数学·物理通信

1巻8号　　2011年6月

編集　新関章三·矢野　忠

2011 年 6 月 17 日

目 次

互除法と連分数

高木富士夫[1]

1.1　はじめに

瀬山士郎氏の著作「不可能を証明する」[1] に触発されて，連分数の作り方について調べた．連分数を構成する代表的な方法はユークリッドの互除法（に相当する漸化式を用いる方法）である．この方法を用いて任意の実数を連分数に展開することができる．

しかし展開したい実数を固定するとき，得られる連分数展開は一意なのか幾通りもあるのかについては，身近な文献 [1],[2],[3] に解説が見当たらなかった.（もちろん，漸化式を指定すれば結果は一意である．しかし互除法に限定しても，漸化式は幾通りもあって，それに応じて得られる連分数も異なるのではないかと考えた.）本ノートでは互除法に限定しても展開の仕方および得られる連分数は幾通りもあることを示す.

２節では連分数の記法と用語に触れてから，標準的な方法を述べる．３節では平方根の連分数展開に適用できる簡易な方法を述べる．４節ではスケール法と称する第３の方法について説明する．５節では，これら３つの方法を素数の平方根の連分数展開に適用して，近似分数（から得られる有理数列）の収束性を数値的に調べる．６節で全体の議論をまとめる.

1.2　標準法

連分数は次のような形の多段の分数である.

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}} \tag{1.2.1}$$

文献 [2] によれば，b_0 は初項，$b_1, b_2, b_3 \cdots$ は部分分母，$a_1, a_2, a_3 \cdots$ は部分分子と呼ばれる．これまで見た文献では，初項，部分分母，部分分子は全て整数であるが，本稿では初項が分数である場合を許容する．部分分子が全て１の連分数は単純または正則連分数と呼ばれる．段数が有限の連分数は有限連分数，段数が無限の連分数は無限連分数と呼ばれる.

ここでは紙面を節約するために (1.2.1) の連分数を次のような記号で表すことにする.

$$\begin{bmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

さて，ある実数 ω_0 を出発値とする次のような漸化式を設定する.

$$\omega_n = [\omega_n] + \frac{1}{\omega_{n+1}} \quad (0 \le n) \tag{1.2.3}$$

[1] ftakagi@jn3.so-net.ne.jp

ここで [ ] はガウス記号，すなわち $[x]$ は x を越えない最大整数を表す．ある整数 m に対して $\omega_m=[\omega_m]$ のときは漸化式による発展はそこで停止する．(1.2.3) による $n+1$ 回の発展により，ω_0 に対して次のような単純連分数が生成される．

$$\omega_0=\begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ [\omega_0], & [\omega_1], & [\omega_2], & [\omega_3], & \cdots, & [\omega_n], & \omega_{n+1}\end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

部分分子が全て 1 になるのは (1.2.3) 右辺第 2 項の分子が 1 だからである．

1.3 簡易法

平方数でない正の整数 q の平方根 $\sqrt{q}$ を考えて

$$\sqrt{q}=[\sqrt{q}]+\sqrt{q}-[\sqrt{q}]=[\sqrt{q}]+\frac{q-[\sqrt{q}]^2}{\sqrt{q}+[\sqrt{q}]} \tag{1.3.1}$$

という式変形を繰り返すと連分数が得られる．すなわち (1.3.1) に続いて

$$\begin{aligned}\sqrt{q}&=[\sqrt{q}]+\frac{q-[\sqrt{q}]^2}{2[\sqrt{q}]+\sqrt{q}-[\sqrt{q}]}\\ &=[\sqrt{q}]+\cfrac{q-[\sqrt{q}]^2}{2[\sqrt{q}]+\cfrac{q-[\sqrt{q}]^2}{\sqrt{q}+[\sqrt{q}]}}\\ &=[\sqrt{q}]+\cfrac{q-[\sqrt{q}]^2}{2[\sqrt{q}]+\cfrac{q-[\sqrt{q}]^2}{2[\sqrt{q}]+\cfrac{q-[\sqrt{q}]^2}{\sqrt{q}+[\sqrt{q}]}}}\\ &=\cdots\end{aligned}$$

となるので，まとめると

$$\sqrt{q}=\begin{bmatrix} & q-[\sqrt{q}]^2 & q-[\sqrt{q}]^2 & \cdots & q-[\sqrt{q}]^2 & q-[\sqrt{q}]^2 \\ [\sqrt{q}], & 2[\sqrt{q}], & 2[\sqrt{q}], & \cdots, & 2[\sqrt{q}], & \sqrt{q}+[\sqrt{q}]\end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

という結果になる．この連分数は $q-[\sqrt{q}]^2=1$ のときは単純連分数であるが，そうでないときは一般に単純連分数ではない．ただし 5 節で示すように一見単純連分数でなくても，簡単な通約で単純連分数に帰着する場合がある．

1.4 スケール法

実数 ω_0 を連分数に展開するに際して，ある正定数 s（スケールパラメータ）を導入して，(1.2.3) と同形の漸化式により $s\omega_0$ が発展するとする．すなわち

$$s\omega_n=[s\omega_n]+\frac{1}{s\omega_{n+1}} \quad (0\le n) \tag{1.4.1}$$

(1.4.1) より ω_0 に対して次のような連分数展開が得られる．

$$\omega_0=\begin{bmatrix} & 1 & s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ [s\omega_0]/s, & s[s\omega_1], & [s\omega_2], & [s\omega_3], & [s\omega_4], & \cdots, & [s\omega_n], & s\omega_{n+1}\end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

ここでもし s が整数ならば，初項 $[s\omega_0]/s$ は一般に分数になる．s をゼロでない整数の逆数にとることも可能である．一般に，ある無理数に収束する無限有理数列を得るのが目的ならば，s として任意の正の有理数をとってもいいだろう．ちなみに $s=1$ のとき (1.4.2) は (1.2.4) に帰着する．

1.5 数値解析

文献 [2] によれば，ある実数 ω_0 が (1.2.2) の形の m 段の連分数に展開されたとき

$$k_n = \left[\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdots, & b_n \end{array}\right] \quad (0 \le n < m) \tag{1.5.1}$$

は第 n 近似分数と呼ばれる．また $n \to \infty$ の極限で数列 $\{k_n\}$ が収束するとき，無限連分数は収束するという．なお文献 [4] によれば，無限連分数の収束性は無限級数に比べてより難しい固有の問題を含むという．以下では実数 ω_0 を連分数に展開したときの第 n 近似分数（の値）を $\omega_0^{(n)}$ と表すことにする．本節では ω_0 として素数の平方根をとって $\sqrt{2}$ から $\sqrt{13}$ まで解析する．標準法，簡易法及びスケール法で $s = 2$ と取った結果（連分数表示の全てと近似分数の一部）を並べて示す.

1.5.1 標準法の結果

$$\sqrt{2} = \left[\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1, & 2, & 2, & 2, & \cdots, & 2, & \sqrt{2}+1 \end{array}\right] (= 1.41421356\ldots) \tag{1.5.2}$$

(1.5.2) より

$$\sqrt{2}^{(0)} = 1, \quad \sqrt{2}^{(1)} = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \sqrt{2}^{(2)} = \frac{7}{5} = 1.4, \quad \sqrt{2}^{(3)} = \frac{17}{12} = 1.4166666\ldots \tag{1.5.3}$$

$$\sqrt{2}^{(4)} = \frac{41}{29} = 1.4137931\ldots, \quad \sqrt{2}^{(5)} = \frac{99}{70} = 1.4142857\ldots, \quad \sqrt{2}^{(6)} = \frac{239}{169} = 1.4142011\ldots \tag{1.5.4}$$

真値の上下に振動しながら収束する.

$$\sqrt{3} = \left[\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 2, & 1, & 2, & \cdots, & 1, & 2, & (\sqrt{3}+1)/2 \end{array}\right] \tag{1.5.5}$$

または

$$\sqrt{3} = \left[\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 2, & 1, & 2, & \cdots & 2, & 1, & \sqrt{3}+1 \end{array}\right] \tag{1.5.6}$$

(1.5.5) または (1.5.6) より

$$\sqrt{3}^{(0)} = 1, \quad \sqrt{3}^{(1)} = 2, \quad \sqrt{3}^{(2)} = \frac{5}{3} = 1.6666666\ldots, \quad \sqrt{3}^{(3)} = \frac{7}{4} = 1.75 \tag{1.5.7}$$

$$\sqrt{3}^{(4)} = \frac{19}{11} = 1.7272727\ldots, \quad \sqrt{3}^{(5)} = \frac{26}{15} = 1.7333333\ldots, \quad \sqrt{3}^{(6)} = \frac{71}{41} = 1.7317073\ldots \tag{1.5.8}$$

比較的ゆっくり $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ に収束する．以下，近似分数の数値は省略して連分数表示だけ示す.

$$\sqrt{5} = \left[\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2, & 4, & 4, & 4, & \cdots, & 4, & \sqrt{5}+2 \end{array}\right] \tag{1.5.9}$$

連分数が２段以上の周期で循環する場合は，最下段の数に周期の段数だけの場合分けが必要になる．そのような場合は，場合分けを省略して循環部分だけを示す.

$$\sqrt{7} = \left[\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 2, & 1, & 1, & 1, & 4, & 1, & 1, & 1, & 4, & \cdots \end{array}\right] \tag{1.5.10}$$

$$\sqrt{11} = \left[\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3, & 3, & 6, & 3, & 6, & \cdots \end{array}\right] \tag{1.5.11}$$

$$\sqrt{13} = \left[\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3, & 1, & 1, & 1, & 1, & 6, & \cdots \end{array}\right] \tag{1.5.12}$$

$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ の連分数展開はそれぞれ２段，４段，２段，５段周期で循環する.

1.5.2 簡易法の結果

(1.3.2) を用いて平方根を連分数展開すると $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ の結果はいずれも標準法による結果と一致する．その理由はいずれの場合も $q-[\sqrt{q}]^2=1$ を満たすからである．一方，$\sqrt{3}$ と $\sqrt{11}$ はこの関係を満たさないので，一見標準法と異なる結果が得られる．すなわち

$$\sqrt{3}=\begin{bmatrix} & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1, & 2, & 2, & \cdots, & 2, & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix} \tag{1.5.13}$$

$$\sqrt{11}=\begin{bmatrix} & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3, & 6, & 6, & \cdots, & 6, & \sqrt{11}+3 \end{bmatrix} \tag{1.5.14}$$

しかしこれらは直近の部分分子と部分分母の間で簡約できる部分があり，結局標準法の結果と一致することが分かる．$\sqrt{7}$ と $\sqrt{13}$ については次のように標準法と全く異なる結果が得られる．

$$\sqrt{7}=\begin{bmatrix} & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 2, & 4, & 4, & \cdots, & 4, & \sqrt{7}+2 \end{bmatrix} \tag{1.5.15}$$

$$\sqrt{13}=\begin{bmatrix} & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots \\ 3, & 6, & 6, & 6 & 6 & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.16}$$

1.5.3 スケール法の結果

(1.4.1) と (1.4.2) を用いて平方根を連分数に展開する．$s=2$ ととったときの結果だけ示す．

$$\sqrt{2}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1, & 2, & 4, & 1, & 4, & 1, & \cdots, & 4, & 1, & 2(\sqrt{2}+1) \end{bmatrix} \tag{1.5.17}$$

これは標準法の結果 (1.5.2) と一見違う形をしているが，２段目の部分分子の２と部分分母の４を通約して，そのしわ寄せをより下段に波及させると結局同じ形になる．

$$\sqrt{3}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3/2, & 4, & 6, & 2, & 6, & 2, & 6 & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.18}$$

これは標準法の結果 (1.5.5),(1.5.6) と全く異なり，近似分数は次のようになる．

$$\sqrt{3}^{(0)}=\frac{3}{2}=1.5,\quad \sqrt{3}^{(1)}=\frac{7}{4}=1.75,\quad \sqrt{3}^{(2)}=\frac{45}{26}=1.7307692\ldots,\sqrt{3}^{(3)}=\frac{97}{56}=1.7321428\ldots, \tag{1.5.19}$$

$$\sqrt{3}^{(4)}=\frac{627}{362}=1.7320441\ldots,\quad \sqrt{3}^{(5)}=\frac{1351}{780}=1.7320512\ldots,\quad \sqrt{3}^{(6)}=\frac{8733}{5042}=1.7320507\ldots \tag{1.5.20}$$

真値 $\sqrt{3}=1.7320508\ldots$ に向かって急速に収束する．

$\sqrt{5}$ に対する結果は次のようになる．

$$\sqrt{5}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 2, & 4, & 8, & 2, & 8, & 2, & 8, & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.21}$$

これは標準法の結果 (1.5.9) と一見異なるが，２段目の分母分子で通約し，しわ寄せをより下段に波及させると結局同じ形になる．最後に $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ の結果は

$$\sqrt{7}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 5/2, & 6, & 2, & 3, & 10, & 3, & 2, & 3 & 10 & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.22}$$

$$\sqrt{11}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3, & 2, & 1, & 1, & 2, & 1, & 1, & 1, & 12, & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.23}$$

$$\sqrt{13}=\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 7/2, & 8, & 1, & 2, & 1, & 4, & 14, & 4, & 1, & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.5.24}$$

となり，いずれも標準法や簡易法の結果と異なる．$\sqrt{7}, \sqrt{11}$ および $\sqrt{13}$ はいずれも３段目から，それぞれ４段，８段および６段周期で循環する．

1.6 まとめ

本ノートでは，ある実数を連分数に展開する方法は互除法に基づく方法に限定しても一通りでないことを３つの方法を用いて示した．また例として素数の平方根にそれらの方法を適用した結果を示した．スケール法におけるスケールパラメータの取り方は無限個あるから，ある実数の連分数展開も無限個あるかもしれない．スケール法において得られる連分数展開のスケールパラメータ依存性はどうなるのか興味ある問題である．連分数の歴史は古いから，此処で示したことに特に新しいことが含まれているとは思えないが，何かの役に立つことを期待する．

ところで平方根単独の連分数展開とならんで，文献によく出てくるのが黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ の連分数展開である．このような整数と平方根の組み合わせの連分数展開が出てくる理由または必然性を少し考えてみる．

標準法において漸化式 (1.2.3) による ω_0 の発展が最も簡単になるのは $\omega_1 = \omega_0$ すなわち

$$\omega_0 = [\omega_0] + \frac{1}{\omega_0} \tag{1.6.1}$$

が成り立つときである．このとき

$$[\omega_n] = [\omega_0] \quad (0 \le n < \infty) \tag{1.6.2}$$

となるので，(1.2.4) より全ての部分分子が１，全ての部分分母が $[\omega_0]$ という最も簡単な形の無限連分数が得られる．収束性は証明できるが本稿では議論しない．

(1.6.1) より ω_0 は２次方程式

$$\omega_0^2 - [\omega_0]\omega_0 - 1 = 0 \tag{1.6.3}$$

を満たすから，２つの解 $\omega_0 = ([\omega_0] \pm \sqrt{[\omega_0]^2+4})/2$ があるが，不等式 $[\omega_0] \le \omega_0 < [\omega_0]+1$ を満たすべきだから

$$\omega_0 = \frac{[\omega_0] + \sqrt{[\omega_0]^2+4}}{2} \qquad (1 \le [\omega_0]) \tag{1.6.4}$$

が得られる．

(1.6.4) より最も簡単な場合として $[\omega_0] = 1$ のとき，黄金比

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が得られ，以下 $[\omega_0] = 2, 3, 4, 5, ...$ に対して

$$\omega_0 = 1+\sqrt{2},\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}, 2+\sqrt{5},\ \frac{5+\sqrt{29}}{2}, ...$$

となる．

これらの結果と平方根に対する標準法や簡易法の結果は同値である場合がある．例えば $[\omega_0] = 4$ の場合の $\omega_0 = 2+\sqrt{5}$ に対する連分数展開は標準法または簡易法による $\sqrt{5}$ の展開 (1.5.9) と同値である．

漸化式による ω_0 の発展が次に簡単なのは

$$\omega_0 = [\omega_0] + \frac{1}{\omega_1}, \quad \omega_1 = [\omega_1] + \frac{1}{\omega_0}$$

となる場合である．しかし長くなるのでこの辺で話を終える．

(2011.4.28)

参考文献

[1] 瀬山士郎,「不可能を証明する」,　 青土社 (2010.10)

[2] 日本数学会編集，岩波数学辞典　第 3 版，岩波書店 (1985.12)

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Continued_ fraction

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Convergent_ (continued_ fraction)

微分積分ミニマム

矢野　忠[2]

2.1　はじめに

微分と積分が「基礎物理学」[3]では不可欠だと聞いて, 不安になった人も, 物理を学ぶためにさらに微積分を学ばねばならないことに腹を立てている人もいるだろう．だが腹を立てる前にちょっと待ってほしい.「基礎物理学」の内容を理解するためならば微分積分学の全体を知っている必要があるわけではない．単にべき関数の微分積分ができるだけでよい[4].

また, 高等学校で微分積分を学ばなかった人もいるだろう．これはそういう人のための「微分積分ミニマム」である．まずは関数について簡単に述べた後で, 微分, 積分のイメージと定義を述べてから, さらに少し立ち入ったことへと歩を進めよう．ここではべき関数の微分と積分を中心として重要なことに限って述べる[5].

2.2　関数

関数とはある独立な変数 x に対応した, ある変数 y が定まるとき, この 1 対 1 対応を $y = f(x)$ と表して x を独立変数, y または $f(x)$ を関数（または従属変数）という[6]．変数 x および関数 $y = f(x)$ は実数値をとることにしよう[7]．いま独立な変数 x はある領域で連続な値をとるとし, 関数 $y = f(x)$ は連続で微分可能な関数とする．微分可能とは x の関数 $y = f(x)$ をグラフと考えたとき, そのグラフの接線が任意の値の x のところで引けてその接線の傾きが求められるということである.

2.3　微分

微分について述べる前に関数の平均変化率について述べておこう．関数 $f(x)$ があって, $x = x_1$ での関数値を $f(x_1)$, $x = x_2$ での関数値を $f(x_2)$ とすれば, 平均変化率は

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.3.1}$$

で与えられる.

---

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 誤解のないように一言だけ注意しておくと「基礎物理学」は松山大学薬学部学生を対象にしたリメディアル講義を意味しており, 一般の人が想定するような基礎的な物理学のことではない.

[4] 物理を真に学びたいのなら, もちろんもっと微分積分を学ぶ必要があるのはいうまでもない．なお，関数 $y = x^n$ をべき関数という.

[5] このミニマムは松山大学の講義のノートの一部として学生に配布されたものである．この「微分積分ミニマム」だけで自己完結 (self-contained) できるように「基礎物理学」(2007) の講義ノートの微分と積分の項を増補改訂して,「研究と実践（愛数協)」，108 号 (2011. 6) に発表された．今回，再度改訂を行なった.

[6] この関数の定義は全く従来の定義である．現在では関数の定義としてはブラックボックスによる定義の方が親しみやすいかもしれない．その関数の定義を学びたい人は [1] を参照せよ.

[7] 一般には変数と関数が複素数であってもよい.

この平均変化率に出てくる点 x_2 を限りなく x_1 に近づけることを考えよう．その極限を

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \tag{2.3.2}$$

と表し，この $f'(x_1)$ を $x = x_1$ での $f(x)$ の微係数という．図 1 での直線 $y = 2x + 1$ を平行移動して 3 次関数 $y = x^3 - x + 1$ 上の点 $(x, y) = (1, 1)$ での接線である直線 $y = 2x - 1$ に限りなく近づけることを想像してほしい．そういう接線が存在することを関数 $f(x)$ が微分可能であるという．

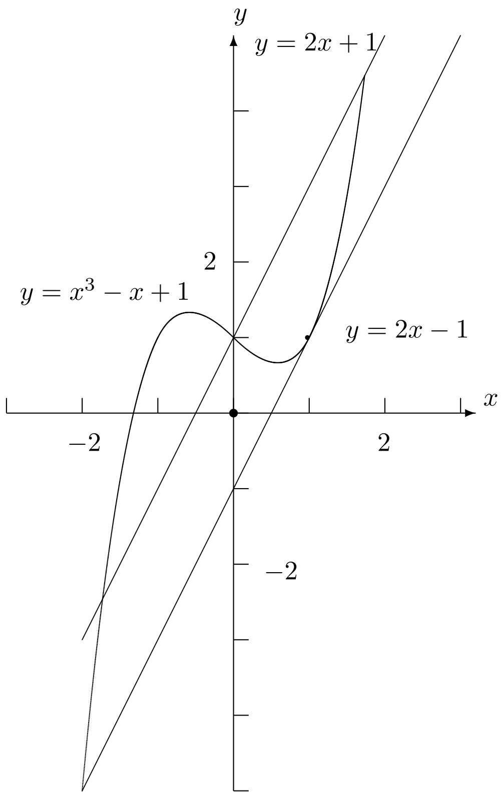

図 1　3 次関数とその接線

ここまで，$x = x_1$ と x の特定の値をとったが，この $x = x_1$ の値は必ずしも特定の値ではなくいろいろと変えることができる．このように $x = x_1$ を変数として取り扱うときには添字 1 を除いて変数 x で表せば，導関数 $f'(x)$ となる．この導関数は

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \tag{2.3.3}$$

とも表す．両方の表記が入り交じって使われるのでとまどわないようにしよう．

さて，微分のイメージとは「曲線の接線の傾きを求める」ことである．まずは要点をまとめておこう．

1. 導関数の定義

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \tag{2.3.4}$$

2. 導関数の意味：$f(x)$ という曲線の変数 x での接線の傾き

3. 変数 x の関数が $f(x) = x^n$ であるとき，その導関数は

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.3.5}$$

である．

4. 微分する ＝ 「曲線の接線の傾き」を求める

以下にいくつかのべき関数の導関数を求めてみよう．

1 次関数 $f(x) = x$ のとき, その導関数は

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1 \tag{2.3.6}$$

となる．すなわち，この 1 次関数の導関数は $f'(x) = 1$ である．この 1 次関数は直線で接線はないが, その傾きは 1 である（図 2 参照).

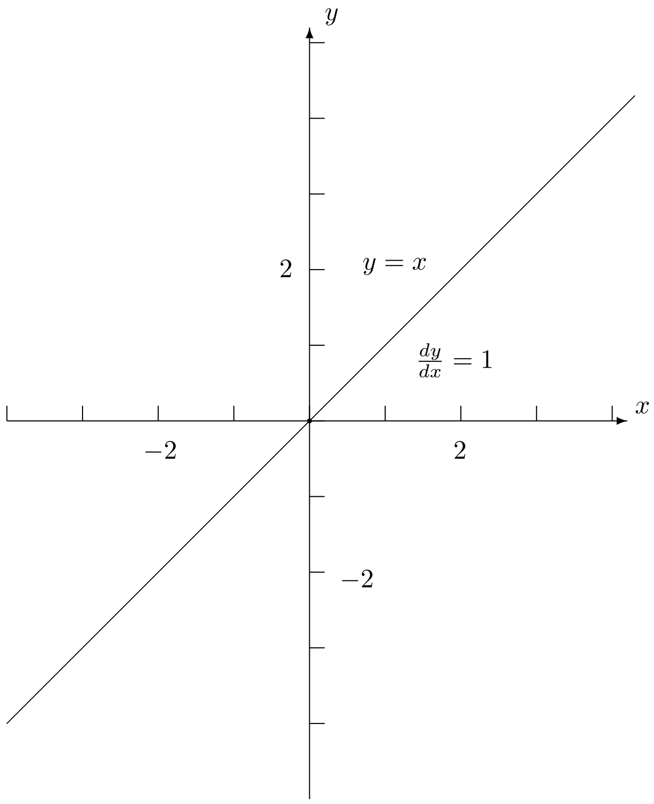

図 2　 1 次関数とその傾き

2 次関数 $f(x) = x^2$ のとき，その導関数は

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h) \\ &= 2x \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

となる．すなわち，この 2 次関数の導関数は $f'(x) = 2x$ である．

導関数の独立変数 x を例えばある特定の値 x_0 にとれば, $x = x_0$ での“ 接線の傾き ”が与えられる[8]. 接線の例は図 3 を参照せよ. 図 3 には $y = x^2$ の上の点 P$(1.5, 2.25)$ での接線 $y = 3x - 2.25$ を示している.

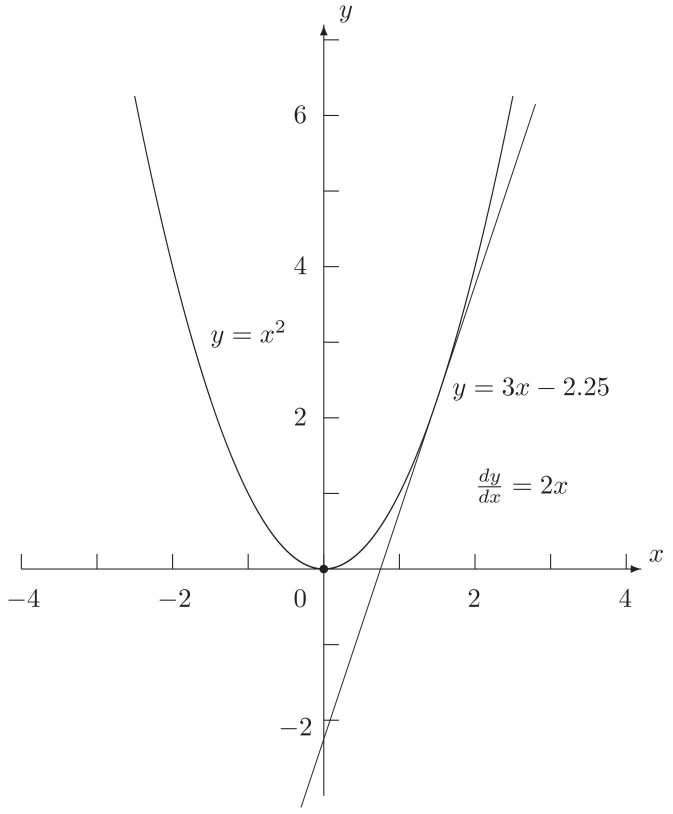

図 3　2 次関数とその接線

3 次関数 $f(x) = x^3$ のとき，その導関数は

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2)\\ &= 3x^2 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

となる．すなわち，この 3 次関数の導関数は $f'(x) = 3x^2$ である．

4 次関数 $f(x) = x^4$ のとき，その導関数は

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6hx^2 + 4h^2x + h^3)\\ &= 4x^3 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

となる．すなわち，この 4 次関数の導関数は $f'(x) = 4x^3$ である．

これらのべき関数の導関数から，n 次関数 $f(x) = x^n$ のとき, その導関数は

$$\frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.3.10}$$

[8] 変数 x をある特定の値に決めないと具体的には接線の傾きは求められない．これは 3 次関数でも 4 次関数でも同様である．

であることが予想され，これが実際に正しいことは 2.9 節で示される．

(2.3.10) は $n > 0$ の整数に対して成り立つが，$n = 0$ および $n < 0$ の整数のときにも，また任意の実数のときにも成り立っている．このことをここでは示していないが，各自で確かめてみよう．

2.4 積分

積分のイメージは「面積を求める」ことである．まず要点をまとめておこう．

1. 定数関数 $y = f(x) = c$ のとき
   関数 $y = f(x) = c$ と x 軸および $x = 0$ と $x = a$ でかこまれた図 4 に示された，（影のついた）長方形の面積 S は
   $$S = \int_0^a f(x)dx = c\int_0^a 1 \cdot dx = c[x]_0^a = ca \tag{2.4.1}$$
   である．

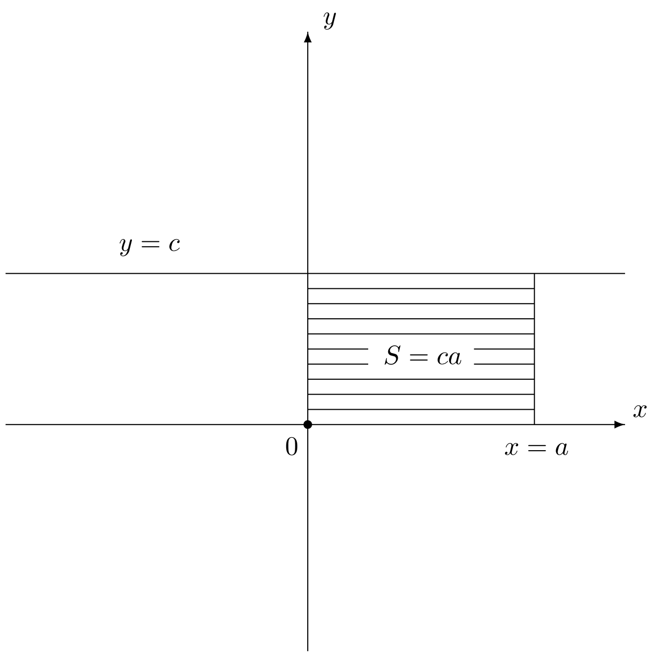

図 4　定数関数とその下の面積

(2.4.1) での定積分記号 $\int_0^a f(x)dx$ は関数 $f(x)$ と x 軸にはさまれ，かつ $x = 0$ と $x = a$ で区切られた領域の面積を表す．ここでは積分の直観的なイメージをわかってもらうために面積を表す場合を考えたが，定積分はいつでも面積を表すわけではないことを注意しておく．

2. 1 次関数 $y = f(x) = x$ のとき
   関数 $y = f(x) = x$ と x 軸および $x = a$ でかこまれた図 5 に示された，（影のついた）三角形の面積 S は
   $$S = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}a^2 \tag{2.4.2}$$
   である．

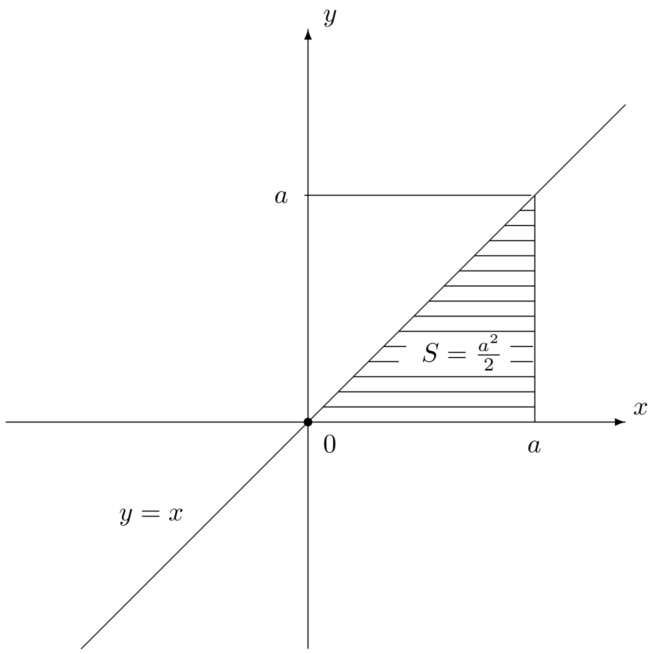

図 5　１次関数とその下の面積

3. 2 次関数 $y=f(x)=x^2$ のとき
関数 $y=f(x)=x^2$ と x 軸および $x=a$ でかこまれた図 6 に示された,（影のついた）領域の面積 S は

$$S=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{1}{3}a^3 \tag{2.4.3}$$

である.

4. $n=0,1,2,\cdots$ として一般の整数 n に対して

$$\frac{df(x)}{dx}=x^n \tag{2.4.4}$$

となる $f(x)$ を求めることを関数 x^n を不定積分するという．すなわち,「不定積分をすることは微分の逆演算である」．ここで“ 微分する ”とは導関数を求めることを指す.

上の (2.4.1),(2.4.2),(2.4.3) の [ ] の中の関数 $x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3$ はそれぞれ $f(x)=1,x,x^2$ の不定積分であり[9], これらは既知として使ったが, もちろんそれらを前もって求めておく必要がある.

つぎにそれらのべき関数の不定積分を一般の整数 n に対して求めることを考えよう．すなわち, (2.4.4) を満たす関数 $f(x)$ を求めてみよう．そのために, 微分を使う.

いま, $f(x)=Ax^{n+1}+C,\ \ C=$ 一定 とおいてみよう[10]．これを x で微分すれば,

$$\frac{d}{dx}(Ax^{n+1}+C)=A(n+1)x^n$$

この右辺が x^n に等しくなるためには

$$A(n+1)=1$$
$$A=\frac{1}{n+1}$$

[9] 不定積分としては定数 C を付加しておくべきだが, このような定積分では打ち消されて, 定数 C にはよらない.
[10] この関数 $f(x)$ の形は天下りであるが, べき関数を試行錯誤的に微分してみれば自明に思えるようになるだろう.

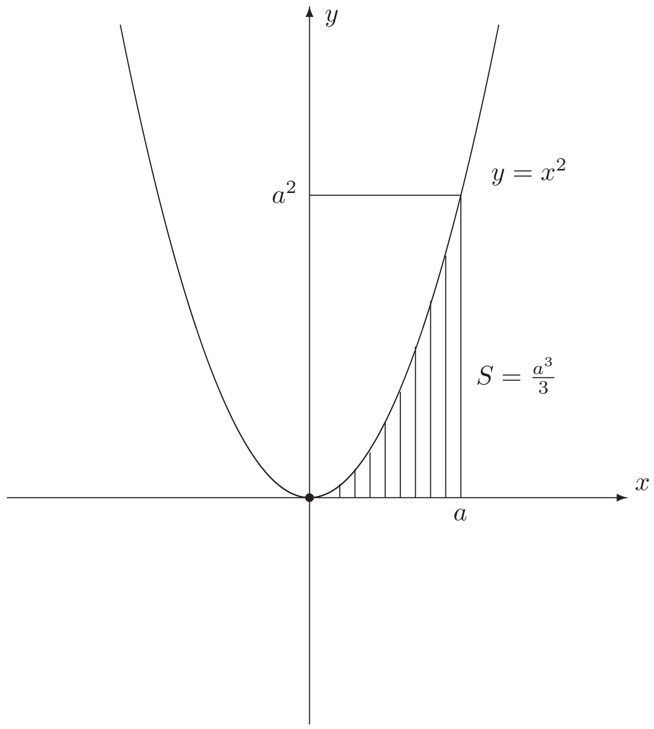

図 6　2 次関数とその下の面積

であればよい．したがって，　微分公式 (2.4.4) を積分公式に書き直せば

$$\int x^n dx = f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{2.4.5}$$

である．

(2.4.5) で $n = 0, 1, 2$ とおけば, (2.4.1),(2.4.2),(2.4.3) の [ ] の中の不定積分 $x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3$（ただし積分定数は $C = 0$ ととっている）が得られる[11]．(2.4.5) では積分記号 $\int f(x)dx$ には積分変数の下限と上限がついていない．この場合を不定積分という．詳しくは次節に述べる．

2.5　微分積分の基本定理

まず導関数を (2.3.4) で定義したが, 微分積分学で一番大事な基本定理[12]を証明なしで述べよう．

いま, ある関数 $F(x)$ があって, これを変数 x で微分すれば, その導関数として $f(x)$ が得られるとする．すなわち,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{2.5.1}$$

とする．このとき, $F(x)$ を関数 $f(x)$ の不定積分といい, この $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a = \text{定数} \tag{2.5.2}$$

[11] もう一度 2.10 節でべき関数の積分公式を導出する．

[12] 普通には基本定理とは，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分として，$\int_a^b f(x)dx = F[b] - F[a]$ が成り立つことをいう．ここでの用語と少し内容が違うかもしれない．

と表す．これは微分と積分が逆演算であることを表している[13]．また (2.5.2) の積分の上限の変数 x を定数 b に置き換えたものを定積分という．

注意すべきことは (2.5.1) と (2.5.2) とが数学的に等値だということである．書き表し方が異なるので違う内容のようだが, 同じことを違った書き表し方をしているにすぎない．しかし, (2.5.1) は $F(x)$ が与えられていて, $f(x)$ を微分によって求める演算であり, 逆に (2.5.2) は $f(t)$ が与えられていて, これを不定積分によって $F(x)$ を求める演算である．したがって, 当てられた焦点は自ずから違っているのはいうまでもない．

微分と積分はよく英和辞典と和英辞典とにたとえられる．ある単語が英語で与えられて，それに対応する日本語が書かれているのが英和辞典であり, 逆に日本語が与えられていて，それに対応する英語が出ているのが和英辞典である．こういったたとえから微分と積分の関係を感じとってほしい [2]．

この微積分学の基本定理の直観的な証明を 2.11 節に与えておく．その導出法が気になる人はこの証明を読んでください．

2.6 線形演算子

ここでちょっと脇道にそれるが, 線形演算子について述べておこう．

記号 O で一つの演算子を表すとしよう．演算子とは例えばある数をかけるとか微分または積分するとかいった「働き」,「作用」等を表す記号である．このとき, つぎのような性質をもつ演算子を線形演算子（または 1 次演算子）という．

$$O[f(x)+g(x)] = O[f(x)] + O[g(x)] \tag{2.6.1}$$
$$O[af(x)] = aO[f(x)] \tag{2.6.2}$$

演算子 O がある一定の数 c を関数にかける作用を表すとき, 上の性質が成り立っていることはすぐにわかるであろう．微分も積分も実は線形演算子である．もっとも微分と積分においてこの性質が成り立つことは証明する必要があるが, 微分に関しては導関数の定義からすぐに証明することができ, 積分に関しても微分の線形性から容易に証明することができる．

すなわち, 微分についてつぎの性質が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \tag{2.6.3}$$
$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}f(x) \tag{2.6.4}$$

さらに, 積分についてもつぎの性質が成り立つ．

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{2.6.5}$$
$$\int [af(x)]dx = a\int f(x)dx \tag{2.6.6}$$

これらの性質は微分や積分をするときに暗黙のうちに使われるからよく注意しておこう．しかし, 微分と積分の計算に慣れてしまっている人には普通のことで特に取り立てて注目することではない．

[13]積分の意味がわかりたい人は定積分の定義を学ぶとよい．しかし, この定積分の定義はコンピュータで数値積分をするときでもなければ, 普通に関数を定積分するときでもあまり有用ではない．積分の意味を理解することと積分計算ができるようになることとはある意味で相反している．

2.7 積の微分公式

べき関数の微分公式を導く前に関数の積の微分公式について述べておこう．いま 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ とがあるとして, その積の関数 $f(x)g(x)$ を微分するときにはつぎの公式が成り立つ[14].

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{2.7.1}$$

この公式の導出は 2.12 節に述べるので, その導出法を知りたい人はそこを見てほしい.

2.8 積の微分公式 (2.7.1) と (2.6.4) との関係

微分公式 (2.6.4) を別の角度から考えてみよう．定数関数 $g(x) = a$ とすれば, この定数関数の微分は

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{da}{dx} = 0 \tag{2.8.1}$$

であるから, これを (2.7.1) へ代入すれば, 右辺の第 2 項は 0 となる．したがって

$$\frac{d[af(x)]}{dx} = a\frac{df(x)}{dx}$$

が得られ, (2.6.4) が成り立つことが確かめられる [3].

2.9 べき関数の微分公式

1 次のべき関数 x や 2 次のべき関数 x^2, 一般の n 次のべき関数 x^n の微分公式は 2.3 節に与えたが,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x &= 1 \\
\frac{d}{dx}x^2 &= 2x \\
&\cdots \\
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

であった.

ここでは x^n の微分公式

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.3.10}$$

を導いてみよう.

それにはまず $(x+h)^m$ の展開が必要である．これを見てみよう．まず $m = 1, 2, 3, \cdots, n$ のときの展開式を調べてみよう.

$$\begin{aligned}
(x+h)^1 &= x + h \\
(x+h)^2 &= x^2 + 2hx + h^2 \\
(x+h)^3 &= x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 \\
(x+h)^4 &= x^4 + 4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4 \\
&\cdots \\
(x+h)^n &= x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \cdots + h^n
\end{aligned} \tag{2.9.1}$$

[14] 積の微分公式は積分では部分積分の公式に対応している.

となる.

(2.9.1) を用いると[15]

$$(x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \cdots + h^n$$

であるから, この式を両辺 h で割れば,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2} + \cdots + h^{n-1}$$

ここで, 上の式の右辺の第 2 項以下の項にはすべて h という因子があるから, $h \to 0$ の極限をとれば, 第 2 項以下の項はすべて 0 となって右辺の第 1 項だけが残る. したがって任意のべき関数の微分公式

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \tag{2.3.10}$$

が導かれた[16].

2.10 べき関数の積分公式

微分積分学の基本定理は微分と不定積分とが逆演算であることを述べているので, 積分公式は微分公式から翻訳をしてやればよい. すなわち, 微分公式から積分公式は直ちに求められる. まず微分公式

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.3.10}$$

の両辺を n で割れば, n は定数であるから, 微分公式は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = x^{n-1} \tag{2.10.1}$$

と書き直せる[17].

微分公式をこの形にしておいてこれを積分公式に翻訳する. すなわち,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = x^{n-1} \Longleftrightarrow \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad C = 一定$$

この矢印の右の形で積分公式はいいのだが, 普通は使いやすいように積分公式の $n-1=m$ とおいて

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m+1 \neq 0, \quad C = 一定 \tag{2.10.2}$$

の形が一般には使われている. これは x^n の微分公式を単に積分公式に翻訳したものである.

このべき関数の積分公式 (2.10.2) は m が -1 でなければ負の整数のときでも，任意の実数のときでも成り立つ. このことを各自で確かめてほしい.

[15](2.9.1) を 2 項展開といい, その証明法はいくつかある [4], [5]. しかし, ここではこの展開の第 2 項の係数が nh であることが重要である. このことは $(x+h)^4$ までの展開から帰納的に推測されるであろう. また第 3 項以下の項では因子として微少量 h が 2 次以上であることがわかれば, 微分の公式を得るためには十分である. また (2.3.10) は積の微分公式から導くこともできる.

[16]しばしば $\frac{dx^n}{dx}$ を $\frac{d}{dx}x^n$ とも表す.

[17] $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right)$ を $\frac{d(\frac{x^n}{n})}{dx}$ とも表す.

2.11 微分積分学の基本定理の直観的証明

まず関数 $f(t)$ から, 原始関数 $F(x)$ をつぎのように定義しよう.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.11.1}$$

同様に $F(x+h)$ は

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

で与えられる. この 2 つの関数の差は

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt && (2.11.2) \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt && (2.11.3) \end{aligned}$$

となる. [18]. いま, 最後には $h \to 0$ の極限をとるので, 小区間 $[x, x+h]$ では被積分関数 $f(t)$ はほぼ一定と考えてもよい. それで被積分関数 $f(t)$ を $f(x)$ と近似して積分の外に出すことができるだろう. そうすると

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= f(x) \int_x^{x+h} dt \\ &= f(x)h && (2.11.4) \end{aligned}$$

となる[19]. この両辺を h で割って $h \to 0$ の極限をとれば,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となるが, この左辺は関数 $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ の定義であるから, したがって微分積分学の基本定理

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{2.5.1}$$

が得られる[20].

2.12 積の微分公式の導出

2 つの関数の積の $f(x)g(x)$ の微分公式 (2.7.1) を導出しよう. そのためにまず $G(x) = f(x)g(x)$ とおこう. ここで, 導関数の定義から

$$\frac{dG(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{(x+h) - x}$$

である. まず

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h) - G(x)}{(x+h) - x} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} && (2.12.1) \end{aligned}$$

[18] (2.11.2) から (2.11.3) はたとえば曲線 $f(t)$ と t 軸と直線 $t = a$ と $t = x + h$ で囲まれた面積 S_2 から曲線 $f(t)$ と t 軸と直線 $t = a$ と $t = x$ で囲まれた面積 S_1 を引くと考えれば直観的に理解しやすい.

[19] ここで暗黙に, 小区間 $[x, x+h]$ で $f(t)$ の値が急激に大きく変化しないことを仮定している. だからこの証明は厳密な数学的証明にはなっていない.

[20] もっと数学的な証明は例えば [6] を参照せよ.

であるから, (2.12.1) で $h \to 0$ の極限をとれば,

$$\begin{aligned}\frac{dG(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right] + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}\end{aligned}$$

となり, (2.7.1) が導かれた.

2.13 おわりに

ここではべき関数の微分積分にテーマを限った. 物理学や工学を学ぶときにこれだけで十分なはずはない. 少なくとも三角関数, 指数関数, 対数関数の微分積分を学ばねばならない [7]. これらを学び, さらに複素解析（関数論）を学ぶと解析学の展望が開けてくるが, それらに触れることは将来の課題としよう.

演習問題

1. $ax^2 + bx + c$ を変数 x で微分せよ.
2. $px + q$ を変数 x で微分せよ.
3. 定数 c を変数 x で微分せよ.
4. $3x^2 + 4x + 7$ を変数 x で微分せよ.
5. $5x + 6$ を変数 x で微分せよ.
6. 6 を変数 x で微分せよ.
7. $y = ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1}$ を変数 x で微分せよ.
8. $\int(2ax + b)dx$ を求めよ.
9. $\int pdx$ を求めよ.
10. $\int 0dt$ を求めよ.
11. $\int(6x + 4)dx$ を求めよ.
12. $\int 5dx$ を求めよ.
13. $\int 0dt$ を求めよ.
14. $\int(-3ax^{-4} - 2bx^{-3} - cx^{-2})dx$ を求めよ.

以上の計算を行い,（演習問題）8-14 の計算の結果はそれぞれ順番に（演習問題）1-7 の微分する前の関数になっていることを確かめよ. 場合によっては定数だけの差があることに注意しよう.「積分は微分の逆演算である」というこの事実は Newton によってはじめて発見された.

付録　積分の考え方

昔から，微分積分は「微（かす）かに分かる，分かった積（つ）もりになる」と冗談で言われてきた．

このミニマムでは微分と積分とが逆演算であるということを用いて不定積分や定積分を求めたので,「積分とは何か」よくわからないかもしれない．それで積分とはどういう考え方なのかを放物線のグラフの下の面積の求め方を用いて述べてみよう．

図 7 に示したようにこの放物線の下の面積を求めるには．その下の面積を小さな短冊形の長方形に分けてこれらの長方形の面積の和を求めれば，この面積の近似的な面積が得られる．この $0 \leq x \leq a$ の区間をさらに細分化して，ここに描いた長方形の幅よりも小さな幅の短冊型の長方形の面積の和を求めれば，より近似的に精度の高い放物線の下の面積が得られる．このプロセスの極限を考えれば，この放物線の下の面積で $0 \leq x \leq a$ の面積が求められると考えられる．これが積分の考え方である．

標語的にいえば,

1. 細分化した長方形の面積を求める
2. それらを和をとる
3. 上のプロセスで長方形の幅を小さくした極限を考える

となる．

これを式で表したのが普通の積分の定義であるが，その式をここでは記す必要はないだろう．

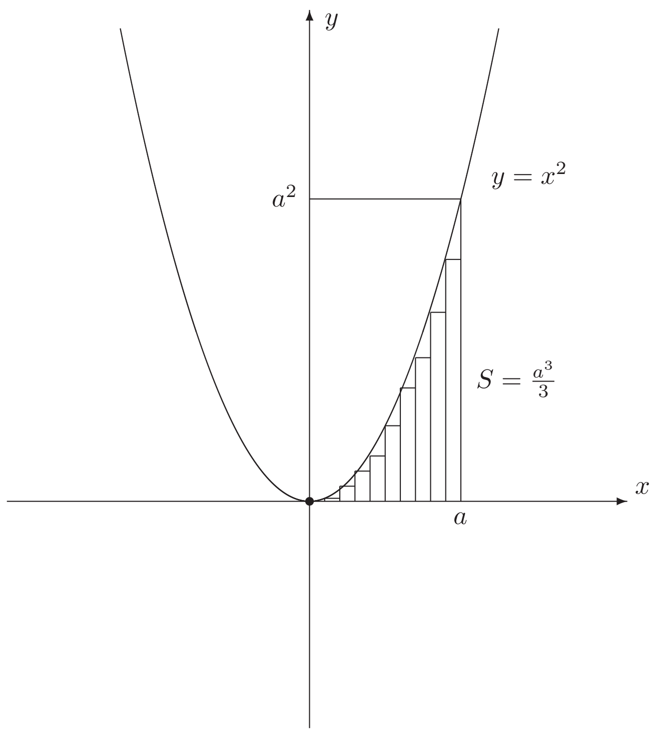

図 7　積分の考え方

(2007. 5. 18), (2008. 2. 15 改訂), (2009.3.13 三訂), (2011.6.16 四訂)

参考文献

[1] 遠山　啓,「関数を考える」（岩波書店, 1972）

[2] 遠山　啓,「微分と積分」（日本評論社, 1970）195

[3] 矢野　忠,「電気電子工学科ミニマム」（愛媛大学工学部, 2001）10
これで微分演算の線形性の一つの条件 (2.6.4) が成立することが示された.

[4] 矢野　忠，数学・物理通信, 1 巻，4 号 (2010.9) 12-17

[5] 矢野　忠，数学・物理通信, 1 巻，4 号 (2010.9) 18-27

[6] 遠山　啓,「微分と積分」（日本評論社, 1970）192-193

[7] 矢野　忠，数学・物理通信，1 巻，8 号 (2011.6) 22-26

指数·対数関数の微積分ミニマム

矢野　忠[21]

3.1 はじめに

どの微積分学のテキストにも指数関数と対数関数の微積分については載っているが, それでもその要点を学ぶことは意外に難しい．必要最小限のことを単刀直入に述べてみよう[22].

3.2 指数関数の微積分

いま指数関数 $y = a^x$ を考えよう．ここで, a は $a \neq 1$ かつ正の実数とする．この a のことを指数関数の底（てい）という.

このとき導関数の定義 [2] によって, この指数関数の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{da^x}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{(x+h) - x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)a^x}{h} \\ &= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

で求められる.

(3.2.1) の a^x にかかる定数を

$$K_a = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{3.2.2}$$

とおき, これが $K_a = 1$ となるように底 a を決めよう（$K_a = 1$ となる底 a をどのように求めるかは後で調べる）．このように a をとると微分したときにいつも a^x の前の定数が 1 となってこの指数関数の微分は簡単になる．また, 対数関数の微分にもそのご利益は及ぶ．いま現にそのような a の値があるとして, そのような条件を満たす a を e で表す.

そうすればこの場合の指数関数 $y = e^x$ は $K_a = 1$ の条件があるから

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \tag{3.2.3}$$

と簡単に表される[23]．この e を Napir 数とか自然対数の底といい, この数は無理数であることが知られている [3].

---

[21] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[22] このミニマムは松山大学での講義のプリントとして作成されたものである．すでに「研究と実践」（愛数協）97 号 (2008.4) に発表されたが, 前のミニマム [1] と合わせて今号に掲載をする.

[23] 作家の小川洋子さんが小説「博士の愛した数式」により数学を一般の人に普及させたという功績により, 日本数学会から賞をもらったときに「なぜ $y = e^x$ が自然なのか」を数学会の理事長に尋ねたところ「$y = e^x$ だけがその接線の傾きが $x = 0$ で 1 となり, 他の指数関数では接線の傾きは 1 とならない」という答えをもらった．これは, すなわち, 上の条件 $K_a = 1$ を言い換えたものである.

なぜこのような数 e を使うかといえば, もちろん指数関数と対数関数の微積分が簡単になるからである．何回微分しても積分しても指数関数 $y=e^x$ は同じ e^x のままである（もちろん, 積分の場合には積分定数 C を除いて考える）．これは指数関数 $y=e^x$ の顕著で重要な性質である．

この指数関数 $y=e^x$ を積分することを考えよう．微分と積分とは逆演算 [4] であるから, (3.2.3) によって

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad C = \text{一定} \tag{3.2.4}$$

が直ちに得られる．不定積分したときには被積分関数 e^x といつも付加定数 C だけの違いが出てくる．

では, 底が e でない, 任意の数 $a>0 \ \ (a \neq 1)$ が底である一般の指数関数の微積分はどのようにして求めたらいいのだろうか．それには

$$a^x = e^{x \log a} \tag{3.2.5}$$

を用いるとよい[24]．この関係を用いると微分は

$$\frac{da^x}{dx} = (\log a)e^{x \log a} = (\log a)a^x \tag{3.2.6}$$

で与えられ[25], また積分は

$$\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{1}{\log a} e^{x \log a} + C = \frac{1}{\log a} a^x + C, \quad C = \text{一定} \tag{3.2.7}$$

で求められる[26]．(3.2.6),(3.2.7) で $a=e$ とおけば, (3.2.3),(3.2.4) が得られることを確認しておこう[27]．

ここで, $K_a=1$ の性質をもつ底 $a=e$ を求めよう．その e を求める手がかりとなる式は

$$K_a = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \tag{3.2.8}$$

である．いま

$$K_{a,h} = \frac{a^h - 1}{h} \tag{3.2.9}$$

とおいてみよう．これを a について解けば,

$$a = [1 + hK_{a,h}]^{\frac{1}{h}} \tag{3.2.10}$$

(3.2.8) から $\lim_{h \to 0} K_{a,h} = K_a = 1$ であるから

$$\begin{aligned} e &= \lim_{h \to 0} [1 + hK_{a,h}]^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

で $K_a=1$ となる a, すなわち, e が求められる．

このときの e の数値を求めるには理論的にはこの定義 (3.2.11) において h を $0.1, 0.01, 0.001, \cdots$ とだんだん 0 に近づけていって, そのときの $\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の数値を求めればよい．しかし, このやり方では数値の収束性が悪く計算の手間がかかるので, 普通は e の近似値は指数関数 e^x の Maclaurin 展開

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{3.2.12}$$

に $x=1$ を代入して e の値を求めている [5]．e の近似値は　$e = 2.71828\cdots$ である．

[24](3.2.5) の関係を求めるには $a^x = e^y$ とおいて, 両辺の自然対数をとれば, $y = x \log a$ が得られるから, (3.2.5) が成り立つ．
[25]$y = e^{bx}$ の x での微分は $dy/dx = be^{bx}$ である．$b = \log a$ とおけばよい．
[26]$y = e^{bx}$ の x での積分は $\int e^{bx}dx = \frac{1}{b}e^{bx} + C$ である．ここでも $b = \log a$ とおけばよい．
[27](3.2.5) で $\log x$ は自然対数関数である．詳しくは 3.3 節を見よ．$\log e = 1$ が成り立つ．

3.3 対数関数の微分

つぎに対数関数の微分を考えよう．ここで対数関数の底としては Napir 数 e をとる．こうすればこの対数関数の微分が簡単になる．この対数関数を自然対数関数という．

さて, この対数関数を

$$y = \log x \tag{3.3.1}$$

と表そう[28]．このときの底としては e がとられているので, 丁寧に書けば

$$y = \log_e x \tag{3.3.2}$$

と書くべきだろうが, 微積分学では単に $y = \log x$ と表すのが普通である．または $y = \ln x$ と表すこともある．単なる表現の仕方だが, 両方とも覚えておこう．

まず $y = \log x$ の導関数を書いておこう．それは

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{3.3.3}$$

である．

さて, この $y = \log x$ の導関数を導関数の定義 [1] から求めてみよう．

$$\begin{aligned}\frac{d\log x}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{(x+h)-x}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(\frac{x+h}{x})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{x\frac{h}{x}}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

いま $\frac{h}{x} = k$ とおけば,

$$\begin{aligned}\frac{d\log x}{dx} &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}\\ &= \frac{1}{x}\log e\\ &= \frac{1}{x}\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

ここで, $\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$ であることおよび $\log e = 1$ であることを用いた．したがって, 確かに公式 (3.3.3) が得られる．

この微分公式が得られれば, 微分公式を右辺から左辺へと読んで, つぎの積分公式が直ちに得られる．

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x + C, \quad C = 一定 \tag{3.3.6}$$

または底 e の対数関数を不定積分

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \tag{3.3.7}$$

[28] 指数関数 $y = e^x$ を対数表示で表せば，$x = \log y$ となる．ここで，x と y とを交換すれば $y = \log x$ が得られる．すなわち，$y = \log x$ と $y = e^x$ とは互いに逆関数である．

で定義すれば, 微分と積分は互いに逆演算であるから [4], 逆に (3.3.7) から微分公式

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{3.3.3}$$

が得られるといってもよい．

e でない一般の底 a をもつ対数関数の微分をするにはどのようにしたらいいのだろうか．これには対数の底の変換公式を用いればよい．すなわち,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \tag{3.3.8}$$

であるから

$$\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x} \tag{3.3.9}$$

となる．この微分公式 (3.3.9) で $a = e$ とおけば, 微分公式 (3.3.3) が得られることを確認しておこう．

3.4 対数関数の積分

前節で対数関数の微分を取り扱ったが, しかし対数関数の積分は取り扱わなかった．これは対数関数を積分するためには部分積分の方法が必要になるためである．したがって, まず部分積分について説明しよう．

部分積分の公式は積の微分公式

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \tag{3.4.1}$$

から得られる．この式を x で積分すれば,

$$uv = \int(\frac{du}{dx}v)dx + \int(u\frac{dv}{dx})dx \tag{3.4.2}$$

となる．この式で右辺の第 2 項を左辺に移項すれば,

$$\int(\frac{du}{dx}v)dx = uv - \int(u\frac{dv}{dx})dx \tag{3.4.3}$$

となって, これが部分積分の公式である．

この部分積分の公式を対数関数の積分

$$\int \log x dx \tag{3.4.4}$$

に使ってみよう．このとき $u = x$ および $v = \log x$ ととれば,

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= x\log x - \int(x\cdot\frac{1}{x})dx \\ &= x\log x - \int dx \\ &= x\log x - x + C, \quad C = \text{一定}\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

これが対数関数 $\log x$ の不定積分である．

この積分の結果は普通には積分公式としてテキストには載っていない．なぜなら，いつでも部分積分によって簡単にこの積分は導かれるからである．しかし, ここで対数関数の積分を取り扱わないと指数関数と対数関数の微積分の間にある種の “対称性” が欠けていると感じるかもしれないのであえて取り上げた．

3.5 対数の底の変換公式

この節では底の変換公式 (3.3.8) を証明しよう．これはよく知られた関係なので改めて証明する必要がないかもしれないが, この公式に馴染みがない人もいるだろうし, 馴染みがあったとしても再確認の意味もある．

さて, (3.3.8) の左辺と右辺に現れた対数をつぎのように $y=\log_a x, z=\log x, b=\log a$ とおく．そうすると $y=z/b$ であることを示せれば, 底の変換公式が示されたことになる．

$y=\log_a x, z=\log x, b=\log a$ から $a^y=x, e^z=x, e^b=a$ が得られるから,

$$\begin{aligned} a^{\frac{z}{b}} &= (a^{\frac{1}{b}})^z \\ &= e^z \\ &= x \\ &= a^y \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

これから

$$a^{\frac{z}{b}-y}=1 \tag{3.5.2}$$

であるから, $z/b-y=0$ が得られ, したがって,

$$y=\frac{z}{b} \tag{3.5.3}$$

が示された．これで確かに対数の底の変換公式 (3.3.8) が成り立つことがわかる．

3.6 おわりに

このミニマムでは指数関数と対数関数との微分積分について最小限のことを述べた, 指数関数の Taylor 展開を扱うとそれから Euler の公式へと予想外の発展があるが, それは別の機会に譲ることにしよう．

(2007．6．20), (2007．10．15 改訂), (2011．6．16 三訂)

参考文献

[1] 矢野　忠, 数学 · 物理通信, 1 巻, 8 号 (2011.6) 8-21

[2] 矢野　忠, [1] の (2.3.4) を見よ．

[3] 吉田　武, 「オイラーの贈り物」（海鳴社, 1993）300

[4] 矢野　忠, [1] の (2.5.1) と (2.5.2) を見よ．

[5] 矢野　忠,「数学散歩」（国土社, 2005.1）84-86

編集後記

第 7 号にあわせて，この第 8 号を同時に発行するつもりであったが，私の投稿原稿の図の入力が新たに必要になったので，同時発行ができなくなり，そのため遅れての発行になった．編集人の勝手で申し訳がないが，ご寛容をお願いしたい．

このサーキュラーの巻号のつけ方であるが，今年のすべて号の発行が終わったら，それまでを第 1 巻とし，来年からは年が変るごとに巻を変えることにしたい．第 1 号を 12 月にはじめた関係で第 1 巻の号数が変則だが，来年以降は規則的に 4 号で 1 巻とする．(矢野 忠)