数学·物理通信

1巻9号　　2011年9月

編集　新関章三·矢野　忠

2011 年 9 月 8 日

目 次

Contents

ご冗談でしょう，湯川先生
Surely you're joking, Professor Yukawa !

中 西　襄[1]
Noboru NAKANISHI[2]

1.1　はじめに

ファインマンの常識破りの行状記「ご冗談でしょう，ファインマンさん」（岩波書店）をもじって,「ご冗談でしょう，湯川先生」と題する，湯川先生に関係した小咄集を書くことを，川村氏に勧められた．以前にどこかで書いた話の二番煎じが多くなるが，若い人や数学の人は知らないと思うので，少しまとめてみた．

1.2　エピソード

1.2.1　湯川先生の駄じゃれ

場の量子論では，電磁力は光子のやりとりで生ずるものとされる．これを拡張して，核力を「中間子」という新素粒子のやりとりとして説明したのが，湯川先生の中間子論である．電磁場の量子は，現在では光子 (photon) と呼ばれているが，もともとアインシュタインが導入したときの名称は，光量子 (light quantum) であった．湯川中間子も現在ではパイ中間子もしくはパイオン (pion) と呼ばれているが，それが電子よりはるかに重い粒子であることから，最初は heavy quantum と名付けられた．これは湯川先生の駄じゃれである．なぜかって？ーー light には「軽い」っていう意味もあるでしょう．

1.2.2　スプートニク

1957 年，史上初めての人工衛星であるソ連のスプートニクの打ち上げが成功した．ニュートン力学は天空と地上で同じ力学法則が成立することを明らかにしたが，直接それを立証するものは，気まぐれに落下する隕石くらいしかなかったわけだ．目に見える物体を地上から天空に飛ばして同じ力学法則に従っていることを実証したのは，ニュートンの発見以来実に 3 世紀ぶりのことだった．湯川先生の寸評：「まったく不思議なことやね．これ以上いいニュートン力学の証明はないね！」

---

[1]京都大学名誉教授，nbr-nak@trio.plala.or.jp

[2]Professor Emeritus of RIMS, Kyoto University

1.2.3 木崎の夏の学校

私が大学院生の頃，毎年夏休みに長野県の木崎湖畔で全国の理論物理の修士課程の院生の合宿勉強会が催された．矢野氏のブログ[3]（2008 年 9 月 18 日）によると，1956 年この夏の学校の講師にノーベル賞に輝く湯川先生が招かれるということを聞いて，ここの村長さんは村の文化度が一挙にあがるとでも思ったのか，大変喜んだという．しかし，湯川先生の都合がつかなくなり，講師は急遽朝永先生に変更された．彼のノーベル賞受賞は 9 年後の 1965 年なので，村長さんは「一流の湯川でなく，二流の朝永を呼ぶのか」とお冠だった由．矢野氏のブログには後日談はなかったが，実は，幸いその翌年湯川先生に講師として来ていただいたのである．村長さんはさぞかし大いに喜んでいたことだろう．

1.2.4 町の物理屋

ノーベル賞受賞で湯川先生は一躍有名人になった．それで基礎物理学研究所には，多くの「町の物理屋」が押しかけてくる仕儀と相成った.「新理論を作ったので是非湯川博士に見てほしい」とか,「アインシュタインの相対性理論は間違っている」とかいった，まるで物理のブの字もわかっていない連中が続々押し寄せて来たものである．湯川先生は忙しくてとてもそんな連中の相手はしていられないので，私のような若手が町の物理屋撃退役を仰せつかったものだった．

こういう人たちは，もちろん自分を認めてもらうことを目的としているので，湯川先生に対しては敬意を表している．しかし，京大理学部の辺りで変なビラを配っていた男は違っていた．なんと「中間子論は間違っている．なぜなら，中間子論では雪の結晶は説明できない」と書いてあった．この論法だとどんな理論でも間違っていることになるよね．

1.2.5 お手伝いさん

マスコミは湯川先生を超人にでっちあげた．湯川先生がちょっと何か着想を得られると，すぐさま新聞記者が飛んできて,「湯川博士新理論発表か」てな記事が載る．新理論がそんなに簡単にうまくいくなんてことは滅多にないのに，これでは着想を暖めているひまも何もあったものではないよね．

何も知らない一般の大衆は，湯川博士が全知全能でもあるかのように信じてしまう．私は，長男誕生のとき中年のお手伝いさんに来てもらったが，私が湯川博士の弟子だということを知ると,「分からないことがあったら，何でも湯川博士に聞かはったらよろしょますやんか」と言う．こちとらは，世界中の誰もやっていないことを研究するのが仕事なのに，こんな風に思われたのでは立つ瀬がない．

1.2.6 原子力委員

どういう風の吹き回しか，湯川先生が原子力委員をやられたことがある．多分日本の原子力行政が，権威づけに先生を利用したのだろう．ご自分の論文を書いているひまもないくらい忙しいのに，なんでこんなものを引く受けられたのかと，私はいささかあきれたものだった．基研のトイレで一緒になったとき，こんなことを言っておられたものだ.「原子力に関する用語を覚えんならんで，便所[4]にまで張り紙しとるんや.」しかし結局，ストレスから持病の胃病が再発して，お役御免と相成った．

---

[3] http://twin.blog.ocn.ne.jp/physicomath/

[4]「厠」と言われたかも知れない．

1.2.7 混沌会

湯川先生の現役時代，基礎物理学研究所では毎年素粒子物理学の放談会のような研究会が開かれていた．はじめは「素粒子の時空記述」といっていたが，そのうちに湯川先生の命名で「混沌会」という名前になった．「混沌」は「太古に盤古あり」で始まる中国の創世神話にでてくる名前である．盤古は混沌に大層歓待してもらったお礼に，目も鼻もない混沌に目鼻をつけてやった．ところがそうしたら，混沌は死んでしまったという．混沌会は目鼻をつけたらつぶれてしまうようなアイデアを論ずる会ということであった．

1.2.8 差分方程式

湯川先生の最後の研究は,「素領域理論」である．場の量子論の発散の困難を避けるために時空を離散化しようというアイデアは，多くの人から出され，そして消えていった．素領域理論は時空の基本構成要素を点ではなく時空領域としたのが，それまでの考えとは異なるところである．しかしその時空領域を記述しようとすると，どうしても背景に連続体のようなものが必要になってくる．目鼻をつければ死んでしまう「混沌」の典型例であった．

さて，素領域理論では，系の時間発展は電光掲示板のようにとびとびになるから，微分方程式ではなく差分方程式で記述されることになる．しかし，差分方程式というものは解きにくい．湯川先生が「中西君，差分方程式を解きたいとき，どうするかね」と聞かれるので,「微分方程式に直して解きます」[5]と答えたら,「微分方程式を差分方程式にしたいのに，それじゃ逆やなぁ」と苦笑されたものだ．

[5]差分方程式は第 n 項 a_n がその近辺の項で表されるような数列に対する漸化式と看做すことができる．母関数 $f(x) = \sum(a_n/n!)x^n$ を考えれば，a_n は $f(x)$ の n 階微分で表されるので，微分方程式に変換される．

非可換量の分数式を通分する

Reduction to a common denominator for a sum of fractions of non-commutative quantities

中西　襄[6]

Noboru NAKANISHI[7]

2.1　非可換量の分数式の通分

分数式の通分ということは，数式の計算でしばしば行うことであるが，とり扱う量がすべて可換だということは当然のこととして使っている．非可換量の分数式は通分できないのだろうか．もう少し具体的に問題を設定すると，$A_1, A_2, \cdots, A_N;\ C_1, C_2, \cdots, C_N$ を一般に互いに非可換な量とするとき，

$$\sum_{j=1}^{N} A_j^{-1} C_j = [\psi(A)]^{-1}\varphi(A, C)$$

のような恒等式が存在するかということである．ここに $\psi(A)$ は $A_1, A_2, \cdots, A_N$ の対称関数，$\varphi(A, C)$ は $A_1, A_2, \cdots, A_N; C_1, C_2, \cdots\ C_N$ の関数で，番号の任意の置換に対し不変な量である．そして，重要な条件はもちろん，これらは A_j^{-1} を含んでいてはならないことである．なお，C_j は，A_j が行列のときは列ベクトル，オペレータのときはオペランドである場合も考えられるので，右辺においても必ず右端でなくてはならない．

答えをいうと，これは一般的に，精確に言えば「ジェネリック」に，可能である．つまり，インバースの存在についてうるさく言わなければ，いつでも可能であるということである．$N = 2$ の場合の具体的な式を与えると次のようになる．

$$A_1^{-1}C_1 + A_2^{-1}C_2 = [\psi(A_1, A_2)]^{-1}[\varphi_1(A_1, A_2)\, C_1 + \varphi_2(A_1, A_2)\, C_2],$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, A_2) &= A_1^2(A_1 - A_2)^{-1}A_2 + A_2^2(A_2 - A_1)^{-1}A_1, \\
\varphi_1(A_1, A_2) &= -A_1 + (A_1^2 - A_2^2)(A_1 - A_2)^{-1}, \\
\varphi_2(A_1, A_2) &= -A_2 + (A_2^2 - A_1^2)(A_2 - A_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

もちろん，A_1 と A_2 が可換ならば，$\psi^{\mathrm{comm}} = A_1A_2$, $\varphi_1^{\mathrm{comm}} = A_2$, $\varphi_2^{\mathrm{comm}} = A_1$ に帰着する．

この結果が正しいことを確かめるだけならば，

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, A_2)A_1^{-1} &= A_1^2(A_1 - A_2)^{-1}(A_2 - A_1 + A_1)A_1^{-1} + A_2^2(A_2 - A_1)^{-1}A_1A_1^{-1} \\
&= A_1^2(-1)A_1^{-1} + A_1^2(A_1 - A_2)^{-1} + A_2^2(A_2 - A_1)^{-1} \\
&= \varphi_1(A_1, A_2)
\end{aligned}$$

[6]京都大学名誉教授，nbr-nak@trio.plala.or.jp

[7]Professor Emeritus of RIMS, Kyoto University

という計算で直ちにわかる．

以下，通分の式がどのようにして導かれるのかを論ずる．

2.2 一般化フィボナッチ数列の結果から

前回論じたフィボナッチ数列を最も一般化した数列 $\{\mathit{\Phi}_n\}$ は，次の漸化式で定義される．

$$\mathit{\Phi}_{n+N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathit{\Phi}_{n+k-1} \quad (n \geqq 1).$$

ここに，$a_0,\, a_1,\, \cdots, a_{N-1}$ と $\mathit{\Phi}_0,\, \mathit{\Phi}_1,\, \cdots, \mathit{\Phi}_{N-1}$ は任意に与えられたものとする．

この数列の母関数

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathit{\Phi}_n t^n$$

は，

$$g(t) = \Big(1 - \sum_{k=1}^{N} a_{N-k} t^k\Big)^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Big(1 - \sum_{k=1}^{N-m-1} a_{N-k} t^k\Big) \mathit{\Phi}_m t^m$$

で与えられる．これに対し，

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathit{\Phi}_n \frac{t^n}{n!}$$

は，N 次方程式

$$\alpha^N - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \alpha^k = 0$$

の N 個の解を（重解はないとして）$\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_N$ とすると，

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} e^{\alpha_j t} C_j$$

となることが示される．ただし，C_j は連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N} {\alpha_j}^m C_j = \mathit{\Phi}_m \quad (m = 0,\, 1,\, \cdots, N-1)$$

の解である．

定義式から $f(t)$ と $g(t)$ とはラプラス変換で結びついていることが分かる．従って，

$$\int_0^{\infty} dt\, e^{-pt} f(t) = \int_0^{\infty} dt \sum_{j=1}^{N} e^{-(p-\alpha_j)t} C_j = \sum_{j=1}^{N} (p-\alpha_j)^{-1} C_j$$

は $p^{-1} g(p^{-1})$ と一致するはずである．前回は右辺の分数式を通分してこれを直接確かめたが，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ は互いに可換であると仮定しなければならなかった．a_k や $\mathit{\Phi}_j$ が一般に非可換量であれば，これはかなりきつい制限条件である．この条件をはずして，すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ が互いに可換であるとは仮定しないで，

$$\sum_{j=1}^{N} (1-\alpha_j t)^{-1} C_j = g(t)$$

となることを証明しよう ($p^{-1} = t$ と書き換えた）．

2.3 $N = 2$ の場合

まず，$N = 2$ の場合から始めよう．この場合は，

$$g(t) = (1 - a_1 t - a_0 t^2)^{-1}[(1 - a_1 t + \alpha_1 t)C_1 + (1 - a_1 t + \alpha_2 t)C_2]$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} {\alpha_1}^2 - a_1\alpha_1 - a_0 &= 0, \\ {\alpha_2}^2 - a_1\alpha_2 - a_0 &= 0. \end{aligned}$$

2 次方程式 $\alpha^2 - a_1\alpha - a_0 = 0$ の解と係数の関係を，順序を考慮しながら求めよう．まず，2 つの解を代入した 2 式の差は，

$${\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2 - a_1(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

となるから，

$$a_1 = ({\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}$$

を得る．これを第 1 式に代入すれば，

$$\begin{aligned} a_0 &= {\alpha_1}^2 - ({\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}\alpha_1 \\ &= {\alpha_1}^2(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}\alpha_2 + {\alpha_2}^2(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}\alpha_1 \end{aligned}$$

を得る．a_1, a_0 の式を $g(t)$ の式に代入すれば，

$$g(t) = [\psi(t)]^{-1}[\{1 + \alpha_1 t - ({\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}t\}C_1 + \{1 + \alpha_2 t - ({\alpha_2}^2 - {\alpha_1}^2)(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}t\}C_2]$$

となる．ただし，

$$\psi(t) = 1 - ({\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}t - \{{\alpha_1}^2(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}\alpha_2 + {\alpha_2}^2(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}\alpha_1\}t^2.$$

これが正しい結果であることは，$\psi(t)$ を少し変形してみれば確かめられる．

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 1 + {\alpha_1}^2(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}(1 - \alpha_2 t)t + {\alpha_2}^2(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(1 - \alpha_1 t)t \\ &= 1 - {\alpha_1}^2 t^2 + {\alpha_1}^2(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}(1 - \alpha_1 t)t + {\alpha_2}^2(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(1 - \alpha_1 t)t \\ &= [1 + \alpha_1 t - ({\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}t](1 - \alpha_1 t) \end{aligned}$$

となって，因子 $(1 - \alpha_1 t)$ を右にくくり出せる．インバースをとれば因子は逆順序になるから，左因子が分子の C_1 の係数と相殺する．同様に，因子 $(1 - \alpha_2 t)$ を右にくくり出すこともできる[8]．

なお，1 節の式は，$\alpha_j = (1 - A_j)/t$ を代入すれば得られる．ただし，恒等式

$$A(A - B)^{-1}B = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} = -B(B - A)^{-1}A$$

を用いる．

2.4 非可換量を含む代数方程式の解と係数の関係

前節の議論を一般の N の場合に拡張するには，非可換量を含む代数方程式の解と係数の関係が必要になる．それは「準行列式の理論」によって与えられる．準行列式については最近まで知らなかったが，藤井一幸編「数理の玉手箱」（遊星社, 2010）の中の鈴木達雄「非可換ワールドへの招待—準行列式の話」に紹介されている．1990 年代からゲルファントらによって開発されたようで，非可換量を要素とする場合への行列式の理論の拡張である．

[8]つまり 2 通りの因数分解ができるということである．可換の場合は，ともに $(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)$ に帰着する．

通常の行列の理論でも，行列をブロックに分解して考えれば，各ブロックという非可換量を要素とする行列を考えていることになる．以下で必要になる公式は，非可換量を要素とする行列の逆行列を与える公式である．A,B,C,D を任意の非可換量とするとき．行列

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

の逆行列は，

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

によって与えられる．ただし，インバースの存在についてうるさいことは言わないものとする．

証明は両者の積が単位行列になることを見ればよい．これは，恒等式

$$\begin{aligned}(B-AC^{-1}D)^{-1}&=[(BD^{-1}C-A)C^{-1}D]^{-1}=-D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1},\\ (C-DB^{-1}A)^{-1}&=[(CA^{-1}B-D)B^{-1}A]^{-1}=-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}\end{aligned}$$

を使えば，すぐに計算できる．

以下の逆行列の行列式の計算には，この公式を一般の N 行 N 列の場合に拡張する必要はない．A,B,C,D は非可換量を要素とするブロックとも見なせるからである．

さて，N 次方程式の解と係数の関係に移ろう．連立 1 次方程式

$$\alpha_j^N-a_{N-1}\alpha_j^{N-1}-\cdots-a_1\alpha_j-a_0=0 \qquad (j=1,\cdots,N)$$

を，順序を考慮しながら解く．

$$V(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)=\begin{bmatrix} \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_N^{N-1} \\ \alpha_1^{N-2} & \alpha_2^{N-2} & \cdots & \alpha_N^{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，連立方程式はベクトル方程式

$$[\,a_{N-1}\ \ a_{N-2}\ \ \cdots\ \ a_0\,]V(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)=[\,\alpha_1^N\ \ \alpha_2^N\ \ \cdots\ \ \alpha_N^N\,]$$

に書き直される．従って，係数は

$$[\,a_{N-1}\ \ a_{N-2}\ \ \cdots\ \ a_0\,]=[\,\alpha_1^N\ \ \alpha_2^N\ \ \cdots\ \ \alpha_N^N\,][V(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)]^{-1}$$

のように解で表される．つまり，行列 $V(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$ の逆行列を計算すればよい．

$N=2$ のときは，

$$V(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，逆行列の公式により，

$$[V(\alpha_1,\alpha_2)]^{-1}=\begin{bmatrix} (\alpha_1-\alpha_2)^{-1} & (\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\alpha_2 \\ (\alpha_2-\alpha_1)^{-1} & (\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\alpha_1 \end{bmatrix}$$

を得る．従って，

$$[a_1\ \ a_0]=[(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\quad \alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\alpha_2+\alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\alpha_1]$$

となる．この結果はもちろん前節で与えたものと同じである．

2.5 $N=3$ の場合の計算

N 次方程式の解と係数の関係の具体的な式は，前掲の本には $N=2$ の場合しか書いてないので，$N=3$ の場合を具体的に計算してみよう．

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

をブロック分けして，

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}\alpha_1^2 & [\ \alpha_2^2\ \ \alpha_3^2\ ]\\ {}^{\mathrm{t}}[\ \alpha_1\ \ 1\ ] & V(\alpha_2,\alpha_3)\end{bmatrix}$$

と書く．ただし，t は転置を表す．このように書けば，逆行列の公式を使って $[V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}$ の 11 要素が計算できる．すなわち，

$$[V(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}=\begin{bmatrix}(\alpha_2-\alpha_3)^{-1} & (\alpha_3-\alpha_2)^{-1}\alpha_3\\ (\alpha_3-\alpha_2)^{-1} & (\alpha_2-\alpha_3)^{-1}\alpha_2\end{bmatrix}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}\big[[V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\big]_{11}&=\{\alpha_1^2-[\ \alpha_2^2\ \ \alpha_3^2\ ][V(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\ {}^{\mathrm{t}}[\ \alpha_1\ \ 1\ ]\}^{-1}\\ &=\{\alpha_1^2-\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_3)^{-1}(\alpha_1-\alpha_3)-\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_2)^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)\}^{-1}\end{aligned}$$

を得る．21 要素と 31 要素は，添え字の巡回置換 $1\to2\to3\to1$ をしていけば得られる．従って，

$$a_2=\sum_{i,j,k:\mathrm{cycl.}}\alpha_i^3\{\alpha_i^2-\alpha_j^2(\alpha_j-\alpha_k)^{-1}(\alpha_i-\alpha_k)-\alpha_k^2(\alpha_k-\alpha_j)^{-1}(\alpha_i-\alpha_j)\}^{-1}$$

となる．

次に a_1 を計算する．連立 1 次方程式の各項 $a_k\alpha_j^k$ の並べ順は任意だから，V の第 1 行を最下行に持ってきて，$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$ が第 1 行になっている形で考える．

$$V'(\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2\end{bmatrix}$$

とおくと，

$$[V'(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}=\begin{bmatrix}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^{-1}\alpha_3^2 & (\alpha_2^2-\alpha_3^2)^{-1}\\ (\alpha_2^2-\alpha_3^2)^{-1}\alpha_2^2 & (\alpha_3^2-\alpha_2^2)^{-1}\end{bmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\big[[V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\big]_{12}&=\{\alpha_1-[\ \alpha_2\ \ \alpha_3\ ][V'(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\ {}^{\mathrm{t}}[\ 1\ \ \alpha_1^2\ ]\}^{-1}\\ &=\{\alpha_1-\alpha_2(\alpha_2^2-\alpha_3^2)^{-1}(\alpha_1^2-\alpha_3^2)-\alpha_3(\alpha_3^2-\alpha_2^2)^{-1}(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\}^{-1}\end{aligned}$$

を得る．従って，

$$a_1=\sum_{i,j,k:\mathrm{cycl.}}\alpha_i^3\{\alpha_i-\alpha_j(\alpha_j^2-\alpha_k^2)^{-1}(\alpha_i^2-\alpha_k^2)-\alpha_k(\alpha_k^2-\alpha_j^2)^{-1}(\alpha_i^2-\alpha_j^2)\}^{-1}$$

となる．

a_0 の計算も同様に行える．

$$V''(\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}\alpha_2^2 & \alpha_3^2\\ \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$$

とおくと，

$$[V''(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha_2^{-1}(\alpha_2-\alpha_3)^{-1} & \alpha_2^{-1}(\alpha_3-\alpha_2)^{-1}\alpha_3\\ \alpha_3^{-1}(\alpha_3-\alpha_2)^{-1} & \alpha_3^{-1}(\alpha_2-\alpha_3)^{-1}\alpha_2\end{bmatrix}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\left[[V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\right]_{13} &= \{1-[\ 1\ \ 1\ ][V''(\alpha_2,\alpha_3)]^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}[\ {\alpha_1}^2\ \ \alpha_1\ ]\}^{-1} \\
&= \{1-\alpha_2^{-1}(\alpha_2-\alpha_3)^{-1}(\alpha_1-\alpha_3)\alpha_1-\alpha_3^{-1}(\alpha_3-\alpha_2)^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1\}^{-1}
\end{aligned}
$$

を得る．従って,

$$
a_0=\sum_{i,j,k:\mathrm{cycl.}}{\alpha_i}^3\{1-\alpha_j^{-1}(\alpha_j-\alpha_k)^{-1}(\alpha_i-\alpha_k)\alpha_i-\alpha_k^{-1}(\alpha_k-\alpha_j)^{-1}(\alpha_i-\alpha_j)\alpha_i\}^{-1}
$$

となる．

チェックのため，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ が互いに可換の場合を計算しておこう．

$$
\begin{aligned}
a_2^{\mathrm{comm}} &= \frac{{\alpha_1}^3(\alpha_2-\alpha_3)+{\alpha_2}^3(\alpha_3-\alpha_1)+{\alpha_3}^3(\alpha_1-\alpha_2)}{{\alpha_1}^2(\alpha_2-\alpha_3)+{\alpha_2}^2(\alpha_3-\alpha_1)+{\alpha_3}^2(\alpha_1-\alpha_2)} \\
&= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\
a_1^{\mathrm{comm}} &= \frac{{\alpha_1}^3({\alpha_2}^2-{\alpha_3}^2)+{\alpha_2}^3({\alpha_3}^2-{\alpha_1}^2)+{\alpha_3}^3({\alpha_1}^2-{\alpha_2}^2)}{\alpha_1({\alpha_2}^2-{\alpha_3}^2)+\alpha_2({\alpha_3}^2-{\alpha_1}^2)+\alpha_3({\alpha_1}^2-{\alpha_2}^2)} \\
&= -(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1), \\
a_0^{\mathrm{comm}} &= \frac{{\alpha_1}^3\alpha_2\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)+{\alpha_2}^3\alpha_3\alpha_1(\alpha_3-\alpha_1)+{\alpha_3}^3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_2\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_3\alpha_1(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)} \\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}
$$

となって，確かに $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ の基本対称式を再現する．

2.6 一般の場合の証明

一般の N に対して，$a_{N-1},\cdots,a_1,a_0$ を α_j で具体的に書き表すのは大変であるが，4 節の議論から書き表すことが可能なことは明らかである．書けることさえ分かれば，通分の式を証明するのには，具体的な表式はじつは不要である．

2 節の証明すべき式は,

$$
\sum_{j=1}^{N}(1-\alpha_j t)^{-1}C_j=g(t)
$$

であった．ここに,

$$
g(t)=\Big(1-\sum_{k=1}^{N}a_{N-k}t^k\Big)^{-1}\sum_{m=0}^{N-1}\Big(1-\sum_{k=1}^{N-m-1}a_{N-k}t^k\Big)t^m\sum_{j=1}^{N}{\alpha_j}^m C_j
$$

である．左から $1-\sum_{k=1}^{N}a_{N-k}t^k$ を乗じて，C_j の係数を比較すると,

$$
\Big(1-\sum_{k=1}^{N}a_{N-k}t^k\Big)(1-\alpha_j t)^{-1}=\sum_{m=0}^{N-1}\Big(1-\sum_{k=1}^{N-m-1}a_{N-k}t^k\Big)\alpha_j^m t^m
$$

となる．さらに，右から $1-\alpha_j t$ を乗ずれば,

$$
F\equiv\Big[\sum_{m=0}^{N-1}\Big(1-\sum_{k=1}^{N-m-1}a_{N-k}t^k\Big)\alpha_j^m t^m\Big](1-\alpha_j t)=1-\sum_{k=1}^{N}a_{N-k}t^k
$$

となるから，これを示せばよい（ここから逆にたどればよい）．

$n = m + k$ とおいて左辺を書き直すと，

$$F = \Big[\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\alpha_j^{\,n} - \sum_{k=1}^{n} a_{N-k}\alpha_j^{\,n-k}\Big)t^n\Big](1-\alpha_j t)$$

である．これを t の冪毎に纏めると，

$$\begin{aligned} F =& 1 + \sum_{n=1}^{N-1}\Big[\Big(\alpha_j^{\,n} - \sum_{k=1}^{n} a_{N-k}\alpha_j^{\,n-k}\Big) - \alpha_j\Big(\alpha_j^{\,n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{N-k}\alpha_j^{\,n-k-1}\Big)\Big]t^n \\ & - \alpha_j\Big(\alpha_j^{\,N-1} - \sum_{k=1}^{N-1} a_{N-k}\alpha_j^{\,N-k-1}\Big)t^N \end{aligned}$$

となる．中央の角括弧の中は $k = n$ の項以外はキャンセルして，

$$F = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} a_{N-n}t^n - \Big(\alpha_j^{\,N} - \sum_{k=1}^{N-1} a_{N-k}\alpha_j^{\,N-k}\Big)t^N$$

となる．さらに最後の項の係数は，α_j が N 次方程式

$$\alpha^N - \sum_{k=1}^{N-1} a_{N-k}\alpha^{N-k} - a_0 = 0$$

の解だったことから，a_0 に等しい．従って，

$$F = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} a_{N-n}t^n - a_0 t^N = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_{N-k}t^k$$

となる．□

****

このように，非可換量の分数式の通分は，$\sum_{j=1}^{N} A_j^{-1}C_j$ という形ならば，いつでもできることが分かった．より一般な $\sum_{j=1}^{N} B_j A_j^{-1}C_j$ への拡張は，B_j を左端にもってくればいいだけなので容易である．すなわち，

$$\sum_{j=1}^{N} B_j A_j^{-1} C_j = \sum_{j=1}^{N} B_j[\psi(A)]^{-1}\varphi_j(A)C_j$$

となる．ただ，和の形でしか書けないから，通分という言葉がしっくりしないかもしれない．

通分の逆は部分分数展開であるが，非可換量を係数とする代数方程式については代数学の基本定理が成立しないから，一般には無理である．はじめから因数に分解している場合は，分母を因数の特定の順序の形にしか書けないので，あまり面白味はないようだ．

多次元単位球の体積計算法
A calculational method of the volume of multidimensional unit sphere

新関章三[9]，岩崎正春[10]
Shozo NIIZEKI[11], Masaharu IWASAKI[12]

3.1 はじめに

本稿の目的は，$n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し $\boldsymbol{R}^n$ における単位球，つまり，$\boldsymbol{R}^n$ の直交座標系において原点を中心とし半径 1 の球体の体積を求める計算法を，明快で分かりやすい形で与えることである．目標への第一歩は第 2 節で与える正弦積分の性質を調べ，これを活用することにある．この正弦積分は，Gauss 積分の計算や Euler のガンマ関数 $\Gamma(x)$ の性質等を調べる際にも重要な働きをするが，これらについては別のところで述べたい．

3.2 記号と定義

以下本稿では，正の実数の全体及び正の整数の全体から成る集合を，それぞれ $\boldsymbol{R}^+$ 及び $\boldsymbol{Z}^+$ と記す．

ここで，正弦積分を定義する．応用性に富む，この積分は次の形で与えられる．

定義 2.1 (正弦積分) $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し n 次の正弦積分 S_n を定積分：

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi \sin^n x dx$$

で与える．♦

この S_n に関する重要な性質は，次節で詳しく調べる．

さて，原点を中心とし，半径が $r \in \boldsymbol{R}^+$ の n 次元球の体積を $V^n(r)$ と記す．当面の目標は $V^n(r)$ の値を求めることであるが，そのためには半径が $r \in \boldsymbol{R}^+$ の n 次元球体の体積 $V^n(r)$ とは何であるかを明らかにしておく必要がある．このために

$$\begin{cases} \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)\} \subset \boldsymbol{R}^n \\ r \in \boldsymbol{R}^+ \end{cases}$$

---

[9]愛媛県松山市
[10]miwasaki@cure.ocn.ne.jp
[11]Professor Emeritus, Kochi University
[12]Professor Emeritus, Kochi University

であるとき，$i=1,2,\cdots,n-1$ に対し

$$\begin{cases} \rho_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{r^2-{x_1}^2-\cdots-{x_i}^2} & : {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots {x_n}^2 \le r^2 \\ \delta_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-{y_1}^2\cdots-{y_i}^2} & : {y_1}^2+{y_2}^2+\cdots {y_n}^2 \le 1 \end{cases}$$

と定める．以上の準備をして，次の定義をする．

定義 2.2 上で述べた $V^n(r)$ は n 重積分：

$$V^n(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-\rho_1}^{\rho_1} dx_2 \ \cdots\cdots \ \int_{-\rho_{n-1}}^{\rho_{n-1}} dx_n$$

で定める．♦

注意 上の定義によると，$n=1,2$ の場合には予想通りに

$$\begin{cases} V^1(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} dx_1 = 2r \\ V^2(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-\rho_1}^{\rho_1} dx_2 = 2\int_{-r}^{r} \rho_1 dx_1 = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-{x_1}^2}dx_1 = \pi r^2 \end{cases}$$

が成り立ち，また $V^3(r)$ についても同様に

$$\begin{aligned} V^3(r) &= \int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-\rho_1}^{\rho_1} dx_2 \int_{-\rho_2}^{\rho_2} dx_3 \\ &= 2\int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-\rho_1}^{\rho_1} \sqrt{{\rho_1}^2-{x_2}^2}dx_2 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

が得られる．最後の等号は $x_2=\rho_1\cos t$ と変数変換して得られる．♦

3.3 体積計算への準備

この節では，定義 2.1 で与えた S_n と定義 2.2 で与えた $V^n(r)$ との関わり合いについて調べるが，両者の関係は定理 4.1 の証明で重要な働きをする．

まず，定義 2.1 で与えた S_n には応用性の豊かな性質がある．

補題 3.1 次の関係式が成り立つ：

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \implies S_n S_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$$

証明 $S_0=\pi$ で $S_1=2$ であるから $n=1$ の時は自明である．$n \ge 2$ のときには $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$ と分解して部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\pi \sin^{n-1} x \sin x dx \\ &= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx \\ &= (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \end{aligned}$$

を得る．従って，次の漸化式：

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} \quad \therefore\ nS_nS_{n-1} = (n-1)S_{n-1}S_{n-2}$$

が得られ，この右側の漸化式から

$$nS_nS_{n-1} = (n-1)S_{n-1}S_{n-2} = \cdots\cdots = 1 \cdot S_1 \cdot S_0 = 2\pi$$

が成り立つことが分かる．これで補題は証明された．□

本節を終えるに前に S_n と $V^n(r)$ との関わり合いについて調べてみよう．以下，1 つの定理と 1 つの補題が成り立つ．

定理 3.2 次の関係式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ r \in \boldsymbol{R}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow V^n(r) = r^nV^n(1)$$

証明 定義 2.2 の定義式において変数変換 $x_i = ry_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ を行えば

$$V^n(r) = \int_{-1}^{1} rdy_1 \int_{-\delta_1}^{\delta_1} rdy_2\ \cdots\cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} rdy_n = r^nV^n(1)$$

を得る．ここで

$$V^n(\,1\,) = \int_{-1}^{1} dy_1 \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dy_2\ \cdots\cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} dy_n$$

である．これで定理は証明された．□

ここで，n 次元単位球の体積 $V^n(1)$ を計算する前に，補題を 1 つ準備する．

補題 3.3 $n \geq 2$ なる $n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対して

$$V^n(1) = V^{n-1}(1)S_n$$

が成り立つ．

証明 定義 2.2 及び定理 3.2 により

$$\begin{aligned} V^n(1) &= \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dx_2\ \cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} dx_n \\ &= \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dx_2\ \cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} dx_n \right\} dx_1 \\ &= \int_{-1}^{1} V^{n-1}(\delta_1) dx_1 \\ &= V^{n-1}(1) \int_{-1}^{1} {\delta_1}^{n-1} dx_1 \\ &= V^{n-1}(1) \int_{-1}^{1} (1 - {x_1}^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \\ &= V^{n-1}(1) \int_{0}^{\pi} \sin^n t dt \\ &= V^{n-1}(1) S_n \end{aligned}$$

が得られ，これで補題は証明された．□

3.4　体積の計算

本節の目標は定理 4.1 を証明することである．この定理は，n 次元単位球の体積は，定理 4.1 から分かるように定義 2.1 で与えた S_n による表現とガンマ関数を用いた表現と 2 通りがあることを示している．

すなわち，補題 3.1 を用いれば次の定理を得ることが出来る．

定理 4.1 次の関係式が成り立つ：

$$V^n(1) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} S_i \overset{(2)}{=} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

証明　補題 3.3 で与えた $n \in \boldsymbol{Z}^+$ に関する漸化式：

$$V^n(1) = V^{n-1}(1)S_n$$

と初期条件 $V^1(1) = S_1\ (=2)$ とを合わせて用いれば，等号 (1) が得られる．

等号 (2) は次のように考える．ただし，$\{m, n\} \subset \boldsymbol{Z}^+$ とする．まず，$n = 2m$ の時は定義 3.1 により

$$(S_1S_2)\cdot(S_3S_4)\ \cdots\ (S_{2m-1}S_{2m}) = \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{4}\ \cdots\ \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi^m}{m!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

が得られる．つぎに $n = 2m-1$ のときには $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ だから

$$\begin{aligned}
S_1\cdot(S_2S_3)\ \cdots\ (S_{2m-2}S_{2m-1}) &= 2\cdot\frac{2\pi}{3}\ \cdots\ \frac{2\pi}{2m-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ \cdots\ \frac{2m-1}{2}\right)^{-1}\pi^{m-1} \\
&= \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ \cdots\ \frac{2m-1}{2}\right]^{-1}\pi^{m-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}
\end{aligned}$$

が得られる．これで定理は証明された．□

上記の外に $V^n(1)$ にはもう一つ別の表現法がある．すなわち，Gauss 記号と階乗 !! を用いた表現である．

系 4.2 (n 次元単位球の体積)

$$V^n(1) = \frac{2^{[\frac{n+1}{2}]}\pi^{[\frac{n}{2}]}}{n!!}$$

証明　定理 4.1 より，$V^n(1) = S_1S_2\ \cdots\ S_n$ であるから，$m \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し，$n = 2m$ 及び $n = 2m+1$ の場合に分け，証明する．

まず，$n = 2m$ のときは

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] = m$$

であるから，補題 3.1 により

$$V^n(1) = (S_1S_2)\cdot(S_3S_4)\cdots(S_{2m-1}S_{2m})$$

$$= \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{4}\cdots\frac{2\pi}{2m} = \frac{2^m\pi^m}{(2m)!!} = \frac{2^{[\frac{n+1}{2}]}\pi^{[\frac{n}{2}]}}{n!!}$$

を得る．よって，$n = 2m$ の時に系は証明された．

つぎに，$n = 2m + 1$ のときは

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] = m + 1 \quad \& \quad \left[\frac{n}{2}\right] = m$$

であるから，補題 3.1 より

$$\begin{aligned} V^n(1) &= S_1 \cdot (S_2 S_3) \cdot (S_4)(S_5) \ldots \cdots (S_{2m} S_{2m+1}) \\ &= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdots \cdots \frac{2\pi}{2m+1} \\ &= \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!} \\ &= \frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!!} \end{aligned}$$

が得られる．よって，$n = 2m + 1$ の時も系は証明された．□

3.5 おわりに

多次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 2)$ の単位球の体積計算法はここに示した方法以外にもいくつか考えられる．本稿では定義 2.2 の形で半径 $r \in \boldsymbol{R}^+$ の n 次元球体の体積を定めてこの多重積分を計算した．この定義こそが本稿の要である．定義 2.1 で与えた正弦積分 S_n が定理 4.1 において威力を発揮しており，また系 4.2 に示したように Gauss 記号を用いると n 次元単位球の体積は，n の偶数，奇数にかかわらず唯一つの式で表現される．Gauss 記号の有難さである．■

四元数に近づく
Approach to the Quaternions

矢野　忠[13]
Tadashi YANO[14]

4.1　はじめに

Cauchy-Lagrange の恒等式をご存知だろうか．文字数の少ない順に書いていくと

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &= (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 \\ &\quad + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) &= (ax+by+cz+dw)^2 + (ay-bx)^2 \\ &\quad + (az-cx)^2 + (aw-dx)^2 + (bz-cy)^2 \\ &\quad + (bw-dy)^2 + (cw-dz)^2\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

等である．

これらの内で (4.1.1) は普通は Cauchy-Lagrange の恒等式とは呼んでいないようだが，ここでは都合上 Cauchy-Lagrange の恒等式に含め，これらの恒等式 (4.1.1)，(4.1.2)，(4.1.3) をそれぞれ便宜上２次，３次，４次の Cauchy-Lagrange の恒等式と呼ぶことにしよう．

中学生くらいの代数の知識があれば，これらの恒等式を証明することは何でもない．たとえば，(4.1.1) は

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \\ &= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) + (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) \\ &= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2\end{aligned}$$

と証明できる．同様に (4.1.2) は

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\ &= (ax+by+cz)^2 - (2abxy + 2bcyz + 2cazx) + (a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2) \\ &= (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2\end{aligned}$$

と証明できる．また，同様な方法で (4.1.3) を証明することもできる．

しかし，(4.1.1) にはつぎのような複素数を用いた証明もある．

いま，$a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib), x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$ と虚数単位 $i \equiv \sqrt{-1}$ を用いて表せば,

$$a+ib, a-ib, x+iy, x-iy$$

[13]yanotad@earth.ocn.ne.jp
[14]Professor Emeritus, Ehime University

はいずれも複素数であるから，積の順序が交換可能である．

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(a+ib)(a-ib)(x+iy)(x-iy)$$

は積の順序を入れ替えて

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2)&=(a+ib)(x-iy)(a-ib)(x+iy)\\&=[(ax+by)-i(ay-bx)][(ax+by)+i(ay-bx)]\\&=(ax+by)^2+(ay-bx)^2\end{aligned}$$

としても証明できる．

このような証明ができるとすれば，(4.1.2) の証明はできないかもしれないが，(4.1.3) の証明がこの複素数を用いた証明と同様にできるのではないかと予想される．

実は 2 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の証明をまねて，4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の証明を試みてみたが, その証明は頓挫してしまった．その後，その証明が四元数といわれる数を用いてできることを文献 [1], [2] に見出した．

まず次節で四元数とは何かを説明し，その後，四元数を用いて 4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式を導こう．

4.2 四元数

四元数とは何か．文字通り 4 つの元 (element) からできている数であり, これは複素数の拡張と考えられる[15]．

いま a,b,c,d を 4 つの実数としたとき, 四元数 α を 2 つの複素数 $a+bi, c+di$ を用いて

$$\alpha=(a+bi)+(c+di)j \tag{4.2.1}$$

で定義する．この第 2 項を分配法則を用いて展開すれば,

$$\alpha=a+bi+cj+d\,ij \tag{4.2.2}$$

となるが, いま $ij=k$ とおけば,

$$\alpha=a+bi+cj+dk \tag{4.2.3}$$

と表せる．もし (4.2.3) で $c=d=0$ とすれば，α は複素数になる．

ところで, いま黙って導入した j,k は虚数単位 i ときわめてよく似たものであり, $j=\sqrt{-1}$, $k=\sqrt{-1}$ が成り立つが，i とは独立である．これらの i,j,k に 1 をつけ加えて, これらを四元数の基底という．

一般に任意の 2 つの四元数の積をつくれば, ij の積だけではなく, 積 jk と ki とそれらの積の順序が入れ替わった積 ji,kj,ik が出てくる．それで, それらの積がそれぞれ $1,i,j,k$ の 1 次結合で表されるとすれば, 数として積に関して閉じている．加法については a,b,c,d を実数にとることにすれば, 閉じているからまったく問題はない．

四元数の発見者 Hamilton は 4 つの基底 $1,i,j,k$ の間の積について成り立つ，つぎのような関係を見つけた．

まず 1 は乗法の単位要素で, かつ

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \tag{4.2.4}$$
$$ij=-ji=k \tag{4.2.5}$$
$$jk=-kj=i \tag{4.2.6}$$
$$ki=-ik=j \tag{4.2.7}$$

である．

これらを一括した四元数の基底の乗積表を表 1 に載せておこう．この四元数の基底の乗積表の見方を述べて

[15]四元数の発見のプロセスは 10 号で発表する．

表 4.1: 乗積表

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

おく．表の一番左側の欄の $1, i, j, k$ は表の一番上の欄の $1, i, j, k$ とで積をつくる．このときに左側の因子が前に来るように積をつくる．例えば，上から 3 行目の i と左から 4 列目の j との積は

$$ij = k$$

と読む．表には積の結果しか書いていない．

この四元数は複素数のレベルから見れば, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ にさらに 2 つ j, k という独立な基底を付加した数である．この関係で特徴的なことは i, j, k のうちから異なった基底を 2 つとった積, たとえば, 積 ij はとられなかった第 3 の基底 k に等しい．すなわち, $ij = k$ となっている．また積の順序を変えて ji とすれば, $ji = -k$ となり, 積の順序が交換できない．

ある四元数 α の共役を $\bar{\alpha}$ と表せば,

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk \tag{4.2.8}$$

である．これは複素数における共役複素数を一般化したものと考えれば, 理解しやすいであろう．

この共役をとるという操作にはつぎのような関係がある．

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta} \tag{4.2.9}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} \tag{4.2.10}$$

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \tag{4.2.11}$$

また, α のノルムは

$$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{4.2.12}$$

で定義される．$|\alpha|$ を絶対値という．ノルムが定義されたということは距離空間の公理

$$|\alpha| \geq 0, |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

をこの $|\alpha|$ が満たしている [1].

特に, $\alpha \neq 0$ に対して,

$$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 \tag{4.2.13}$$

であるから, この両辺を $|\alpha|^2$ で割れば,

$$\alpha\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = 1 \tag{4.2.14}$$

となる．いま

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} \tag{4.2.15}$$

と表せば, (4.2.14) は

$$\alpha\alpha^{-1} = 1 \tag{4.2.16}$$

となる．すなわち, $\alpha \neq 0$ のとき, α の逆元 α^{-1} が存在して (4.2.15) で定義できる．

したがって, α の全体 K は非可換な体となる．この K を四元数体といい, その要素 (element) を四元数 (quaternion）という．

体とは普通の複素数のように四則演算ができて, 加法と乗法に対して交換則, 結合則, 分配則が成り立つものであるが, 四元数の場合にはこのうちの乗法の交換則 $\alpha\beta = \beta\alpha$ が成り立たない．

以上で四元数の説明を終わり, つぎの節ではこの四元数を用いた，4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の導出をしよう．

4.3 四元数を用いた恒等式の証明

まずはじめに証明すべき 4 次の恒等式を書いておこう．それは

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) &= (ax+by+cz+dw)^2+(bx-ay+dz-cw)^2 \\
&\quad +(cx-dy-az+bw)^2+(dx+cy-bz-aw)^2
\end{aligned} \tag{4.3.1}
$$

である．証明したい (4.1.3) の式の形はこの式とは少し見かけは異なるが, それとは同値であることを後で示す．

任意の 2 つの四元数を

$$\alpha = a + bi + cj + dk \tag{4.3.2}$$

$$\beta = x + yi + zj + wk \tag{4.3.3}$$

と表せば, 積 $\alpha\beta$ は

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= (ax-by-cz-dw)+(bx+ay-dz+cw)i \\
&\quad +(cx+dy+az-bw)j+(dx-cy+bz+aw)k
\end{aligned} \tag{4.3.4}
$$

となる．ここで, α, β をそれぞれ共役な $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ に置き換えて, 積 $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ をつくれば, 積 $\alpha\beta$ の式 (4.3.4) で

$$
\begin{aligned}
b &\to -b \\
c &\to -c \\
d &\to -d \\
y &\to -y \\
z &\to -z \\
w &\to -w
\end{aligned}
$$

とそれぞれの符号を変えてやればよい．そうすれば, b, c, d と y, z, w の双 1 次の項は符号が変わらないが, a と y, z, w との双 1 次の項と b, c, d と x との双 1 次の項は符号が変わる．したがって,

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}\bar{\beta} &= (ax-by-cz-dw)+(-bx-ay-dz+cw)i \\
&\quad +(-cx+dy-az-bw)j+(-dx-cy+bz-aw)k
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

が得られる．

つぎに $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ の積の順序を変えて, 積 $\bar{\beta}\bar{\alpha}$ をつくれば, この積を得るには (4.3.5) で

$$
\begin{aligned}
a &\leftrightarrow x \\
b &\leftrightarrow y \\
c &\leftrightarrow z \\
d &\leftrightarrow w
\end{aligned}
$$

と文字を置き換えてやればよいから，これを行うと

$$\begin{aligned}\bar{\beta}\bar{\alpha} &= (ax - by - cz - dw) + (-bx - ay + dz - cw)i \\ &\quad + (-cx - dy - az + bw)j + (-dx + cy - bz - aw)k\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

が得られ，(4.3.6) の i, j, k の前の係数にすべて負号 $-$ がつくことになる．すなわち，

$$\begin{aligned}\bar{\beta}\bar{\alpha} &= (ax - by - cz - dw) + (bx + ay - dz + cw)(-i) \\ &\quad + (cx + dy + az - bw)(-j) + (dx - cy + bz + aw)(-k)\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

とも書き直せるから，これは $\overline{\alpha\beta}$ に等しい．したがって

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} \tag{4.3.8}$$

であることがわかる．

ところで積 $\alpha\beta$ の絶対値の 2 乗 $|\alpha\beta|^2$ を考えると

$$\begin{aligned}|\alpha\beta|^2 &= \alpha\beta\overline{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha} \\ &= \alpha|\beta|^2\bar{\alpha} \\ &= |\alpha|^2|\beta|^2\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

となる．この等式で $\beta \to \bar{\beta}$ と置き換えれば，

$$|\alpha\bar{\beta}|^2 = |\alpha|^2|\bar{\beta}|^2 \tag{4.3.10}$$

となる．しかし，$|\bar{\beta}| = |\beta|$ であるから，

$$|\alpha\bar{\beta}|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2 \tag{4.3.11}$$

が成り立つ．

積 $\alpha\bar{\beta}$ は (4.3.4) の積 $\alpha\beta$ で

$$\begin{aligned}y &\to -y \\ z &\to -z \\ w &\to -w\end{aligned}$$

と置き換えれば得られる．すなわち，

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\beta} &= (ax + by + cz + dw) + (bx - ay + dz - cw)i \\ &\quad + (cx - dy - az + bw)j + (dx + cy - bz - aw)k\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

これを (4.3.11) へ代入すれば，Cauchy-Lagrange の恒等式

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 \tag{4.3.13}$$

が得られる．ただし，ここで

$$\begin{aligned}X &= ax + by + cz + dw \\ Y &= bx - ay + dz - cw \\ Z &= cx - dy - az + bw \\ W &= dx + cy - bz - aw\end{aligned}$$

である．(4.3.13) はすなわち (4.3.1) であるが，(4.1.3) とは見掛けが一致していない．したがって，

$$\begin{aligned}Y^2 + Z^2 + W^2 &= (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (dx - aw)^2 \\ &\quad + (cy - bz)^2 + (dy - bw)^2 + (dz - cw)^2\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

であることを示す必要がある．そのために Y^2, Z^2, W^2 を計算すれば,

$$Y^2 = (bx-ay)^2 + (dz-cw)^2 + 2(bx-ay)(dz-cw) \tag{4.3.15}$$
$$Z^2 = (dy-bw)^2 + (cx-az)^2 - 2(dy-bw)(cx-az) \tag{4.3.16}$$
$$W^2 = (dx-aw)^2 + (cy-bz)^2 + 2(dx-aw)(cy-bz) \tag{4.3.17}$$

であるから

$$\begin{aligned} Y^2 + Z^2 + W^2 &= (bx-ay)^2 + (dz-cw)^2 + (dy-bw)^2 \\ &\quad + (cx-az)^2 + (dx-aw)^2 + (cy-bz)^2 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

となる．すなわち, クロス項の和は

$$2[(bx-ay)(dz-cw) - (dy-bw)(cx-az) + (dx-aw)(cy-bz)] = 0$$

となることは計算を丹念に行えば, 示すことが出来る．

したがって,

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) &= (ax+by+cz+dw)^2 + (bx-ay)^2 + (cx-az)^2 \\ &\quad + (dx-aw)^2 + (cy-bz)^2 \\ &\quad + (dy-bw)^2 + (dz-cw)^2 \end{aligned}$$

が得られる．これは (4.1.3) である．

4.4 おわりに

私個人の四元数への近づき方は，この 4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の四元数を用いた証明を通じてであった [5]．しかし，この等式の証明には必ずしも四元数が必要な訳ではない．その証明法はいくつもあり，それらはまったく四元数とは関係ないものが多い [3]，[4]，[6]，[7]，[8]．(2011.7.13)

参考文献

[1] 遠山啓 編, 「現代数学教育事典」（明治図書, 1965）90-91

[2] ソーヤー, 「数学へのプレリュード」（みすず書房, 1978）71

[3] 矢野　忠，Lagrange の恒等式，研究と実践（愛数協）50 号 (1994.6) 9-12,
「数学散歩」（国土社，2005）70-74 に改訂して収録

[4] 矢野　忠．Cauchy-Lagrange の恒等式再論 1，研究と実践（愛数協），92 号（2006.10）14-17

[5] 矢野　忠．Cauchy-Lagrange の恒等式再論 2，研究と実践（愛数協），93 号（2007.3）9-13

[6] 矢野　忠．Cauchy-Lagrange の恒等式再論 3，研究と実践（愛数協），94 号（2007.6）8-12

[7] 矢野　忠．Cauchy-Lagrange の恒等式再論 4，研究と実践（愛数協），105 号（2010.7）12-17

[8] 矢野　忠．Cauchy-Lagrange の恒等式再論 5，研究と実践（愛数協），投稿中

編集後記

2011 年 9 月となった．9 号の冒頭を中西さんの湯川先生についてのエッセイで飾った．これなら数学とか物理学に縁遠い人でも字の読める人なら誰でも読めるであろう．なかなかほほ笑ましいエピソード群である．

9 号からタイトルと氏名，所属を英語で入れることとした．これは京都大学数理解析研究所の川村勝紀さんのご提案によっている．次号以降では英文のアブストラクトをつけることも検討したい．

気楽に発表できる場という，このサーキュラーの設定を変るつもりはまったくないので，別に権威のあるものを目指している訳ではない．単に現在の情報化社会のニーズにあったものにしたいという意図からである．（矢野 忠）