数学·物理通信

1巻6号　　2011年3月

編集　新関章三·矢野　忠

2011 年 3 月 7 日

目 次

フィボナッチ数列の拡張について

中西　襄　(京都大学名誉教授)

1.1　フィボナッチ数列の概要

フィボナッチ数列は，よく知られているように，漸化式

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \;\; (n \geqq 1), \qquad F(0) = 0, \; F(1) = 1$$

で定義される数列 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$ である．フィボナッチ数列については，英語の Wikipedia に非常に詳しい解説がある．日本語の Wikipedia は簡潔だが，拡張についての記述がある．主なところを少し抜粋してみよう．

まず，フィボナッチ数列を非常に有名にしたのは，それが黄金比を導くからである．すなわち，$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{F(n-1)}$ とおくと，漸化式から $\varphi^2 = \varphi + 1$ となり，黄金比 $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ を得る．一般項は

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]$$

で与えられる．

$F(n)$ の母関数は

$$s(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

である．この証明は次のように行われる．

$$\begin{aligned} s(x) &= F(0) + F(1)x + \sum_{n=2}^{\infty}[F(n-1)+F(n-2)]x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F(n-2)x^n \\ &= x + x\sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n \\ &= x + xs(x) + x^2 s(x). \end{aligned}$$

フィボナッチ数列は，その各項がそれの前の 2 つの項の和で定義されたものだから，それを 3 つまたはそれ以上の和に拡張しようと考えるのは自然である．実際それは行われていて，3 項の場合をトリボナッチ数列，4 項の場合をテトラボナッチ数列というのだそうである．トリボナッチ数列の一般項の公式は，3 次方程式の解のタルタリア・カルダノ公式を用いるため，複雑な式になってしまう．

1.2 数字の並べ方の数とフィボナッチ数

知っている人は知っていることだが，$F(n+1)$ は数字 1 と数字 2 を並べて合計がちょうど n になるような並べ方の数に等しい．実際，それを最後の数字が 1 の場合と 2 の場合とに分けて考えると，前者の数は 1 と 2 を合計が $n-1$ になるような並べ方の数，後者の数は 1 と 2 を合計が $n-2$ になるような並べ方の数だから，それぞれ $F(n)$ と $F(n-1)$ に等しい．つまり，数学的帰納法を使えば，漸化式 $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$ によって，上の命題が証明できるわけである．

この逆は，母関数 $s(x)$ の展開式から確かめることができる．

$$s(x)=x[1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+\cdots+\ (x+x^2)^n+\ \cdots]$$

から x^{n+1} の項を拾うと，その各項の因子は，上に述べた並べ方によって標識されている．すなわち，$F(n+1)$ は数字 1 と数字 2 を並べて合計が n になるような並べ方の数である．

母関数の展開式の項ごとに項数をカウントすると，$n=2m$ のとき，

$$F(2m+1)=\sum_{k=0}^{m} {}_{m+k}C_{m-k}$$

となる．ここに C の前の添え字は展開式の項の冪指数，後ろの添え字は因子 x^2 の個数である．すなわち，

$$F(2m+1)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!}{(m-k)!(2k)!}$$

という表式が得られる．同様に，

$$F(2m)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k)!}{(m-k-1)!(2k+1)!}$$

である．これらが漸化式 $F(2m+1)=F(2m)+F(2m-1)$ および $F(2m+2)=F(2m+1)+F(2m)$ を満たしていることは，直接確かめられる．

トリボナッチ数 $T(n+2)$ については，それは数字 1 と数字 2 と数字 3 を並べて合計がちょうど n になるような並べ方の数に等しいことが分かる．

一般化して，$N\geqq 1$ につき，次のような漸化式で定義されるような数列を考える．

$$F_N(n+N-1)=\sum_{k=0}^{N-1}F_N(n+k-1)\ \ (n\geqq 1),$$

ただし初期条件として，$n\leqq 0$ に対しては，

$$F_N(m)=0\ \ (0\leqq m\leqq N-2),\ \ F_N(N-1)=1$$

とする．この数列に対し，次の定理が成り立つ．

定理　数字 $1, 2, \cdots, N$ を並べて合計が n になるような並べ方の数を $F_N(n+N-1)$ とすれば，それは上の漸化式を満たす．

ちなみに，$F_1(n)\equiv 1$, $F_2(n)=F(n)$, $F_3(n)=T(n)$ である．

[証明]　まず $n\leqq 0$ の場合の初期条件が成立していることは，正の数の和が負数になることはありえないこと，正の数の和が 0 になるのは空集合の場合の 1 通りであることから従う．正の n に対する漸化式は，前と同

様 n に関する数学的帰納法により示される．すなわち，漸化式の右辺は，並べる最後の数字による分解に他ならない．□

次節で証明するように，$F_N(n)$ の母関数は

$$s_N(x) = \frac{x^{N-1}}{1 - \sum_{j=1}^{N} x^j}$$

で与えられる．これから上の定理の逆命題が従う．

なお，異なる N の間の関係式として，

$$F_N(n + N - 1) = F_{N-k}(n + N - k - 1) \quad (0 \leqq n \leqq N - k;\ \ 1 \leqq k \leqq N - 1)$$

が成り立つ．なぜなら，この範囲の n では数字 $N - k + 1,\ N - k + 2,\ \cdots, N$ が使えないからである．

1.3 一般の母関数

前節に考えた数列は，自然にもっと一般化される．定数 $\Phi(k)$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ と a_k $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ を任意に与えて，次の漸化式によって数列を定義する．

$$\Phi(n + N - 1) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \Phi(n + k - 1) \ \ (n \geqq 1).$$

定理　この数列の母関数は，

$$s(x) = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \left[1 - \sum_{j=1}^{N-m-1} a_{N-j} x^j\right] \Phi(m) x^m}{1 - \sum_{j=1}^{N} a_{N-j} x^j}$$

によって与えられる．

[証明]

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(k) x^k + \sum_{n=N}^{\infty} \Phi(n) x^n$$

と書いて，第 2 項の和を変形していく．漸化式を使うと，

$$\Psi(x) \equiv \sum_{n=N}^{\infty} \Phi(n) x^n = \sum_{n=N}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{N-1} a_k \Phi(n - N + k) \Big] x^n.$$

$n - N + k = m$ とおけば，

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^{N-k} \sum_{m=k}^{\infty} \Phi(m) x^m = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^{N-k} \Big[s(x) - \sum_{m=0}^{k-1} \Phi(m) x^m \Big].$$

$N - k = j$ とおけば，

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{N-j} x^j \Big[s(x) - \sum_{m=0}^{N-j-1} \Phi(m) x^m \Big].$$

すなわち，

$$\Psi(x) = \Big[\sum_{j=1}^{N} a_{N-j} x^j \Big] s(x) - \sum_{m=0}^{N-2} \Big[\sum_{j=1}^{N-m-1} a_{N-j} x^j \Big] \Phi(m) x^m$$

となる．m に関する和の上限は $N-2$ だが，これをそれより大きく，例えば $N-1$ にとっても差し支えない．この式を $\Psi(x)$ を導入した最初の式に代入して，$s(x)$ について解くと，

$$s(x)=\frac{\sum_{m=0}^{N-1}\left[1-\sum_{j=1}^{N-m-1}a_{N-j}x^j\right]\Phi(m)x^m}{1-\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}x^j}$$

が得られる．□

なお，この式は，次のように書き直せる．

$$s(x)=\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(m)x^m+\frac{\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{j=N-m}^{N}a_{N-j}x^j\right]\Phi(m)x^m}{1-\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}x^j}.$$

分子で $j+m-N=k$ とおくと，

$$s(x)=\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(m)x^m+x^N\frac{\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(m)\sum_{k=0}^{m}a_{m-k}x^k}{1-\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}x^j}.$$

これを見れば，たしかに初期条件が満たされていることが分かる．

任意の x の有理関数は，多項式の部分を除外すれば，すべて定理に書いた $s(x)$ のような形に書ける．従って，漸化式が有限個の数列中の以前の数の特定の一次結合で与えられることと，その数列の母関数が有理関数であることとは，同値であることが分かる．

倍角公式とピタゴラスの定理

高木富士夫[1]

2.1 はじめに

前回のノート [1] では，ピタゴラスの定理の解析的証明と称してオイラーの公式，三角関数の微分公式，及び三角関数のマクローリン展開を用いた３通りの証明を示した．そこではこれらの微分積分学，解析学の道具立てがピタゴラスの定理に依っていないことを示すのが主眼の１つであった．いたずらに回りくどい証明であると言われればそれまでである．本ノートではさらに別の解析的証明を与える．今度は通常の幾何学的証明と比べてそれほど長くない証明である．証明のあらすじは次の通りである．

作図により正弦関数及び余弦関数の倍角公式を導き，その結果から正弦関数の２乗と余弦関数の２乗の和に関する公式を導く．その公式において角度を２倍にする変換 $\theta \to 2\theta$ を繰り返し施して，ド・モアブルの公式に類似の式を導く．最後にその式に含まれる整数パラメータについて無限大の極限をとり，無限等比数列の極限に関する定理を適用してピタゴラスの定理即ち次式を導く．

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{2.1.1}$$

2.2 倍角の公式によるピタゴラスの定理の証明

2.2.1 倍角の公式の導出

三角形 ABC において

$$AB = CA = 1, \quad \angle CAB = 2\theta \tag{2.2.1}$$

とする．図 2.1 参照．$\angle CAB$ の２等分線と辺 BC の交点を D とする．点 C と D から辺 AB に垂線を下ろし，AB との交点をそれぞれ E, F とする．CE に対して点 D から垂線 DG を下ろす．

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD, \quad AD \perp BC, \quad \angle BAD = \angle CAD = \theta \tag{2.2.2}$$

であるから

$$BD = CD = \sin\theta, \quad AD = \cos\theta \tag{2.2.3}$$

一方，直角三角形 AEC において $\angle CAE = 2\theta$ であるから

$$AE = \cos 2\theta, \quad AF = AD\cos\theta = \cos^2\theta$$

２つの直角三角形 $\triangle ABD$ と $\triangle CBE$ において２つの角が等しいから第３の角も等しく，さらに CE と DF は平行であるから

$$\angle BAD = \angle BCE = \angle BDF = \theta$$

[1] ftakagi@jn3.so-net.ne.jp

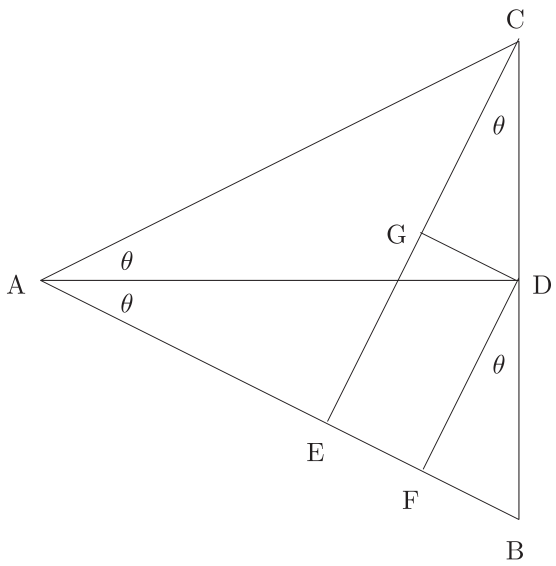

図 2.1: 倍角公式を導くための作図

となる．従って長方形 $EFDG$ の辺について

$$EF = GD = CD\sin\theta = \sin^2\theta$$

以上より

$$\cos 2\theta = AE = AF - EF = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

すなわち

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{2.2.4}$$

同じく $\triangle AEC$ において

$$CE = \sin 2\theta = CG + GE = CD\cos\theta + DF = \sin\theta\cos\theta + BD\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

すなわち

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{2.2.5}$$

2.2.2 倍角の公式の変形

(2.2.4),(2.2.5) より

$$\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + (2\sin\theta\cos\theta)^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2$$

すなわち

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta$$

この式において変数変換 $\theta \to 2\theta$ を施すと

$$(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)^2 = \cos^2 4\theta + \sin^2 4\theta$$

となるが，左辺の ( ) の中は元の式の右辺と同形だから

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^4 = \cos^2 4\theta + \sin^2 4\theta$$

を得る．この操作を繰り返すことにより結局

$$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^m=\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta \quad (m=2^n,\ n=0,1,2,3,\cdots) \tag{2.2.6}$$

というド・モアブルの公式を想起させる式が得られる．

2.2.3　ピタゴラスの定理の証明

(2.2.6) において $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ である．θ を任意定数（実数）とすると，$-1\le\cos\theta\le 1,\quad -1\le\sin\theta\le 1$ であり，$|\cos\theta|$ と $|\sin\theta|$ は同時に 0 になることも同時に 1 になることもない．従って (2.2.6) の左辺は初項，公比共に $0<\cos^2\theta+\sin^2\theta<2$ の無限等比数列の部分列を構成する．従ってよく知られた無限等比数列の収束性に関する定理により

$$\lim_{m\to\infty}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^m=\begin{cases}0 & 0\le\cos^2\theta+\sin^2\theta<1\ \text{のとき}\\ 1 & \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\ \text{のとき}\\ \infty & 1<\cos^2\theta+\sin^2\theta\ \text{のとき}\end{cases} \tag{2.2.7}$$

一方 (2.2.6) の右辺は次の不等式を満たす．

$$0<\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta<2 \tag{2.2.8}$$

(2.2.6),(2.2.7),(2.2.8) より唯一の可能性は $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ である．勿論このとき $\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta=1$ でもある．

2.3　あとがき

ピタゴラスの定理の第 4 の解析的証明として元々はド・モアブルの公式を用いることを考えていた．証明の方法は前節に与えたものと同様である．そこでド・モアブルの公式をピタゴラスの定理を用いないで証明できるかどうかが問題になる．教科書では加法定理による証明を見かけるが，加法定理はピタゴラスの定理を包含しているのでここでは使えない．しかるに前節ではド・モアブルの公式を経由しないで (2.2.6) を導いたので証明の道筋がそれだけ短くなった．

所で (2.2.6) において右辺の正弦関数や余弦関数の引数 $m\theta$ の絶対値は m を大きく取ればいくらでも大きくなる．一方，図 2.1 においては暗に $0\le\theta<\pi/4$ と仮定されている．しかしながら $\pi/4\le\theta<\pi/2$ 及び $\pi/2\le\theta<\pi$ の場合についても倍角の公式 (2.2.4),(2.2.5) が得られることは容易に確かめられる．ここで $\sin\theta$ も $\cos\theta$ も共に周期 2π の周期関数であることと，前者は奇関数，後者は偶関数であることに注意すると，結局公式 (2.2.4),(2.2.5) は全領域 $-\infty<\theta<\infty$ に対して成立すると言える．

今回の解析的証明は前回の 3 通りの証明と比べて短いので，それほど回りくどいという印象は与えないと思う．しかしすでにお気づきの読者もおられると思うが，本ノートには落ちがある．図 2.1 に戻って $AF=AD\cos\theta=\cos^2\theta, FB=DB\sin\theta=\sin^2\theta$ であるから，$1=AB=AF+FB=\cos^2\theta+\sin^2\theta$　この証明を見て見ぬふりをして，すこしだけ回り道をしたというわけである．

参考文献

[1] 高木富士夫，数学・物理通信，　1 巻 5 号 (2010) 12-20.

「タレスの遺産」から

武藤　徹[2]

3.1　はじめに

「タレスの遺産」 [1] に，面白い問題が載っている．図 1 のタブレットの文の内容は，つぎのようである．

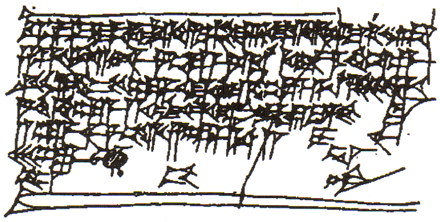

図 1 タブレット

「長さと幅がある．長さと幅とをかけると面積である．長さが幅より多い分を面積に加えると，183 となる．長さと幅とを加えると 27 である．長さ，幅，面積はそれぞれいくらか」

いまの記号では，長さを x, 幅を y とすれば，上の文章は下のように表される．

$$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

この連立方程式を解くことは難しくはない．$y = 27 - x$ を一番目の式に代入すると

$$x^2 - 29x + 210 = 0 \tag{3.1.2}$$

この 2 次方程式は

$$(x - 15)(x - 14) = 0 \tag{3.1.3}$$

となるから

$$x = 15 \text{ または } x = 14 \tag{3.1.4}$$

である．したがって，

$$(x, y) = (14, 13) \text{ または } (x, y) = (15, 12) \tag{3.1.5}$$

が解となる．

解 (3.1.5) を言葉で言い表せば，板の長さ x が 14 なら，幅は y は 13 であり，このときの板の面積は S は 182 である．また板の長さが x が 15 なら，幅は y は 12 であり，このときの板の面積は S は 180 である．

これでタブレットの問題は解けたが，次節ではこの問題をもっと一般化してみよう．なお， [1] にはバビロニア人の解法を説明してある．

[2]mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

3.2 問題の一般化

上の問題で 183 を a，27 を b とおいて一般化してみよう．そうすると

$$\begin{cases} xy + x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \tag{3.2.1}$$

となる．この連立方程式の解 x, y が整数となる条件を考えることにしよう．この式を変形すると

$$\begin{cases} (x-1)(y+1) = a - 1 \\ (x-1) + (y+1) = b \end{cases} \tag{3.2.2}$$

となる．そうすると $x-1, y+1$ の解はつぎの二次方程式の二つの根となっている．

$$t^2 - bt + (a-1) = 0 \tag{3.2.3}$$

すなわち，解 t は

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-1)}}{2} \tag{3.2.4}$$

これが整数となる条件をもとめるのにつぎのプログラムをつくって実行をする．

```
10 OPTION ANGLE DEGRESSS
30 SET WINDOW -16,40, -16,40
40 DRAW GRID
50 SET POINT STYLE 4
60 FOR B=1 to 100
70    FOR A=1 TO 1+B^2/4
80       LET K=(B-SQR(B^2-4*A+4))/2
90       LET S=K-INT(K)
100       IF S=0 THEN PRINT A,
110       IF S=0 THEN PRINT B
120       IF S=0 THEN PLOT POINTS: A, B
130   NEXT A
140   NEXT B
150 SET LINE COLOR 4
160 PLOT LINES: 0,0; 40,40
170 PLOT LINES: -3,0; 39,21
180 PLOT LINES: -8,0; 40,16
190 PLOT LINES: -15,0; 37,13
200 PLOT LINES: -24,0; 36,12
520 END
```

プログラムを実行した結果は図 2 のようになる．

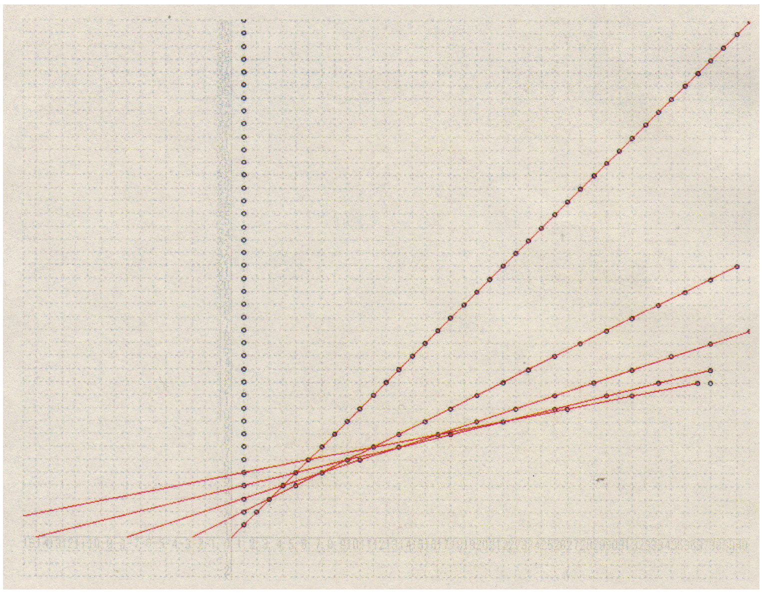

図 2 実行結果

点が直線上に並んでいるので，その方程式を

$$a = mb + n \tag{3.2.5}$$

とおいてみる．このとき解 t の分子の根号の中の式は

$$b^2 - 4(a-1)$$

であるから，この式に $a = mb + n$ を代入すると

$$b^2 - 4(a-1) = (b-2m)^2 - 4(m^2 + n - 1) \tag{3.2.6}$$

となり，これが完全平方となるためには

$$n = 1 - m^2 \tag{3.2.7}$$

となる整数 m が存在することが十分条件である．グラフからは必要条件でもあるらしい．

その後，中野　潤（東京都立神代高校）さんからつぎのような補足の連絡があった（記述の一部は中西　襄氏（京都大学名誉教授）の示唆により変更した）．

N を整数として

$$b^2 - 4(a-1) = N^2 \tag{3.2.8}$$

とおく．この等式を変形すれば，

$$(b+N)(b-N) = 4(a-1) \tag{3.2.9}$$

となる．

$$(b+N) - (b-N) = 2N \tag{3.2.10}$$

であるので，$b+N$ と $b-N$ の 2 数の差は偶数である．

したがって，$b-N$ が奇数ならば，$b+N$ は奇数もなるので，$b-N$ が奇数の場合には明らかに条件を満たさないので考える必要がない．

$b-N$ が偶数ならば，$b+N$ も偶数となる．

いま，

$$\frac{b-N}{2} = m \tag{3.2.11}$$

とおけば，$N = b - 2m$ であるので $b + N = 2(b - m)$ となる．

したがって，

$$
\begin{aligned}
a - 1 &= \frac{(b+N)(b-N)}{4} \\
&= m(b-m) \qquad (3.2.12)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
a = mb + (1 - m^2) \qquad (3.2.13)
$$

となる整数 m が存在することが $b^2 - 4(a-1)$ が完全平方となるための必要十分条件であることがわかる．

3.3　おわりに

以上で一般化した問題が解けたので，数学的にはなにも付け加えることはない．

下につけた補遺は編集者（矢野）によるものであり，武藤とは関係がない．おそらく蛇足であるだろう．

補遺 1　条件の図示

上で考察で条件がわかったのだから，それで問題は解決なのだが，この条件を図示したら直観的にわかるだろう．そのことを考えよう．

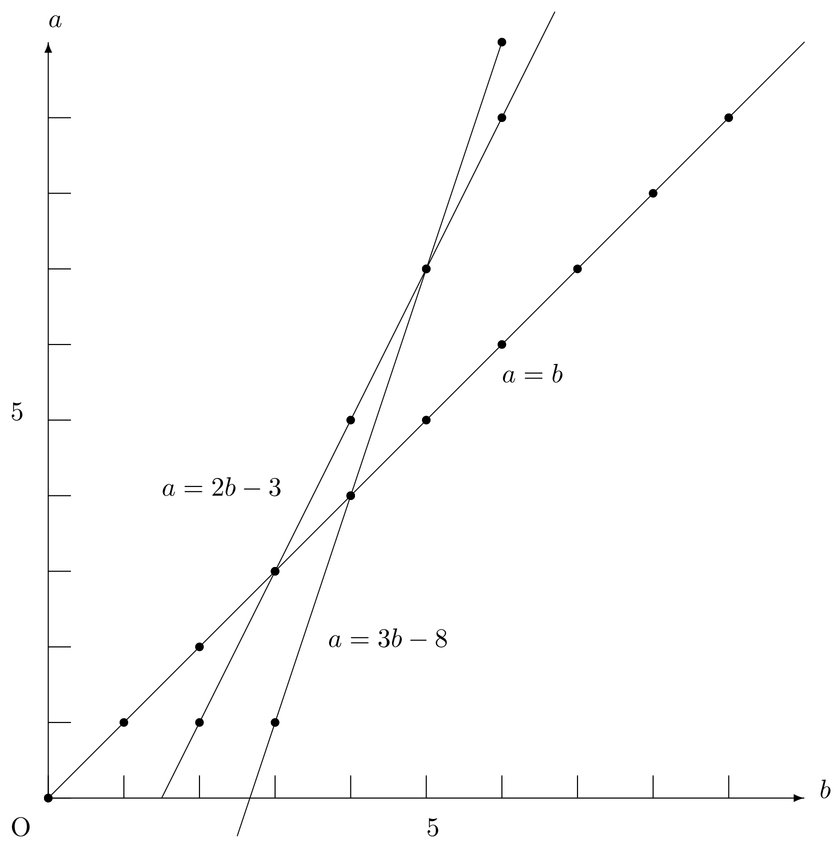

図 3　条件の図示

それは簡単である．正の整数 m を与えて $1-m^2$ を計算し，変数 b の１次関数 $a=mb+(1-m^2)$ のグラフを描けばよい．(b,a) を正の整数に限れば，その１次関数が表す直線上の座標の格子点 (b,a) の値をとることができる．原理的に m は正の整数ならどんな値でもとることができる．実際に

$$
\begin{array}{ll}
a=b & m=1\text{ のとき}\\
a=2b-3 & m=2\text{ のとき}\\
a=3b-8 & m=3\text{ のとき}\\
\quad\cdots & \\
a=13b-168 & m=13\text{ のとき}\\
a=14b-195 & m=14\text{ のとき}\\
\quad\cdots &
\end{array}
$$

のグラフを描けばよい（図 3 参照）．図 3 では各直線上の格子点を黒丸で表している．m の値が大きくなってくると a が正の値をとるためには b の値も大きくならないといけない．

また，m と b の値を決めれば，$a=mb+(1-m^2)$ によって a の値が一義的に決まってくる．だから，b の値を決めても，それとは独立に a の値を勝手に決めて m が整数となるかというと一般にそうはならない．例えば，元の問題に帰って $b=27$ にとっても $a=182$ ととれば，$\sqrt{b^2-4(a-1)}=\sqrt{5}$ となって m は整数にはならない．この $a=182$ は確かに $b^2-4(a-1)>0$ を満たす数にはなっているけれども求める条件を満たしていない．求める条件を満たすものを武藤先生はプログラムで数値実験的に求められた.（矢野　忠）

補遺２　吟味

もし $m=13, b=27$ と与えたときに確かに $a=183$ となっているだろうか．このとき $a=13b-168$ で $b=27$ を代入すれば，確かに $a=351-168=183$ となる．

では $m=14, b=27$ のときはどうだろうか．このときも $a=14b-195$ であり，これに $b=27$ を代入すれば，$a=378-195=183$ となる．

これは $(b,a)=(27,183)$ と値を与えて m についての２次方程式 $m^2-bm+(a-1)=0$ を解いて $m=13,14$ を得たのだから実は当然のことだった.（矢野　忠）

(2011.2.7)

参考文献

[1] W.S. アングラン，J. ランベク （三宅 克哉 訳），タレスの遺産—数学史と数学の基礎から （シュプリンガー・フェアラーク東京，1997) 27-28

視力の基準

矢野　忠[3]

4.1　はじめに

今年 (2010 年) の 2 月に 2 週間ほどにわたって，英語の翻訳の仕事を引き受けた．これは再生医学についてのあるドイツの病院のホームページの翻訳であったが，その中に視力に関することがあり，その中で外国では視力が 5/6 とか 6/5 とかいったような分数で表されることを知った．

私は眼圧が高いために毎月 1 回眼の検診に訪れている．その眼科で視力検査を 5 月行ってくれた，看護師さんに分数で視力を表すのを知っているかと尋ねたら，知っていないとのことだったので，調べておいてくれませんかと依頼をした．その直後の医師の先生の診察のときに外国での分数で視力を表すこととか，そもそも視力は何を基準にして測っているかという説明をした本の一部のコピーとその簡単な説明をしてもらった．そして帰り際に何でもわからないことがあれば聞いて下さいといわれた．

眼科に勤めている看護師さんは分数で表された視力については知らなかったが，さすがに眼科の医師である先生は医学部で学んだらしく知っていた．

そういえば，視力は何を基準にして測っているのか，いままでどこでも聞いたことがない．中学校のころに保健体育の授業があったことは覚えているが，視力の基準について聞いたことはついぞなかった．

眼科医は専門家であるから，視力をどう定義しているかとか，分数視力とかあることを知っているとしても，普通の人である私たちはそういうことについて知っていない．それでそのことについてこのエッセイで述べてみたい．

どうも私の性癖として角度の弧度法（ラディアン）による定義とから述べたくなるのであるが，そうやって長々と述べると視力の定義になかなか到達できない．それで，必要な予備知識は付録に回すことにしてできるだけ短刀直入に述べてみたい．予備知識がない方もあまり気にしないで，まずは本文を読んで頂きたい．もし，もっときちんと知りたい方がいれば，あとで付録を読まれて，もう一度本文を読み返されたらいいであろう．

4.2　視力の基準

視力とは物体の形を見分ける眼の能力である．その程度を表すのに視力の基準がある．それは 1909 年に国際的に協定して取り決められたものである．

図 1 の右に示したようなＣの形の環をランドルト (Landoldt) 環という[4]．この環の直径が 7.5 mm で環の線の太さと切れ目の長さがいずれも 1.5 mm の環を **5 m 離れたところから見て**，字の切れ目が上下左右のどちら側にあるかを見分けることができて，それよりも小さくなると見分けられないような視力を 1.0 としてこれを視力の基準としたものである．

---

[3]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[4]ランドルトはフランスの眼科学者であった．

このランドルト環の切れ目の最小視角（図１左を参照）は 3.0×10^{-4}rad である．これは普通の度数法の角度でいえば，約 $1'$ であるが[5]，これはほぼであってもっと精確には $1' = 2.91 \times 10^{-4}$rad である[6]．そしてその個人が識別できる最小視角が２倍（すなわち，6.0×10^{-4}rad）になれば，このとき視力は 1/2=0.5 となる．これからわかるように視力は人の識別できる最小視角に反比例する．図１のランドルト環の直径が 10 倍大きくなると，それをようやく見分けることのできる人の視力は 1/10=0.1 である．すなわち，環の大きさが 75 mm で 15 mm の切れ目がやっとわかる人は視力 0.1 である．

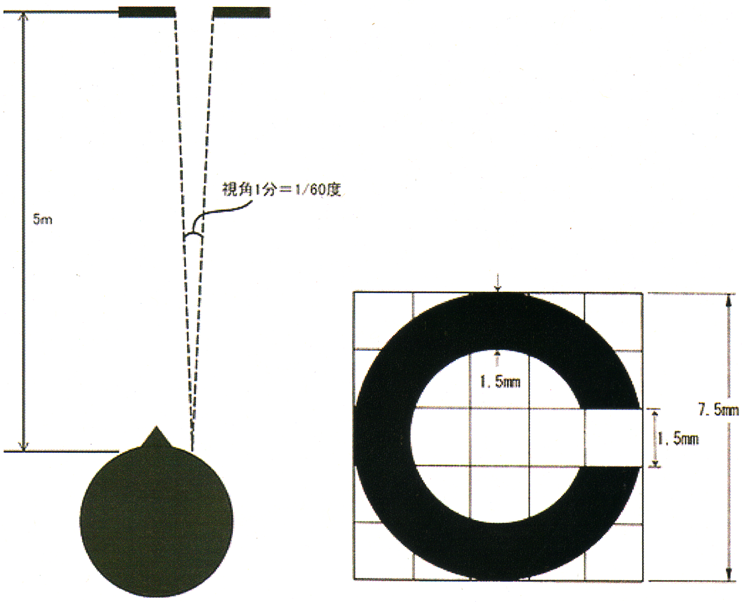

図１．視角とランドルト環．　[2] から引用

日本では視力は 0.1 から 1.0 まで 0.1 刻みに測り，1.0 を越えると 1.2, 1.5, 2.0 と刻み目が粗くなって，全体では 13 段階で測られている．

式を用いて視力を表すことにしよう．視力を I で表し，その最小視角を θ で表すことにすれば，視力 I は最小視角 θ に反比例する．式で表すと

$$I \propto \frac{1}{\theta} \tag{4.2.1}$$

比例定数 k を用いて書くと

$$I = \frac{k}{\theta} \tag{4.2.2}$$

と表される．ここで，最小視角 θ は図１の左で示されているが，ちょっと説明が必要であろう．最小視角 θ は角度であるが，図１の視線の先のランドルト環の切れ目の長さ ℓ を目から視力表までの距離（検査距離という）r で割ったもので定義する．すなわち

$$\theta = \frac{\ell}{r} \tag{4.2.3}$$

で定義する．このように定義された角度を弧度法で測った角といい，単位はラディアン (rad) である（図２）[7]．この角度の定義を (4.2.2) に代入すれば，

$$I = k\frac{r}{\ell} \tag{4.2.4}$$

[5] [1] によれば，２つの星を見分けるためには視角が少なくとも１分以上を必要とすることが昔の天文学者によって知られており，視力の基準を１分角にしたのはそのような事実に由来するという．

[6] rad は弧度法での角度の単位ラディアンの記号である．この角の測り方については付録１を参照せよ．

[7] 円弧の長さ ℓ がちょうど円の半径 r に等しいとき，$1\ \mathrm{rad} = r/r$ である．

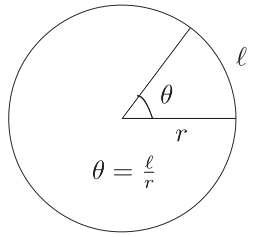

図 2．ラディアンの定義

となる．ここで，$r = 5$ m$, \ell = 1.5$ mm $= 1.5 \times 10^{-3}$ m のときに視力が $I = 1$ であるから，比例定数 k は (4.2.4) から

$$k = I\frac{\ell}{r} = 1 \times \frac{1.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m}} = 0.3 \times 10^{-3} = 0.0003 \tag{4.2.5}$$

となる．この比例定数 k は実は単位として rad をもっている．しかし，rad の単位は次元をもたないので rad を書かないことが多い．

大抵の文献には，視力の基準の説明には検査距離が 5 m で最小視角が 1 分角 $1^{'}$（精確にはほぼ 1 分角）のときの視力が 1.0 と書いてある．そのことを説明しよう．

これは角度を測る方法として，度数法を用いて測っているからである．度数法ではある一点のまわりの角度を 360° とする．角度の 1 分（角），1 秒（角）と 1 度とはつぎのような関係にある．ここで，時間の分，秒と区別するために後ろの（角）を添えたが，ここで用いられた分，秒が角度を意味すると了解して，後は（角）はすべて省くことにする．

$$1\text{ 点のまわりの角度} = 360^\circ \tag{4.2.6}$$
$$1^\circ = 60^{'} \tag{4.2.7}$$
$$1^{'} = 60^{''} \tag{4.2.8}$$

ここで，$^\circ, ^{'}, ^{''}$ はそれぞれ度，分，秒を表す記号である．分，秒は時間の長さに対する呼び方と対応している．

4.3 試視力表

試視力表（単に視力表ともいう）のランドルト環の直径の大きさはどう決めているのだろうか．日本では視力は 0.1 から 0.1 刻みに 1.0 まであり，1.0 を越えると 1.2, 1.5, 2.0 と視力の大きさが粗くなっている．これらの視力と最小視角とが反比例をしていると前に述べた．また，ランドルト環の直径の大きさ，環の太さと切れ目の大きさは 5:1:1 となっている（図 1 右参照）．

視力 1.0 のときに環の直径が 7.5 mm であるから，視力 0.1, 0.2, 0.3 のときには環の直径は

$$7.5 \times \frac{1}{0.1} = 75\ \mathrm{mm} \tag{4.3.1}$$
$$7.5 \times \frac{1}{0.2} = 37.5\ \mathrm{mm} \tag{4.3.2}$$
$$7.5 \times \frac{1}{0.3} = 25\ \mathrm{mm} \tag{4.3.3}$$

となる．以下同様である．視力 1.2 なら環の直径は

$$7.5 \times \frac{1}{1.2} = 6.25\ \mathrm{mm} \tag{4.3.4}$$

である．試視力表から 5 m の位置から視力表を見て，視力検査をするのが普通であるが，最小視角を見つけるためにはランドルト環はたった一つで被試験者の距離を動かしてもよい．あるいはランドルト環を移動させてもよい．

いま，(4.2.4) から視力 I は視標からの距離 r に比例するから，視力表からの距離が r_1 のときの視力を I_1 とし，距離が r_2 のときの視力を I_2 とすれば，その比 $\frac{I_2}{I_1}$ は

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{k\frac{r_2}{\ell}}{k\frac{r_1}{\ell}} = \frac{r_2}{r_1} \tag{4.3.5}$$

である．

具体的にいえば，私などは 5 m の距離から視力 0.1 のランドルト環の切れ目がどちら側にあるかわからないので，いつも視力検査をしてくれる看護師さんが視力 0.1 のランドルト環をもって 4 m の距離のところに立ってどちらかわかりますかと言われる．もし 4 m の距離のところで視力 0.1 のランドルト環の切れ目の方向がわかれば，$I_1 = 0.1, r_1 = 5 \text{ m}, r_2 = 4 \text{ m}$ であるから，私の視力 I_2 は

$$I_2 = \frac{r_2}{r_1}I_1 = \frac{4}{5} \times 0.1 = 0.08 \tag{4.3.6}$$

である．同様にしてようやく 3m のところでわかれば，視力は

$$I_2 = \frac{r_2}{r_1}I_1 = \frac{3}{5} \times 0.1 = 0.06 \tag{4.3.7}$$

である．以下同様である．

これで，5 m 離れて一番上の 0.1 のランドルト環が読めないときにどのようにして視力を算定しているのかがわかった．

4.4 分数視力

さて，まえがきでのべた，分数で表す視力のことを述べよう．

日本では小数で視力を表すが，欧米では分数で視力を表すことが多いと翻訳を通じて知った訳だが，分数視力とはどういうものであろうか．眼科でもらったコピー [3] によれば，つぎのようである．

1909 年の国際的合意にもかかわらず，欧米ではスネレン (Snellen)[8]の提唱による方式（スネレン視標 [1]）が普及している．日本の方式を小数視力というのに対し，6/6, 6/12, 6/60, または 20/20, 20/40, 20/200 等と表し，分数視力という．両者はそれぞれ，次のように定義されている．

$$\text{分数視力} = \text{検査距離}/\text{見ることができた最小視標を視角 } 1' \text{ になるようにしたときの距離} \tag{4.4.1}$$

たとえば，分数視力 6/12(=0.5 小数視力) という場合，分子は検査を 6 m で行ったことを示し，分母は，この視標は（視力 1.0 の人が）12 m の距離で見れば，視角 $1'$ になることを示している（分数視力の定義式中では説明の言葉が省略されているので，この後ろの具体例での説明は重要である）．

$$\text{小数視力} = 1/\text{視角} \tag{4.4.2}$$

視力，すなわち遠見視力は，日本では，検査距離が 5 m であり，欧米では 6 m または 20 ft (=6.096 m) である[9]．したがって 3 者は検査距離が異なる．視角に関しての換算値を表 1 に示す．

[8]スネレンはオランダの眼科学者であった．
[9]1 ft=30.479 cm である．

視角	分数視力 m	分数視力 ft	小数視力	log MAR
10	6/60	20/200	0.1	+1.0
8	6/48	20/160	0.125	+0.9 (=0.9031)
6.25	*	20/125	0.16	+0.8 (=0.7959)
5	6/30	20/100	0.2	+0.7 (=0.6990)
4	6/24	20/80	0.25	+0.6 (=0.6021)
3	6/18	20/60	0.333	+0.5 (=0.4949)
2.5	6/15	20/50	0.4	+0.4 (=0.3979)
2	6/12	20/40	0.5	+0.3 (=0.3010)
1.67	6/10	*	0.6	+0.2 (=0.2014)
1.5	6/9	20/30	0.667	*
1.25	*	20/25	0.8	+0.1 (=0.0969)
1.111	*	*	0.9	*
1	6/6	20/20	1.0	0.0
0.8	*	20/16	1.25	-0.1 (=-0.0969)
0.667	6/4	*	1.5	*
0.5	6/3	20/10	2.0	-0.3 (=-0.3010)

表１．分数視力と小数視力の換算表．$*$ の箇所は適当な数で表せない．

さらに重要なことは，標準視標の相違である．欧米の標準視標はＥ（字）視標である（Ｅ（字）視標の図は省略）．

以上が眼科でもらったコピーからの引用である（ただし，カッコ内にわかりやすいように引用者が説明を付加した．表１の $\log\mathrm{MAR}$ の定義は付録４を参照せよ）．

4.5 度数法の角への変換

ところで，(4.4.2) は実は (4.2.2) とは違っている．これはどうしてだろうか．これは実は角度を測る単位が違うからである．(4.2.2) では角度は弧度法で測っているが，(4.4.2) では度数法で測っている．このことは単位の換算の問題であるが，少しわかり難いのでここで説明をしておこう．

まず，簡単に考えて角度を度数法で測ることにして最小視角と視力が反比例の関係にあるとして，その比例定数を決めよう．(4.2.2) のときとは角度の測り方が違うので，その比例定数を k ではなくて，k_d で表すことにしよう．角度の測り方が違うと一般にその比例定数も違ってくるだろう．ただ，視力 I と最小視角 θ_d とが反比例するという法則は変わらない．そうすると (4.2.2) の代わりに

$$I = \frac{k_d}{\theta_d} \tag{4.5.1}$$

と表される．もし，いま最小視角が $1'$ のときにその視力が 1.0 であるとすれば（これが普通に言われている小数視力の定義であるが，前に述べたように精確ではない），そのときに比例定数 k_d は (4.5.1) から

$$k_d = I\theta_d = 1.0 \times 1' = 1' \tag{4.5.2}$$

となる．これからわかるように比例定数 $k_d = 1'$ となる．この角度の単位である分は分母の角度の分と分子分母で約分されてしまうから，比例定数を $k_d = 1$ としていいのである．これが実は (4.4.2) が成り立つ理由であ

る．したがって，小数視力を

$$I = \frac{1}{\theta_d} \tag{4.5.3}$$

と書き表したのであった．これが (4.4.2) である．

ところが，2 節で述べたように実は 1 分 $1^{'} = 0.000291$ rad で 0.0003 rad に等しくはない．それで，角を弧度法で測ったときの比例定数 k から，度数法で測った角の場合の比例定数 k_d への換算をしてみよう．このとき

$$\begin{aligned} k &= 0.0003\text{rad} \\ &= 0.0003 \times \frac{1^{'}}{0.000291} \\ &= 1.0309 \times 1^{'} \\ &\equiv k_d \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

この式で $1.0309 \approx 1$ とみなすことができると考えれば，(4.5.2) で比例定数 $k_d = 1^{'}$ としたことと符合している．

さらに，(4.2.2) を角度が度数法で測られたときに書き換えてみよう．このときには付録 1 の (4.6.2) から $1\ \text{rad} = (\frac{1}{0.000291})^{'}$ であるから，ラディアンで測った角 θ に $\frac{1}{0.000291}$ をかければ，

$$\theta_d = \frac{\theta}{0.000291} \tag{4.5.5}$$

は度数法で測った角度となる．したがって，

$$\begin{aligned} I &= \frac{k}{\theta} \\ &= \frac{k \times (\frac{1}{0.000291})^{'}}{\theta \times (\frac{1}{0.000291})^{'}} \\ &= \frac{k_d}{\theta_d} \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

ここで，(4.5.4), (4.5.5) を用いた．また，精確な k_d は (4.5.4) から $k_d = 1.0309^{'}$ で与えられる．

4.6　おわりに

このエッセイでは視力の基準について述べた．また日本で使われている小数視力だけでなく，欧米で使われている分数視力についても述べた．そして視力の検査に使われているランドルト環の大きさと視力との関係が反比例していることを知った．視力は実生活で現れる反比例の一つの例となっている．

私の眼の担当医師である，船坂恭介先生に文献と分数視力等についてご教示を頂いたことを感謝します．

（付録１）度数法と弧度法

度とラディアンで測った角とはどういう関係にあるのであろうか．

いま半径 r の円の円周の長さ ℓ は $2\pi r$ であるから，1 点のまわりの角を弧度法で測れば，この角は $\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ となるが，これが 360° である．したがって，

$$\begin{aligned} 2\pi\ \text{rad} &= 360^\circ \\ \pi\ \text{rad} &= 180^\circ \\ 1\ \text{rad} &= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ \end{aligned}$$

である．実は

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \times 60' = 10800' \tag{4.6.1}$$

であるから，

$$1' = \frac{3.14159}{10800} = 0.000291 \text{ rad} \tag{4.6.2}$$

であり，$1' = 0.0003$ rad ではない．したがって，上に「精確にはほぼ一分角」と書いたのはそのためであった．しかし，このことはかなり細かなことなので，大抵の文献には最小視角が $1'$ のときに視力が 1.0 と書いてある．多分眼科の医師の中でもそのことまで知っている人は少ないのではなかろうか．いい加減だと言われればそうかもしれないが，そのことをあまり厳密にいわなくてもよいだろう．

（付録２）なぜ１点のまわりの角度は 360° か

度数法で角度を測ることは小学校以来，私たちのなじんできた角度の測り方であるが，１点のまわりの角度を 360° とするのはどうしてだろうか．歴史的にこれがどこから来たのかは諸説がある [4]．一説には太陽のまわりを地球が回る一年が 365 日であることから来たのではないかと考えられている．昔は一年を 360 日としていたので，地球が太陽の周りを１日に回る大きさを１度としたのではないかという．もう一つの説は円の半径と弦の長さが等しい中心角を１単位としてそれを 60 進法に合わせて 60 度としたと推測されている．これは正三角形の一つの角を 60 度ととることにあたる．

（付録３）視角と視力１の人が $1'$ に見える距離

表 1 の分数視力の分母は，ある視角が視力 1 の人が $1'$ に見える距離である．これはどうやって決められるのであろうか．ここでは度数法で角度 θ を測ることにする．また，距離 $r = 20$ ft から見たときに最小視角が $\theta_0 = 1'$ である人を視力 1 とするように検査距離を $r_0 = 20$ ft と決めている．すなわち

$$\theta_0 = \frac{1}{\frac{r_0}{r_0}} = 1'$$

である．

一般の人の最小視角を θ とすれば，

$$\theta = \frac{1}{\frac{r_0}{r}}$$

である．したがって

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{r}{r_0}$$

これから

$$r = \frac{\theta}{\theta_0} r_0$$

$\theta_0 = 1'$ であるから，θ が与えられれば，r が求められる．これを表にしておこう．

$\theta(')$	r(ft)
10	200
8	160
5	100
4	80
3	60
2	40
1	20
0.8	16
0.6	12
0.5	10

表 2．　最小視角と距離

（付録４）対数視力

インターネットのサイト [5] によれば，視力の表示法として対数視力というのがある．

これは視力の表し方として対数を用いたもので，合理的であるとしていろいろな方式が提案されたが，実際的には余り使われていない．代表的なものとして中川式と AGO 単位（アメリカ軍事局発表）がある．それらは小数視力 v とし，対数視力 v_1 とすれば

$$v_1 = 50\log_{10} v + 100, \quad \text{中川式}$$
$$v_1 = 4\log_2 2^{10} v, \quad \text{AGO 単位}$$

したがって，小数視力 $v = 1.0$ が中川式 $v_1 = 100$，AGO 単位 $v_1 = 40$ である．

なお，対数視力の一種として最小視角（分を単位）の常用対数を視力とした $\log \mathrm{MAR}$ がある．この視力の表し方は視標の最小視角の対数をとったものがほぼ等間隔となるところに特徴がある．

ここで，$\log \mathrm{MAR}$ は logarithmic minimum angle of resolution の略であり，

$$\log \mathrm{MAR} = \log_{10}(\text{最小視角})$$

で定義されている．これの小数視力との対比は表 1 に載せてある．

（付録５）円弧を弦で評価したときの誤差

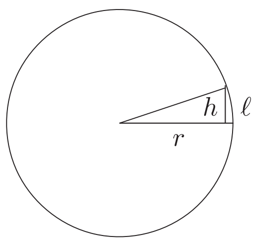

図 3．円弧を弦で評価したときの誤差

ラディアンでの角度の定義では張る角 θ に対応した円弧 ℓ を円の半径 r で割る．ところが実際の視力表でのランドルト環の切れ目の長さは円弧の長さではなく，円弧に対応する弦の長さ h を使っている．このことに気づかれた方はその誤差があるのではないかと心配になっておられるかもしれない．

結論を言ってしまうとこの誤差はとても小さいので気にする必要はないのであるが，そのことが気になる方もいるのではと思われるので，そのことについて議論しておこう．

問題にしているのはつぎのことである．まずは図 3 を見てみよう．

すなわち，h を ℓ の代わりに用いたことである．$\theta \sim 0$ のときには $\ell \sim h$ とすることはそんなに悪い近似ではない．

どれくらい近似がいいかを調べてみよう．$h = r\sin\theta$ であるが，一方 $\ell = r\theta$ である．ここで $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + O(\theta^5)$ と Maclaurin 展開できるから，$\theta = 3.0 \times 10^{-4}\mathrm{rad}$ のときにはその誤差 E はおよそ $E \simeq 1.5 \times 10^{-12}$ という小さなものになる．だから，これは実際上では $r \simeq \ell$ とするのはまったくいい近似である．これは図 3 では弦とそれに対する円弧を目で見てわかるように大きく描いているので，違いがあるが，角度で約 $1'$ はとても小さな角度であるから，本当は眼で見てもその違いがわからないほどである．

（付録６）眼の他覚的検査

この「視力の基準」の話をある会合でしたところ，眼の視力検査は主観的なので，もっと客観的な検査が必要だとの議論が出た．そのときの意見では眼の水晶体の表面の曲率を測れば，客観的な眼の状態がわかるのではないかとの考えが出された．

その意見を踏まえて，客観的な眼の状態を検査する方法を知りたいとインターネットを検索していたところ，自覚的な視力検査をする前に簡単な眼の検査をある装置でするが，それについて疑問を感じたという質問に答えた記事を見つけた [6].

この装置は自動屈折検査（オートレフラクトメーター）装置である．赤外線（簡単のため光という）を目にあてて，光が目に入ったときにその光がどのように変化するかを調べ，球面度数，軸度などから目の屈折状態，近視・遠視・乱視などの有無やその程度を自動的にコンピュータで解析し，客観的（他覚的）に測定し，屈折異常を矯正するために必要なレンズの処方を自動的に計算するという．しかし，眼科ではこの検査の後で自覚的な目の検査をするのが普通である．

これは装置で測定の仕方が悪いとか装置の誤作動とかが起こることをチェックするためである．客観的視力検査もなかなか難しい．また，この検査では視力を検査はせず目の屈折状態を調べている．

参考文献

[1] 鈴木宜民,「屈折異常と眼鏡入門」（金原出版，1982) 13

[2] www.kaiteki-eye.jp/modules/weblog/details.php?blog_ id-28

[3] 増田寛次郎編，眼科学大系 1，眼科診断学・眼機能（中山書店,1993.5）31

[4] 志賀浩二，中間一貫数学コース，数学 2 をたのしむ（岩波書店，2002）168

[5] http://homepage2.nifty.com/kaituka/vision.html

[6] http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1221108817

編集後記

年が変わって，2011 年になった．この数学・物理通信第 6 号を編集している現在ではすでに梅が咲いているが，まだそれほど暖かくはない．いやむしろ寒いといった方がいいであろう．皆様にはご健勝でしょうか．

第 6 号を発行したので，皆様のお手元にお届けをする．幸いなことに中西先生と高木富士夫さんに 5 号に続いてご投稿を頂いた．さらに今回は武藤徹先生（NHK 教育テレビ「高校数学」の初代講師）のお便りを載せることができた．その掲載を認めて頂いた武藤先生に感謝をします．

本文の直後に参考文献が出るように latex のスタイル・ファイルを矢野浩一（駒沢大学）につくってもらった．ここに感謝をします．

今号もページ数の都合で原稿の募集要領とか投稿規程を割愛したが，4 号までの数学・物理通信には載せてあるからそれを見て投稿をお願いしたい.（矢野 忠）