$$\Big[(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})(\partial_{y_1} - \partial_{y_2}) f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)\Big]_{x_1 = x_2 \equiv x,\, y_1 = y_2 \equiv y} \tag{2.2}$$

を表す. つまり, 普通の微分と違って第 2 因子を微分するときマイナス符号をつけるのである.

これを 3 変数 x, y, z の関数 $f(x,y,z)$ の場合に拡張することを考えよう. (2.1) の自然な拡張は,

$$\begin{aligned} D_x D_y D_z (f \cdot f \cdot f) &= 3f^3 \partial_x \partial_y \partial_z \log f \\ &= 3[f^2 \partial_x \partial_y \partial_z f - f(\partial_x f \cdot \partial_y \partial_z f + \text{cycl.}) + 2\partial_x f \cdot \partial_y f \cdot \partial_z f] \end{aligned} \tag{2.3}$$

であろう. ただし (2.3) の左辺は, (2.2) の -1 が 1 の平方根であることに注意し, 1 の 3 乗根 $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} i)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \Big[&(\partial_{x_1} + \omega \partial_{x_2} + \omega^2 \partial_{x_3})(\partial_{y_1} + \omega \partial_{y_2} + \omega^2 \partial_{y_3})(\partial_{z_1} + \omega \partial_{z_2} + \omega^2 \partial_{z_3}) \\ &f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2) f(x_3, y_3, z_3)\Big]_{x_1 = x_2 = x_3 \equiv x,\, \text{etc.}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

によって定義する. つまり, 第 2 因子を微分するときには ω をかけ, 第 3 因子を微分するときには ω^2 をかけるのである. 実際定義通り微分を遂行してみれば, 上の式が確かに成立していることが分かる. さらに 4 変数, 5 変数と拡張してみても, 確かに成立していることは, 面倒を厭わなければ直接計算によって確かめられる.

n 変数に拡張した公式は,

$$D_{x^{(1)}} D_{x^{(2)}} \cdots D_{x^{(n)}} (f \cdot f \cdot \ \cdots \ \cdot f) = n f^n \Big(\prod_{k=1}^{n} \partial_{x^{(k)}} \Big) \log f \tag{2.5}$$

となるであろう. ここに拡張広田微分は, 第 j 因子 ($j = 1, 2, \cdots, n$) を微分するときには ω_n^{j-1} (ただし $\omega_n \equiv e^{2\pi i/n}$) をかけることによって定義する. すなわち,

$$\begin{aligned} &D_{x^{(1)}} D_{x^{(2)}} \cdots D_{x^{(n)}} (f_1 \cdot f_2 \cdot \ \cdots \ \cdot f_n) \\ &\equiv \Big[\prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \omega_n^{j-1} \partial_{x_j^{(k)}} \Big) \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j^{(1)}, \cdots, x_j^{(n)}) \Big]_{x_j^{(k)} = x^{(k)}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.5) は実際正しい. そしてさらに一般化できる.

[7] 北海学園大学名誉教授
[8] 北海学園大学　社会環境工学科教授
[9] 京都大学名誉教授

2.2 拡張公式とその証明

微分演算子の数 n と独立変数の数 m とは, 必ずしも等しくなくてよい. 記号の簡単のため, ベクトル記号 $\boldsymbol{x} \equiv (x^{(1)}, \cdots, x^{(m)})$ を導入する. 同様に, $\boldsymbol{x}_j \equiv (x_j^{(1)}, \cdots, x_j^{(m)})$ $(j = 1, \cdots, n)$ とする. $f(\boldsymbol{x})$ を必要なだけ微分可能な任意の関数とするとき, (2.5) を拡張した公式は,

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}\prod_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{x}_j)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = n[f(\boldsymbol{x})]^n\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{n_k}\Big)\log f(\boldsymbol{x}) \tag{2.7}$$

となる. ただし, ω_n は 1 の原始 n 乗根, n_k は非負の整数で,

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = n \tag{2.8}$$

とする.

証明 証明のキーは, 関数 f から関数 $\varphi = \log f$ に変換することである[10]. この変換により, (2.7) は

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}\exp\sum_{j=1}^{n}\varphi(\boldsymbol{x}_j)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = ne^{n\varphi(\boldsymbol{x})}\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{n_k}\Big)\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{2.9}$$

となる. そしてもう一つのキーは原始 n 乗根の性質で, 任意の整数 l に対し,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{(j-1)l} &= n \qquad \text{for } \ l = 0,\ \pm n,\ \pm 2n, \cdots \\ &= 0 \qquad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{2.10}$$

となることである.

さて, (2.9) の左辺の微分を遂行していくと, 指数関数から新たに φ の 1 階導関数が出るか, もしくは φ の導関数をさらに微分するかであるから, 最終結果は, $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}$ と置いたとき, 1 階から n 階までの $\varphi(\boldsymbol{x})$ の導関数の多項式と $e^{n\varphi(\boldsymbol{x})}$ との積になる. この多項式は, n 階導関数 1 因子の項と, 2 因子またはそれ以上の導関数の積の項より成る. ここで重要なことは, (2.8) により, 各項に含まれる微分演算子の総数は必ず n であることである. 従って後者の各項の各因子が含む微分演算子の数 l は n より小さい. ゆえに, (2.10) により, それは

$$\begin{aligned}&\Big[\Big(\sum_{j_1=1}^{n}\omega_n^{j_1-1}\partial_{x_{j_1}^{(k_1)}}\Big)\cdots\Big(\sum_{j_l=1}^{n}\omega_n^{j_l-1}\partial_{x_{j_l}^{(k_l)}}\Big)\sum_{j=1}^{n}\varphi(\boldsymbol{x}_j)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} \\ &\qquad = \Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{(j-1)l}\Big)\partial_{x^{(k_1)}}\cdots\partial_{x^{(k_l)}}\varphi(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{for } \ 0 < l < n\end{aligned} \tag{2.11}$$

(ここに $k_1, \cdots, k_l$ の中に同じものがあってもよい) によってすべてゼロであることが分かる. つまり生き残るのは前者の n 階導関数の項のみである. それは, (2.10) により,

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}\sum_{j=1}^{n}\varphi(\boldsymbol{x}_j)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = n\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{n_k}\Big)\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{2.12}$$

となる. これに $e^{n\varphi(\boldsymbol{x})}$ をかけたものが, まさしく証明すべき式 (2.9) の右辺になっている. □

[10]広田微分を言葉で定義していたのではこの変換はできない. 式でもってきちんと定義することが本質的であることに注意.

2.3 さらなる拡張

N を非負整数とし, (2.7) の f を $f^{N/n}$ に置き換えると,

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}\Big(\prod_{j=1}^{n}f^{1/n}(\boldsymbol{x}_j)\Big)^{N}\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = N[f(\boldsymbol{x})]^N\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{\ n_k}\Big)\log f(\boldsymbol{x}) \tag{2.13}$$

となる. 従って, $F(X)$ を冪級数展開可能な任意の関数とするとき,

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}F\Big(\prod_{j=1}^{n}f^{1/n}(\boldsymbol{x}_j)\Big)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})F'(f(\boldsymbol{x}))\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{\ n_k}\Big)\log f(\boldsymbol{x}) \tag{2.14}$$

を得る. ここに $F'(X)\equiv dF(X)/dX$ である.

なお, $\log X$ は冪展開できないが, (2.14) において強引に $F(X)=\log X$ としてみると,

$$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_n^{j-1}\partial_{x_j^{(k)}}\Big)^{n_k}\Big(\sum_{j=1}^{n}\log f(\boldsymbol{x}_j)\Big)\Big]_{\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}} = n\Big(\prod_{k=1}^{m}\partial_{x^{(k)}}^{\ n_k}\Big)\log f(\boldsymbol{x}) \tag{2.15}$$

を得る. この式は (2.12) に他ならない.

残念ながら, 拡張公式の有用な応用はまだ見つかっていない.

Levi-Civitaの記号でベクトル解析の初歩を 1

矢野　忠[11]

3.1 はじめに

愛媛県数学教育協議会の機関誌「研究と実践」で数回にわたって Levi-Civita の記号の縮約とそのベクトル解析への応用について論じてきた [1, 2, 3, 4]．今回は新しい着想にもとづいて再挑戦をしてみよう [5]．

電磁気学を本格的に学ぶときにベクトル解析が必要になってくる．それで，大学の物理学科や電気電子工学科等では電磁気学の講義の最初の数時間をとってベクトル解析の初歩を学ぶ．その中にベクトル代数・解析のいろいろな公式が出てくるが, それらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に使えるようにしたいというのがこのエッセイのテーマである．

Levi-Civita の記号の縮約公式をどのように発見法的に導くかが少し難しかった．これは数学としては解決済みの問題 [1] ではあるが, 教育的には Levi-Civita の記号の縮約公式をどのようにやさしく導入するかが重要であり, それができれば, 一般の学生もベクトル解析の公式の厄介さと手を切ることができる．

それはともかくまずベクトル解析での面倒さの一端を示すために, ベクトル解析に出てくる公式をまず列挙しておこう．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{3.1}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})] - \boldsymbol{D}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})] \\ &= \boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})] - \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] = [\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]^2 \tag{3.5}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - (\Delta\,\boldsymbol{A}) \tag{3.6}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.7}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \tag{3.8}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \tag{3.9}$$

ベクトル解析の本を開けばもっと多くの公式があるが，もううんざりといった感がある．特に終わりの４つの (3.6)-(3.9) は電磁気学ではよく使う．これらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に導く方法を学ぶことにしよう．

[11] yanotad@earth.ocn.ne.jp

3.2 Levi-Civita の記号の導入

Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} を導入しよう．まず，3 次元の直交座標系 $Oxyz$ を考える．x, y, z 軸方向の単位基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と表す．座標系が直交しているから, それぞれの単位ベクトルのベクトル積の間には

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{3.10}$$

が成り立っている．ところでこれらの式をまとめて書くためにつぎの Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} を導入する．

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換のとき} \\ -1 & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{3.11}$$

この記号を導入すると

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{3.12}$$

と表すことができる（テンソル解析では和をとる $\sum$ の記号を省略する．そのかわりに 2 度くり返された添字について和をとる（Einstein の規約）．以下この規約に従う）．

試みに (3.12) にしたがって計算すれば, $i = 1, j = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \epsilon_{121} \boldsymbol{e}_1 + \epsilon_{122} \boldsymbol{e}_2 + \epsilon_{123} \boldsymbol{e}_3 \\ &= \epsilon_{123} \boldsymbol{e}_3 \\ &= \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．同様に $i = 2, j = 3$ のとき $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ が, $i = 3, j = 1$ のとき $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ が得られる．

ここで, Levi-Civita の記号の性質を見ておこう．(3.11) の ϵ_{ijk} で添字 ijk の ij を互いに置換して jik とすれば, $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$ と元のものに負号がつく．これは一回の置換は元の配列に対して相対的に奇置換になっているからである．また, いま配列 ijk で ij に着目したが, これは配列 ik または jk のいずれであってもその添字の交換をすれば, もとの配列のときと比べて負号がつく．すなわち, 添字のどの二つの交換についても Levi-Civita の記号では反対称になっている．例えば,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk} \tag{3.14}$$

であり, また

$$\epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} = (-1)^2 \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk} \tag{3.15}$$

である．このことから $(i,j,k) = (1,2,3)$ のとき, $\epsilon_{123} = 1$ ととれば, 偶置換のとき $+1$, 奇置換のとき -1 となる．また添字がその交換に対して反対称であることから, 例えば ϵ_{11k} は添字 11 を交換すれば, $\epsilon_{11k} = -\epsilon_{11k}$ となり, $\epsilon_{11k} = 0$ となる．したがって, Levi-Civita の記号の性質として添字の交換に対して反対称であることが本質的である．

また, 添字 $(1,2,3)$ を $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ のようにサイクリックに動かすとき, 正順といい, $(1,3,2)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ のようにサイクリックに動かすとき, 逆順という．このとき配列 $(1,2,3)$ の偶置換はすべて正順から得られ, 奇置換はすべて逆順から得られる．したがって, (i,j,k) が $(1,2,3)$ の正順ならば $\epsilon_{ijk} = 1$ であり, 逆順ならば $\epsilon_{ijk} = -1$ である．

3.3 Levi-Civita の記号の積の行列式表示

いま $\boldsymbol{e}_k$ と $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$ とのスカラー 3 重積を考えよう．すなわち,

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijp} \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_k \tag{3.16}$$

単位直交基底ベクトル $\boldsymbol{e}_p$ と $\boldsymbol{e}_k$ のスカラー積は

$$\boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{pk} \tag{3.17}$$

である．ここで，δ_{pk} は Kronecker の記号

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1 & p = k \\ 0 & p \neq k \end{cases} \tag{3.18}$$

である．この Kronecker の δ を用いれば，(3.16) は

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijp}\delta_{pk} = \epsilon_{ijk} \tag{3.19}$$

と 3 次元の Levi-Civita の記号は単位直交基底ベクトルのスカラー 3 重積で表せる．

つぎに 2 つの Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} と ϵ_{pqr} の積をつくろう．

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = [(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k][(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r] \tag{3.20}$$

ところで, $(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k$ と $(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r$ はそれぞれ行列式で

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

$$(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_p)_3 \\ (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_3 \\ (\boldsymbol{e}_r)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

と表せるから[12], (3.20) は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_p)_3 \\ (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_3 \\ (\boldsymbol{e}_r)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \tag{3.23}$$

となる．行列式はその行と列を入れ替えても値は変わらないから，2 番目の行列の行と列を入れ替えて，2 つの行列式の積を計算するとつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_1 \\ (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_2 \\ (\boldsymbol{e}_p)_3 & (\boldsymbol{e}_q)_3 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3.24}$$

これで $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ を Kronecker の記号を用いて行列式で表すことができた．

[12] この (3.21),(3.22) の式は後の (3.32) から得られる．

3.4 Levi-Civita の記号の縮約公式

(3.24) から Levi-Civita の記号の積の縮約公式を導こう．まず (3.24) 式で $k = r$ とおいて縮約をすれば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \\
&= \left[\delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} - \delta_{jk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \right] \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{ip} & \delta_{iq} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

が得られる．(3.25) の右辺の 3 行目で $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ であることを用いた．

さらに (3.25) で $j = q$ とおいて縮約をすれば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} \\
&= 3\delta_{ip} - \delta_{ip} \\
&= 2\delta_{ip}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

が, また (3.26) でさらに $i = p$ とおいて縮約すれば

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \tag{3.27}$$

が得られる．

ここで縮約公式をまとめておこう．

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \tag{3.25}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip} \tag{3.26}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{3.27}$$

ベクトル解析で特に有用なのは (3.25) である．

3.5 ベクトル解析の公式の導出

ベクトル解析の公式 (3.1)-(3.9) を導く前に準備をしておこう．ベクトル $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ のベクトル積 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は Levi-Civita の記号を用いれば

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k \tag{3.28}$$

と表すことができ, また $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は同様に

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k \tag{3.29}$$

と表すことができる．

ここで, ちょっと脇道にそれるかもしれないが, Levi-Civita の記号の導入の理由を推理してみよう．Levi-Civita の記号が導入されたのはこのベクトル積の成分を表すためではなかったかと思われる．$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は直交座標系での成分では $(B_2C_3 - B_3C_2, B_3C_1 - B_1C_3, B_1C_2 - B_2C_1)$ と表されるが, この表示では $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ の第 i 成分 $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i$ が i で表されるようになっていない．

例えば, 第 1 成分 $B_2C_3 - B_3C_2$ にはそれが第 1 成分であることを表す 1 という数字がどこにも入っていない．第 2 成分, 第 3 成分も同様である．これにはまったく満足できない．それで第 i 成分はそれが第 i 成分であることがわかるように $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i$ を添字 i から始まるように書き表したい．そのためにどんな記号を導入したらよいか．Levi-Civita はそう考えたに違いない．それが ϵ_{ijk} を考案した理由であると思われる．

では具体的にその成分を考えてみよう．$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \epsilon_{ijk}B_jC_k$ で例えば $i = 1$ とすれば

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_1 &= \epsilon_{1jk}B_jC_k \\
&= \epsilon_{11k}B_1C_k + \epsilon_{12k}B_2C_k + \epsilon_{13k}B_3C_k \\
&= \epsilon_{121}B_2C_1 + \epsilon_{122}B_2C_2 + \epsilon_{123}B_2C_3 + \epsilon_{131}B_3C_1 + \epsilon_{132}B_3C_2 + \epsilon_{133}B_3C_3 \\
&= \epsilon_{123}B_2C_3 + \epsilon_{132}B_3C_2 \\
&= B_2C_3 - B_3C_2
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

ここで, あからさまに $\epsilon_{11k}B_1C_k$ の k についての和をとっていないのは Levi-Civita の記号の定義から $\epsilon_{11k} = 0$ だからである．

第 2, 第 3 成分についてもまったく同様である．読者は第 2 成分と第 3 成分について紙の上に自分の手で書き下して確かめて見られたがよい．

話の本筋に帰って, つぎにベクトルのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ について考えてみよう．$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とおけば,

$$
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} = A_iD_i = A_i\epsilon_{ijk}B_jC_k = \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{3.31}
$$

この最後の式は 3 次の行列式の定義式であるから

$$
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{3.32}
$$

とも表せる．この (3.32) を用いて実は (3.21) と (3.22) が導かれたのである．

さて, これからベクトル解析の公式 (3.1)-(3.9) の導出について述べよう．

まずベクトルのベクトル 3 重積 (3.1) についてはスカラー 3 重積の場合と同様に $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とおけば, $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]_i &= [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}]_i \\
&= \epsilon_{ijk}A_jD_k \\
&= \epsilon_{ijk}A_j\epsilon_{klm}B_lC_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}A_jB_lC_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m \\
&= B_i(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - C_i(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

したがって,

$$
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{3.1}
$$

が成り立つ．この公式は英語を話す国々では back-cab ルール ((3.1) の覚え方) として知られている．

つぎに公式 (3.2) を導こう．まず $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}$ とおけば, $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{F}$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{F} \\
&= E_iF_i \\
&= \epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{imn}C_mD_n \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}A_jB_kC_mD_n \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})A_jB_kC_mD_n \\
&= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

したがって,

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{3.2}$$

ついでに, これに関係した

$$\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) \tag{3.3}$$

が成り立つことを見ておこう．これは $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ とおけば, スカラー 3 重積の中で文字をサイクリックに変えても値は変わらないというスカラー 3 重積の性質から,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E})\\ &= \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\\ &= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\end{aligned} \tag{3.35}$$

であることがわかるが, または

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}]\\ &= C_i\epsilon_{ijk}D_jE_k\\ &= C_i\epsilon_{ijk}D_j\epsilon_{klm}A_lB_m\\ &= \epsilon_{klm}A_lB_m\epsilon_{kij}C_iD_j\\ &= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\end{aligned} \tag{3.36}$$

としてもよい．ここで 3 行目から 4 行目に移るときに, $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{kij}$ であることを用いた．

もっとも (3.3) が成り立つことから逆に (3.2) が成立することは Levi-Civita の記号を用いなくとも簡単にわかる．それは

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]\\ &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})]\\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned} \tag{3.37}$$

が得られるからである．

つぎに公式 (3.4) を導びこう．$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$ とおけば, $[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ であるから,

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]_i &= [\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}]_i\\ &= \epsilon_{ijk}E_jF_k\\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q\\ &= -\epsilon_{jik}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q\\ &= -(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q\\ &= -(A_iB_k-B_iA_k)\epsilon_{kpq}C_pD_q\\ &= B_i\epsilon_{kpq}A_kC_pD_q - A_i\epsilon_{kpq}B_kC_pD_q\\ &= B_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})] - A_i[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\end{aligned} \tag{3.38}$$

または

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q\\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{kpq}\epsilon_{jlm}A_lB_mC_pD_q\\ &= (\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})\epsilon_{jlm}A_lB_mC_pD_q\\ &= (C_iD_j-D_iC_j)\epsilon_{jlm}A_lB_m\\ &= C_i\epsilon_{lmj}A_lB_mD_j - D_i\epsilon_{lmj}A_lB_mC_j\\ &= C_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})] - D_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\end{aligned} \tag{3.39}$$

となる．したがって,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})] \\
&= \boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

が成立する．

この公式に関してはベクトル解析によってもそれほどその導出は難しくはない．それは $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ とおいてベクトル 3 重積の公式を用いるか, $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$ とおいてベクトル 3 重積の公式を用いれば, すぐに公式 (4) が導出されるからである．

公式 (3.5) を導こう．$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}$ とおけば, (3.5) の左辺は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]=\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})$ と表せるから,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) \\
&= E_i\epsilon_{ijk}F_jG_k \\
&= \epsilon_{ilm}B_lC_m\epsilon_{ijk}\epsilon_{jpq}C_pA_q\epsilon_{krs}A_rB_s \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}B_lC_m\epsilon_{jpq}C_pA_q\epsilon_{krs}A_rB_s \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})B_lC_m\epsilon_{jpq}C_pA_q\epsilon_{krs}A_rB_s \\
&= (B_jC_k-B_kC_j)\epsilon_{jpq}C_pA_q\epsilon_{krs}A_rB_s \\
&= \epsilon_{jpq}B_jC_pA_q\epsilon_{krs}C_kA_rB_s \\
&= [\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]^2
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

と導出される．ここで, 右辺の 6 行目の第 2 項で $\epsilon_{jpq}C_jC_pA_q=0$ であることを用いている．

したがって,

$$
(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]=[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]^2 \tag{3.5}
$$

が成立する．面倒なのはここまでで, (3.6)-(3.9) は比較的簡単である．

まず公式 (3.6) は $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}$ とおけば, $(\nabla\times\boldsymbol{A})_k=H_k=\epsilon_{klm}\nabla_lA_m$ と表されるから,

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}]_i &= [\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]_i \\
&= [\nabla\times\boldsymbol{H}]_i \\
&= \epsilon_{ijk}\nabla_jH_k \\
&= \epsilon_{ijk}\nabla_j(\epsilon_{klm}\nabla_lA_m) \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\nabla_j\nabla_lA_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\nabla_j\nabla_lA_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_lA_m \\
&= \nabla_i(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2A_i \\
&= [\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})]_i-(\Delta\boldsymbol{A})_i
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

ここで, ϵ_{klm} は微分演算子 ∇_j に対して定数の扱いを受けている．この性質は以下でもくり返して用いられる．したがって,

$$
\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-(\Delta\boldsymbol{A}) \tag{3.6}
$$

が成り立つ．

つぎの公式 (3.7) は $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}$ とおけば, $H_i=\epsilon_{ijk}\nabla_jA_k$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \\
&= \nabla\cdot\boldsymbol{H} \\
&= \nabla_iH_i \\
&= \nabla_i(\epsilon_{ijk}\nabla_jA_k) \\
&= \epsilon_{ijk}\nabla_i\nabla_jA_k \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

で導かれる．ここでは ϵ_{ijk} は添字 ij について反対称であるが, $\nabla_i \nabla_j$ は添字 ij について対称であることを用いた．したがって,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.7}$$

が成り立つ.

公式 (3.8) は $\nabla\phi = \boldsymbol{G}$ とおけば, $\nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \boldsymbol{G}$ と表せ, また $\nabla_k \phi = G_k$ であるから,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\phi]_i &= [\nabla \times (\nabla\phi)]_i \\
&= [\nabla \times \boldsymbol{G}]_i \\
&= \epsilon_{ijk} \nabla_j G_k \\
&= \epsilon_{ijk} \nabla_j (\nabla_k \phi) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

で導かれる．ここでも ϵ_{ijk} の添字 jk について反対称であることと $\nabla_j \nabla_k$ が添字 jk について対称であることを用いた．したがって,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \tag{3.8}$$

が成り立つ．また公式 (3.9) は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$ とおけば, $G_i = \epsilon_{ijk} E_j H_k$ であるから,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{G} \\
&= \nabla_i G_i \\
&= \nabla_i (\epsilon_{ijk} E_j H_k) \\
&= \epsilon_{ijk} (\nabla_i E_j) H_k + \epsilon_{ijk} E_j (\nabla_i H_k) \\
&= H_k \epsilon_{kij} (\nabla_i E_j) - E_j \epsilon_{jik} (\nabla_i H_k) \\
&= \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\
&= \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

で導かれる．したがって,

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \tag{3.9}$$

が成り立つ.

3.6 おわりに

ベクトル解析の公式を Levi-Civita の記号が使われているものを主として見てきた．Levi-Civita の記号の縮約公式 (3.25) は本当に有用である．しかし，どうやって縮約公式 (3.25) を導くかが大学教育で教えるための大きな障害になっていたが, それも今回の試みで解決できたと思う．このアイディアをご教示くださった川崎守（岐阜大学）さんに感謝をしたい.

Levi-Civita の記号のご利益を強調してきたが, しかし，その後それによらなくともベクトル解析の公式を導くのはそんなに難しくはないという結論に至った．それについてはすでに別のところで述べた [6]． また，ここで述べなかった面倒なベクトル解析の公式が少しだけ残っている．それはつぎの機会に述べたい.

(2006.7.18) (2010.4.3 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践（愛数協）, 第 18 号, (1985. 3) 7-17, 第 65 号, (1998. 3) 2-17.

[2] 矢野　忠,「Levi-Civita の記号の縮約」再論, 研究と実践（愛数協）, 第 64 号, (1997. 3) 2-10.

[3] 矢野　忠,「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 研究と実践（愛数協）, 第 77 号, (2001. 12) 16-20.

[4] 矢野　忠, 「数学散歩」（国土社, 2005）に [1, 2, 3] を改訂し，収録してある．

[5] 矢野　忠, Levi-Civita の記号でベクトル解析の初歩を 1，研究と実践（愛数協）, 投稿原稿だが，未掲載．Joh 著「ベクトル解析」の一項目「テンソル記号を使ってベクトルの公式を導く」(URL: http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/VectorFormulaeByTensor/) の付録として公表されている．今回原稿を改訂した．

[6] 矢野　忠, ベクトル代数再考, 研究と実践（愛数協）, 第 96 号, (2007.12) 23-29.

編集後記

ここに第 2 号を発行する．中西先生からは早々に原稿を頂いたのだが，翻訳アルバイトが意外に手間取ってしまって，とうとう４月の声を聞きそうになってあわてて編集した．創刊号のときに苦労したので，今号はそれほど苦労はしなかったが，書式はまだ十分に定まっているわけではない．それで，もしもっとよい書式があれば，そちらに変わっていくかもしれないが，当面はこの書式で行くつもりである．

毎回この号でこの「通信」が終わるかもしれないという気持で編集をしている．この通信の程度というものをあらかじめ想定していてもその通りにはなるとは限らないが，自ずとその程度は決まってくるだろうと感じている．

だから，長文でページ数が 100 ページを越えるとかいった物理的な大著を一挙掲載したいというような要望の投稿だとお断りせざるを得ないが，この通信ではよほどのことがない限り，掲載を拒否するということを考えていない．原稿の募集要領とか投稿規程を見て判断をして投稿をお願いしたい．（矢野 忠）

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

   この「数学・物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野　忠（元愛媛大学）が編集および発行する，主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌，もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）.

2. 雑誌の目的

   この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです．したがって，興味深くて，面白いと思われるもので，どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが，教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを発表することを目的とします．それで専門的でありすぎるものとか，もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします．この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします．読者は中学校，高校，大学の理数系の学生，教師，研究者や元教師，元研究者，研究所の研究者，会社の技術者その他これに準ずる方とします．アマチュアの方でもかまいませんが，その場合には誰か推薦者がいることが必要です.

3. 編集の方針

   この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します．したがって，内容の審査は行いませんが，もちろん公序良俗に反するものとか，理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります．原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することはありかもしれません．しかし，文章の責任はすべて著者にあります．また，将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが，再録した場合には初出を明記することをお願いします．一号のページ数は 26 ページを目途とします．原稿のページ数があまり多いようなら，何回かに分けて出すことをお願いします．投稿は 1 回当たりのページ数を 10 ページ前後でお願いをしたいと思います．短いのは半ページでも数行でもかまいません.

4. 発行の方針

   発行は基本的に Latex で入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集して PDF にして出力してメールで配布します．もちろん少部数のプリントアウトも原理的には発行できますが，これは例外とします．また原則として季刊としますが，編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります.

5. その他

   基本的には自由であることを旨としますが，何か問題が起これば，その都度著者と相談をします.

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォマット

   Latex で A4paper の原稿と dvi のファイルを e-mail に添付書類として yanotad@earth.ocn.ne.jp の矢野忠宛てに送付する．タイトルはセンタリング，所属，氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください．上下の余白は 3cm，左右は 2.5cm を原則としますが，編集者の都合で変更されることがあります.

   図や表は本文の該当箇所に張り込んでください．またキャプションをつけてください.

   白黒印刷であることにご留意ください.

2. 投稿の受付と掲載決定

   投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります．もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって，そのまま掲載決定にはなりません．掲載ができないときはその後メールをします．特に掲載できない旨のメールが行かなければ，掲載を認めたものとします．早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい．もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください.

3. 発行時期

   季刊で 3 月，6 月，9 月，12 月を原則としますが，編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります.