数学・物理通信

1 卷 7 号 2011 年 6 月

編集 新関章三・矢野 忠

2011 年 6 月 1 日

目次

フィボナッチ数列の拡張について (続き)	2
1.1 フィボナッチ数列	2
1.2 一般化フィボナッチ数列	3
1.3 直交多項式の場合	5
1.4 漸化式の係数が非可換量の場合	6
指数関数と対数関数の構成 (I)	8
2.1 はじめに	8
2.2 記号と準備	8
2.3 指数関数の導入	10
2.4 対数関数の導入	12
2.5 指数関数と対数関数との関係	15
2.6 用いられた概念と定理	16
2.7 おわりに	21
$\sin x$ の級数展開	22
3.1 はじめに	22
3.2 問題の設定	22
3.3 問題を逆に解く 1	23
3.4 問題を逆に解く 2	25
3.5 係数をまとめる	28
3.6 おわりに	28
編集後記	29

フィボナッチ数列の拡張について（続き）

中西 襄（京都大学名誉教授）

1.1 フィボナッチ数列

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は、漸化式

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

で定義される。前回フィボナッチ数列の拡張について書いたが、今回はそれへのコメントである¹。

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ の母関数は

$$g(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2}$$

である。証明は前回の記事にあるので、繰り返さない。

一般項は

$$F_n = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} (\varphi_1^n - \varphi_2^n)$$

で与えられる。ここに φ_1 と φ_2 は、2次方程式 $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ の2根である。従って、 $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ 、 $\varphi_1 \varphi_2 = -1$ 、具体的には、

$$\varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

である（ $\varphi_1:1$ は黄金比）。英語の Wikipedia に与えられている証明は、漸化式を

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように書き換え、この列ベクトルを A の固有ベクトル（固有値は φ_1 と φ_2 ）の一次結合で表すという方法である。

ここでは、よりよく知られた別証を与えておこう。差分方程式を解くときにそれを微分方程式に変換する方法があるが、これを利用するのである。すなわち、ある関数 $f(t)$ があって、

$$F_n = D^n f(t)|_{t=0}$$

と書けるとする。ここに $D \equiv d/dt$ 。このとき漸化式から、

$$(D^2 - D - 1)f(t) = 0$$

となる。従って、一般解は、

$$f(t) = C_1 e^{\varphi_1 t} + C_2 e^{\varphi_2 t}$$

¹都合により記号を少し変更して、 $F(n)$ を F_n に、 x を t に、 $s(x)$ を $g(t)$ になどとする。

である．初期条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ により，

$$f(t) = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} (e^{\varphi_1 t} - e^{\varphi_2 t})$$

を得る．これから F_n の一般式が再現されることは見易い．

さて，ここからが今回述べたいことである．定義から明らかに，

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}.$$

これと母関数 $g(t)$ の式とを見比べると，各項の分母に $n!$ があるところだけが異なる．オイラー積分

$$\int_0^{\infty} dt t^n e^{-pt} = n! p^{-n-1}$$

から分かるように， $f(t)$ のラプラス変換が $g(t)$ と結びついているはずである．すなわち，

$$\int_0^{\infty} dt e^{-pt} f(t) = p^{-1} g(p^{-1})$$

となるはずである．実際，積分を遂行して確かめよう． $f(t)$ の式を左辺に代入すると，

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-px} f(t) &= \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \left(\frac{1}{p - \varphi_1} - \frac{1}{p - \varphi_2} \right) \\ &= \frac{1}{p^2 - p - 1} \\ &= \frac{p^{-2}}{1 - p^{-1} - p^{-2}} \\ &= p^{-1} g(p^{-1}) \end{aligned}$$

を得る．

1.2 一般化フィボナッチ数列

フィボナッチ数列を最も一般化した数列 $\{\Phi_n\}$ は，次の漸化式で定義される．

$$\Phi_{n+N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \Phi_{n+k-1} \quad (n \geq 1).$$

ここに， $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ と $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{N-1}$ は任意に与えられたものとする．

前回証明したように，この数列の母関数

$$g_{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n t^n$$

は，

$$g_{\Phi}(t) = \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{N-j} t^j\right)^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{N-m-1} a_{N-j} t^j\right) \Phi_m t^m$$

で与えられる．これに対し，

$$f_{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \frac{t^n}{n!}$$

は、微分方程式

$$\left(D^N - \sum_{k=0}^{N-1} a_k D^k\right) f_\Phi(t) = 0$$

を満足する． $f_\Phi(t)$ に $e^{\alpha t}$ を代入すれば， N 次方程式

$$\alpha^N - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \alpha^k = 0$$

を得る．簡単のため重根はないとしよう（重根がある場合はそうでない場合からの極限をとればよい）． N 個の根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ とすると，

$$f_\Phi(t) = \sum_{j=1}^N e^{\alpha_j t} C_j$$

となる．ただし， C_j は連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^m C_j = \Phi_m \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

の解である．係数の作る行列式はヴァンデルモンド行列式だから， $\prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)$ で与えられる．それは 0 ではないので，クラームルの解法で C_j が求まる．このとき一般の n に対して，

$$\Phi_n = D^n f_\Phi(0) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n C_j$$

である．

$f_\Phi(t)$ と $g_\Phi(t)$ とがラプラス変換で結びついていることを確認しておこう．

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt e^{-pt} f_\Phi(t) &= \int_0^\infty dt \sum_{j=1}^N e^{-(p-\alpha_j)t} C_j \\ &= \sum_{j=1}^N (p - \alpha_j)^{-1} C_j \\ &= \left[\prod_{j=1}^N (p - \alpha_j) \right]^{-1} \sum_{j=1}^N \left[\prod_{i \neq j} (p - \alpha_i) \right] C_j \\ &= p^{-1} \left[\prod_{j=1}^N (1 - \alpha_j p^{-1}) \right]^{-1} \sum_{j=1}^N \left[\prod_{i \neq j} (1 - \alpha_i p^{-1}) \right] C_j \end{aligned}$$

となるので，この右辺が $p^{-1}g(p^{-1})$ に等しいことを示せばよい．

α_j の定義により

$$\prod_{j=1}^N (1 - \alpha_j p^{-1}) = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k p^{k-N} = 1 - \sum_{j=1}^N a_{N-j} (p^{-1})^j$$

であるから，分母因子は OK である．従って， $p^{-1} = t$ とすると，分子因子に対する等式

$$\sum_{j=1}^N \left[\prod_{i \neq j} (1 - \alpha_i t) \right] C_j = \sum_{m=0}^{N-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{N-m-1} a_{N-j} t^j \right) \Phi_m t^m$$

を証明すればよい． t は独立な量だから， t の各幂の係数同士が一致しなければならない．

右辺の t^n の係数は, $m + j = n (\leq N - 1)$ とおいて容易に分かるように,

$$\Phi_n = \sum_{m=0}^{n-1} a_{N-n+m} \Phi_m$$

である.

左辺の t^n の係数は, $\sum_{j=1}^N (-1)^n b_{n,j} C_j$ である. ただし,

$$b_{k,j} \equiv \sum_{I \in I_k(j)} \prod_{i \in I} \alpha_i$$

で, $I_k(j)$ は $\{1, 2, \dots, N\}$ の j 以外の k 個の要素から成る部分集合の全体である. j 以外という制限をはずしたものを I_k とすると,

$$b_{k,j} = \left[\sum_{I \in I_k} \prod_{i \in I} \alpha_i \right] - \alpha_j \left[\sum_{I \in I_{k-1}(j)} \prod_{i \in I} \alpha_i \right]$$

と書けるから, 根と係数の関係を使って,

$$b_{k,j} = -(-1)^k a_{N-k} - \alpha_j b_{k-1,j}$$

である. これを繰り返し用いて $b_{n,j}$ を書き直し, $b_{0,j} = 1$ を使うと,

$$\sum_{j=1}^N (-1)^n b_{n,j} C_j = \sum_{j=1}^N \left[- \sum_{m=0}^{n-1} a_{N-n+m} \alpha_j^m + \alpha_j^n \right] C_j$$

となる. 従って, $\sum_j \alpha_j^m C_j = \Phi_m$ により,

$$\sum_{j=1}^N (-1)^n b_{n,j} C_j = \Phi_n - \sum_{m=0}^{n-1} a_{N-n+m} \Phi_m$$

を得る. これはたしかに右辺の t^n の係数と一致している. $\square$

1.3 直交多項式の場合

直交多項式には, 漸化式や母関数が知られている. この場合, 直交多項式の変数 x はパラメータと考える.

母関数は通常 $g(t)$ の形のものを用いるが, エルミート多項式のように $f(t)$ の形のもを母関数と呼んでいるものもある. 両方が公式集に与えられているものとしては, ルジャンドル多項式がある.

$$g_P(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

$$f_P(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt} J_0(t\sqrt{1-x^2}).$$

実際,

$$\int_0^{\infty} dt e^{-pt} e^{xt} J_0(t\sqrt{1-x^2}) = \frac{p^{-1}}{\sqrt{1-2xp^{-1}+p^{-2}}}$$

である.

漸化式の係数が n に依存しない場合は, 一般化フィボナッチ数列の一種として扱うことができる. そのような直交多項式の例は, チュビシェフ多項式である. 第 1 種チュビシェフ多項式は,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

で定義され，漸化式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

でも与えられる．係数に x が現われているが， n は出てこないのので，一般化フィボナッチ数列と見なせる．その母関数 $g_\Phi(t)$ の一般公式において $N = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 2x$ とすれば，

$$g_T(t; x) = \frac{(1 - a_1 t)T_0(x) + T_1(x)t}{1 - a_1 t - a_0 t^2} = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$$

を得る²．微分方程式

$$(D^2 - 2xD + 1)f_T(t; x) = 0$$

を初期条件 $f_T(0; x) = 1$, $f'_T(0; x) = x$ のもとで解けば，

$$f_T(t; x) = \frac{1}{2} [e^{\alpha_1(x)t} + e^{\alpha_2(x)t}]$$

を得る．ここに $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ は，2 次方程式 $\alpha^2 - 2x\alpha + 1 = 0$ の 2 根，すなわち，

$$\alpha_1(x) = x + i\sqrt{1 - x^2}, \quad \alpha_2(x) = x - i\sqrt{1 - x^2}$$

である．従って，

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [\{\alpha_1(x)\}^n + \{\alpha_2(x)\}^n]$$

となる．もちろん，

$$\int_0^\infty dt e^{-pt} f_T(t; x) = \frac{1}{2} [\{p - \alpha_1(x)\}^{-1} + \{p - \alpha_2(x)\}^{-1}] = p^{-1} g_T(p^{-1}; x)$$

が成立している．

第 2 種 チュビシエフ 多項式³

$$U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

についても全く同様である．漸化式は第 1 種と同形なので， a_0, a_1 は (従って $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ も) 第 1 種のと看同じだが，初期値が $U_0(x) = 0$, $U_1(x) = 1$ である．

$$g_U(t; x) = \frac{t}{1 - 2xt + t^2},$$

$$f_U(t; x) = \frac{1}{2i} [e^{\alpha_1(x)t} - e^{\alpha_2(x)t}].$$

1.4 漸化式の係数が非可換量の場合

2 節の議論は，漸化式に現われる係数 a_k が，パラメータの微分演算子のような非可換量の場合にも使える (2 節の式は順序を考慮して書いた)．ただし， $f_\Phi(t)$ に関しては， $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ が互いに可換になるような場合に限るものとする．

たとえば，ベッセル関数 (第 1 種，第 2 種，第 3 種) は漸化式

$$Z_{\nu+1}(x) = -2\partial_x Z_\nu(x) + Z_{\nu-1}(x)$$

²岩波の数学辞典には $2g_T(t; x) - 1$ が与えられている (分子が $1 - t^2$)．

³因子 $\sqrt{1 - x^2}$ で割らないで，第 2 種 チュビシエフ 関数と呼ぶこともある．

を満たす (ν は整数でなくてもよい) ので, $N = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2\partial_x$ の場合にあたる. ここに, ∂_x は x に関する微分演算子である. 母関数⁴は,

$$g_Z(t; x) = (1 + 2t\partial_x - t^2)^{-1}[(1 + 2t\partial_x)Z_{\nu_0}(x) + Z_{\nu_0+1}(x)t]$$

で与えられる. $f_Z(t; x)$ についてもチュビシェフ多項式の場合と同じように扱える.

微分演算子を含む母関数というものが実用になるかどうかは, いまのところ不明である.

⁴第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ については, 冪級数ではない次のような形の母関数が知られている:

$$\exp[x(t - t^{-1})/2] = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [t^n + (-t)^{-n}]J_n(x).$$

指数関数と対数関数の構成 (I)

新関 章三⁵・岩崎 正春⁶

2.1 はじめに

通常，数学で指数関数と言えば Napier (ネーピア 1550–1617) 数 e を底とする $\mathbf{R}$ 上の指数関数 e^x を指し，対数関数 $\log x$ とは e^x の逆関数であると捉えられている．それはそれで一つの考えではある．しかし指数関数と対数関数とを，両者の関係をも含めて，もう少し詳しく知りたいとき，本稿で述べるような論理展開も一度は試みてよいか．そう考えて本稿をまとめてみた．

まず，一般の指数関数の構成法を述べ，そして指数と対数とは何かを明らかにした．これら 2 つの関係から指数関数と対数関数とを導き，その結果 2 つの関数は互いに他の逆関数となることを示した．最後に，一般の指数関数 e^x を微分すると対数 $\log c$ が現れ，さらに定義 2.1 とこれに続く注意とからも明らかのように，指数関数と対数関数との間には互いに他の逆関数になるという密接な関係があることも示した．

2.2 記号と準備

先ず，数の記号については次のように定める．

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} : \text{実数の全体} \\ \mathbf{Q} : \text{有理数の全体} \\ \mathbf{Z} : \text{整数の全体} \end{array} \right. \quad \& \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^+ : \text{正の実数全体} \\ \mathbf{Q}^+ : \text{正の有理数全体} \\ \mathbf{Z}^+ : \text{正の整数全体} \end{array} \right.$$

2 つの集合 E, F に対し $E \setminus F$ とは集合 E から集合 F の元を全て取り去った残りの元から成る集合とする．例えば $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ と $\mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+$ とはそれぞれ無理数の全体及び正の無理数全体から成る集合となる．

以下， c^b は c の b 乗と読み，これを

$$(*_{2.2.1}) \left\{ \begin{array}{l} b \in \mathbf{R} \\ c \in (0, 1) \cup (1, \infty) \end{array} \right\} \implies c^b \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} 1) \ 1 & : b = 0 \\ 2) \ \overbrace{c \cdot c \cdots c}^{b \text{ 個の積}} & : b \in \mathbf{Z}^+ \\ 3) \ \sqrt[p]{c^p} & : b \in \mathbf{Q}^+ \ \& \ \{p, q\} \subset \mathbf{Z}^+ \\ 4) \ \lim_{n \rightarrow \infty} c^{r_n} & : \{r_n\} \subset \mathbf{Q}^+ \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = b \\ 5) \ (c^{|b|})^{-1} & : b < 0 \end{array} \right.$$

と定義する．上の右側の 4) の極限式では，よく知られている次の性質を用いた：

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ c \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+ \implies \exists \{r_n\} \subset \mathbf{Q}^+ \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = b \\ 2) \ \{r_n\} : \text{Cauchy 列} \implies \{c^{r_n}\} : \text{Cauchy 列} \end{array} \right.$$

これら 1) と 2) の証明はそれぞれ稠密定理 6.1 及び遺伝定理 6.4 に与えておいた．

⁵愛媛県松山市

⁶miwasaki@cure.ocn.ne.jp

次に, c^b の定義式 4) について考えてみよう. この極限值は Cauchy 列 $\{r_n\}$ の選び方には無関係に唯一つ存在する. 即ち, 次の事実:

$$(*2.2.2) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \{p_n\} \\ \{q_n\} \end{array} \right\} \subset \mathbf{Q} : \text{Cauchy 列} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - q_n| = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |c^{p_n} - c^{q_n}| = 0$$

が成り立つ. この証明は一意定理 6.5 に与えておいた. ここで注意すべきは, 一意定理 6.5 の条件には上の場合 (*2.2.2) のような “ $\{q_n\} \subset \mathbf{Q}$ は Cauchy 列” なる条件は無い. その理由は

$$\left. \begin{array}{l} \{p_n\} : \text{Cauchy 列} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - q_n| = 0 \end{array} \right\} \implies \{q_n\} : \text{Cauchy 列}$$

が成り立つからである.

さて今度は指数と対数とを定義する.

定義 2.1 $a \in \mathbf{R}^+$ 及び (*2.2.1) で与えた数 $\{b, c\}$ が $a = c^b$ を満たすとき, b を c を底とする a の対数と呼ぶ. そして, “ b を c を底とする a の対数” は記号で $b = \log_c a$ と書く. 従って, $a = c^b \Leftrightarrow b = \log_c a$ なる関係にある. ◆

注意 上の定義からも容易に理解できるように, 対数とは指数を別の視点から眺めた像であり, 逆に指数とは対数を別の視点から見た像なのである. つまり, 指数と対数とは同じ根から生じた 2 本の枝のようなものである. これは, 指数関数と対数関数との間にも言えることである. ◆

次の補題は容易に導くことが出来る.

補題 2.2 次の大小関係が成り立つ:

$$p \in \mathbf{R}^+ \implies \left\{ \begin{array}{l} 1) c^{-p} \\ 2) c^p \end{array} \right\} < 1 < \left\{ \begin{array}{l} c^p : c \in (1, \infty) \\ c^{-p} : c \in (0, 1) \end{array} \right.$$

証明 1) 条件と稠密定理 6.1 とにより

$$\exists \{r_n\} \subset \mathbf{Q}^+ \ \& \ \left\{ \begin{array}{l} c^{-r_n} < 1 < c^{r_n} \ (\forall n \in \mathbf{Z}^+) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = p > 0 \end{array} \right.$$

が成り立つことから 1) が示された.

2) $c \in (0, 1) \Leftrightarrow c^{-1} \in (1, \infty)$ が成り立つことから分かる. □

さらに, 定義 2.1 及び補題 2.2 から次の補題 2.3 が得られる.

補題 2.3 次の条件が成り立つとする:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a_1, a_2\} \subset \mathbf{R}^+ \\ \{b_1, b_2\} \subset \mathbf{R} \\ c \in (0, 1) \cup (1, \infty) \end{array} \right. \ \& \ \left\{ \begin{array}{l} a_1 = c^{b_1} \\ a_2 = c^{b_2} \end{array} \right.$$

このとき, 次の 1) と 2) とが成り立つ:

$$1) \ c \in (1, \infty) \implies \begin{cases} (a) & a_1 < a_2 \Leftrightarrow b_1 < b_2 \\ (b) & a_1 = a_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2 \\ (c) & a_1 > a_2 \Leftrightarrow b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$2) \ c \in (0, 1) \implies \begin{cases} a_1 < a_2 \Leftrightarrow b_1 > b_2 \\ a_1 = a_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2 \\ a_1 > a_2 \Leftrightarrow b_1 < b_2 \end{cases}$$

証明 転換法で証明する．従って，1) と 2) では全て $\implies$ だけを示せばよい．なお，転換法については “ 2.6 節 用いられた概念と定理 ” の 転換法 6.6 に証明を与えておいた．

1) $\implies$ (a) は補題 2.2 の 1) より (#)

$$a_1 < a_2 \implies c^{b_1} < c^{b_2} \implies c^{b_1 - b_2} < 1 \stackrel{(\#)}{\implies} b_1 - b_2 < 0 \implies b_1 < b_2$$

が成り立つことから分かる．(b) は自明，そして (c) は (a) の結果から分かる．

2) これも 1) と同様な考えで証明することができる．□

2.3 指数関数の導入

本節では，第 1 節で与えた $a = c^b$ なる関係式を用いて，指数関数を定義する．

c^b の定め方および一意定理 6.4 により， $\forall x \in \mathbf{R}$ に対して $c^x \in \mathbf{R}^+$ の値は一意に定まる．こうして $\mathbf{R}$ 上で定義された関数 c^x が得られた．この関数 c^x を c を底とする x の指数関数と呼ぶ．

次に，上で得られた指数関数 c^x の性質を調べてみよう．まず，指数関数の基本定理から始める：

定理 3.1 (指数の法則) $\{c, c_1, c_2\} \subset (0, 1) \cup (1, \infty)$ とする．この時，関数 c^x には次の 3 つの性質がある：

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R} \implies \begin{cases} 1) & c^{x+y} = c^x c^y \\ 2) & (c^x)^y = c^{xy} \\ 3) & (c_1 c_2)^x = c_1^x c_2^x \end{cases}$$

証明 先ず， $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}$ に対し，2 つの Cauchy 列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbf{Q}$ が存在して

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{array} \right\} \implies \begin{cases} 1) & c^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{x_n + y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{x_n} c^{y_n} = c^x c^y \\ 2) & (c^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{x y_n} \stackrel{(*)}{=} e^{xy} \\ 3) & (c_1 c_2)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 c_2)^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_1^{x_n} c_2^{x_n} = c_1^x c_2^x \end{cases}$$

を得る．ここで，2) の等号 (*) は指数連続 5.6 による．以上で定理は証明された．□

ところで，指数関数 c^x の増減関係には次の定理がある．

定理 3.2 $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$ 及び $c \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ に対して

$$x < y \iff \begin{cases} c^x < c^y : c \in (1, \infty) \\ c^x > c^y : c \in (0, 1) \end{cases}$$

証明 補題 2.3 から直ちに分かる．□

さらに、指数関数の極限の性質は次の通りである。

定理 3.3 $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$ に対し、次の式が成り立つ：

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} c^x = \begin{cases} \infty & : c \in (1, \infty) \\ 0 & : c \in (0, 1) \end{cases} \\ 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = \begin{cases} 0 & : c \in (1, \infty) \\ \infty & : c \in (0, 1) \end{cases} \end{array} \right.$$

証明 1) 前半を示す。条件より $c - 1 > 0$ であるから $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ に対し $x > n$ を満たす $x \in \mathbf{R}^+$ を取れば、補題 2.3 により

$$c^x > c^n = (1 + c - 1)^n > n(c - 1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} c^x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n(c - 1) = \infty$$

を得る。従って、上の式は証明された。下の式も同様である。

2) これは $c^{-1} = 1/c$ に注意して 1) の結果を用いればよい。□

指数関数の連続性を証明するために上極限と下極限を次の形で定式化する：

定義 3.4 関数 f は区間 $J \subset \mathbf{R}$ で定義された関数で $x_0 \in J$ とする。この時、上極限と下極限とをそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{f(x) \mid |x - x_0| < 1/n\} \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{f(x) \mid |x - x_0| < 1/n\} \end{array} \right.$$

と定める。但し、 $\{x \mid |x - x_0| < 1/n\} \subset J$ とする。◆

上の定義の下に、次の定理が成り立つ：

定理 3.5 $c \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ に対し、指数関数 c^x は $\mathbf{R}$ で連続である。

証明 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し $\lim_{h \rightarrow 0} c^{x+h} = c^x$ を示せばよい。以下、 $h \in \mathbf{R}$ とする。任意に $n \in \mathbf{Z}^+$ を取ってこれを固定し、更に $n < m$ なる $\forall m \in \mathbf{Z}^+$ を取ると $|h| < 1/m < 1/n$ であるから、指数連続 6.2 により

$$\sup_{|h| < 1/m} |c^h - 1| \leq \frac{1}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right|$$

が得られる。従って、定義 3.4 より

$$0 \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} |c^{x+h} - c^x| = c^x \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} |c^h - 1| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^x}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right| = 0$$

が得られて、定理は証明された。□

上の定理から指数関数 c^x の連続性は明らかになったが、では微分可能性は如何であろうか。結論をいえば微分可能である。しかも無限回微分可能なのである。これを示すためには以下、幾つかの準備が必要である。

指数微分 6.7 を用いて、指数関数 c^x は $\mathbf{R}$ で無限回微分可能である。そこで、その n 次導関数を求めてみよう。このために、定義を 1 つ提起する。指数微分 6.7 により $\forall c \in \mathbf{R}^+$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{c} - 1)$ は存在する。従って、次の定義を得る。

定義 3.6 関数列 $\{L^n\}$ 及び関数 L , そして関数列 $\{E^n\}$ 及び関数 E を

$$\forall(x, n) \in \begin{cases} \mathbf{R}^+ \times \mathbf{Z}^+ & \implies \begin{cases} L^n(x) & \stackrel{\text{def}}{=} n(\sqrt[n]{x} - 1) \\ L(x) & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) \end{cases} \\ \mathbf{R} \times \mathbf{Z}^+ & \implies \begin{cases} E^n(x) & \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ E(x) & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} E^n(x) \end{cases} \end{cases}$$

と定める . ◆

上の定義のもとに微分可能性に関する次の定理を得る .

定理 3.7 次の式が成り立つ :

$$\forall(x, m) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{Z}^+ \implies \left(\frac{d}{dx}\right)^m c^x = L(c)^m c^x$$

証明 先ず , $m = 1$ の場合を考える . $(c^{x+h} - c^x)/h = c^x(c^h - 1)/h$ であるから

$$f(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c^h - 1}{h} \implies \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c^h - 1}{h} = L(c) \quad (2.3.1)$$

であることを示せばよい . そこで各 $n \in \mathbf{Z}^+$ に対し

$$\left. \begin{array}{l} a_n \stackrel{\text{def}}{=} n(\sqrt[n+1]{c} - 1) \\ b_n \stackrel{\text{def}}{=} (n+1)(\sqrt[n]{c} - 1) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} (n+1)^{-1} \leq |h| < n^{-1} \\ \downarrow \\ a_n \leq f(h) < b_n \end{cases}$$

が成り立つ . 指数微分 6.7 により $L(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{c} - 1)$ は収束し , 従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L(c)$$

となって , 挟撃定理 6.8 から (2.3.1) が得られた . $m \geq 2$ の場合は自明である . □

定義 3.6 で与えた $\mathbf{R}^+$ 上の関数 $L(x)$ は , 上の定理からも明らかなように , 一般の指数関数 c^x の微分と密接に関連している . この関数の性質は , 次節で導入される対数関数との関わり合いをも含めて , 詳しく調べることにする .

2.4 対数関数の導入

本節では先ず , $\mathbf{R}^+$ で定義された関数 $L(x)$ の性質を幾つか調べてみる . 一般の対数関数 $\log_c x$ を導入してこの関数の性質を調べる . 最後に , $L(x)$ と $\log_c x$ との関係について調べる .

以下 , 定義 3.6 で与えた関数 L の性質を色々調べてみよう . 先ず , 次の基本的な性質を示す .

定理 4.1 関数 L には次の性質がある :

$$\forall\{x, y\} \subset \mathbf{R}^+ \implies \begin{cases} 1) L(xy) = L(x) + L(y) \\ 2) L(1) = 0 \\ 3) L(1/x) = -L(x) \end{cases}$$

証明 1) 定義 3.6 から , $\frac{1}{n}L^n(x)L^n(y)$ を計算すれば

$$\frac{1}{n}L^n(x)L^n(y) = L^n(xy) - L^n(x) - L^n(y)$$

を得る．従って，この式で $n \rightarrow \infty$ とすれば， $L^n(x)$ は収束するから

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} L^n(x) L^n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{L^n(xy) - L^n(x) - L^n(y)\} = L(xy) - L(x) - L(y)$$

が得られる．これで 1) が証明された．

2) 上の結果で $x = y = 1$ と置か，又は定義 3.6 を見れば明らかである．

3) 上の 1) 及び 2) により， $\forall x \in \mathbf{R}^+$ に対し

$$0 = L(1) = L(x \cdot 1/x) = L(x) + L(1/x)$$

が成り立ち，これで (3) が示された．□

次の定理は，関数 L の基本不等式を記述したものであり L に関する重要な性質は殆んどこの不等式から導かれる．

補題 4.2 $\mathbf{R}^+$ 上の関数 L は次の評価式を満たす：

$$x \in \mathbf{R}^+ \implies \frac{x-1}{x} \stackrel{(1)}{\leq} L(x) \stackrel{(2)}{\leq} x-1$$

証明 指数微分 6.7 から自明である．□

注意 補題 4.2 の不等式 (1) は，不等式 (2) において x を $1/x$ で置き換えて定理 4.1 の 3) を用いても証明することができる．◆

関数 L の微分可能性は，補題 4.2 から直ちに導かれる，次の補題による．

補題 4.3 $0 < |h| < 1$ に対し，次の極限式が成り立つ：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(h+1)}{h} = 1$$

証明 補題 4.2 において $x = h+1$ とおけば

$$\frac{h}{h+1} \leq L(h+1) \leq h$$

が得られ，これより補題は容易に証明できる．□

補題 4.3 から容易に次の定理を導くことができる．

定理 4.4 関数 L は $\mathbf{R}^+$ 上で微分可能であり，その導関数は

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \implies \frac{d}{dx} L(x) = \frac{1}{x}$$

で与えられる．

証明 定理 4.1 から， $\xi = h/x$ と置くことにより，一連の式を得る：

$$\begin{aligned} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} &= \frac{x}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) \frac{1}{x} = \frac{L(1+\xi)}{\xi} \cdot \frac{1}{x} \\ \therefore \frac{d}{dx} L(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{L(\xi+1)}{\xi} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

これで定理は証明された．□

補題 4.5 Napier 数 e に対し，次の関係式が成り立つ：

$$L(e^{\pm 1}) = \pm 1 \text{ (複号同順)}$$

証明 定義 3.6，定理 4.1，指数微分 6.7 及び指数列 6.10 により，次の式が成り立つ：

$$\{m, n\} \subset \mathbf{Z}^+ \implies L^m(E^n(1)) \begin{cases} < 1 : m > n \\ = 1 : m = n \\ > 1 : m < n \end{cases}$$

そして，定義 3.6 より $\lim_{n \rightarrow \infty} E^n(1) = e$ であり関数 $L(x)$ は定理 4.4 より連続であるから

$$\begin{cases} 1 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} L^m(E^n(1)) = \lim_{m \rightarrow \infty} L^m(e) = L(e) \\ 1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} L^n(E^m(1)) = \lim_{m \rightarrow \infty} L(E^m(1)) = L(e) \end{cases}$$

を得る．これより $L(e) = 1$ が証明された．この結果を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= L(1) = L(ee^{-1}) = L(e) + L(e^{-1}) \\ \therefore L(e^{-1}) &= -L(e) = -1 \end{aligned}$$

を示すことが出来る．□

さらに， $L(x) = \log x$ を証明するにはもう 1 つの山を越えなければならない．先ず，定義 3.6 及び上の補題から次の補題を証明することができる．

定理 4.6 次の式が成り立つ：

$$\forall x \in \mathbf{R} \implies L(e^x) = x$$

証明 まず， $x \in \mathbf{Q}$ の場合を考える．定理 4.1 より次の一連の式が成り立つ：

$$\{p, q\} \subset \mathbf{Z}^+ \implies \begin{cases} L(e^q) = q \\ L(e^{1/p}) = 1/p \end{cases} \implies \begin{cases} L(e^{q/p}) = q/p \\ L(e^{-q/p}) = -q/p \end{cases}$$

上の最後の式 $L(e^{-q/p}) = -q/p$ は次の一連の式：

$$0 = L(1) = L(e^{q/p}e^{-q/p}) = L(e^{q/p}) + L(e^{-q/p})$$

から分かる．以上で， $x \in \mathbf{Q}$ の場合，補題は証明された．

次に，上の結果を用いて， $x \in \mathbf{R}$ の場合を考えよう．稠密定理 6.1 より $\forall x \in \mathbf{R}$ に対して $\exists \{r_n\} \subset \mathbf{Q}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる．よって，定理 4.4 より $L(x)$ は $\mathbf{R}^+$ で連続であるから

$$L(e^x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(e^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$$

が成り立つ．よって定理は証明された．□

目指す定理 4.8 を，定理 4.6 を用いて証明するためには， $\mathbf{R}^+$ で定義された対数関数 $\log_e x$ を定義 2.1 にもとづいてきちんと定義しておかなければならない．以下，その定義を提起しよう．

定義 4.7 容易に確認できるように

$$\begin{cases} (e^x)' = e^x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

が成り立つから，中間値の定理により $\forall y \in \mathbf{R}^+$ に対し $\exists x \in \mathbf{R}$ が存在し $y = e^x$ が成り立つ．この時， x は y の関数であるから，これら両者の関係を $x = \log_e y$ と記して， x は e を底とする y の対数関数と呼ぶ．◆

注意 以後, Napier 数 e を底とする $x \in \mathbf{R}^+$ の対数関数は e を省略して単に $\log x$ と書くことにする. ◆

以上の準備のもとに目指す定理が得られる:

定理 4.8 $\forall y \in \mathbf{R}^+$ に対して $L(y) = \log y$ が成り立つ.

証明 定理 4.6 より, $\forall x \in \mathbf{R}$ に対し $L(e^x) = x$ が成り立つ. 他方, $\forall y \in \mathbf{R}^+$ に対して $y = e^x$ なる $x \in \mathbf{R}$ が存在するから, 定義 4.7 より $x = \log y$ が得られる. 従って

$$L(y) = L(e^x) = x = \log y$$

が得られて, 定理は証明された. □

この定理 4.8 から分かるように $L(x)$ の持つ性質は全て $\log x$ も持ち, この逆も正しい. 定義 3.6 で与えた関数 L が定義 2.1 から導かれた e を底とする対数関数 $\log x$ に等しくなることは興味深い.

2.5 指数関数と対数関数との関係

指数関数と対数関数との間には浅からぬ関係があることは, 定理 3.7, 定理 4.6, 定理 4.8 等からも見て取れる. 実際には, 指数関数と対数関数とは互いに他の逆関数となっているのである.

本節の目的を達成するために先ず, 逆関数とは何かについて述べる. いま, $\mathbf{R}$ における 2 つの区間 I と J , 及び 2 つの関数 f と g とに対し次の定義を設定しよう.

定義 5.1 2 つの関数 f と g とが互いに他の逆関数であるとは

$$\left. \begin{array}{l} f: I \rightarrow J \\ g: J \rightarrow I \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f \circ g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)) = x: \forall x \in J \\ g \circ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)) = x: \forall x \in I \end{array} \right.$$

が成り立つときを言う. このとき, $f = g^{-1}$ & $g = f^{-1}$ と記す. そして, それぞれ f は g の逆関数, また g は f の逆関数と呼ぶ. ◆

上の定義の意味を少し調べてみよう. 関数 f が上への関数であるとは

$$f(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in I\} = J$$

が成り立つことであり, また

$$\left. \begin{array}{l} \{a, b\} \subset I \text{ \& } \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \implies a = b$$

が成り立つとき, f は 1 対 1 の関数であるという. これによれば, f が逆関数 g 持つための必要十分条件は f は 1 対 1 上への関数であることである. g についても同じことが言える.

以上の準備のもとに, 我々の目標である次の定理を得る:

定理 5.2 $\mathbf{R}$ 上で定義された指数関数 e^x と $\mathbf{R}^+$ 上で定義された対数関数 $\log x$ とは互いに他の逆関数となっている.

証明 定義 5.1 の仮定とその結論を確認すればよい．先ず，定義 5.1 の記号に対応して定義 5.1 の I と J 及び f と g とをそれぞれ

$$\begin{cases} I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} \\ J \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}^+ \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x \\ g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log x \end{cases}$$

とおけば

$$f : I \longrightarrow J \quad \& \quad g : J \longrightarrow I$$

が得られる．しかも，定理 4.6 と定理 4.8 とにより

$$\begin{cases} g \circ f(x) = \log e^x = x & : \forall x \in J = \mathbf{R} \\ f \circ g(x) = e^{\log x} = x & : \forall x \in I = \mathbf{R}^+ \end{cases}$$

が成り立つ．以上で定理は証明された．□

2.6 用いられた概念と定理

ここでは，本稿の主文で用いた諸概念とその証明について考えてみよう．

先ず，稠密定理を証明する．そのために Gauss 記号を $[\cdot]$ とし

$$\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow [x] \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$$

と定める．これによれば，容易に確認できるように

$$\begin{cases} [-1.4] = -2, [-0.3] = -1, [0.9] = 0, [4.7] = 4, [6] = 6 \\ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow [x] \leq x < 1 + [x] \end{cases}$$

が成り立つ．さらに，数学上の Archimedes (アルキメデス B.C. 287–212) の原理があり，それはこのように記述される：

$$\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R}^+ \quad \& \quad \exists n \in \mathbf{Z}^+ \quad \& \quad a < nb$$

が成り立つ．これらの準備の基に稠密定理を証明することができる．

稠密定理 6.1 Q 及び $\mathbf{R} \setminus Q$ はそれぞれ $\mathbf{R}$ において稠密に分布する．即ち， $a < b$ なる $\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R}$ に対し，开区間 (a, b) には必ず有理数と無理数とが同時に存在する．

証明 Archimedes の原理により，或る $n \in \mathbf{Z}^+$ が存在して

$$\begin{aligned} \sqrt{2} < n(b-a) &\Rightarrow nb > \sqrt{2} + na \geq \sqrt{2} + [na] > 1 + [na] > na \\ &\Rightarrow a < (1 + [na])/n < (\sqrt{2} + [na])/n < b \end{aligned}$$

が成り立ち，従って

$$\begin{cases} (1 + [na])/n \in Q \\ (\sqrt{2} + [na])/n \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$$

であることから，定理は証明された．□

ここで，指数関数の連続性やその他の重要な不等式を示すのに威力を発揮する不等式を与えよう．

指数連続 6.2 次の不等式が成り立つ :

$$\left. \begin{array}{l} (n, x) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{R} \\ c \in (0, 1) \cup (1, \infty) \\ |x| \leq 1/n \end{array} \right\} \implies |c^x - 1| < \frac{1}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right|$$

証明 $y \in \mathbf{R}^+$ とする時, 次の 3 連不等式 :

$$n(y-1) \leq y^n - 1 \leq n(y-1)y^{n-1} \leq n(y-1)y^n$$

は容易に確認できる. ここで, 上の不等式で $y = c^{1/n}$ とおいた式を整理すると

$$n(c^{1/n} - 1) \leq c - 1 \leq n(c^{1/n} - 1)c \implies \frac{1}{n} \left(\frac{c-1}{c} \right) \leq c^{1/n} - 1 \leq \frac{1}{n}(c-1)$$

が得られる. ここで, 次の二組の 2 連不等式を得る :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{c-1}{c} \right| \leq \frac{|c^2-1|}{c} = \left| c - \frac{1}{c} \right| \\ |c-1| \leq \frac{|c^2-1|}{c} = \left| c - \frac{1}{c} \right| \end{array} \right.$$

が成り立つことから

$$|c^{1/n} - 1| \leq \frac{1}{n} \max \left\{ \left| \frac{c-1}{c} \right|, |c-1| \right\} \leq \frac{1}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right| \quad (2.6.1)$$

が得られる. これを用いて

$$|x| < \frac{1}{n} \implies |c^x - 1| \leq \frac{1}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right| \quad (2.6.2)$$

が成り立つことを示そう. 初めに, $c \in (1, \infty)$ の場合を考える. (*₁) により

$$\begin{aligned} c^{-1/n} \leq c^x \leq c^{1/n} &\implies c^{-1/n} - 1 \leq c^x - 1 \leq c^{1/n} - 1 \\ &\implies |c^x - 1| \leq \max \left\{ |c^{-1/n} - 1|, |c^{1/n} - 1| \right\} \leq \frac{1}{n} \left| c - \frac{1}{c} \right| \end{aligned}$$

を得る. これで (2.6.1) が示された. 次に, $c^{-1} = 1/c$ であるから $c \in (0, 1)$ の場合にも同様にして (2.6.2) を証明できる. □

一意定理を証明するには, Cauchy 列に関する次の性質を準備すると都合である.

Cauchy 列 6.3 次の形で Cauchy 列を特徴付けることができる :

$$\{x_n\} \text{ は Cauchy 列} \iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0$$

証明 $\Rightarrow$: $\{x_n\}$ は Cauchy 列であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \exists x_0 \in \mathbf{R}$ となり, 従って

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = |x_0 - x_0| = 0$$

が得られ, これで $\Rightarrow$ が示された.

$\Leftarrow$: 次の論理式が成り立つ :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0 \implies \\ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \ \&\ \exists n_0 \ \&\ \forall n \geq n_0, \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \\ \exists m_0 \in \mathbf{Z}^+ \ \&\ \forall m \geq m_0 \ \&\ |x_n - x_m| < \varepsilon \implies \\ N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{m_0, n_0\} \ \&\ \forall \{m, n\} \subset \mathbf{Z}^+ \ \&\ \min\{m, n\} \geq N_0 \ \&\ |x_n - x_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

これより, $\Leftarrow$ も示された. □

さて今度は, $\{r_n\} \subset \mathbf{R}$ が Cauchy 列ならば $\{a^{r_n}\}$ も Cauchy 列となることを示そう. つまり, Cauchy 列は指数は関して遺伝する. このため遺伝定理と名づけた.

遺伝定理 6.4 $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ とする. この時

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R} : \text{Cauchy 列} \implies \{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^+ : \text{Cauchy 列}$$

が成り立つ.

証明 先ず $a \in (1, \infty)$ とする. $\{r_n\}$ は Cauchy 列であるから

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbf{Z}^+} |r_n| < \infty \implies \sup_{n \in \mathbf{Z}^+} a^{r_n} \leq a^M$$

が成り立ち, 同時に

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{Z}^+ \\ \exists n_0 \in \mathbf{Z}^+ \\ n_0 \leq \forall k < \forall l \end{array} \right\} \implies |r_l - r_k| < \frac{1}{n}$$

が成り立つ. 従って, 指数連続 6.2 により

$$|a^{r_l} - a^{r_k}| = a^{r_k} |a^{r_l - r_k} - 1| \leq \frac{1}{n} \left| a - \frac{1}{a} \right| a^M$$

を得る. これにより, 次のことが分かる:

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a^{r_l} - a^{r_k}| \leq \frac{1}{n} \left| a - \frac{1}{a} \right| a^M$$

この不等式の左辺は $n \in \mathbf{Z}^+$ に無関係であるから, 右辺で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a^{r_l} - a^{r_k}| = 0$$

が成り立つ. 従って, Cauchy 列 6.3 により $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる. これで $a \in (1, \infty)$ の場合の遺伝定理は証明された. 次に, $a \in (0, 1)$ の場合は $a^{-1} = 1/a$ なる関係を用いて, 今と同様な考えでこの定理を証明することができる. $\square$

ここで, c^b を定めた (*2.2.1) の 4) の極限值は一意に定まることを保証する次の定理を与える.

一意定理 6.5 2 つの列 $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbf{Q}$ に対し

$$\left. \begin{array}{l} \{p_n\} \subset \mathbf{Q} : \text{Cauchy 列} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - q_n| = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |c^{q_n} - c^{p_n}| = 0$$

が成り立つ.

証明 条件より $\{p_n\}$ は Cauchy 列であるから $\sup_n |p_n| = L < \infty$ となる. また, 遺伝定理 6.4 の場合と同様に考えると

$$\left. \begin{array}{l} \forall m \in \mathbf{Z}^+ \\ \exists m_0 \in \mathbf{Z}^+ \\ m_0 \leq \forall n \in \mathbf{Z}^+ \end{array} \right\} \implies |q_n - p_n| < \frac{1}{m}$$

$$\therefore |c^{p_n} - c^{q_n}| = c^{p_n} |c^{q_n - p_n} - 1| \leq \frac{1}{m} \left| c - \frac{1}{c} \right| e^L$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c^{p_n} - c^{q_n}| \leq \frac{1}{m} \left| c - \frac{1}{c} \right| e^L$$

$$\therefore 0 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c^{q_n} - c^{p_n}| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c^{q_n} - c^{p_n}| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left| c - \frac{1}{c} \right| e^L = 0$$

を得る. これで定理は証明された. $\square$

次に，転換法による証明について考えてみよう．3つの命題から成る二つの組：

$$\{A_1, A_2, A_3\} \quad \& \quad \{B_1, B_2, B_3\}$$

については，次の定理がある：

転換法 6.6 $\{A_1, A_2, A_3\}$ のうち，何れか1つは必ず成り立ち，また， $\{B_1, B_2, B_3\}$ のうち異なる2つが同時に成り立つことはないとする．このとき，次の論理式が成り立つ．

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \Rightarrow B_1 \\ A_2 \Rightarrow B_2 \\ A_3 \Rightarrow B_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \Leftrightarrow B_1 \\ A_2 \Leftrightarrow B_2 \\ A_3 \Leftrightarrow B_3 \end{array} \right.$$

証明 次の論理式が成り立つことを示せばよい：

$$\left. \begin{array}{l} 1) A_1 \Rightarrow B_1 \\ 2) A_2 \Rightarrow B_2 \\ 3) A_3 \Rightarrow B_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a) A_1 \Leftarrow B_1 \\ b) A_2 \Leftarrow B_2 \\ c) A_3 \Leftarrow B_3 \end{array} \right.$$

これを示そう．1) が成り立つとする．このとき a) が成り立たないとすれば 条件より

$$d) A_2 \Leftarrow B_1 \quad \text{又は} \quad e) A_3 \Leftarrow B_1$$

が成り立たなければならない．d) が成り立つとすると，条件とあわせて $B_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2$ となり，従って B_1 と B_2 とは同時に成り立つことになる．これは条件に反するから，d) は成り立たない．同様に e) が成り立たないことをも証明することができる．よって，a) が成り立たなければならない．他の場合も同様である．□

注意 一般に $n \in \mathbf{Z}^+$ 個の命題から成る二組の場合にも，上と同様な考えで証明することができる．□

指数関数の微分可能性を調べるには次の不等式が必要となる．

指数微分 6.7 $\forall (n, x) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{R}^+$ に対し，次の不等式が成り立つ：

$$1 - \frac{1}{x} \stackrel{(1)}{\leq} (n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1) \stackrel{(2)}{\leq} n(\sqrt[n]{x} - 1) \stackrel{(3)}{\leq} x - 1$$

証明 容易に確認されるように， $(n, a) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{R}^+$ に対し $x = a^n$ とすると

$$a^n - 1 \leq n(a-1)a^n \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

が成り立つ．ここで n を $n+1$ と考えれば，不等式 (1) が示された．次に，不等式 (2) を示そう． $x = b^{n(n+1)}$ とおけば一連の式：

$$\begin{aligned} n(\sqrt[n]{x} - 1) - (n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1) &= n(b^{n+1} - 1) - (n+1)(b^n - 1) \\ &= n(b-1)(1+b+\cdots+b^n) - (n+1)(b-1)(1+b+\cdots+b^{n-1}) \\ &= (b-1)(nb^n - 1 - b - \cdots - b^{n-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

を得る．従って，不等式 (2) が示された．さらに，不等式 (2) は n について単調減少であるから， $n=1$ とおけば不等式 (3) が得られる．以上で証明は得られた．□

さらに，指数関数の微分可能性を調べるには次の形の挟撃定理が好都合である． $\{a_n\}$ & $\{b_n\}$ は2つの実数列で， $f(x)$ は解集合 $[0 < |x-a| < 1] \subset \mathbf{R}$ で定義された実数値関数とする．

以下， $x \in \mathbf{R}$ に依存する命題 $A(x)$ が真である x の集合 $E = \{x \mid A(x) \text{ は真}\}$ を本稿では略して単に $E = [A(x)]$ と記す．

挟撃定理 (1) 6.8 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ に対し, $J_n \stackrel{\text{def}}{=} [1/(n+1) \leq |x| < 1/n]$ と定めると

$$\left. \begin{array}{l} x \in J_n \\ a_n \leq f(x) \leq b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

が成り立つ.

証明 $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$ & $\exists n_0 \in \mathbf{Z}^+$ & $n_0 \leq \forall n \in \mathbf{Z}^+$ に対し

$$\begin{aligned} x \in J_n &\implies c - \varepsilon < a_n \leq f(x) \leq b_n < c + \varepsilon \\ \therefore x \in [0 < |x| < 1/n_0] &= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} J_n \implies |f(x) - c| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. これで定理は証明された. $\square$

ついでに, もう一つ型の異なった挟撃定理を示しておこう.

挟撃定理 (2) 6.9 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ に対し, $J_n \stackrel{\text{def}}{=} (n, n+1]$ と定めると次の式が成り立つ:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in J_n \\ a_n \leq f(x) \leq b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

証明 $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+$ & $\exists n_0 \in \mathbf{Z}^+$ & $n_0 \leq \forall n \in \mathbf{Z}^+$ に対し

$$\begin{aligned} x \in J_n &\implies c - \varepsilon < a_n \leq f(x) \leq b_n < c + \varepsilon \\ \therefore x \in (n_0, \infty) &= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} J_n \implies |f(x) - c| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. これで定理は証明された. $\square$

指数列 6.10 次の式が成り立つ:

$$\left. \begin{array}{l} -x < \forall n \in \mathbf{Z}^+ \\ |x| \leq K \in \mathbf{Z}^+ \end{array} \right\} \implies 0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{(1)}{\leq} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{(2)}{<} e^K$$

証明 不等式 $<$ は自明である. 不等式 (1) は, $\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R}^+$ に対し

$$a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n+1)(a-b)a^n$$

が成り立つことを確認し, この不等式に

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad \& \quad b \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$

を代入して頑張って計算すれば得られる. 次に, この結果により

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \implies \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{K}{n}\right)^n \\ \leq \left(1 + \frac{K}{nK}\right)^{nK} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nK} < e^K \end{cases}$$

が得られて (2) が示された. 以上で指数列 6.10 が証明された. $\square$

2.7 おわりに

以上，指数関数と対数関数とについてそれらの構成法と 2 つの関数の関係やそれらの性質等について調べてきた．第 6 節を設けたのは他の本を参照しなくとも本稿を読むことが出来るようにしたためである．このため原稿自体が少々長くなった．いま別の考え方で，説明がもう少し短くならないかと考えている．解決すれば (II) として本誌に掲載したいと思っている．最後になったが，矢野 忠氏（愛媛大学名誉教授）による研究ノート [1] は図解入りで詳しく記述されて分かり易い．一読すべき優れた論説である．

(2011. 3. 20)

参考文献

- [1] 矢野 忠，対数とは何か，徳島科学史雑誌，No 27 (2008) 11-16

sin x の級数展開

矢野 忠⁷

3.1 はじめに

「無限のなかの数学」(岩波新書) [1] は名著であるが、その p.111 の (10) に sin x の級数展開

$$y = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \quad (3.1.1)$$

が与えられている。

現在 Taylor 展開のことを知っている人には、これはごくありふれた級数展開であり、初歩的な微積分を知っている人なら誰にでもその係数を求めることはまったくやさしい。だが、Newton の時代にはこれはかなり面倒なことであり、この級数の展開を得るためには Newton のような才能を要したのであった。このエッセイではもちろん Taylor 展開によらずに、Newton の考えたであろう方法でこの無限級数を求めてみたい。

これは「無限のなかの数学」の著者の志賀先生の推論に従うということでもある。この書の中にはこの級数展開を求める方針は書いてあるが、スペースの関係もあって詳細な計算は述べられていない。それを具体的に手を動かして計算して求めてみよう。

いずれにしても、現在ではよく知られた結果であり、新しいことは何も得られない。だが、Newton の天才の秘密の万分の 1 くらいに迫ることができようか。

3.2 問題の設定

まず一般化された二項定理を用いて Newton は arcsin x の級数展開を求める⁸。この求め方は [1] に載っているので、ここでは結果をまず書いておく。

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \cdots \quad (3.2.1)$$

この arcsin x の級数展開を用いて、sin x の級数展開を求めることを考えよう。

つぎのような方針で計算をする。いま $y = \sin x$ がつぎのように x のべき級数に展開できたとする。

$$y = \sin x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots \quad (3.2.2)$$

まず、(3.2.2) を x について逆に解いて

$$x = \arcsin y \quad (3.2.3)$$

⁷yanotad@earth.ocn.ne.jp

⁸日本では arcsin x は $\sin^{-1} x$ と表すことが多い。ここでは arcsin x の記号を用いる。Newton が arcsin x から始めた理由は $(1-x^2)^{-1/2}$ の二項展開ができるからである。詳細は [1] の p.101-102 を参照せよ。

とする．そして変数 y についての $\arcsin y$ の展開として (3.2.1) を使えば

$$x = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^9}{9} + \dots \quad (3.2.4)$$

となる．そして変数 y に (3.2.2) の右辺を代入すれば

$$\begin{aligned} x &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots)^3 \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots)^5 \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots)^7 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

となる．この式は恒等式，すなわちどんな x の値に対しても成り立つ式であるから，右辺を展開整理して両辺を比べると右辺の定数項は 0， x の係数は 1， x^2 の係数は 0， x^3 の係数は 0， $\dots$ となるのがわかり，その係数についての方程式を解けば， $b_0, b_1, b_2, \dots$ を求めることができる．このことを Newton は $y = \arcsin x$ を逆に解くといっていた．

実は困難はつぎのことにあつた．右辺のかっこをはずして整理してべき級数として一般項を書き表せるか，また $b_0, b_1, b_2, \dots$ の値が求まったとしてそれから係数の規則性が見出されて，一般の b_n の形が推測できるかどうか．こういう原理的な問題がある．

これらは実は問題を解こうとするときの出くわす原理的な問題であり，問題を解くことができるかどうかは実際に計算を実際に行ってみないとわからない．しかし，これが解けるということ Newton は見つけたのである．

実際に Newton がこの問題が逆に解けるということを見つけたことを知っている現在では原理的な問題にもう悩む必要はない．それで，逆に解く問題は単に手間の問題である⁹．それをどうやってその計算をするかを示すのがこのエッセイの主題である．

3.3 問題を逆に解く 1

この節ではまず (3.2.2) の b_0 から b_6 までの係数を求めよう．(3.2.5) を見てすぐわかることは左辺に定数項がないことから，

$$b_0 = 0$$

であることがわかる．このことから

$$\begin{aligned} y &= b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n + \dots \\ &= b_1x(1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \dots) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

と表すことができる．ここで，

$$\alpha_1 = \frac{b_2}{b_1}, \quad \alpha_2 = \frac{b_3}{b_1}, \quad \alpha_3 = \frac{b_4}{b_1}, \quad \alpha_4 = \frac{b_5}{b_1}, \dots$$

である．

⁹ この原理的な問題に果敢に挑戦できたことは Newton が優れた学者であったことの証明となるのではなからうか．

そこで y^3, y^5, y^7 を 2 項展開すると

$$\begin{aligned}
 y^3 &= b_1^3 x^3 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^3 \\
 &= b_1^3 x^3 \left[1 + 3(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) \right. \\
 &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 \\
 &\quad \left. + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^3 \right]
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}
 y^5 &= b_1^5 x^5 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^5 \\
 &= b_1^5 x^5 \left[1 + 5(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) \right. \\
 &\quad + \frac{5 \cdot 4}{2!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 \\
 &\quad + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^3 \\
 &\quad \left. + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}
 y^7 &= b_1^7 x^7 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^7 \\
 &= b_1^7 x^7 \left[1 + 7(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) \right. \\
 &\quad + \frac{7 \cdot 6}{2!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 \\
 &\quad + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^3 \\
 &\quad \left. + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

これらの (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) を (3.2.4) に代入して, x のべき順に整理すれば,

$$\begin{aligned}
 x &= b_1 x (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 x^3 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots)^3 \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 x^5 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots)^5 \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} b_1^7 x^7 (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots)^7 + \dots \\
 &= b_1 x + b_1 \alpha_1 x^2 + \left(b_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \right) x^3 + \left(b_1 \alpha_3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \cdot 3 \alpha_1 \right) x^4 \\
 &\quad + \left(b_1 \alpha_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left[3 \alpha_2 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_1^2 \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 \right) x^5 \\
 &\quad + \left(b_1 \alpha_5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left[3 \alpha_3 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 2 \alpha_1 \alpha_2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_1^3 \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 \cdot 5 \alpha_1 \right) x^6 \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

この (3.3.5) の両辺の x の同じべきの係数を比較して

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 \\
 b_1 \alpha_1 &= 0 \\
 b_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 &= 0 \\
 b_1 \alpha_3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \cdot 3 \alpha_1 &= 0 \\
 b_1 \alpha_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left[3 \alpha_2 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_1^2 \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 &= 0 \\
 b_1 \alpha_5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left[3 \alpha_3 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 2 \alpha_1 \alpha_2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_1^3 \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 \cdot 5 \alpha_1 &= 0
 \end{aligned}$$

これらの式から $b_1, \alpha_1 = b_2, \alpha_2 = b_3, \alpha_3 = b_4, \alpha_4 = b_5, \alpha_5 = b_6$ を求めれば,

$$b_1 = 1 \quad (3.3.6)$$

$$b_2 = \alpha_1 = 0 \quad (3.3.7)$$

$$b_3 = \alpha_2 = -\frac{1}{3!} \quad (3.3.8)$$

$$b_4 = \alpha_3 = 0 \quad (3.3.9)$$

$$b_5 = \alpha_4 = \frac{1}{5!} \quad (3.3.10)$$

$$b_6 = \alpha_5 = 0 \quad (3.3.11)$$

が得られる.

これで, (3.2.2) の係数 b_0 から b_6 までが求められた. つぎの節で係数 b_7, b_8, b_9 を求めることにしよう.

3.4 問題を逆に解く 2

前節で求めた結果からわかった, $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_5 = 0$ および $b_2 = 0, b_4 = 0, b_6 = 0$ を用いると y^3, y^5, y^7, y^9 の展開の計算が少しだけ簡単になり, x^7, x^8, x^9 の係数を求めることが簡単となる.

この節では, 係数 b_7, b_8, b_9 を求めよう.

$$y = b_1 x (1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \alpha_8 x^8 + \dots) \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned}
 y^3 &= b_1^3 x^3 \left[1 + 3(\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \dots) \right. \\
 &\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} (\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \dots)^2 \\
 &\quad \left. + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} (\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \dots)^3 \right] \quad (3.4.2)
 \end{aligned}$$

ここで, この y^3 を含めて y^5, y^7 の計算の仕方を簡単にするために

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \dots = \alpha_2 x^2 (1 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots) \quad (3.4.3)$$

と書き表す. ここで

$$\beta_2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2}, \quad \beta_4 = \frac{\alpha_6}{\alpha_2}, \quad \beta_5 = \frac{\alpha_7}{\alpha_2}, \quad \beta_6 = \frac{\alpha_8}{\alpha_2}, \quad \dots$$

である．この書き換えをすれば

$$\begin{aligned}
y^3 &= b_1^3 x^3 \left[1 + 3(\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \dots) \right. \\
&\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 x^4 (1 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots)^2 \\
&\quad \left. + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 x^6 (1 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots)^3 \right] \\
&= b_1^3 x^3 \left\{ 1 + 3(\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \dots) \right. \\
&\quad + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 x^4 (1 + 2[\beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots] \\
&\quad + \frac{2 \cdot 1}{2!} [\beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \dots]^2) \\
&\quad + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 x^6 (1 + 3[\beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \dots] \\
&\quad \left. + \frac{3 \cdot 2}{2!} [\beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \dots]^2 + \dots) \right\} \\
&= b_1^3 x^3 \left[1 + 3\alpha_2 x^2 + \left(3\alpha_4 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&\quad \left. + \left(3\alpha_6 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \tag{3.4.4}
\end{aligned}$$

となる．

同様に y^5, y^7, y^9 を計算すると

$$\begin{aligned}
y^5 &= b_1^5 x^5 \left[1 + 5\alpha_2 x^2 + \left(5\alpha_4 + \frac{5 \cdot 4}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&\quad \left. + \left(5\alpha_6 + \frac{5 \cdot 4}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \tag{3.4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^7 &= b_1^7 x^7 \left[1 + 7\alpha_2 x^2 + \left(7\alpha_4 + \frac{7 \cdot 6}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&\quad \left. + \left(7\alpha_6 + \frac{7 \cdot 6}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \tag{3.4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^9 &= b_1^9 x^9 \left[1 + 9\alpha_2 x^2 + \left(9\alpha_4 + \frac{9 \cdot 8}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 + \dots \right] \tag{3.4.7}
\end{aligned}$$

が得られる．

さてこれで準備が整ったので，これらの式を (3.2.4) に代入すると

$$\begin{aligned}
x &= b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + b_8x^8 + \dots \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 x^3 \left[1 + 3\alpha_2 x^2 + \left(3\alpha_4 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&+ \left. \left(3\alpha_6 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \\
&+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 x^5 \left[1 + 5\alpha_2 x^2 + \left(5\alpha_4 + \frac{5 \cdot 4}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&+ \left. \left(5\alpha_6 + \frac{5 \cdot 4}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} b_1^7 x^7 \left[1 + 7\alpha_2 x^2 + \left(7\alpha_4 + \frac{7 \cdot 6}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 \right. \\
&+ \left. \left(7\alpha_6 + \frac{7 \cdot 6}{2!} \alpha_2^2 \cdot 2\beta_2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \alpha_2^3 \right) x^6 + \dots \right] \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} b_1^9 x^9 \left[1 + 9\alpha_2 x^2 + \left(9\alpha_4 + \frac{9 \cdot 8}{2!} \alpha_2^2 \right) x^4 + \dots \right] + \dots
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

この (3.4.8) から x^7, x^8, x^9 の係数を 0 とおいて係数 b_7, b_8, b_9 を求めればよい．まず x^7 の係数から

$$b_7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left(3\alpha_4 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \alpha_2^2 \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 \cdot 5\alpha_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} b_1^7 = 0 \tag{3.4.9}$$

つぎに x^8 の係数から

$$b_8 = 0, \alpha_7 = 0 \tag{3.4.10}$$

最後に x^9 の係数から

$$b_9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b_1^3 \left(3\alpha_6 + \frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 2\alpha_2^2 \beta_2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} b_1^5 \left(5\alpha_4 + \frac{5 \cdot 4}{2!} \alpha_2^2 \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} b_1^7 \cdot 7\alpha_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} b_1^9 = 0 \tag{3.4.11}$$

の式が得られる．

(3.4.9) に $b_1 = 1$ を用いて， b_7 について解けば

$$b_7 = -\frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_2^2) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \tag{3.4.12}$$

となる．

さらに $\alpha_2 = \frac{1}{3!}, \alpha_4 = \frac{1}{5!}$ を (3.4.12) に代入すると

$$b_7 = -\frac{1}{7!} \tag{3.4.13}$$

が得られる．

また，(3.4.11) に $b_1 = 1$ を用いて， b_9 について解けば

$$b_9 = -\frac{1}{2} \left(\alpha_6 + \frac{2}{2!} 2\alpha_2^2 \beta_2 + \frac{2 \cdot 1}{3!} \alpha_2^3 \right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\alpha_4 + \frac{4}{2!} \alpha_2^2 \right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha_2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \tag{3.4.14}$$

となる．

さらに $\alpha_2 = -\frac{1}{3!}, \alpha_4 = \frac{1}{5!}, \alpha_6 = -\frac{1}{7!}$ を用い，また $\beta_2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2}, \beta_4 = \frac{\alpha_6}{\alpha_2}$ の定義を用いれば，

$$\alpha_6 = \alpha_2 \beta_4, \quad \alpha_4 = \alpha_2 \beta_2, \quad 2\alpha_2^2 \cdot \beta_2 = 2\alpha_2 \alpha_4$$

であるから

$$\alpha_6 + 2\alpha_2^2\beta_2 + \frac{1}{3}\alpha_2^3 = \alpha_2(\beta_4 + 2\alpha_4 + \frac{1}{3}\alpha_2^2) = \frac{1}{4 \cdot 3!} \cdot \frac{41}{7 \cdot 9}\alpha_2$$

また,

$$\alpha_4 + 2\alpha_2^2 = \alpha_2(\beta_2 + 2\alpha_2) = -\frac{46}{5!}\alpha_2$$

これらを用いると

$$\begin{aligned} b_9 &= \alpha_2 \left[-\frac{1}{2} \left(\beta_4 + 2\alpha_2\beta_2 + \frac{1}{3}\alpha_2^2 \right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\beta_2 + 2\alpha_2 \right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right] \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9!} \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

3.5 係数をまとめる

いままでに求めた係数をここでまとめよう.

$b_0 = 0$ および (3.3.6)-(3.3.11) から

$$\begin{array}{llll} b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = -\frac{1}{3!} \\ b_4 = 0, & b_5 = \frac{1}{5!}, & b_6 = 0, & \end{array}$$

が得られる. また (3.4.13), (3.4.10), (3.4.15) から

$$b_7 = -\frac{1}{7!}, \quad b_8 = 0, \quad b_9 = \frac{1}{9!}$$

である. これらの係数を (3.2.2) に代入すれば,

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

が得られる. これはすでに 1 節で示した (3.1.1) である.

3.6 おわりに

詳細を省略した数値計算も含めて結構面倒であるが, 計算の核心はすべて二項定理にしたがって計算を地道にすることにつきる. 現在では Taylor 展開があるから, これは歴史的な関心にしかすぎない.

(2011. 4. 27)

参考文献

[1] 志賀浩二「無限のなかの数学」(岩波新書, 1995)

編集後記

2011年3月11日の東日本大震災は歴史に残る大惨事であろう。その歴史の中をいま私たちは生きている。その地震、津波に加えて、さらに福島第一原発事故が加わった。しかし、原発事故は人災と言っていいと思う。

いまや Fukushima といえば、それはもう世界的に福島第一原発の事故を一義的に指すようになっている。

仙台市の高木富士夫さんも東日本大震災に被災された。その震災にもめげず今回もご投稿を頂いたが、ページ数の都合で投稿を頂いたノートは第8号に回させてもらった。この第8号は第7号と同時発行のつもりであったが、都合によりしばらく遅れて発行の予定である。

この「数学・物理通信」をインターネットのサイトにリンクしてくださっている、谷村省吾さんの勤務先が京都大学から名古屋大学へと変わられた。しかし、引き続いて「数学・物理通信」は彼のサイトにリンクされている。いつものことながら、谷村さんのご尽力に心から感謝をしたい（矢野 忠）