数学·物理通信

1巻4号　　2010年9月

編集　新関章三·矢野　忠

2010 年 9 月 6 日

目 次

石とりゲームのグラフ理論的拡張

中 西　襄　(京都大学名誉教授)

1.1　石とりゲームの数理

「石とりゲーム」もしくは「三山崩し」というゲームについては，よく知られていると思う．n 個の非負の整数の組 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ [1]（これを「配位」と呼ぶ）が与えられているとする．2 人の競技者が交互に着手し，x_j のどれか 1 つを好きに選んで，それをより少ない値 y_j $(0 \leqq y_j \leqq x_j - 1)$ に置き換える．有限回の着手の後必ずすべて 0 になるが，最後に着手した方を勝とする[2]．石とりゲームのようなゲームは一般に「ニム」と呼ばれているが，その数理については一松信著「石とりゲームの数理」（森北出版，1968）に詳しい解説がある．そこから少し基本的な事柄を抜書きしてみよう．

着手の仕方にいろいろなルールを課すことにより，いろいろなゲームが作れる．この種のゲームには必勝法があり,「良形」と呼ばれる配位を保つと必ず勝つ．従って，双方が必勝法を知っている場合は，最初の配位が良形であれば先負，そうでなければ先勝になる．ここに良形は次のように定義される．1.　最終配位は良形である．　2.　配位が良形のときに着手すれば，必ず良形でなくなる．　3.　配位が良形でないときは，必ず良形にする着手が存在する．

良形は必ず存在するので，問題はそれを具体的に決定することである．良形をなんらかの等式で与えることができれば一番よい．もともとの石とりゲームの場合には，それはよく知られている．すなわち，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を 2 進数で表し，桁上がりなしの加法で合計が 0 になるというのが，良形の定義式になる．もう少しきちんと定義すると，次のようになる．まず 0 と 1 に対し，2 進和 $\oplus$ を $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ と定義する．次に

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j 2^j \qquad (x_j = 0 \text{ or } 1)$$

のように 2 進表示するとき（もちろん 1 は有限個），

$$x \oplus y \equiv \sum_{j=0}^{\infty} (x_j \oplus y_j) 2^j$$

とする．このとき石とりゲームの良形は，

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$$

である．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を石の個数と思わずに量子レベルと考え，励起状態から低いレベルに落ちてくると見なすと，これはボゾンが n 個ある系を考えていることになる．そこでこれをフェルミオンの系に拡張するのは自然であろう．この場合，パウリの原理により x_j の値はすべて相異ならねばならない．従って，基底状態に相当する最終配位は全部が 0 ではなく，$\{n-1, n-2, \cdots, 1, 0\}$ となる．このゲームは一松により,「佐藤のゲーム」

[1] これらの数の順序は関係ないので，原則として大きい数から順に並べるものとする．
[2] これを正規型という．逆に最後に着手した方を負とするルールを「逆形」というが，簡単のため逆形は考えないことにする．

と名付けられた．佐藤のゲームの良形を与える一般的等式は知られているが，相当複雑である．ただ，n が 4 までの場合は簡単な式になるので，引用しておこう．$n = 2$ の場合は $x_1 \oplus x_2 = 1$，あるいはもっと具体的に $x_1 = 2N + 1, x_2 = 2N$，$n = 3$ の場合は

$$(x_1 + 1) \oplus (x_2 + 1) \oplus (x_3 + 1) = 0,$$

$n = 4$ の場合は

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$$

である．$n = 4$ の場合は石とりの場合と同じだが，$n = 3$ の場合は面白い．

1.2 グラフのニム

前節で述べたように，ニムは数の集合を考え，それを交互の着手で減じていくものである．私はこれをグラフ理論でいうグラフ[3]の線の集合に拡張することを考えた．この場合は，単なる数の集合とは異なり，グラフのトポロジカルな性質が関係してくる．

基本ルールは次の通りである．まず，連結グラフを 1 つ与える．2 人の競技者が交互に着手して，毎回その線を 1 つ以上取り除いていって，最後にグラフを無くした方を勝とする．**1 回の着手で取り除ける線の集合は，「パス」すなわちトポロジカルに線状になっているものでなければならない**とする．ただし，**パスを取り除いたあとのグラフが非連結になるようなものは禁止する**ものとする．このルールを設定するのは，非連結グラフになってしまうと面白くないからである．なお，パスの定義は，一筆書きできるものと同義とするか，ループを含むものは禁止とするかの選択の自由度があるが，後者の方が自然であろう．ただし，樹木グラフを考える範囲ではこの選択は問題にならない．しかし樹木グラフでは，取り除いたあとのグラフが非連結になってはいけないというルールは，かなりきつく着手の仕方を制限する．

グラフを記述するのに，いろんな名前を導入しておくのが便利である．私が勝手につけた名前だが，なるべく名前からその形状が思い浮かべ易いようにしたつもりである．ただ 1 つの線の端になっている頂点を「端点」，2 つの線の端になっている頂点を「節点」，3 つまたはそれ以上の線の端になっている頂点を「分岐点」と呼ぶ．樹木は必ず端点をもつ．分岐点を全くもたないグラフは，2 つの端点といくつかの節点をもつが，これを「線状グラフ」という．線状グラフは 1 回の着手で完全に取り除ける．端点が 1 つ，分岐点が 1 つ，それ以外はすべて節点であるような部分グラフを「足」と呼ぶ．幾本かの足がただ 1 つの共通の分岐点をもつようなグラフを「星状グラフ」という．そして足の数が $n\ (\geqq 3)$ のとき，「n 星状グラフ」と呼ぶ．星状グラフにおいて，分岐点を端とする線の全体から成る部分グラフを星状グラフの「中心部」といい，中心部のみから成る星状グラフを「基本星状グラフ」と呼ぶ．基本星状グラフは節点をもたない．中心部に属する足の線（もちろん 1 本の足には 1 つしかない）を「つけ根」，足の残りを「柄」という．柄が 1 本だけの星状グラフを「竹箒状グラフ」と呼ぶ．

1.3 星状グラフの良形

線を取り除くことによって分岐点の数が増えることはありえないから，分岐点の数の少ないグラフから順に考察するのがよい．それでまず分岐点の数が 1 の場合，すなわち星状グラフについて考える．

基本 n 星状グラフについては，良形は n が 3 の倍数 $n = 3N$ のときである．なぜなら，0 はもちろん 3 の倍数であり，1 回の着手で取り除ける線の数は 1 または 2 であるから，相手の着手との合計が 3 になるように着手すればいつでも 3 の倍数に保てるからである．

[3] グラフ理論でいうグラフとは，線と頂点の集合で，各線の両端には必ず頂点がある．それぞれの頂点がいくつかの線の端になっていることで，線と頂点の集合としては同じでもいろんなトポロジカルに異なるグラフができる．

柄が 1 本のみの n 星状グラフ，すなわち竹箒状グラフの場合，良形は無い．$n=3N$ の場合は柄を取り除く，$n=3N+1$ の場合は柄のある足をつけ根まで込めて取り除く，$n=3N+2$ の場合は柄のある足ともう 1 本の足を同時に取り除くことによって，基本 $3N$ 星状グラフに移行できるからである．$n=3N+2$ の場合は，柄が 2 つある場合も同様にして良形が無いことがわかる．

一般の n 星状グラフについて考察しよう．各々の柄（足ではない！）に属する線の数を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする．

まず $n=3$ の場合を考える．着手後非連結にならないようにしなければならないので，許される着手は，どれかの柄を短くする，どれかの足を 1 本除去する，2 本の足を除去するの 3 種である．しかしあとの 2 種は，着手後線状グラフになってしまうので，明らかによくない着手である．従って，どれかの柄を短くするという選択しかないと考えてよい．上述したように，このグラフの中心部は良形であるから，これを最終局面とみなしてよい．従って，問題は配位 $\{x_1, x_2, x_3\}$ に対する石とりゲームと全く同じになる．すなわち良形は $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ によって与えられる．

$n=4$ の星状グラフの場合は大分事情が変わる．中心部が良形でないばかりでなく，足を 1 本取り除くこともできる．しかし，足を取り除くのは，残る 3 本の足の柄が $x_j \oplus x_k \oplus x_l = 0$ を満たしているときに限る．そうでなければ，非良形になってしまうからである．まず，柄の 1 つがない場合を考える．記号の簡単のため $x_4 = 0$ としておこう．もし x_1, x_2, x_3 のうちの 2 つが等しい，たとえば $x_1 = x_2$ とすると，x_3 のある足をそっくり取り除くと $n=3$ の良形になってしまう．従って，最も簡単な良形の配位は $\{2,1,0,0\}$ ということになる．$x_j = x_k$ が実質上禁止というのは，佐藤のゲームと同じ条件であるから，良形の一般式は $(x_1+1) \oplus (x_2+1) \oplus (x_3+1) = 0$ となる．この式は $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ とは決して両立しないので，第 4 の足を取り除いて良形にされることはありえないから，正しい結果である．

そこで，柄がすべてが 0 でない場合を考えよう．$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ の部分集合のいずれかが，$x_j \oplus x_k \oplus x_l = 0$ もしくは $(x_j+1) \oplus (x_k+1) \oplus (x_l+1) = 0$ を満たしていると，残りの 1 本の足もしくは柄を取り除けば良形になるから，そうでないものを探さなければならない．これは 3 つの数が相関する条件を課していることになり，佐藤のゲームよりずっと難しくなる．しかし，まず分かることは，$x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$ のように「ツー・ペア」（4 つとも等しい場合を含む）になっているときはすべて良形である．なぜなら,，この配位は上のどちらかの条件を満たすような 3 つの柄を含まない，またこれにどのように着手しても必ず，等しい数が 1 組の「ワン・ペア」(3 つの数が等しい場合を含む）の配位になるから，その次の着手で「ツー・ペア」に戻せる，そして一番簡単な配位 $\{1,1,1,1\}$ は相手にどのように着手されても必ず $n=3$ の良形 $\{1,1,0\}$ に移行できるからである．このように「ワン・ペア」が実質上禁止になることで佐藤のゲームと似てくるが，余分の条件があるから同じにはならない．

そこで,「ツー・ペア」以外の良形にどんなものがあるのか具体的に調べてみよう．一応最大数を固定しておいて，それを超えない範囲で調べることにする．その範囲で，相異なる正の整数 4 個の組をすべて列挙する．そして，上記の条件のどちらかを満たす 3 個の数を含むような組をすべて消していく．こうして残った組がとりあえず良形の候補になる．最大数を 8 としてこれを実行してみたところ，次のような組が残った．

$$\{6,5,2,1\}, \{7,4,2,1\}, \{7,6,5,4\}, \{8,4,2,1\}, \{8,4,3,1\}, \{8,4,3,2\}, \{8,5,2,1\},$$
$$\{8,5,3,2\}, \{8,5,4,3\}, \{8,6,2,1\}, \{8,6,3,1\}, \{8,6,4,3\}, \{8,6,5,1\}, \{8,6,5,2\},$$
$$\{8,6,5,4\}, \{8,7,2,1\}, \{8,7,3,1\}, \{8,7,3,2\}, \{8,7,4,1\}, \{8,7,4,2\}, \{8,7,5,1\},$$
$$\{8,7,5,3\}, \{8,7,5,4\}, \{8,7,6,2\}, \{8,7,6,3\}, \{8,7,6,4\}, \{8,7,6,5\}.$$

このうち，本当の良形は次の 7 つである．

$$\{6,5,2,1\}, \{7,4,2,1\}, \{7,6,5,4\}, \{8,4,3,1\}, \{8,5,3,2\}, \{8,7,5,1\}, \{8,7,6,2\}.$$

これ以外のものはすべて，1 回の着手でこの 7 つのうちのどれかに移行させることができる．上記の良形のうち最初の 3 つは，$n=4$ の佐藤のゲームの良形の条件 $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$ を満たしているが，あとの 4 つの良形はそれを満たしていない．じつは，これらはそれぞれ，1 回の着手で $n=4$ の佐藤のゲームの良形の条件を満たす配位 $\{6,4,3,1\}$, $\{5,4,3,2\}$, $\{7,5,3,1\}$, $\{7,6,3,2\}$ に移行できるのだが，後者が良形でなくなったため

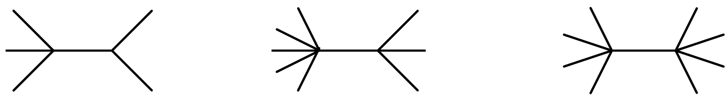
に，前者が良形となったのである．このように良形は順次帰納的に決まるから，いったん形が崩れると，あとは全く変わってしまう．従って，良形の一般式を見つけるのは極めて難しいであろう．

$n=5$ の星状グラフの場合は，本節のはじめに述べたように，柄の数が 2 本以下のときには良形はない．従って，柄の数が 3 本の場合について考察する．その配位を $\{x_1,x_2,x_3,0,0\}$ としよう．もし x_1,x_2,x_3 のうちで等しいものがあれば，残りの柄を含む足とつけ根だけの足（2 本のうちの 1 本）を取り除けば良形になる．また，$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ ならば，つけ根のみの足を 2 本とも取り除けば良形になる．さらに $(x_1+1) \oplus (x_2+1) \oplus (x_3+1) = 0$ ならば，つけ根のみの足の 1 本を取り除けば良形になる．これらのすべてが実質上禁止であるから，やはり一般式を見つけるのはとても困難である．最大数が 6 以下の良形は，$\{4,2,1,0,0\}$，$\{5,3,2,0,0\}$，$\{6,3,1,0,0\}$，$\{6,5,4,0,0\}$ である．

1.4　その他の樹木グラフ

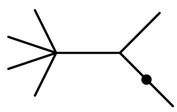
前節では分岐点が 1 個の場合を考察してが，分岐点が 2 個以上ある場合を考えよう．着手によって分岐点は節点に変わりうるから，分岐点の数と節点の数の合計を m とし，m の小さいものから順に考察する．

$m=2$ で分岐点が 2 個であれば，もちろん節点はない．この場合は基本星状グラフのときと同じで，線の数を n とすると，$n=3N$ のグラフがすべて良形である．それらは，たとえば次のようなグラフである．



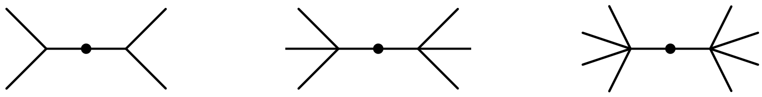
$m=3$ で分岐点が 2 個，節点が 1 個の場合のうち，まず節点が分岐点に挟まれない場合を考える．第 1 分岐点，第 2 分岐点からでる線の数をそれぞれ $n_1 \geqq 3, n_2 \geqq 3$ とし，節点は第 2 分岐点に隣るものとする．すなわち，柄のある足は第 2 分岐点からでているとする．$m=3$ では柄の長さは 1 だが，最初は柄の長さは制限しない．考えているグラフから柄の部分の線を除外した線の総数は，$n \equiv n_1+n_2-1$ である．n の値に応じて次のように着手すれば，着手後のグラフの線の総数が 3 の倍数になる．$n=3N$ であれば柄だけを取り除く，$n=3N+1$ であれば柄のある足を取り除く，$n=3N+2$ であれば柄のある足とともにもう 1 つの線（第 1 分岐点と繋ぐ線以外の第 2 分岐点からでる線）を取り除く．もし着手後のグラフが節点を含まなければ，それは $m=1$ か $m=2$ の良形である．

着手後に新たに節点が現れるのは，$n=3N+1$ かつ $n_2=3$ の場合と $n=3N+2$ かつ $n_2=4$ の場合である．もちろんどちらの場合も $n_1=3N-1$ である．これらの場合は良形になる可能性があるので，詳しく検討しなければならない．以下話を $m=3$ に限定する．最も簡単なグラフは $n_1=5, n_2=3$ で，これは 1 回の着手で他の良形に移行できないから，良形としなければならない．念のため具体的に描くと，これは次のようなグラフである (黒丸は節点を表す)．



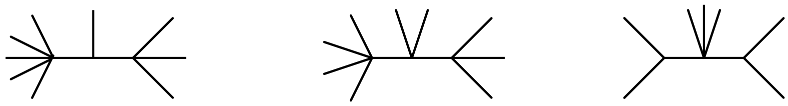
しかし，次に簡単な $n_1=5, n_2=4$ は，第 2 分岐点からでる線を 1 つ取り除けば上のグラフになるから，良形ではない．一般に第 1 の場合，すなわち $n_1=3N-1\,(N=2,3,\cdots), n_2=3$ の場合のみが良形である．1 回の着手で第 1 分岐点からでる線を 3 つ取り除くことはできないからである．第 2 の場合は，第 2 分岐点からでる線を 1 つ取り除けば第 1 の場合のグラフになるから，良形ではない．

2 個の分岐点の間に節点がある場合は，両分岐点からでる線の数が等しいものがすべて良形となる．次のようなグラフである．

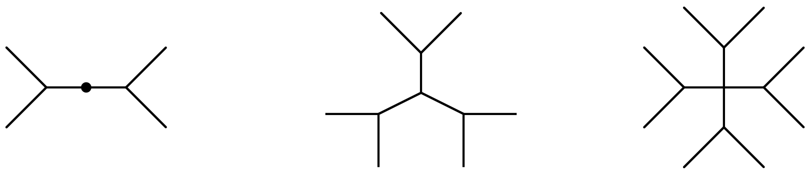


これらが良形であることは，節点の数（$m=3$ では 1 だが）がゼロでない限りいくつであっても示せる．それは，どのように着手したとしても，着手後分岐点の 1 つが節点になっていなければ両分岐点から出る線の数は非同数であり，着手後節点ができていればグラフは竹箒状グラフになっていて，いずれも非良形だからである．

$m=3$ の 3 つともが分岐点の場合には，一般的な議論はできそうにないので，良形の例だけを挙げておく．



より複雑な樹木で良形になることが明らかなのは，次のようなグラフである．$n=3N$ の基本星状グラフを任意個数用意し（N は共通でなくてもよい），その各々の 1 端点を同一視して得られるグラフを,「正規枝分かれ星状グラフ」ということにする．たとえば次の図のようなグラフである．



正規枝分かれ星状グラフでは，相手がどのように着手してもつねに次の着手で正規枝分かれ星状グラフに戻せるから，最終的には $n=3N$ の基本星状グラフに帰着する．従って，正規枝分かれ星状グラフは良形である．

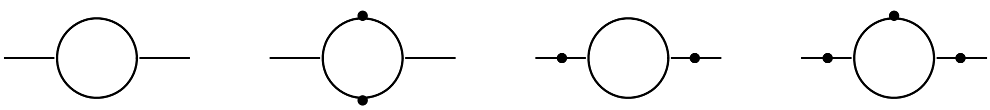
樹木としてのトポロジーが本質的になってくると，一般的議論は非常に困難になる．ということは逆に，ゲームとしては面白いということであろう．

1.5　ループのあるグラフ

トポロジカルに面白いのは，やはりループを含むグラフの場合であろう．はじめに述べたように，この場合，1 回の着手で取り除いてもよいのは，真のパスすなわち頂点を重複して通らないものに限るか,「オイラー・グラフ」すなわちループを含んでも一筆書きできるものを許すかによってゲームは全く異なってくる．以下では，真のパスを取り除くというルールで考えることにする．そして，両端が一致する線（1 つの線で作られるループ）は禁止する．

着手によってループの数が増えることはないので，ループ数の小さいものから考察する．まずループ数が 1 の場合である．分岐点が無く，節点のみのもの（もちろん節点の数は 2 以上）は明らかにすべて良形である．どう着手しても線状グラフになってしまうからである．1 ループに足が 1 本のグラフ[4] には良形は無い．その足を取り除けば良形になるからである．

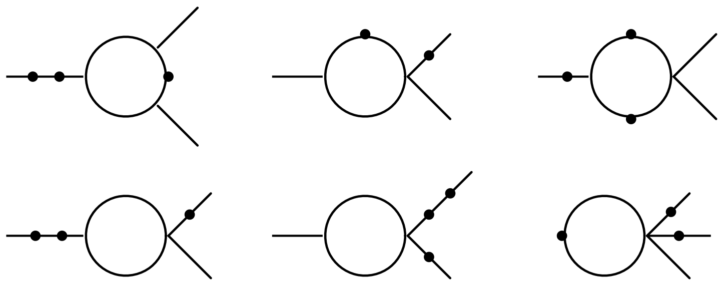
1 ループに足が 2 本のグラフ[5]にはいくつかの良形がある．1 本足には良形がないから，パスを取り除くことにより，樹木の良形か，より足の短い 2 本足の良形に移行するかを調べればよい．節点の総数が 3 までの範囲で，次の 4 つの良形があることが分かる．



[4]ファインマン・グラフでは「タドポール」（おたまじゃくし）と呼ばれる．

[5]ファインマン・グラフでは「自己エネルギー」である．

同様に，1 ループで 3 本足のグラフにおいて，節点の総数が 3 までの範囲で調べたところ，良形は次の 6 つであった．



2 ループで，1 本足まで，節点 1 つまでの範囲での良形のグラフは，次のようなものである．

足も節点もない 3 ループ・グラフでは，次のような良形がある．

興味のある方は，もっと先までどんな良形があるか調べていただきたい．ただし，簡単なグラフで間違いを犯すと，それから先はみな間違ってしまうので，細心の注意が必要である．

1.6　別のルール

以上では，各着手でパスを単純に取り除くというルールで考えてきた．しかしパスを取り除くのではなく，パスを縮めて両端を短絡させるという可能性も考えられる．この場合は，連結グラフが非連結になることはないので，それを禁止する付帯規則は必要ない．

このルールでは任意のパスの線が一挙に消せるわけだから，相当複雑な樹木でもわずかな回数の着手で星状グラフに移行してしまう．星状グラフでは，柄とか基本星状グラフとかいう概念は必要でなくなる．そして，1 回の着手で任意の 1 本または 2 本の足を任意に短くすることができるので，1 回の着手で 1 つまたは 2 つの数を減らすというルールの石とりゲームと同じになる．$n = 3$ では，良形は $x_1 = x_2 = x_3$ である．従って，$n = 4$ で最も簡単な良形の配位は $\{3, 3, 2, 1\}$[6] となる．

ループ・グラフでは，短絡させるパスがループを含んではいけないとすると，ループの数は減ることがないので，グラフを最終的に無くすることはできない．すなわち，最終グラフは，ただ 1 つの頂点を持ち，そこでいくつかのループが接している花びら状のグラフである．

[6] これは足の長さであって，柄の長さではない．パスを取り除くルールのときの $n = 4$ での最も簡単な良形の配位は，この表示では $\{3, 2, 1, 1\}$ である．

自然数の冪和に関する関係式

中西　襄　(京都大学名誉教授)

2.1　自然数の冪和に関する話題

矢野氏のブログ physicomath の 2009 年 12 月 25 日のところに次のような記載があった．

高校生が数学公式を発見　昨日の朝日新聞で大阪の高校生が整数 k について，k^n の和を求める一般公式をつくったという記事をみた．$\cdots$

私はこの記事自体は見ていないが，自然数の冪和

$$S_k(n) \equiv \sum_{r=1}^{n} r^k$$

を与える公式は古くから周知である旨コメントさせていただいた（次節参照）．
参考のため，$k=7$ までの $S_k(n)$ の具体的な式を公式集[7]から引用しておこう：

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1),\\
S_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\\
S_4(n) &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),\\
S_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),\\
S_6(n) &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),\\
S_7(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2).
\end{aligned}$$

高校生の話はこれ以上進展しなかったが，最近ひょんなところから次のような関係式が成立することをインターネットで知った．

$$S_7(n) + S_5(n) = 2[S_3(n)]^2.$$

これが正しいことは，実際に上の式を代入してみれば分かる．$S_3(n) = [S_1(n)]^2$ は誰でも知っているが，その他にもこんな関係式があるとすると，もっと一般的な関係式が成立するのではないかと考えられる．そこで少し計算してみたところ，両者を含む一般的関係式が存在することが分かった．初等的な関係式なので，オリジナルな結果である可能性は低いが，いろいろな公式集を見ても載っていないので，ここに報告させていただく．

[7] 森口，宇田川，一松著「数学公式　―級数・フーリエ解析―」（岩波全書）

2.2 ベルヌーイの公式

$S_k(n)$ を与える一般公式は，今から約 300 年前ベルヌーイ (Jacob Bernoulli) によって見出された．この公式はベルヌーイ数を用いるので，まずそれについて説明する．

ベルヌーイ数 B_p は，生成母関数を用いて，

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{p=0}^{\infty}B_p\frac{t^p}{p!}$$

によって定義される有理数である．$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2}$ であるが，$\frac{t}{e^t-1}+\frac{1}{2}t$ が偶関数なので，$r\geqq 1$ に対して $B_{2r+1}=0$ となる．$B_{2r}=(-1)^{r-1}b_r$ と書くと，b_r は正の有理数だが，その値は次のように非常に不規則である．

$$b_1=\tfrac{1}{6},\ b_2=\tfrac{1}{30},\ b_3=\tfrac{1}{42},\ b_4=\tfrac{1}{30},\ b_5=\tfrac{5}{66},\ b_6=\tfrac{691}{2730},\ b_7=\tfrac{7}{6},\ b_8=\tfrac{3617}{510},\ \cdots.$$

この b_r を用いて，$S_k(n)$ の公式は次のようになる．

$$S_k(n)=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^{r-1}\frac{k!}{(2r)!(k-2r+1)!}b_rn^{k-2r+1}.$$

ここに，$[\frac{k}{2}]$ は $\frac{k}{2}$ を超えない最大の整数を表す．従って最低次の項は，k が奇数のとき n について 2 次，偶数のときは 1 次である．

2.3 奇数冪和の場合

さて，$S_3(n)=[S_1(n)]^2$ と $S_7(n)+S_5(n)=2[S_3(n)]^2$ とをもっと一般の奇数冪和に拡張する問題に戻ろう．これらから，k が奇数のとき，$S_k(n),\ S_{k-2}(n),\ \cdots$ の適当な 1 次結合が $[S_{\frac{1}{2}(k-1)}(n)]^2$ になるのではないかと推測されるが，計算してみればそうはならないことがすぐに分かる．そうではなくて，実は右辺は $S_1(n)$ の $\frac{1}{2}(k+1)$ 次の冪になるのである．つまり 1 節の $S_k(n)$ の表から次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
S_1(n)&=\frac{1}{2}n(n+1),\\
S_3(n)&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\\
S_5(n)+\frac{1}{3}S_3(n)&=\frac{1}{6}n^3(n+1)^3,\\
S_7(n)+S_5(n)&=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4.
\end{aligned}$$

左辺の係数の一般形がどのようになるかを推測するために，もう少し大きな k に関する $S_k(n)$ の $n^2(n+1)^2$ を括りだした形を計算してみると，

$$\begin{aligned}
S_9(n)&=\frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),\\
S_{11}(n)&=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10),\\
S_{13}(n)&=\frac{1}{420}n^2(n+1)^2(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6\\
&\qquad+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691)
\end{aligned}$$

のようになる．これらの式をうまく組み合わせて，次の式を得る．

$$\begin{aligned} S_9(n)+2S_7(n)+\frac{1}{5}S_5(n) &= \frac{1}{10}n^5(n+1)^5, \\ S_{11}(n)+\frac{10}{3}S_9(n)+S_7(n) &= \frac{1}{12}n^6(n+1)^6, \\ S_{13}(n)+5S_{11}(n)+3S_9(n)+\frac{1}{7}S_7(n) &= \frac{1}{14}n^7(n+1)^7. \end{aligned}$$

これから，一般の $k=2m+1$ に対して，次の関係式が推測される．

$$S_{2m+1}(n)+\frac{m(m-1)}{3!}S_{2m-1}(n)+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{5!}S_{2m-3}(n)+ \\ \cdots+\delta_m\frac{1}{m+1}S_{m+1}(n)=\frac{1}{2(m+1)}n^{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

ただし，δ_m は m が偶数のとき 1，奇数のとき 0 とする．すなわち，次の公式が成り立つ．

奇数冪和に関する関係式

$$\sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]}\frac{(m+1)!}{(2r+1)!(m-2r)!}S_{2m-2r+1}(n)=\frac{1}{2}n^{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

証明は，n に関する数学的帰納法を用いると簡単にできる．まず，$n=0$ のときは，$S_k(0)=0$ なので，$0=0$ で成立する．それゆえ，$n-1$ のとき成立するものとし，そのときの式を両辺から引き算して

$$S_k(n)-S_k(n-1)=n^k$$

を用いると，

$$\sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]}\frac{(m+1)!}{(2r+1)!(m-2r)!}n^{2m-2r+1}=\frac{1}{2}n^{m+1}[(n+1)^{m+1}-(n-1)^{m+1}]$$

が成立すればよいことが分かる．右辺の $(n\pm1)^{m+1}$ を 2 項展開すれば左辺の式になるから，これは確かに成立している．(証明終)

また，m に関する数学的帰納法を用いると，この関係式から，$m \geqq 1$ **に対して** $S_{2m+1}(n)$ **は因子** $n^2(n+1)^2$ **を含むことが証明される．**

2.4 偶数冪和の場合

奇数冪和の場合に前節のような関係式があるのであれば，偶数冪和の場合も何らかの関係式が成り立つのではないかと考えられる．1 節の $S_{2m}(n)$ の表から，$m \geqq 1$ のとき因子 $n(n+1)(2n+1)$ を含むと思われる．$2n+1=n+(n+1)$ なので，奇数冪和のときの $n^{m+1}(n+1)^{m+1}$ に相当する量は $n^{m+1}(n+1)^m+n^m(n+1)^{m+1}$ である．そこで，前節の証明と同じく，$n^{m+1}[(n+1)^m-(n-1)^m]+n^m[(n+1)^{m+1}-(n-1)^{m+1}]$ の 2 項展開から係数が決められる．

$$\frac{m!}{(2r+1)!(m-2r-1)!}+\frac{(m+1)!}{(2r+1)!(m-2r)!}=\frac{m!(2m-2r+1)}{(2r+1)!(m-2r)!}$$

だから，次の関係式が成り立つ．

偶数冪和に関する関係式

$$\sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{m!(2m-2r+1)}{(2r+1)!(m-2r)!} S_{2m-2r}(n) = \frac{1}{2} n^m (n+1)^m (2n+1).$$

$m = 1, 2, 3$ に対する左辺の式は，それぞれ $3S_2(n)$，$5S_4(n) + S_2(n)$，$7S_6(n) + 5S_4(n)$ となる．

また，前と同様に， $m \geqq 1$ **のとき，**$S_{2m}(n)$ **は因子** $n(n+1)(2n+1)$ **を含むことが証明される．**

付記

wikipedia の「ファウルハーバーの公式」という項に次のような内容の記載があった．

自然数の冪和の公式は，17 世紀のドイツの数学者ファウルハーバー (Faulhaber) が研究したので,「ファウルハーバーの公式」と呼ばれているが，一般的証明を与えたのは関孝和およびヤコブ・ベルヌーイなので,「ベルヌーイの公式」とも呼ばれている．ファウルハーバーはまた，$S_{2m+1}(n)$ と $S_{2m}(n)/S_2(n)$ が $S_1(n)$ の多項式で表されることを指摘したが，一般的証明は与えなかった．のちにヤコービがそれを再発見して，厳密な証明を与えた．

このファウルハーバー・ヤコービの結果は，本文で与えた関係式から，m に関する数学的帰納法を用いることにより直ちに証明される．

二項定理１

矢野　忠[8]

3.1　はじめに

べき関数の導関数を求めるために二項定理を用いて x^n の導関数

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{3.1.1}$$

を求めるが，この二項定理をどうやって求めるのか．これに関心が出てきた．それでいくつかの方法で二項定理を導いてみたい．

3.2　組合せによる導出

この節の標題があまり的確ではないかもしれないが，すぐ後で説明があるから分かってもらえるだろう．また二項定理の式として

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_nb^n \tag{3.2.1}$$

と書き表すのが普通だが，前節で述べたように二項定理をべき関数の導関数を求めるために証明するのであるから，もとの形の二項定理において $a = x, b = h$ とおいて，二項定理を

$$(x+h)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1hx^{n-1} + {}_nC_2h^2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_nh^n \tag{3.2.2}$$

と表すことにしよう．

いま

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \overbrace{(x+h)}^{1}\overbrace{(x+h)}^{2}\overbrace{(x+h)}^{3}\cdots\overbrace{(x+h)}^{n} \\ &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1hx^{n-1} + {}_nC_2h^2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_nh^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_rh^rx^{n-r} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

この二項展開は 1 行目にわざわざ書いたように因子 $x+h$ の n 個の積から求められるが，そのとき分配法則によって各因子から x または h を選んで積をつくる．1 番目のかっこの中から x か h を選び，2 番目のかっこの中から x か h を選び，という風にして積を分配法則にしたがってつくってその和をとれば二項展開が得られる．そのときに x と h のいずれかを一つのかっこの中から選ぶのであるが，n 個のかっこの中からいま h の方をとるかっこを r 個選び出すと残りの $n-r$ 個のかっこでは自動的に x を選び出すことになる．その h を選び出す，選び方は n 個のかっこの中から r 個を選び出す，選び出し方であるので，その場合の数は ${}_nC_r$ となる．ところ

[8] yanotad@earth.ocn.ne.jp

で $r=0,1,2,\cdots,n$ の各 r の値のそれぞれは排反事象であるから，これらの値の場合を加えたものが成り立つ．したがって，二項定理が証明された [1].

以上の説明でいいのだが，くどいかもしれないが，もう一度説明をしてみよう．1 番目のかっこ，2 番目のかっこ，3 番目のかっこ，$\cdots$ n 番目のかっこのいずれからも h を選ばない場合は ${}_nC_0=1$ しかない．したがって，x^n の係数は ${}_nC_0=1$ である．

つぎに h を一つ選ぶ場合は 1 番目のかっこからか 2 番目のかっこからか，$\cdots$，n 番目のかっこからか 1 つだけ選べるので ${}_nC_1$ となる．したがって，hx^{n-1} の係数は ${}_nC_1$ である．

さらに，h を二つ選ぶ場合は n 個のかっこからいずれか任意の 2 つのかっこの中から h を選ぶので，${}_nC_2$ となる．したがって，h^2x^{n-2} の係数は ${}_nC_2$ である．

こういう具合に進んでいって最後に h を n 個選ぶ場合には n 個のかっこから必ず h を選ぶ場合となるので ${}_nC_n$ となる．したがって，h^n の係数は ${}_nC_n$ である．

これらのすべての場合は互いに排反事象であるので (3.2.2)

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= {}_nC_0x^n+{}_nC_1hx^{n-1}+{}_nC_2h^2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_nh^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_rh^rx^{n-r}\end{aligned}$$

が成り立つ．

3.3　数学的帰納法による証明 1

$$(x+h)^n = {}_nC_0x^n+{}_nC_1hx^{n-1}+{}_nC_2h^2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_nh^n \tag{3.2.2}$$

を数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のとき (3.2.2) の右辺から左辺が導かれることを示そう．

$${}_1C_0={}_1C_1=1$$

であるから

$${}_1C_0x+{}_1C_1h=x+h$$

となる．すなわち，(3.2.2) は $n=1$ に対して成り立っている．

つぎに $n=k$ のとき

$$(x+h)^k = {}_kC_0x^k+{}_kC_1hx^{k-1}+{}_kC_2h^2x^{k-2}+\cdots+{}_kC_kh^k \tag{3.3.1}$$

が成立するとすれば，$n=k+1$ のときに同じ式が成立することが証明できればよい．

$$\begin{aligned}(x+h)^{k+1} &= (x+h)(x+h)^k \\ &= (x+h)\left[{}_kC_0x^k+{}_kC_1hx^{k-1}+{}_kC_2h^2x^{k-2}+\cdots+{}_kC_kh^k\right] \\ &= {}_kC_0x^{k+1} \\ &\quad + {}_kC_1hx^k+{}_kC_2h^2x^{k-1}+{}_kC_3h^3x^{k-2}+\cdots+{}_kC_kh^kx \\ &\quad + {}_kC_0hx^k+{}_kC_1h^2x^{k-1}+{}_kC_2h^3x^{k-2}+\cdots+{}_kC_{k-1}h^kx \\ &\quad + {}_kC_kh^{k+1} \\ &= {}_kC_0x^{k+1}+({}_kC_1+{}_kC_0)hx^k+({}_kC_2+{}_kC_1)h^2x^{k-1} \\ &\quad +\cdots+({}_kC_r+{}_kC_{r-1})h^rx^{k-r+1} \\ &\quad +\cdots+({}_kC_k+{}_kC_{k-1})h^kx+{}_kC_kh^{k+1} \\ &= {}_{k+1}C_0x^{k+1}+{}_{k+1}C_1hx^k+{}_{k+1}C_2h^2x^{k-1} \\ &\quad +\cdots+{}_{k+1}C_rh^rx^{k-r+1}+\cdots+{}_{k+1}C_kh^kx+{}_{k+1}C_{k+1}h^{k+1}\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

最後の行で

$$
\begin{aligned}
{}_kC_r + {}_kC_{r-1} &= {}_{k+1}C_r \\
{}_kC_0 &= {}_{k+1}C_0 \\
{}_kC_k &= {}_{k+1}C_{k+1}
\end{aligned}
$$

の等式を用いた．

これで数学的帰納法で二項定理が証明された．いまの証明は和の記号 $\sum$ を用いない泥臭い方法であるが，それだけ同じ項の係数の足し算が出てきて，それが組合せの等式によって係数がまとめられる過程がよく分かる．

つぎに同じ数学的帰納法による証明だが，和の記号 $\sum$ を用いて表した証明を述べよう．

3.4 数学的帰納法による証明 2

$$
(x+h)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^r x^{n-r} \tag{3.2.2}
$$

これを数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のときは

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{1} {}_1C_r h^r x^{1-r} &= {}_1C_0 x + {}_1C_1 h \\
&= x + h
\end{aligned}
$$

したがって，$n=1$ のときに二項定理は成り立つ．

つぎに $n=k$ のときに

$$
(x+h)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^r x^{n-r}
$$

が成り立つとすれば，$n=k+1$ のときにも二項定理 (3.2.2) が成り立つことを証明する．

$$
\begin{aligned}
(x+h)^{k+1} &= (x+h)(x+h)^k \\
&= (x+h)\sum_{r=0}^{k} {}_kC_r h^r x^{k-r} \\
&= \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r h^r x^{k+1-r} + \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r h^{r+1} x^{k-r}
\end{aligned}
$$

ここで第 2 項の和の記号の指標 r を $r+1=p$ と置換えれば，$r=p-1$ であるから

$$
(x+h)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r h^r x^{k+1-r} + \sum_{p=1}^{k+1} {}_kC_{p-1} h^p x^{k+1-p} \tag{3.4.1}
$$

となる．したがって

$$
(x+h)^{k+1} = {}_kC_0 x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} ({}_kC_r + {}_kC_{r-1}) h^r x^{k+1-r} + {}_kC_k h^{k+1} \tag{3.4.2}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
{}_kC_r + {}_kC_{r-1} &= {}_{k+1}C_r \\
{}_kC_0 &= {}_{k+1}C_0 \\
{}_kC_k &= {}_{k+1}C_{k+1}
\end{aligned}
$$

の等式を用れば，

$$
\begin{aligned}
(x+h)^{k+1} &= {}_{k+1}C_0 x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_{k+1}C_r h^r x^{k+1-r} + {}_{k+1}C_{k+1} h^{k+1} \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}C_r h^r x^{k+1-r} \qquad (3.4.3)
\end{aligned}
$$

が成立する．

したがって，数学的帰納法により (3.2.2)

$$(x+h)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^r x^{n-r}$$

が成り立つ．この証明は [2] の証明に倣ったわけではないが，証明の方針は同じである．しかし， [2] の証明は細かな点で訂正する必要があることを注意しておこう．

上に教育的配慮から二つの方法で数学的帰納法を用いて二項定理を証明した．これはもちろん同一の証明であり，その表示法が少し違っているだけである．一般には後の証明の方が表示が簡潔なので用いられることが多いが，一々項を書き下す前の方の証明の方がわかりやすい．

3.5 微分を用いた導出

最後に微分を用いた二項定理の導出を述べよう．もともと二項定理を証明しようとした動機がべき関数の微分公式の導出にあったのだから，これは本末転倒の話になるが，それでもどうにかしてべき関数の微分公式を導いたとしたときに逆に二項定理は微分によって導けることを示すのも悪くはあるまい．

さて，$(x+h)^n$ がつぎのように未定の係数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ でつぎのように展開できるとする[9]．

$$(x+h)^n = a_0 x^n + a_1 h x^{n-1} + a_2 h^2 x^{n-2} + a_3 h^3 x^{n-3} + \cdots + a_n h^n \qquad (3.5.1)$$

この展開式を微分して未定の係数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を決めることを考えよう．

まず，(3.5.1) で $h=0$ とおけば

$$x^n = a_0 x^n$$

となるので，係数 a_0 は

$$a_0 = 1$$

と求められる．

つぎに係数を求めるには (3.5.1) を h で微分すれば

$$n(x+h)^{n-1} = a_1 x^{n-1} + 2a_2 h x^{n-2} + 3a_3 h^2 x^{n-3} + \cdots + n a_n h^{n-1} \qquad (3.5.2)$$

この (3.5.2) の式で $h=0$ とおけば

$$n x^{n-1} = a_1 x^{n-1}$$

となるので，係数 a_1 は

$$a_1 = n$$

と求められる．

[9] n が正の整数なら，この仮定は自明であろう．n が一般の実数のときにはこの仮定は一般に成立しないが，それでも n の実数値に対して $(x+h)^n$ が微分可能であれば，無限級数で表される場合でも x^n の前の係数を決めることができる．しかし，このときにこの級数が収束する変数の領域はかなり限られる．

さらに続けて係数を求めるには (3.5.2) を h で微分すれば

$$n(n-1)(x+h)^{n-2} = 2a_2x^{n-2} + 2\cdot 3a_3hx^{n-3} + \cdots + n(n-1)a_nh^{n-2} \tag{3.5.3}$$

この (3.5.3) の式で $h=0$ とおけば

$$n(n-1)x^{n-2} = 2a_2x^{n-2}$$

となるので，係数 a_2 は

$$a_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$$

と求められる．

同様に続けて係数を求めるには (3.5.3) をさらに h で微分すれば

$$n(n-1)(n-2)(x+h)^{n-3} = 2\cdot 3a_3x^{n-3} + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nh^{n-3} \tag{3.5.4}$$

この (3.5.4) の式で $h=0$ とおけば

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3} = 2\cdot 3a_2x^{n-3}$$

となるので，係数 a_3 は

$$a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

と求められる．

以下同様であるが，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ で係数 a_n は

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1}{n!} = 1$$

となることが推測される．この推測が正しいことは以前の証明からわかる．

3.6 おわりに

このエッセイでは４つの方法で二項定理の導出を試みた．しかし，２つの数学的帰納法による二項定理の証明は同じ内容をただ違った書き表しただけであるから，本質的には３つの導出法を示した．最後の微分を用いた証明は n が正の整数である必要がないので，実は前の２つの導出とは根本的に様相が異なってくる．この場合には n は正の整数どころか実数であっても成り立つ．または一般には複素数であってもよい．だが，そのことについては別の機会に述べたい．

もう一つ，どうしても調べておきたいことがある．二項展開の係数は「パスカルの三角形」で表されるが，この係数から一般の $(x+h)^n$ の係数を導く方法がもっとも素直な二項展開の導出法であろう．ところが，この方法で二項定理を導出を示した文献が少ないのである [3], [2]．それについてはエッセイの第２報で述べたい．

(2010.5.3)

参考文献

[1] 志賀浩二,「中高一貫数学コース　数学５」（岩波書店，2004）149-150

[2] KIT 数学ナビゲーション，w3e.kanazawa-it.ac.jp

[3] www.rd.mmtr.or.jp/ bunryu/pascal.shtml

[4] W. W. ソーヤー（芹沢正三訳）,「代数の再発見 II」（講談社，1972) 50-61

二項定理２

矢野　忠[10]

4.1　はじめに

前のエッセイ [1] で二項定理の導出法をいくつか示したが，一番素直と思われる導出法について述べることができなかった．それについてこのエッセイでは書いてみたい．

それはどういう導出法だろうか．

$$(x+h)^0 = 1 \tag{4.1.1}$$
$$(x+h)^1 = x+h \tag{4.1.2}$$
$$(x+h)^2 = x^2+2hx+h^2 \tag{4.1.3}$$
$$(x+h)^3 = x^3+3hx^2+3h^2x+h^3 \tag{4.1.4}$$
$$(x+h)^4 = x^4+4hx^3+6h^2x^2+4h^3x+h^4 \tag{4.1.5}$$
$$\cdots$$

の x^k, $(k=1,2,\cdots,n)$ の係数の数列から一般的な

$$(x+h)^n = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_3 h^{n-3}x^3 + \alpha_2 h^{n-2}x^2 + \alpha_1 h^{n-1}x + \alpha_0 h^n \tag{4.1.6}$$

の展開の係数 α_k, $(k=0,1,\cdots,n)$ を求めるという方針である．たとえば，(4.1.1)-(4.1.5) の x^3 の係数の数列からその一般項を求めることによって，(4.1.6) の $(x+h)^n$ の x^3 の係数 α_3 を求めるという方法である．

この素朴な発想は誰でも一度は思いつく着想だと思うが，意外にこの発想から素直に導いた二項定理の導出法を見かけたことがない．そう思って調べて見たら，ソーヤーの「代数の再発見 II」 [2] にこの発想にしたがった導出法を見つけた．この導出法の解説をすること，およびソーヤーとはすこし違った導出法を述べるのがこのエッセイの目的である．

4.2　数列の一般項を求める方法

まず，このエッセイでの二項定理の係数の求め方であるが，数係数は $(x+h)^n$ でも $(1+x)^n$ でもまったく同じ数係数が現れるのでソーヤーにしたがって，$(1+x)^n$ の数係数[11]を考えることにしよう[12]．

$n=0,1,2,\cdots,8$ に対して $(1+x)^n$ を展開して，係数を求めれば図１のようになる．横欄は各 n の値に対する二項定理の展開の係数を示し，縦欄は x^k, $(k=0,1,2,\cdots,8)$ に対する係数を示している．

[10] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[11] 以後はわざわざ数係数といわず単に係数という．

[12] $(x+h)^n$ と $(1+x)^n$ では x の位置が違うが，ここでは係数だけを問題とする．n が正の整数のときには係数は対称でどちらの場合も変わらない．

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

図 1

これから求めたいのは $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n$ に対する係数の数列の一般項である．

しかし，その前に図 1 で空欄になっている図の右上のところをどうするか．この部分の各欄にはすべて 0 を入れる．これは例えば，

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{4.2.1}$$

であるが，これはもちろん

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^8$$

と表してもいいからである．同様なことがすべての $(1+x)^n$ についていえる．空欄にすべて 0 を代入した図を図 2 とした．

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n=1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	2	1	0	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	3	1	0	0	0	0	0
$n=4$	1	4	6	4	1	0	0	0	0
$n=5$	1	5	10	10	5	1	0	0	0
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	0	0
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	0
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

図 2

$$(1+x)^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{4.2.2}$$

でこの図 2 をチラッと見ただけで

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = n, \alpha_n = 1$$

であることはすぐに見て取れる．問題は $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ がどうなるかである．図 2 を見れば，$n = 1〜8$ までのときの $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$ はわかるが，任意の整数 n に対する $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$ をどうやって求めるか．これがいまの問題である．

これから $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$ の係数を図 2 にある数列から求めていくが，まずは係数 α_2 から考えていこう．

$n = 0, 1, 2, \cdots, 8$ のときの α_2 の係数は図 2 の x^2 の係数を縦に上から下へと見ていけばよい．それらを横に並べれば，

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28$$

となる．これらの数列の性質を調べるにはこの数列の第 1，第 2 階差数列をつくればよい．それらは

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28 \\
 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

図 3

となる．これらを文字で置き換えてみよう．元の数列を $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ で，また第 1 階差数列，第 2 階差数列をそれぞれ $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$; $c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots$ で表せば，

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 & & a_8 \\
 & b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & b_6 & & b_7 & \\
 & & c_0 & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5 & & c_6 & &
\end{array}$$

図 4

となる．いま，図 3 を見れば，第 2 階差数列はすべて 1 となる．

ところで

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1} - a_0 &= b_0 \\
\cancel{a_2} - \cancel{a_1} &= b_1 \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= b_2 \\
&\cdots \\
\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} &= b_{n-2} \\
a_n - \cancel{a_{n-1}} &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

であるから，辺々を縦に加えれば斜線を入れたところは打ち消しあって

$$a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

が得られる．したがって

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \tag{4.2.3}$$

となる．また

$$\begin{aligned}
\cancel{b_1} - b_0 &= c_0 \\
\cancel{b_2} - \cancel{b_1} &= c_1 \\
\cancel{b_3} - \cancel{b_2} &= c_2 \\
&\cdots \\
\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_{n-2}} &= c_{n-2} \\
b_n - \cancel{b_{n-1}} &= c_{n-1}
\end{aligned}$$

であるから，同様に辺々を縦に加えれば

$$b_n = b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

が得られる．ところで図３によれば，$c_k = d =$ 一定, $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ であるから

$$\begin{aligned} b_n &= b_0 + d \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= b_0 + dn \end{aligned}$$

と求められる．これを a_n の式に代入すれば,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (b_0 + dk) \\ &= a_0 + b_0 \sum_{k=0}^{n-1} 1 + d \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= a_0 + b_0 n + d \frac{n(n-1)}{2!} \end{aligned}$$

と a_n が求められる．ところが，図３と図４を比べれば，$a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = d = 1$ であるから

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2!} \tag{4.2.4}$$

と求められる．したがって，(4.2.2) の x^2 の係数 α_2 は

$$\alpha_2 = \frac{n(n-1)}{2!} \tag{4.2.5}$$

となる．

つぎに α_3 を求めよう．これも α_2 を求めたと同じ手順で求められる．α_3 の $n = 0, 1, 2, \cdots, 8$ のときの係数の数列が図２から与えられ，それと階差数列とを合せて示せば

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 0 && 0 && 0 && 1 && 4 && 10 && 20 && 35 && 56 \\ & 0 && 0 && 1 && 3 && 6 && 10 && 15 && 21 & \\ && 0 && 1 && 2 && 3 && 4 && 5 && 6 && \\ &&& 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 &&& \end{array}$$

図５

図５のようになる．この図では第３階差数列が一定となる．図５の数列を文字記号で図４と同様に表せば,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_0 && a_1 && a_2 && a_3 && a_4 && a_5 && a_6 && a_7 && a_8 \\ & b_0 && b_1 && b_2 && b_3 && b_4 && b_5 && b_6 && b_7 & \\ && c_0 && c_1 && c_2 && c_3 && c_4 && c_5 && c_6 && \\ &&& d_0 && d_1 && d_2 && d_3 && d_4 && d_5 &&& \end{array}$$

図６

となる．α_2 の係数を求めたときと同様に

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

$$b_n = b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

$$c_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k$$

となる．ところで $d_k = d =$ 一定 であるので

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k = d \sum_{k=0}^{n-1} 1 = dn$$

であるから，

$$\begin{aligned} c_n &= c_0 + dn \\ b_n &= b_0 + c_0 n + d\frac{n(n-1)}{2!} \\ a_n &= a_0 + b_0 n + c_0\frac{n(n-1)}{2!} + d\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \end{aligned}$$

と求められる．図５と図６とを比べれば，

$$a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = d = 1$$

であるから

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \tag{4.2.6}$$

と求められる．したがって，(4.2.2) の x^3 の係数 α_3 は

$$\alpha_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \tag{4.2.7}$$

となる．

このように α_2, α_3 と求めてくれば，これらから (4.2.2) の x^4 の係数 α_4 が

$$\alpha_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \tag{4.2.8}$$

となると推測できるであろう．

こういう推測ができることは大切だと思うが，ここではさらに α_4 をいままでと同様な手順で求めておこう．図２から x^4 の係数の数列とその階差数列は

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 5 & & 15 & & 35 & & 70 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & 20 & & 35 & \\
& & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & \\
& & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

図７

となる．第４階差数列ではじめてその階差数列が一定の数となる．文字記号を図４，図６と同様にとれば

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 & & a_8 \\
& b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & b_6 & & b_7 & \\
& & c_0 & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5 & & c_6 & & \\
& & & d_0 & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4 & & d_5 & & & \\
& & & & e_0 & & e_1 & & e_2 & & e_3 & & e_4 & & & &
\end{array}$$

図８

である．これから α_2, α_3 のときと同様にして

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\
b_n &= b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \\
c_n &= c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \\
d_n &= d_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e_k
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$e_k = d =$ 一定 であるから

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k = d \sum_{k=0}^{n-1} 1 = dn$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
d_n &= d_0 + dn \\
c_n &= c_0 + d_0 n + d\frac{n(n-1)}{2!} \\
b_n &= b_0 + c_0 n + d_0\frac{n(n-1)}{2!} + d\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\
a_n &= a_0 + b_0 n + c_0\frac{n(n-1)}{2!} + d_0\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + d\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}
\end{aligned}
$$

が求められる．図 7 と図 8 とを比べれば

$$a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 0, e_0 = d = 1$$

であるから，

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \tag{4.2.9}$$

すなわち x^4 の係数 α_4 は

$$\alpha_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \tag{4.2.10}$$

となる．

この結果から α_2, α_3 から推測された α_4 の値は確かに正しいことがわかった．したがって，また

$$\alpha_5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \tag{4.2.11}$$

となることが推測されるであろう．また，さらに一般の x^k の係数 α_k は

$$\alpha_k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{4.2.12}$$

となることを証明したわけではないが，確信をもって推測できるであろう．

ここでは，一番素朴な考えで $(1+x)^n$ の係数を求めたり，推測する方法を示した．これは誰でもすぐに考えつく方法なので，私のオリジナルだと主張する気はまったくないが，それにしても私自身はこのやり方で二項定理の係数を求めた文献を見たことがない．

4.3　発見的方法

この節ではソーヤーの本 [2] に出ている方法を紹介しよう．前節の図 2 に示した係数を使うことはまったく同じであるが，ちょっと違ったところもある．それは

$$(1+x)^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{4.2.2}$$

の $x^2, x^3, \cdots$ の係数 $\alpha^2, \alpha^3, \cdots$ を求めるのにその係数の数列を用いる点では前節と同じであるが，**「k 階差数列が一定の数となれば，その一般項は k 次の多項式で表される」**という知識を使っているところが違う．

たとえば，x^3 の係数の数列の一般項を

$$\alpha_3 = an^3 + bn^2 + cn + d \tag{4.3.1}$$

と表すことができる．n についての 3 次多項式の係数 a, b, c, d を $n = 0, 1, 2, 3$ とおいて得られる数列とその階差数列は

$$\begin{array}{ccccccc}
d & & a+b+c+d & & 8a+4b+2c+d & & 27a+9b+3c+d \\
& a+b+c & & 7a+3b+c & & 19a+5b+c & \\
& & 6a+2b & & 12a+2b & & * \\
& & & 6a & & * &
\end{array}$$

図 9

これを図 5 の対応した左端の数と比べると

$$\begin{aligned}
d &= 0 \\
a+b+c &= 0 \\
6a+2b &= 0 \\
6a &= 1
\end{aligned}$$

となり，これらから係数 a, b, c, d は簡単に求められる．

結果だけを与えておくと

$$a = \frac{1}{6},\ b = \frac{-1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = 0$$

となる．したがって，

$$\alpha_3 = \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2) \tag{4.2.7}$$

と求められる．

同様に，x^4 の係数の数列の一般項を

$$\alpha_4 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e \tag{4.3.2}$$

と表すことができる．n についての 4 次多項式の係数 a, b, c, d, e を $n = 0, 1, 2, 3, 4$ とおいて得られる数列とその階差数列は図 9 と同様にして得られるから書くことを省略するが，この図と図 7 の対応した左端の数を等しくおけば，

$$\begin{aligned}
e &= 0 \\
a+b+c+d &= 0 \\
14a+6b+2c &= 0 \\
36a+6b &= 0 \\
24a &= 1
\end{aligned}$$

であり，これらか係数 a,b,c,d,e は簡単に求められて，結果は

$$a=\frac{1}{4!},\ b=-\frac{6}{4!},\ c=\frac{11}{4!},\ d=-\frac{6}{4!}$$

となる．したがって，

$$\alpha_4=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) \tag{4.2.8}$$

と求められる．

そして，これくらい係数を求めてくれば，自ずから一般の係数は推測できるようになる．それをここでくり返して与える必要はもうないであろう．

またはつぎのように考えることもできる．元の係数の数列とその階差数列で使う係数を求めるときに使う情報は各数列の一番左の数だけであるから，それらをたとえば x^4 の係数の数列に対して $p,q.r,s,t$ とおけば，

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
p & & * & & * & & * & & * & & * & & * & & * & & * \\
& q & & * & & * & & * & & * & & * & & * & & * & \\
& & r & & * & & * & & * & & * & & * & & * & & \\
& & & s & & * & & * & & * & & * & & * & & & \\
& & & & t & & * & & * & & * & & * & & & &
\end{array}$$

図１０

となる．ここで，一番左の数以外は $*$ で置き換えた．すると

$$\begin{aligned}
p&=e\\
q&=a+b+c+d\\
r&=a+6b+2c\\
s&=36a+6b\\
t&=24a
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかるから，これを a,b,c,d,e について解いて，(4.3.2) に代入し，$p,q.r,s,t$ でまとめれば

$$\begin{aligned}
\alpha_4&=\frac{1}{24}tn^4+\frac{1}{6}(s-\tfrac{3}{2}t)n^3+\frac{1}{2}(r-s+\tfrac{11}{12}t)n^2\\
&\quad+(q-\tfrac{1}{2}r+\tfrac{1}{3}s-\tfrac{1}{4})n+p\\
&=p+qn+\frac{r}{2}n(n-1)+\frac{s}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{t}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)\\
&=p+qn+\frac{r}{2!}n(n-1)+\frac{s}{3!}n(n-1)(n-2)+\frac{t}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

となる．

いま，α_4 まで求めれば，α_5 やそれ以降はどういう形に表されるかを推測することはまったく難しくない．α_5 は

$$\begin{aligned}
&\alpha_5\\
&=p+qn+\frac{r}{2!}n(n-1)+\frac{s}{3!}n(n-1)(n-2)+\\
&\frac{t}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{u}{5!}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)
\end{aligned}$$

となるであろう．以下同様に表される．

図７と図１０を比べれば，$p=0,q=0,r=0,s=0,t=1$ であることがわかるから，これらの値を代入すれば

$$\alpha_4=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

となり，これは上で求めた値 (4.2.8) と一致している．

4.4 因数定理による方法

ソーヤーの本にはもう一つの二項定理の係数の求め方が載っている．これは因数定理を使うという考え方である．

$$(1+x)^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{4.2.2}$$

の α_n が n の多項式で表されるとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を表す数列は 0 ではじまるから，$n = 0$ をこの一般の多項式に代入すれば，この多項式が 0 となることを示している．すなわち，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ が n という因数を含むことを示している．また，$\alpha_2, \cdots$ を表す数列は数列の二番目の項も 0 であるから，これは $\alpha_2, \cdots$ が $n-1$ という因子を含むことを示している．

一般に言っても分かり難いから，具体的な例で示そう．たとえば，x^3 の係数の数列は

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 10, \cdots$$

である．したがって，一般項 a_n に $n = 0, 1, 2$ を代入したときには 0 となるから，この a_n は

$$n(n-1)(n-2)$$

という因数をもっているだろう．したがって

$$\alpha_3 = kn(n-1)(n-2), k = \text{一定} \tag{4.4.1}$$

と表されるだろう．後は定数 k を決めればよい．

この k はどの数列のどの項に対しても同じ値であるので，たとえば $n = 3$ のときに，$\alpha_3 = 1$ であるから

$$3 \cdot 2 \cdot 1k = 1$$

が成り立つ．これから

$$k = \frac{1}{3!}$$

と決められる．

ここで，用いられた性質は因数定理と x^3 の係数の数列の第 3 階差数列が一定となれば，その一般項は n についての 3 次多項式で表されるという性質である．

以下まったく同様の方法で $x^4, x^5, \cdots$ の係数も決められる．もちろん x の次数が上がって来るにつれてその係数を決めるための計算量は多くなってくる．

4.5 おわりに

このエッセイでは 3 つの方法で二項定理の導出を試みた．発見的方法では二つの考え方を紹介したから，その違いも考えに入れるとすれば，4 つの方法を紹介したことになる．はじめの数列の一般項を求める方法を除いてすべてソーヤーの本 [2] に紹介されている方法である．

いくつかのインターネットの説明も参照したが，私の気がついた範囲ではここで述べた方法と同じ説明は見つけられなかった．それにしても二項定理の係数の求め方もいろいろあるものである．

(2010.8.26)

参考文献

[1] 矢野　忠，二項定理１，数学 · 物理通信，1 巻 4 号，12-17

[2] W. W. ソーヤー（芹沢正三訳）,「代数の再発見 II」（講談社，1972) 50-61

編集後記

今年の暑さは半端ではなく，9 月になっても別に残暑が和らぐわけではないが，9 月と聞くとなんだか暑さが気分的に和らぐような気がする．皆様はご健勝でしょうか．

ここに第 4 号を発行する．今号にも中西先生から 2 編の論文をご投稿して頂いた．深く感謝を申し上げたい．共同編集者の新関さんには原稿についていつもご心配を頂いている．今回は原稿があるということで新関さんの投稿を次号に回してもらった．

3 号の編集後記で述べたように谷村省吾（京都大学）さんのご尽力でリンクを貼って頂いた箇所へは,「数学 · 物理通信」で検索をすれば，すぐにそのサイトへ到達することができる．

来号以降にも原稿の募集要領とか投稿規程を見て投稿をお願いしたい.（矢野 忠）

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

   この「数学 · 物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野　忠（元愛媛大学）が編集および発行する，主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌，もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）.

2. 雑誌の目的

   この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです．したがって，興味深くて，面白いと思われるもので，どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが，教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを発表することを目的とします．それで専門的でありすぎるものとか，もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします．この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします．投稿者は中学校，高校，大学の理数系の学生，教師，研究者や元教師，元研究者，研究所の研究者，会社の技術者その他これに準ずる方とします.

3. 編集の方針

   この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します．したがって，内容の審査は行いませんが，もちろん公序良俗に反するものとか，理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります．原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することはありかもしれません．しかし，文章の責任はすべて著者にあります．また，将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが，再録した場合には初出を明記することをお願いします．一号のページ数は 26 ページを目途とします．原稿のページ数があまり多いようなら，何回かに分けて出すことをお願いします．投稿は 1 回当たりのページ数を 10 ページ前後でお願いをしたいと思います．短いのは半ページでも数行でもかまいません.

4. 発行の方針

   発行は基本的に Latex で入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集して PDF にして出力してメールで配布します．もちろん少部数のプリントアウトも原理的には発行できますが，これは例外とします.また原則として季刊としますが，編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります.

5. その他

   基本的には自由であることを旨としますが，何か問題が起これば，その都度著者と相談をします.

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォマット

Latex で A4paper の原稿と dvi のファイルを e-mail に添付書類として yanotad@earth.ocn.ne.jp の矢野忠宛てに送付する．タイトルはセンタリング，所属，氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください．上下の余白は 3cm，左右は 2.5cm を原則としますが，編集者の都合で変更されることがあります．

図や表は本文の該当箇所に張り込んでください．またキャプションをつけてください．

白黒印刷であることにご留意ください．

2. 投稿の受付と掲載決定

投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります．もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって，そのまま掲載決定にはなりません．掲載ができないときはその後メールをします．特に掲載できない旨のメールが行かなければ，掲載を認めたものとします．早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい．もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください．

3. 発行時期

季刊で 3 月，6 月，9 月，12 月を原則としますが，編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります．