数学・物理通信

10 巻 1 号　　2020 年 3 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2020 年 3 月 6 日

目次 (Contents)

鍵盤打楽器の固有振動 (4)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (4)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「鍵盤打楽器の固有振動 (3)」(数学・物理通信 9 巻 10 号) では，下の図 1(b) に示すように鍵盤の厚さを中心から端の方に行くにしたがい直線的に太くなるものとして，波動方程式を解析し，その固有振動を求めた．すなわち，鍵盤の長さを 2ℓ としたときその厚さ h は，場所の関数で，鍵盤の中心を原点とし，長さ方向に x 軸をとったとき，

$$h(x) = h_0\Big(1 + \alpha\frac{|x|}{\ell}\Big) \tag{1.1}$$

と表されるものとした．このときの波動方程式は Bessel 関数を用いて解くことができ，結果として，固有振動の高調波の振動数が基本波の振動数の整数倍になるかという問題に対し，非常に良い解答を与えることができた．

今回は，この厚さ h を x の 2 次式

$$h(x) = h_0\Big[1 + \Big(\alpha\frac{x}{\ell}\Big)^2\Big] \tag{1.2}$$

とした場合を考える．このときの図を図 1(c) に示す．

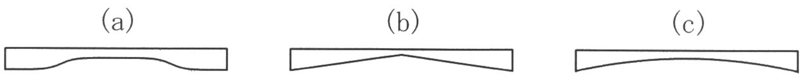

図 1 実際の鍵盤 (a)， 直線的に厚さを変えた前回のもの (b)， 今回扱う 2 次曲線で厚さを変えたもの (c)

前回の (1.1) 式のときは，$x = 0$ で解の接続が必要であったが，今回の (1.2) 式の場合は $x = 0$ での接続が不要になる．しかし，そのかわり，解は，既成の関数では解けなくなるので，級数展開が必要になる．

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

「はじめに」のところで述べたように，鍵盤の長さを 2ℓ, 幅を a, 厚さを h とするが，この厚さに関しては，(1.2) 式を採用する．この式で h_0 は鍵盤中央部の厚さを表す長さの次元を持つ定数，また，α は鍵盤の形状を決める無次元の定数である．

* 北海学園大学名誉教授　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ここで用いる波動方程式は，前回と同じ Bernoulli-Euler 梁のものを使う．すなわち，点 x, 時刻 t における鍵盤の面に対し垂直方向の変位を $V(x,t)$ としたとき，

$$\rho\, ah(x)V_{tt}(x,t) = -{\partial_x}^2\big[EI(x)\,V_{xx}(x,t)\big], \qquad I(x) = \frac{ah(x)^3}{12} \tag{2.1}$$

とする．ここに，変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す．また，ρ は鍵盤の体積密度，E は Young 率，$I(x)$ は断面 2 次モーメントでこの第 2 式で定義する．

この方程式に，鍵盤の両端 $(x=\pm\ell)$ は完全自由端として，そこでの曲げモーメント $M = EIV_{xx}$ をゼロ，また，剪断力 $Q = \partial_x(EIV_{xx})$ もゼロとして，

$$EI(x)V_{xx}\Big|_{x=\pm\ell} = 0, \qquad \partial_x\big[EI(x)V_{xx}\big]\Big|_{x=\pm\ell} = 0 \tag{2.2}$$

という境界条件を課す．

方程式を解く前に，数式簡素化のため，変数の無次元化をしておく．そのため，速度の次元を持つ定数 c と時間の次元を持つ定数 τ を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \qquad \tau = \frac{\ell}{c} \tag{2.3}$$

と，導入しておく．ここで，ℓ を長さの単位，τ を時間の単位として，x, h_0, V, t を，改めて

$$x/\ell \;\to\; x, \qquad h_0/\ell \;\to\; h_0, \qquad V/\ell \;\to\; V, \qquad t/\tau \;\to\; t \tag{2.4}$$

とおき直す．この変換で方程式 (2.1) は，

$$h(x)V_{tt}(x,t) = -{\partial_x}^2\big[h(x)^3V_{xx}(x,t)\big] \tag{2.5}$$

と無次元化されたものになる．ここで，(1.2) 式に替わって新しく定義された無次元の厚さ $h(x)$ は

$$h(x) = h_0\big[1+(\alpha x)^2\big] \tag{2.6}$$

である．境界条件の (2.2) 式はこの無次元化で，

$$V_{xx}(x,t)\Big|_{x=\pm1} = 0, \qquad \partial_x\big[h(x)^3V_{xx}(x,t)\big]\Big|_{x=\pm1} = 0, \;\;\Rightarrow\;\; V_{xxx}(x,t)\Big|_{x=\pm1} = 0 \tag{2.7}$$

となる．ここで，この第 1 式，第 2 式は (2.2) 式から直接でるものであるが，この第 2 式は第 1 式を用いると第 3 式に変形されることに注意する．

2.2 固有値と固有関数

方程式 (2.5) を解くにあたり，変位 $V(x,t)$ を x と t に関する変数分離形とし，時間依存部分は三角関数として，

$$V(x,t) = X(x)\sin(\omega t+\delta) \tag{2.8}$$

と仮定する．ここに ω は無次元化された角振動数，δ は位相角である．これで，方程式 (2.5) は，

$$\omega^2h(x)X(x) = \frac{d^2}{dx^2}\big[h(x)^3X_{xx}(x)\big], \qquad h(x) = h_0\big[1+(\alpha x)^2\big] \tag{2.9}$$

と 1 変数 x のみを含むものとなる．この方程式を境界条件 (2.7) 式からでる

$$X_{xx}(x)\Big|_{x=\pm1} = 0, \qquad X_{xxx}(x)\Big|_{x=\pm1} = 0 \tag{2.10}$$

の下に解くことになる．

この方程式 (2.9) は既成の関数では解けそうもないので，この解を級数展開の形

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(\alpha x)^n \tag{2.11}$$

とおいて方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[&(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{n+4} + 3(n+2)^2(n+1)^2C_{n+2} + 3n(n-1)(n+2)(n+1)C_n \\ &+ (n-2)(n-3)(n+2)(n+1)C_{n-2}\Big](\alpha x)^n = k^2\sum_{n=0}^{\infty}\Big[C_n + C_{n-2}\Big](\alpha x)^n\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる．ただし，ここで，添え字が負になる C_{-2}, C_{-1} はゼロとし，また，この式の右辺にある k は

$$k = \frac{\omega}{\alpha^2 h_0} \tag{2.13}$$

と定義する．この式から，両辺での $(\alpha x)^n$ の係数は等しくなり，

$$\begin{aligned}&(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{n+4} + 3(n+2)^2(n+1)^2C_{n+2} + 3n(n-1)(n+2)(n+1)C_n \\ &\qquad + (n-2)(n-3)(n+2)(n+1)C_{n-2} = k^2\big(C_n + C_{n-2}\big), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots\end{aligned} \tag{2.14}$$

と，係数 C_n を決定するための漸化式を得る．このうち n 番号が 0 から 5 までを具体的に書き下すと，

$$\begin{aligned}&4\cdot3\cdot2\,C_4 + 3\cdot2^2\,C_2 = k^2C_0, \\ &5\cdot4\cdot3\cdot2\,C_5 + 3\cdot3^2\cdot2^2\,C_3 = k^2C_1, \\ &6\cdot5\cdot4\cdot3\,C_6 + 3\cdot4^2\cdot3^2\,C_4 + 3\cdot2\cdot4\cdot3\,C_2 = k^2(C_2 + C_0), \\ &7\cdot6\cdot5\cdot4\,C_7 + 3\cdot5^2\cdot4^2\,C_5 + 3\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4\,C_3 = k^2(C_3 + C_1), \\ &8\cdot7\cdot6\cdot5\,C_8 + 3\cdot6^2\cdot5^2\,C_6 + 3\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5\,C_4 + 2\cdot6\cdot5\,C_2 = k^2(C_4 + C_2), \\ &9\cdot8\cdot7\cdot6\,C_9 + 3\cdot7^2\cdot6^2\,C_7 + 3\cdot5\cdot4\cdot7\cdot6\,C_5 + 3\cdot2\cdot7\cdot6\,C_3 = k^2(C_5 + C_3)\end{aligned} \tag{2.15}$$

のようになる．これらの式から分かることは，C_0 と C_2 が与えられると，この第 1 式から C_4 が決まり，さらに，第 3 式から C_6 が決まり，第 5 式から C_8 が決まる．同様に，C_1, C_3 が与えられると，この第 2 式から C_5 が決まり，第 4 式から C_7 が決まり，第 6 式から C_9 が決まる．このように，このときの解としては，偶関数になるものと，奇関数になるものが存在する．これは，方程式 (2.9)，境界条件 (2.10) が x の符号反転に対し不変なので，当然のことである．

ここでは，$C_0 = 1$, $C_2 = 0$ としてこれら係数を求めて作られた偶関数の級数解を $F_0(x)$ と記し，$C_0 = 0$, $C_2 = 1$ として作られた同じく偶関数の級数解を $F_2(x)$ と書くことにする．同様に，$C_1 = 1$, $C_3 = 0$ として作られた奇関数の級数解を $G_1(x)$ とし，$C_1 = 0$, $C_3 = 1$ として作られた奇関数の級数解を $G_3(x)$ と書くことにする．

漸化式 (2.14) から順次に係数 C_n を求めるとき，この式の左辺で C_n に付く係数はいずれも n の 4 次式なので，C_n 自体の収束性はあまり良くないかもしれない．しかし，(2.11) 式で見るように変数の方は $(\alpha x)^n$ の形で入ること，x の範囲が $-1 \leq x \leq 1$ であること，また，実際に使われる α は 1 よりも小となる場合を想定していることを考慮すると，この級数 (2.11) の収束性はそう悪いものではないだろう．

以下では，偶関数となる 2 つの解 $F_0(x)$，$F_2(x)$，および，奇関数となる 2 つの解 $G_1(x)$，$G_3(x)$ が求められたものとし，A，B を任意定数として，これら関数の線形結合である一般解を，

$$F(x) = AF_0(x) + BF_2(x), \qquad G(x) = AG_1(x) + BG_3(x) \tag{2.16}$$

と定義しておく．ここで，偶関数 $F(x)$ と奇関数 $G(x)$ で同じ係数 A，B を用いたが，これは使用する文字を無用に増やさないためで，実際には異なるものである．

これら関数に境界条件の (2.10) 式を適用すると，

$$A\frac{d^2F_0(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} + B\frac{d^2F_2(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} = 0, \qquad A\frac{d^3F_0(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} + B\frac{d^3F_2(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} = 0 \tag{2.17}$$

および，

$$A\frac{d^2G_1(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} + B\frac{d^2G_3(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} = 0, \qquad A\frac{d^3G_1(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} + B\frac{d^3G_3(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} = 0 \tag{2.18}$$

となる．ここで，これら関数 F_0，F_2，G_1，G_3 は偶奇性が決まっているので，$x = \pm 1$ での条件は，$x = 1$ のみで課すことで十分であることに注意する．これらの式で，係数 A，B が両方ともゼロになってしまわないためには，その係数行列式の値がゼロでなければならず，F_0，F_2 に対しては，

$$\frac{d^2F_0(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} \cdot \frac{d^3F_2(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} - \frac{d^2F_2(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} \cdot \frac{d^3F_0(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} = 0 \tag{2.19}$$

および，G_1，G_3 に対し，

$$\frac{d^2G_1(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} \cdot \frac{d^3G_3(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} - \frac{d^2G_3(x)}{dx^2}\Big|_{x=1} \cdot \frac{d^3G_1(x)}{dx^3}\Big|_{x=1} = 0 \tag{2.20}$$

が成り立たなければならない．この式から関数 F_0，F_2，G_1，G_3 に含まれる k の値が固有値として求められる．k が決まると，(2.13) 式から角振動数 ω が決まる．その意味でこれらの式を固有値方程式と呼ぶ．

ここで，(2.17) (2.18) それぞれの第 1 式が成り立つように，係数 A，B を，

$$\begin{aligned}
&\text{関数 } F \text{ に対し，}\quad A = \Big[\frac{d^2F_2(x)}{dx^2}\Big]_{x=1}, \qquad B = -\Big[\frac{d^2F_0(x)}{dx^2}\Big]_{x=1}, \\
&\text{関数 } G \text{ に対し，}\quad A = \Big[\frac{d^2G_3(x)}{dx^2}\Big]_{x=1}, \qquad B = -\Big[\frac{d^2G_1(x)}{dx^2}\Big]_{x=1}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

と選ぶことにし，(2.16) 式を書き直して

$$\begin{aligned}
F(x) &= \Big[\frac{d^2F_2(x)}{dx^2}\Big]_{x=1} F_0(x) - \Big[\frac{d^2F_0(x)}{dx^2}\Big]_{x=1} F_2(x) \\
G(x) &= \Big[\frac{d^2G_3(x)}{dx^2}\Big]_{x=1} G_1(x) - \Big[\frac{d^2G_1(x)}{dx^2}\Big]_{x=1} G_3(x)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

と書くことにする．ここで，k が固有値 k_i にあるときは，これら関数を $F(x, k_i)$，$G(x, k_i)$ と固有値 k_i を明示して，固有関数と呼ぶ．もちろん，これらは正規化されたものではない．

2.3 固有関数の正規化

計算方法は前回とほとんど同じであるが，細かい点で違ってくるので，もう一度くり返す．偶関数の $F(x)$ から求めた固有値を k_i, 奇関数の $G(x)$ から求めた固有値を $k_{i'}$ とする．このとき，これら関数 $F(x,k_i)$ と $G(x,k_{i'})$ の積に重みの $h(x)$ を付けた積分は

$$\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k_i)G(x,k_{i'})dx = 0 \tag{2.23}$$

と直交する．これは，$h(x)$ が偶関数，したがって，被積分関数全体は奇関数となるので，当然のことである．したがって，固有関数の直交性を求めるときは，偶関数同士，あるいは，奇関数同士の積分を考えるとよい．以下では，偶関数同士の場合を考えることにする．

ここで，固有値とはかぎらない 2 個の k を k, k' とし，それらに属する関数を $F(x,k)$, $F(x,k')$ とする．これら関数は (2.9) 式を満たし，

$$\omega^2 h(x)F(x,k) = \frac{d^2}{dx^2}\big[h(x)^3 F_{xx}(x,k)\big], \qquad \omega'^2 h(x)F(x,k') = \frac{d^2}{dx^2}\big[h(x)^3 F_{xx}(x,k')\big] \tag{2.24}$$

が成り立っている．ここで，k と ω, および，k' と ω' は (2.13) 式の関係にある．この第 1 式に $F(x,k')$ を掛け，第 2 式に $F(x,k)$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned}
&(\omega^2-\omega'^2)h(x)F(x,k)F(x,k') \\
&\qquad = \frac{d}{dx}\Big[F(x,k')\frac{d}{dx}\big[h(x)^3F_{xx}(x,k)\big] - F(x,k)\frac{d}{dx}\big[h(x)^3F_{xx}(x,k')\big] \\
&\qquad\qquad + h(x)^3F_x(x,k)F_{xx}(x,k') - h(x)^3F_x(x,k')F_{xx}(x,k)\Big]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

となる．この式の両辺を x で -1 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned}
&(\omega^2-\omega'^2)\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k)F(x,k')dx \\
&\qquad = \Big[F(x,k')\frac{d}{dx}\big[h(x)^3F_{xx}(x,k)\big] - F(x,k)\frac{d}{dx}\big[h(x)^3F_{xx}(x,k')\big] \\
&\qquad\qquad + h(x)^3F_x(x,k)F_{xx}(x,k') - h(x)^3F_x(x,k')F_{xx}(x,k)\Big]_{-1}^{1}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる．ここで，さらに，境界条件 (2.10) の第 1 式が成立すれば，$F_{xx}(\pm1,k) = F_{xx}(\pm1,k') = 0$ となるので，

$$\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k)F(x,k')dx = \frac{h(1)^3}{\omega^2-\omega'^2}\Big[F(x,k')F_{xxx}(x,k) - F(x,k)F_{xxx}(x,k')\Big]_{-1}^{1} \tag{2.27}$$

となる．ここで，$(d/dx)[h(x)^3F_{xx}(x)]\Big|_{x=\pm1} = h(1)^3F_{xxx}(\pm1)$ となることを用いた．さらに，この式の右辺の大括弧中は奇関数であることから

$$\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k)F(x,k')dx = \frac{2h(1)^3}{\omega^2-\omega'^2}\Big[F(1,k')F_{xxx}(1,k) - F(1,k)F_{xxx}(1,k')\Big] \tag{2.28}$$

となる．ここで，最後の条件である (2.10) の第 2 式が成立して，k, k' が固有値 k_i, $k_{i'}$ になると，右辺の大括弧中がゼロとなるので，もし，$k_i \neq k_{i'}$ のときは，異なる固有値に属する固有関数同士の直交性が

$$\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k_i)F(x,k_{i'})dx = 0, \qquad i \neq i' \tag{2.29}$$

と求められる．同じ固有値になるときは，(2.28) 式の右辺は 0/0 となるので，先に $k' = k_i$ とおき，その後で，$k \to k_i$ の極限をとる．すなわち，(2.13) 式を用いて ω を k で表し，l'Hopital の定理を使うと固有関数の直交性の式

$$\int_{-1}^{1} h(x)F(x,k_i)F(x,k_{i'})dx = N_{F,i}^2 \delta_{i,i'}, \qquad N_{F,i}^2 = \frac{h_0(1+\alpha^2)^3}{\alpha^4 k_i}\Big[\partial_k F_{xxx}(1,k)\Big]_{k=k_i} F(1,k_i) \tag{2.30}$$

を得る．ここに，$N_{F,i}$ は正規化定数で，$F(x,k_i)/N_{F,i}$ が正規化された固有関数となる．

同様に，奇関数 $G(x,k_i)$ 同士の直交式

$$\int_{-1}^{1} h(x)G(x,k_i)G(x,k_{i'})dx = N_{G,i}^2 \delta_{i,i'}, \qquad N_{G,i}^2 = \frac{h_0(1+\alpha^2)^3}{\alpha^4 k_i}\Big[\partial_k G_{xxx}(1,k)\Big]_{k=k_i} G(1,k_i) \tag{2.31}$$

も得られ，$N_{G,i}$ が正規化定数となる．

2.4 数値計算例

ここでは，前節までに求めた固有値，固有関数の処方箋にしたがいプログラム言語 Visual Basic を用いた数値解析を行う．偶関数 $F(x)$ に関する固有値方程式 (2.19) を解いて求めた k の値を小さい方から k_0, k_2, k_4, $\cdots$ と偶数の番号を付け，奇関数 $G(x)$ に関する固有値方程式 (2.20) を解いて求めた k の値を小さい方から k_1, k_3, k_5, $\cdots$ と奇数の番号を付ける．このとき証明はしていないが，これら固有値をまとめた固有値の大小関係は小さい方から k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, $\cdots$ の順となる．固有値 k を求めるためのこれら固有値方程式は鍵盤の形状因子であるパラメータ α に依存して決まる．ここでは，この α の値を，0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 という 5 通りの場合について，それぞれ，k の値を k_0 から k_5 までの 6 個の値を求めてみた．結果は，小数点以下 3 桁の精度で，

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha = 0.3 \text{ の場合} & k_i = 62.204, & 174.832, & 345.569, & 573.329, & 857.815, & 1192.728 \\
\alpha = 0.4 \text{ の場合} & k_i = 34.764, & 99.127, & 197.144, & 327.972, & 490.982, & 685.228 \\
\alpha = 0.5 \text{ の場合} & k_i = 22.082, & 64.085, & 128.377, & 214.306, & 321.349, & 447.822 \\
\alpha = 0.6 \text{ の場合} & k_i = 15.209, & 45.042, & 91.031, & 152.485, & 229.002, & 319.452 \\
\alpha = 0.7 \text{ の場合} & k_i = 11.079, & 33.557, & 68.478, & 115.165, & 172.774, & 238.830
\end{array} \tag{2.32}$$

という値になる．k_i の i 番号が大きくなると k_i の値は大きくなるのは当然であるが，同じ i 番号で比べると α の値が大きくなるほど k_i は小さくなる．このことは，(2.13) 式から k の値と振動数は比例しているので，同じ長さの鍵盤で見たとき α が大きい，つまり，薄い部分と厚い部分の差が大きいほど振動数が低くなるということである．固有値 k_i が決まるとこの (2.13) 式からそれに比例した固有角振動数 ω_i が決まるので，α を固定して考えたとき，k_i 同士の比はそのまま ω_i 同士の比となる．この事実を用いて，基本角振動数 ω_0 に対する高調波の角振動数 ω_i との比 ω_i/ω_0 を求めると，結果は，

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha = 0.3 \text{ の場合} & \omega_i/\omega_0 = 1, & 2.810, & 5.555, & 9.216, & 13.790, & 19.174 \\
\alpha = 0.4 \text{ の場合} & \omega_i/\omega_0 = 1, & 2.851, & 5.670, & 9.434, & 14.123, & 19.710 \\
\alpha = 0.5 \text{ の場合} & \omega_i/\omega_0 = 1, & 2.902, & 5.813, & 9.705, & 14.552, & 20.279 \\
\alpha = 0.6 \text{ の場合} & \omega_i/\omega_0 = 1, & 2.961, & 5.985, & 10.025, & 15.057, & 21,004 \\
\alpha = 0.7 \text{ の場合} & \omega_i/\omega_0 = 1, & 3.028, & 6.180, & 10.394, & 15.594, & 21.556
\end{array} \tag{2.33}$$

となる．ここで，重要なことは，高調波の振動数が基本波の振動数の整数倍になるかと言うことである．この中では， $\alpha = 0.6$ の場合が，その比の値は，おおよそ，1 倍，3 倍，6 倍，10 倍，15 倍，21 倍となって，これは前回の場合もそうであったが，これら数値の階差が 2，3，4，5，6 となる三角数になっている．これらの振動を音階に当てはめてみると，1 番低い振動数である基本波の振動音を「ド」としたとき，高調波の振動音は，1 オクターブ上の「ソ」，2 オクターブ上の「ソ」，3 オクターブ上の「ミ」，3 オクターブ上の「シ」，4 オクターブ上の「ファ」となる．一般に，振動数の高い高調波の振幅は小さくなるので，実際に問題になるのは，第 2 高調波くらいまでである．

ここで，この $\alpha = 0.6$ の場合に限って，正規化された固有関数 $F(x, k_i)$，$G(x, k_i)$ を数値的に求めグラフ化したものを図 2 に示す．i は固有値のモード番号であるが，どのグラフも $i + 2$ 個のゼロ点を持つ．

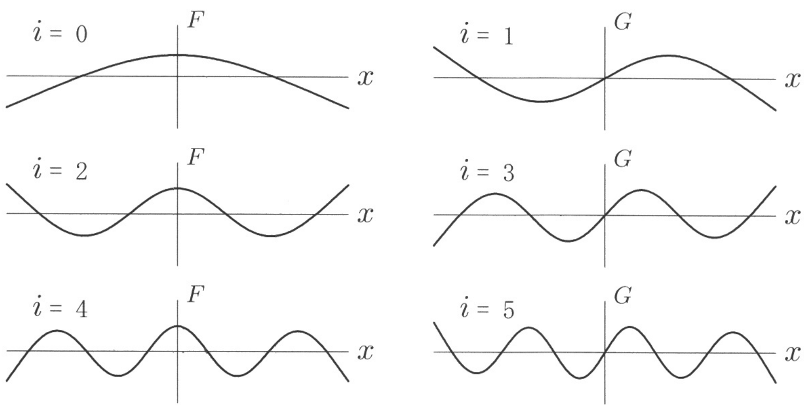

図 2 固有関数 $F(x, k_i)$，$(i = 0, 2, 4)$， $G(x, k_i)$，$(i = 1, 3, 5)$， $\alpha = 0.6$ の場合

このグラフを見るかぎりでは，前回，あるいは，前々回のものとほとんど違わない．

3 おわりに

今回は，鍵盤の厚さ $h(x)$ が x の 2 次式となる場合の解析を行った．このときは，既成の関数では解けないため，やむなく，級数展開の形で解を求めることにしたが，数値計算した段階ではその級数の収束性の悪さに悩まされてしまった．実際，α の値が 1 に近ずくにしたがい収束性は悪くなり，$\alpha = 0.8$ のときは基本波と第 1 高調波までは求められたが，第 2 高調波から先は求められなくなった．また，$\alpha \leq 0.7$ のときは第 5 高調波までは求められたがそれから先は無理であった．しかし，最後に示した図 2 の $\alpha = 0.6$ の場合の第 5 高調波までの固有関数は思い通りのものができたので，間違いはなかったものと思われる．

話は変わるが，この解析を始める前は，鍵盤の厚さ $h(x)$ を，同じ 2 次関数でも，ここで扱った (2.6) 式とは少し異なった

$$h(x) = h_0(1 + \alpha|x|)^2 \tag{3.1}$$

とした場合を考えていた．この場合は，級数展開はおろか，単項式で解けてしまう．すなわち，方程式 (2.9) において

$$X(x) = (1 + \alpha|x|)^\sigma \tag{3.2}$$

とおいて代入すると，σ の値が 4 個求まり，

$$\sigma = \pm p - \frac{3}{2}, \qquad \pm q - \frac{3}{2}, \qquad ここに, \qquad p = \frac{1}{2}\sqrt{17+4\sqrt{4+k^2}}, \qquad q = \frac{1}{2}\sqrt{17-4\sqrt{4+k^2}} \tag{3.3}$$

であれば，解になってしまう．p, q に含まれる k は (2.13) 式と同じものである．この式だけを見ると級数展開も必要がなく，非常に簡単に解けてしまうと思われたが，この解析には落とし穴があった．すなわち，実際の固有値になる k の値はかなり大きいところで，そこでは，この式の q が虚数になってしまう．しかも，この場合は境界条件の他に，$x = 0$ での接続条件も必要になるので，固有値方程式は，かなり複雑化された複素数を要素とする 4×4 の行列式をゼロおいて解くことになる．これは数式処理ソフト Maxima を用いて解こうとしたが，私のやり方が悪いのか，うまく計算してくれず，現段階では諦めざるを得なかった．

[謝辞]

今回も京都大学名誉教授の中西襄先生に見ていただいた．先生からは，前回も書いたように，この解析で表れる三角数というのは，Bethe-Salpeter 方程式における Wick-Cutkosky モデルの固有値として現われる三角数と関連があるのではというご意見をいただいた．しかし，ここで表れるものは厳密解ではなく，近似的にでてきた三角数なので，これを結びつけるのは至難のわざと考えていた．ところが，先生の意図は，厳密解として三角数が固有値となる解を考えて，それに合うように鍵盤の厚さ $h(x)$ を決定したらということであった．これならば可能性があるかもしれないが，それにしてもかなり難しい問題である．また宿題が残ってしまった．いつも適切なコメントをいただく先生に感謝します．

鍵盤打楽器の固有振動 (5)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (5)

Kenji SETO*

1　はじめに

これまで，鍵盤打楽器の鍵盤について，高調波の振動数を基本波の振動数の整数倍にするにはどのような形のものにするとよいかを議論してきた．実際に使われている鍵盤の形は図 1(a) に示すようなものであるが，波動方程式を解析的に解くという立場では，この形のままでは解析が大変になる．そこで，図 1(b) の段差付きで厚さを変えたもの，あるいは，図 1(c) のように直線的に厚さを変化させたもの，さらには，図 1(d) の 2 次曲線を用いて厚さを変化させたものを考えてきた．結果として，ある程度，ここでの目的にかなったものをだすことができた．

図 1　実際の鍵盤 (a)，段差付き鍵盤 (b)，直線で変化させたもの (c)，2 次式で変化させたもの (d)

ここでは鍵盤の厚さを一定としたまま，鍵盤の端点における境界条件を変えることで，高調波の振動数が基本振動数の整数倍になるようにするにはどうすれば良いかということを考えてみる．そのため，実際の鍵盤の形にこだわることなく，鍵盤の端点を，以下の図 2 に示すように，

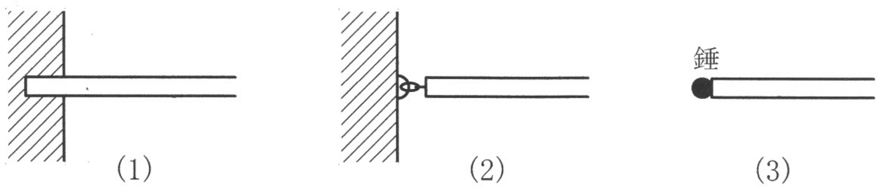

図 2　鍵盤端部の境界条件

(1)　鍵盤の端点を埋込固定とした場合.　　(2) 鍵盤の端点を自在固定とした場合.

(3)　鍵盤の端点に錘を付けた場合.

の 3 通りで考えてみる．ここで，(2) の自在固定とは，変位自体はゼロとなるよう固定するが，そのときの鍵盤

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

の傾き角度は自在に変えられるものとする．

ここでは，この (3) の端点に錘を付けた場合が，鍵盤の中心部を薄くしたモデルに近いものと考えられるので，この錘付きモデルについて次節で考察する． 埋込固定，自在固定については，3 節で簡単に述べる[*1]．

2　錘付きモデル：方程式の導入とその解法

2.1　方程式の導入

弾性棒の長さを 2ℓ, 幅を a, 厚さを h とする．また，材料定数として，この棒の体積密度を ρ, Young 率を E とする．この棒の中心を原点として棒の長さ方向に座標軸 x をとる．この棒を叩いたとき，棒の面に対し垂直で，幅方向には一様な変位の座標 x, 時刻 t での値を $V(x,t)$ とする．ここでは，この弾性棒の波動方程式として，これまでと同じく，Bernoulli-Euler 梁の振動方程式

$$\rho\, ahV_{tt}(x,t) = -{\partial_x}^2\big[EI\,V_{xx}(x,t)\big], \qquad I = \frac{ah^3}{12}, \qquad (-\ell < x < \ell) \tag{2.1}$$

を採用する．ここで，変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す，また，定数 I は断面 2 次モーメントであり，この第 2 式で定義する．このように方程式は，座標 x について 4 階微分，時間 t について 2 階微分の偏微分方程式となる．この方程式を，端点に錘を付けたときの境界条件の下に解くことになる．

その境界条件は，鍵盤の両端部 $x = \pm\ell$ に質量 m の錘を付けた場合，そこでの曲げモーメント $M = EIV_{xx}$ がゼロの他に，剪断力 $Q = \partial_x(EIV_{xx})$ が錘を動かす力となるので，

$$V_{xx}(\pm\ell,t) = 0, \qquad mV_{tt}(\pm\ell,t) = \pm\partial_x\big[EIV_{xx}(x,t)\big]\Big|_{x=\pm\ell} \tag{2.2}$$

となる．この第 2 式は複号同順で，剪断力が錘に与える力の符号が $x = \ell$ と $x = -\ell$ で逆符号になることに注意する．このように，弾性棒の両端に錘が付いているということは，錘のサイズを弾性棒の長さに比べ十分に小さいものとし，そこでの《線密度》がデルタ関数的に変化していると考えてもよい．すなわち，デルタ関数を含む無次元関数を

$$R(x) = 1 + \frac{m}{\rho ah}\big[\delta(x-\ell) + \delta(x+\ell)\big] \tag{2.3}$$

と定義しておき，弾性棒の《線密度》を $\rho ahR(x)$ と考える．このとき，方程式 (2.1) と境界条件である (2.2) の第 2 式をまとめて，

$$\rho ahR(x)V_{tt}(x,t) = -{\partial_x}^2\big[EI\,V_{xx}(x,t)\big] \tag{2.4}$$

と書くことができる．実際，ε を微小長さとして，この式を，$-\ell-\varepsilon$ から $-\ell+\varepsilon$ まで，あるいは，$\ell-\varepsilon$ から $\ell+\varepsilon$ まで積分すると，この (2.2) の第 2 式が再現される．ただし，物質が存在しない $-\ell-\varepsilon$，および，$\ell+\varepsilon$ では剪断力 Q をゼロとする．この式は，後で，固有関数の正規化をするときに役に立つ．

この方程式を解く前に，数式の簡素化のため，変数の無次元化をしておく．速度の次元を持つ c，および時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \qquad \tau = \frac{\ell}{c} \tag{2.5}$$

[*1] ここで用いた『埋込固定』『自在固定』は，著者（世戸）の勝手な造語である．通常の構造力学の教科書では，それぞれ，『固定支持』『単純支持』となっている．しかし，この名称は，静力学のときはともかく，動力学のときは相応しいものとは思えない．

と導入しておく．これを用いて，ℓ を長さの単位，また，τ を時間の単位として，$x,\ h,\ t,\ V$ を，改めて

$$x/\ell \ \to\ x, \qquad h/\ell \ \to\ h, \qquad t/\tau \ \to\ t, \qquad V/\ell \ \to\ V \tag{2.6}$$

とおき直す．この変換で方程式 (2.1) は，

$$V_{tt}(x,t) = -h^2 V_{xxxx}(x,t), \qquad -1 < x < 1 \tag{2.7}$$

となる．また， 境界条件 (2.2) は

$$V_{xx}(\pm 1, t) = 0, \qquad \mu V_{tt}(\pm 1, t) = \pm h^2 V_{xxx}(\pm 1, t) \tag{2.8}$$

となる．この第 2 式に含まれる μ は，錘の質量の鍵盤半分の質量に対する比で，

$$\mu = \frac{m}{\rho a h \ell} \tag{2.9}$$

と定義した．また，この無次元化で (2.3) 式で定義した $R(x)$ は

$$R(x) = 1 + \mu\big[\delta(x-1) + \delta(x+1)\big] \tag{2.10}$$

と書き直される．

2.2 固有値と固有関数

ここで，変位 $V(x,t)$ を座標 x と時間 t について，変数分離形にし，時間部分を三角関数として，

$$V(x,t) = X(x)\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.11}$$

とおいてみる．ω は無次元化された角振動数，α は位相定数である．このとき，$X(x)$ が満たす方程式は，(2.7) 式から

$$\omega^2 X(x) = h^2 X_{xxxx}(x), \qquad -1 < x < 1 \tag{2.12}$$

となる．この方程式を，(2.8) 式からでる境界条件

$$X_{xx}(\pm 1) = 0, \qquad -\mu\omega^2 X(\pm 1) = \pm h^2 X_{xxx}(\pm 1) \tag{2.13}$$

の下に解くことになる．この方程式 (2.12) は，三角関数，双曲線関数を用いて簡単に解け，その 4 個の独立解は，

$$X(x) = \cos(kx), \quad \cosh(kx), \quad \sin(kx), \quad \sinh(kx), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{h}} \tag{2.14}$$

である．ここで，波数 k をこの最後の式で定義する．もともと，方程式 (2.12) と境界条件 (2.13) は x の符号反転に対し不変なので，その解としては，偶関数の場合と，奇関数の場合があり得る．これらの関数を組み合わせて，(2.13) の第 1 式を満たし，偶関数となるものとして，

$$F(x) = \cosh(k)\cos(kx) + \cos(k)\cosh(kx) \tag{2.15}$$

を定義する．また，同じく (2.13) の第 1 式を満たし，奇関数となるものとして，

$$G(x) = \sinh(k)\sin(kx) + \sin(k)\sinh(kx) \tag{2.16}$$

を定義する．これら関数の 3 階微分は

$$F_{xxx}(x) = k^3\big[\cosh(k)\sin(kx) + \cos(k)\sinh(kx)\big], \quad G_{xxx}(x) = k^3\big[-\sinh(k)\cos(kx) + \sin(k)\cosh(kx)\big] \tag{2.17}$$

となるので，これを用いて，これら関数 $F(x)$, $G(x)$ に (2.13) の第 2 式を適用すると，それぞれ，

$$\tanh(k) + 2\mu k = -\tan(k), \qquad \coth(k) + 2\mu k = \cot(k) \tag{2.18}$$

となる．ここで，(2.14) の最後の式からでる

$$\omega = hk^2 \tag{2.19}$$

を用いた．図 3 に，この (2.18) の第 1 式で $y = \tanh(k) + 2\mu k$ と $y = -\tan(k)$ とおいたときのグラフを，また，図 4 に，この第 2 式で，$y = \coth(k) + 2\mu k$ と $y = \cot(k)$ とおいたグラフを示す．これらのグラフでは μ の値を $\mu = 1/4$ とした．

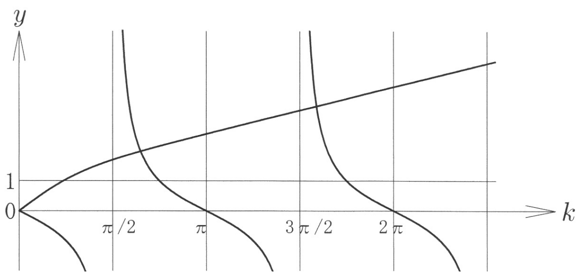

図 3　$y = \tanh(k) + 2\mu k$ と $y = -\tan(k)$ のグラフ

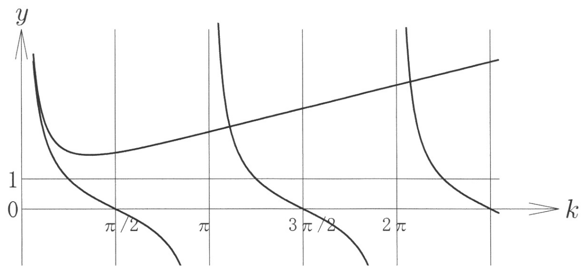

図 4　$y = \coth(k) + 2\mu k$ と $y = \cot(k)$ のグラフ

これらグラフの交点として，k の値が決まるが，そのとき，(2.18) の第 1 式から決まる k を小さい方から，k_0, k_2, $k_4, \cdots$ と偶数番号を付け，この第 2 式から決まる k を小さい方から，k_1, k_3, $k_5, \cdots$ と奇数番号を付ける．このとき，必ず，これら k_n の大小関係は，$k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \cdots$ となる．これら k_n を k の固有値と呼ぶ．k_n が決まると，(2.19) 式から ω の値が，

$$\omega_n = h{k_n}^2, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2.20}$$

と決まる．これを固有角振動数と呼ぶ．また，このときの関数 $F(x)$, $G(x)$ を，固有値 k_n 依存性を明記して，それぞれ，$F(x, k_n)$, $(n = 0, 2, 4, \cdots)$, $G(x, k_n)$, $(n = 1, 3, 5, \cdots)$ と書くことにし，固有関数と呼ぶ．

2.3　固有関数の正規化

ここでの固有関数を正規化するには，錘を含めた弾性棒全体の積分にしなければならない．すなわち，(2.4) 式の下で用いた微小長さの ε を無次元化したものを $\epsilon = \varepsilon/\ell$ として，積分範囲は $-1-\epsilon$ から $1+\epsilon$ までとし，積分には (2.10) 式で定義した $R(x)$ を重みとして付け加えたものにする．例えば，2 個の固有値 k_n, $k_{n'}$ を考

え，n が偶数，n' が奇数の場合は，$F(x,k_n)$ と $G(x,k_{n'})$ の積の積分となるが，これは，

$$\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)F(x,k_n)G(x,k_{n'})dx = 0 \tag{2.21}$$

となる．これがゼロとなることは，$R(x)$, $F(x,k_n)$ が偶関数，$G(x,k_{n'})$ が奇関数だからである．したがって，正規化積分としては，n, n' ともに，偶数の場合，あるいは，奇数の場合を考えると良い．どちらも方法は同じなので，ここでは，偶数同士の場合を考える．

一般に固有値とは限らない 2 個の k, k' を考え，(2.19) 式で対応する 2 個の ω を ω, ω' とする．また，これらに属する関数を $F(x,k)$, $F(x,k')$ とする．これら関数は，範囲 $(-1-\epsilon,\ 1+\epsilon)$ では，方程式 (2.12) の左辺に $R(x)$ を付けた方程式を満たしているので，

$$\omega^2 R(x)F(x,k) = h^2 F_{xxxx}(x,k), \qquad {\omega'}^2 R(x)F(x,k') = h^2 F_{xxxx}(x,k') \tag{2.22}$$

が成り立つ．この第 1 式に $F(x,k')$ を掛け，第 2 式に $F(x,k)$ を掛けてから，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned}&(\omega^2 - {\omega'}^2)R(x)F(x,k)F(x,k') \\ &\qquad = h^2 \frac{d}{dx}\Big[F_{xxx}(x,k)F(x,k') - F_{xxx}(x,k')F(x,k) - F_{xx}(x,k)F_x(x,k') + F_{xx}(x,k')F_x(x,k)\Big]\end{aligned} \tag{2.23}$$

となるので，この式を x で $-1-\epsilon$ から $1+\epsilon$ まで積分すると，

$$\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)F(x,k)F(x,k')dx = 2\mu F(1,k)F(1,k') + \frac{2h^2}{\omega^2 - {\omega'}^2}\Big[F_{xxx}(1,k)F(1,k') - F_{xxx}(1,k')F(1,k)\Big] \tag{2.24}$$

となる．ここで，$R(x)$ に含まれるデルタ関数の部分とそれ以外の部分に分け，また，$F(x)$ が偶関数，$F_{xxx}(x)$ が奇関数となること，および，関数 $F(x,k)$ は境界の $x=\pm 1$ で，(2.13) の第 1 式が満たされ，その 2 階微分がゼロとなっていることを用いた．

さらにここで，(2.13) の第 2 式が満たされ，k, k' が固有値 k_n, $k_{n'}$ となるときは，もし，$k_n \neq k_{n'}$ ならば，この式の右辺の 1 項目と 2 項目は相殺され，異なる固有値に属する固有関数同士の直交性，

$$\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)F(x,k_n)F(x,k_{n'})dx = 0, \qquad n \neq n' \tag{2.25}$$

が得られる．同じ固有値になるときは，まず先に，k' を固有値 k_n として，(2.24) 式の右辺を (2.13) の第 2 式を用いて変形すると，

$$\begin{aligned}\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)F(x,k)F(x,k_n)dx &= \frac{2}{\omega^2 - {\omega_n}^2}\Big[\mu\omega^2 F(1,k) + h^2 F_{xxx}(1,k)\Big]F(1,k_n) \\ &= \frac{2}{k^4 - {k_n}^4}\Big[\mu k^4 F(1,k) + F_{xxx}(1,k)\Big]F(1,k_n)\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる．ここで，(2.19) (2.20) 式を用いた．この式で $k = k_n$ とおくと，F が (2.13) の第 2 式を満たすことから，右辺は 0/0 となる．そこで，l'Hopital の定理を用いて，極限 $k \to k_n$ をとると，同じ固有値の場合の積分式ができる．以上をまとめて，固有関数の直交性の式

$$\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)F(x,k_n)F(x,k_{n'})dx = N_{F,n}^2 \delta_{n,n'}, \qquad N_{F,n}^2 = \frac{1}{2{k_n}^3}\partial_k\Big[\mu k^4 F(1,k) + F_{xxx}(1,k)\Big]_{k=k_n} F(1,k_n) \tag{2.27}$$

を得る．ここに，$N_{F,n}$ は正規化定数で，$F(x,k_n)/N_{F,n}$ が正規化された固有関数となる．

同様に，奇関数の固有関数 $G(x,k_n)$ 同士の直交性は

$$\int_{-1-\epsilon}^{1+\epsilon} R(x)G(x,k_n)G(x,k_{n'})dx = N_{G,n}^{\,2}\delta_{n,n'}, \qquad N_{G,n}^{\,2} = \frac{1}{2{k_n}^3}\partial_k\Big[\mu k^4 G(1,k) + G_{xxx}(1,k)\Big]_{k=k_n} G(1,k_n) \tag{2.28}$$

となり，$G(x,k_n)/N_{G,n}$ が正規化された固有関数となる．

2.4　数値計算例

音楽的に良い音を出すための条件は，高調波の振動数が，一番低い振動数である基本振動数の整数倍になることである．錘無しのときはこの条件が成立しなかったが，錘を付けることでどのように改善されるかを見てみよう．すなわち，錘の質量の弾性棒の半分の質量に対する比である μ の値を色々変えながら，方程式 (2.18) を数値的に解いてみる．初めに比較のため，$\mu = 0$ としたこのシリーズ 1 回目の場合は，

$$\mu = 0 \text{ の場合} \qquad k_n = 2.365, \quad 3.926, \quad 5.497, \quad 7.068, \quad 8.639, \qquad (n = 0,1,2,3,4) \tag{2.29}$$

という値を得た．これから，(2.20) 式を用いて ω_n を求め，基本振動数との比にすると，

$$\mu = 0 \text{ の場合} \qquad \frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.756, \quad 5.403, \quad 8.932, \quad 13.344, \qquad (n = 0,1,2,3,4) \tag{2.30}$$

という値で，確かに，高調波の振動数は基本振動数の整数倍になっていない．

それに対し，今回の錘付きモデルで，$\mu = 0.25$ としたときは，

$$\begin{aligned} \mu = 0.25 \text{ の場合} \qquad & k_n = 2.037, \quad 3.490, \quad 4.991, \quad 6.513, \quad 8.050 \\ & \frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.935, \quad 6.001, \quad 10.221, \quad 15.612, \qquad (n = 0,1,2,3,4) \end{aligned} \tag{2.31}$$

となって，第 1 高調波の振動数は基本振動のほぼ 3 倍，第 2 高調波の振動数はほぼ 6 倍となる．これ以上の高調波は整数倍にはなっていないが，強度が落ちるので，問題は無いと考えられる．ちなみに，この第 1 高調波の振動数をより 3 倍に近づけるには，$\mu = 0.33$ として，

$$\begin{aligned} \mu = 0.33 \text{ の場合} \qquad & k_n = 1.985, \quad 3.438, \quad 4.942, \quad 6.470, \quad 8.011 \\ & \frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.999, \quad 6.199, \quad 10.623, \quad 16.286, \qquad (n = 0,1,2,3,4) \end{aligned} \tag{2.32}$$

となる．第 1 高調波の振動数は基本波の 3 倍に近づくが，第 2 高調波が 6 倍よりも少し大きくなってしまう．

この調子で μ の値を大きくしていくと，k_0, k_1, k_2 は，それぞれ，$\pi/2$, π, $3\pi/2$ に近づくので，振動数の比にすると，第 1 高調波の振動数は基本波の 4 倍に，第 2 高調波は 9 倍に近づいていく．思い切って，μ の値を 25 にしてみると，

$$\begin{aligned} \mu = 25 \text{ の場合} \qquad & k_n = 1.583, \quad 3.147, \quad 4.716, \quad 6.286, \quad 7.856 \\ & \frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 3.952, \quad 8.847, \quad 15.764, \quad 24.623, \qquad (n = 0,1,2,3,4) \end{aligned} \tag{2.33}$$

となる．いずれにしても弾性棒に錘を付けることで，基本振動数の整数倍に近い高調波をだすことができる．

最後に，$\mu = 0.25$ としたときの固有関数のグラフを $n = 0,1,2,3,4,5$ の 6 通りについて，図 5 に表示しておく．

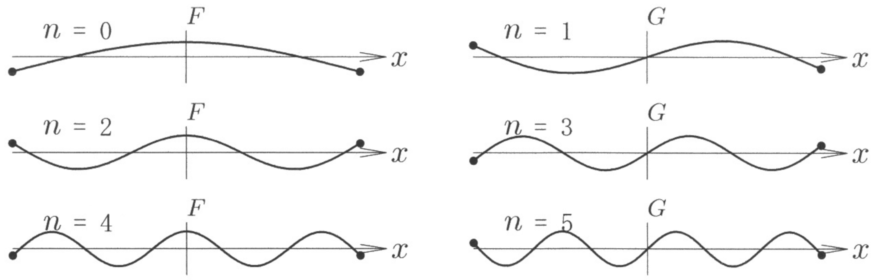

図 5　固有関数 $F(x, k_n)$，$G(x, k_n)$

このグラフはシリーズ 1 回目の錘無しのときのものと似ているが，強いて言うと，錘の部分での動きが少なくなっている．錘の質量を大きくするにつれ，「はじめに」のところで述べた (2) の自在固定の場合に近づいていく．

3　埋込固定，および，自在固定の場合

ここでは，「はじめに」のところで述べた境界条件として， (1) の埋込固定の場合と，(2) の自在固定の場合を考察する．

3.1　埋込固定の場合

初めに，埋込固定の場合は，(2.13) 式に対応する境界条件が

$$X(\pm 1) = 0, \qquad X_x(\pm 1) = 0 \tag{3.1}$$

と変わる．このとき，(2.15) (2.16) に対応する関数として，この (3.1) 第 1 式を満たす偶関数は

$$F(x) = \cosh(k)\cos(kx) - \cos(k)\cosh(kx) \tag{3.2}$$

となり，また，奇関数は

$$G(x) = \sinh(k)\sin(kx) - \sin(k)\sinh(kx) \tag{3.3}$$

となる．これら関数に (3.1) 第 2 式の条件を課すと，それぞれ，

$$\tanh(k) = -\tan(k), \qquad \tanh(k) = \tan(k) \tag{3.4}$$

となる．これは，(2.18) 式で $\mu = 0$ とした錘無しの場合と同じ固有値になることを示す．

3.2　自在固定の場合

つぎに，(2) の自在固定の場合であるが，このときの境界条件は

$$X(\pm 1) = 0, \qquad X_{xx}(\pm 1) = 0 \tag{3.5}$$

である．この第 1 式を満たす偶関数，奇関数としては， (3.2) (3.3) 式の $F(x)$, $G(x)$ がそのまま使える．これらの関数に，この条件の第 2 式を適用すると，それぞれ，

$$\cos(k) = 0, \qquad \sin(k) = 0 \tag{3.6}$$

となる．これは (2.18) 式で $\mu \to \infty$ とした場合に相当する．この式から k_n の値は

$$k_n = \frac{n+1}{2}\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{3.7}$$

となるので，これから高調波の振動数比

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = (n+1)^2 = 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \cdots \tag{3.8}$$

が得られる．これは近似なしですべて整数になるので，最も理想的な場合と言えるかもしれない．これは，音楽の音階で言うと，基本波の振動音を「ド」としたとき，4 倍の高調波は 2 オクターブ上の「ド」であり，9 倍の高調波は，3 オクターブ上の「レ」となる．

4 おわりに

今回は，実際の鍵盤打楽器の鍵盤から離れて，その端の部分を『埋込固定』,『自在固定』,『錘付き』という 3 種の場合を解析してみた．このうち，自在固定の場合は，近似なしで，高調波の振動数が基本波のそれの整数倍になる．私の希望としては，このような鍵盤を実際に作ってみたい気もするが，最近は日曜大工からも離れてしまっているので，どなたか，この記事を見て作っていただけたらという気がする．この自在固定については，図 2 (2) のように描いてしまったが，これは原理的な図を示したにすぎず，実際は，もっと複雑化しなければならないであろう．このようなものを作れないことはないかもしれないが，量産するには高価なものになってしまいそうである．

倍角公式と半角公式

矢野　忠[*1]

Formulae of Double Angles and Half Angles

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

三角関数の倍角公式と半角公式は加法公式から導きだすとばかり思っていた．ところが加法公式を用いないでそれぞれを導く方法があるということを宇沢弘文『好きになる数学入門 3』 [1] で知った[*3]．そのことを知った後で秋山武太郎『わかる三角法』 [2] を見たら，そこにも加法公式を用いないで倍角の公式を導いていることを知った．

そういう観点からみれば，以前に $\cos\theta, \sin\theta$ を $\tan\frac{\theta}{2}$ で表すという，三角関数の積分のときによく使われる技巧は，実は加法公式を用いないで倍角公式と半角公式を導くことでもあった [3].

このエッセイでは加法公式を用いない，倍角公式と半角公式の導出法を主として述べる．

2 節では加法公式を用いて，どのように倍角公式と半角公式を導いていたかを復習をする．3 節では解析幾何学的な方法での倍角公式の導き方を述べ，4 節では宇沢の方法を述べ，5 節では秋山の方法で倍角公式の導き方を述べる．さらに，6 節では昔の高校の教科書にあった二等辺三角形を用いた倍角公式の導き方を述べる．7 節では de Moivre の定理にもとづいて，8 節では回転行列を用いて，また 9 節では Euler の公式を用いてそれぞれ倍角公式の導き方を述べる．10 節はまとめである．

付録 1 では通常の半角公式の導き方を復習する．付録 2 では $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ の導き方をまとめる．また付録 3 では連立方程式 (3.1),(3.2) の解法を述べる．

2　倍角公式と半角公式の導出

この 2 節では三角関数の加法公式を用いた倍角公式と半角公式の通常の導出を述べよう．

三角関数の加法公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{2.1}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{2.2}$$

で $\beta = \alpha$ とおくと，直ちに

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2.3}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.4}$$

が得られ，これが倍角の公式である．

[*1] 元愛媛大学工学部
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp
[*3] 加法公式は普通には加法定理とよばれている．ここでは加法公式という用語を用いる．

半角の公式は

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \tag{2.5}$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \tag{2.6}$$

を用いて[*4]，(2.5), (2.6) の辺々を加えれば，

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \tag{2.7}$$

が求まり，また (2.5), (2.6) の辺々を減じれば，

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \tag{2.8}$$

が求まる．この (2.7) と (2.8) とで α を $\frac{\alpha}{2}$ と置き換え，両辺を 2 で割れば，半角公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \tag{2.9}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{2.10}$$

が求められる[*5]．

3 倍角公式の導出 1

この 3 節では解析幾何的に倍角公式を求めることを述べよう[*6]．これは前に $\sin\alpha, \cos\alpha$ を $\tan\frac{\alpha}{2}$ で表すと

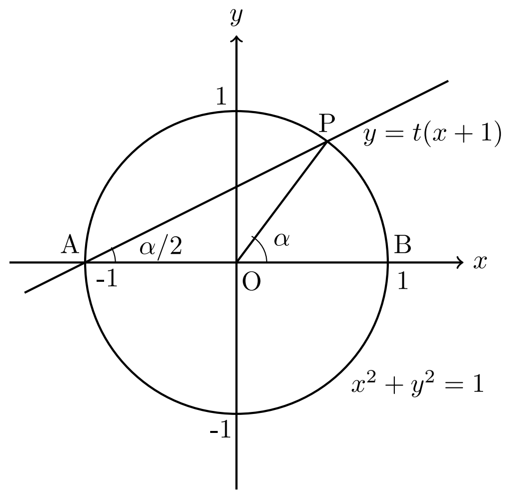

図 1　倍角公式の導出 1

きに使ったやり方である [3]．図 1 に示したように半径 1 の円の円周上の点 A$(-1, 0)$ と点 P(x, y) を通る，傾き

[*4] (2.6) は (2.4) の右辺と左辺を単に入れ替えたものである．また，(2.5) を $\cos^2\alpha$ の方を $\sin^2\alpha$ より前においてあることに注意しよう．これは (2.6) の $\cos^2\alpha$ と $\sin^2\alpha$ の順序に合わせるためである．

[*5] この半角公式の導き方は [4] [5] [6] で述べられている．最近アマゾンコムの書評で知ったところでは， [7] でもこの導き方を述べているとのことだが，実際にその書をまだ見たことがない．普通の半角公式の導出法は付録 1 に述べる．

[*6] この節に述べることは [8] [9] [10] [11] [3] に述べられている．私が新しくつけ加えることは，これが倍角公式の導出のしかたであるという事実の指摘だけである．このことを知ったのは私自身であるのか，それとも何かの文献を読んでのことだったかはわからない．たぶん [1] を読んで思いついたのであろう．

$t := \tan\frac{\alpha}{2}$ の直線を考える．この直線は $\mathrm{A}(-1,0)$ を通るが，それ以外の円との交点 P の座標 (x,y) を求めたい．すなわち，連立方程式

$$y = t(x+1), \tag{3.1}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.2}$$

の点 $(-1,0)$ 以外の解を求めればよい．

この解は

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{3.3}$$
$$y = \frac{2t}{1+t^2} \tag{3.4}$$

となる[*7]．

図 1 から，$x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$ であったから，

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{3.5}$$
$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{3.6}$$

となり，したがって

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{3.7}$$
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \tag{3.8}$$

が得られる[*8]．この式で $\alpha \to 2\alpha$ とおきかえれば，倍角公式

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2.4}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が求められる[*9]．

4　倍角公式の導出 2

この第 4 節では，宇沢にしたがって倍角公式の導出を見てみよう [1]．

倍角の公式を導出に取りかかる前に，まずそれを示しておこう．

それらは

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2.3}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.4}$$

である．

(2.4) はもう 2 つ別の表し方があることを先に見ておこう．

---

*7 (3.3) と (3.4) の解法は付録 3 に述べる．

*8 (3.5) と (3.6) で $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ を用いる．

*9 $\alpha \to 2\alpha$ とおきかえることは，円弧 PB の中心角を α ではなく，2α とすることである．

(2.7) を $\cos 2\alpha$ について解けば，

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{4.1}$$

が得られ，また (2.8) を $\cos 2\alpha$ について解けば，

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{4.2}$$

が得られる．

したがって，$\cos 2\alpha$ には (2.4), (4.1), (4.2) の 3 つの表し方がある．普通にはこの (4.1) を $\cos^2\alpha$ について解き，また (4.2) を $\sin^2\alpha$ について解いて，それらの式で $\alpha \to \alpha/2$ とおきかえて，半角の公式 (2.9) と (2.10) とを求めている[*10]．しかし，2 節で述べた半角の公式の求め方のほうが直接的である．

原点 O を中心とする半径 1 の円の直径 $\overline{\mathrm{AOB}}$ をとり，円周上に点 P をとる（図 2 参照）．点 A と点 P とを直線でむすび，また点 B と点 P とを直線でむすぶと直角三角形 $\triangle$PAB ができる．さらに，点 P から円の中心 O に直線を引くと，三角形 $\triangle$POB ができる．三角形 $\triangle$PAB の斜辺 $\overline{\mathrm{AOB}}$ は円の直径であるから，角 $\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ で

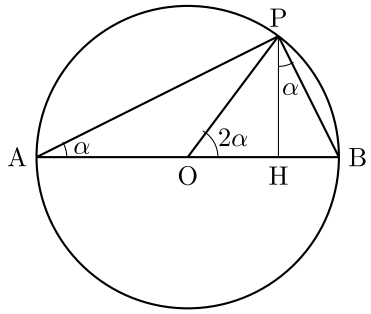

図 2　倍角公式の導出 2

ある．角 $\angle\mathrm{PAO} = \alpha$ とすれば，角 $\angle\mathrm{POB} = 2\alpha$ となる．すなわち，弦 $\overline{\mathrm{PB}}$ に対する円周角が α であり，中心角は 2α となる．

まとめれば

$$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OP}} = 1,\ \overline{\mathrm{AB}} = 2,\ \angle\mathrm{POB} = 2\alpha,\ \angle\mathrm{PAO} = \alpha \tag{4.3}$$

である．また点 P から辺 AOB に垂線をおろし，その足を H とすれば，

$$\angle\mathrm{PHO} = \angle\mathrm{APB} = 90^\circ \tag{4.4}$$

$$\angle\mathrm{BPH} = \angle\mathrm{PAO} = \alpha \tag{4.5}$$

直角三角形 $\triangle$POH の角 2α の対辺（高さ）$\overline{\mathrm{PH}}$ と隣辺（底辺）$\overline{\mathrm{OH}}$ に注目して，これらを 2 つの方法で表すことを考えよう．

一つは $\overline{\mathrm{PH}}$ と $\overline{\mathrm{OH}}$ を直角三角形 $\triangle$POH の辺の要素と考えて，2α で表すことである．もう一つはこれらを直角三角形 $\triangle$BPH の要素と考えて，α で表すことである．

もっとも直角三角形 $\triangle$BPH の要素と考えることができるのは $\overline{\mathrm{PH}}$ と $\overline{\mathrm{HB}}$ である．$\overline{\mathrm{OH}}$ は $\triangle$BPH の要素と考えることはできない．しかし，$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{HB}}$ であるから $\overline{\mathrm{HB}}$ が求められれば，$\overline{\mathrm{OH}}$ を求められる．これで全体の見通しがついたので，あとは実際に計算をすればよい．

まず線分 $\overline{\mathrm{PH}}$ を 2 通りの方法で表すことを考えよう．

線分 $\overline{\mathrm{PH}}$ を三角形 $\triangle$POH の角 2α の対辺（高さ）と考えれば，

$$\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{OP}}\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \tag{4.6}$$

[*10] 付録 1 にその解法の詳細を述べる．

つぎに $\overline{\mathrm{PH}}$ を直角三角形 $\triangle$BPH の角 α の隣辺（底辺）と考えれば，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}} &= \overline{\mathrm{BP}}\cos\alpha, \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．ここで，$\overline{\mathrm{BP}}$ は三角形 $\triangle$PAB の角 α の対辺（高さ）と考えて，

$$\overline{\mathrm{BP}} = 2\sin\alpha \tag{4.8}$$

であることを用いた．

(4.6),(4.7) から

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が得られる．

つぎに，三角形 $\triangle$POH の辺 $\overline{\mathrm{OH}}$ を 2 通りの方法で表すことを考えよう．

まず，辺 $\overline{\mathrm{OH}}$は 三角形 $\triangle$POH の角 $\angle\mathrm{POH} = 2\alpha$ の隣辺（底辺）であり，$\overline{\mathrm{OP}} = 1$ であるから，

$$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OP}}\cos 2\alpha = \cos 2\alpha \tag{4.9}$$

である．

$\overline{\mathrm{OH}}$ を角 $\angle\alpha$ で直接に表す方法はないが，$\overline{\mathrm{HB}}$ を表す方法はある．$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{HB}}$ であるから，$\overline{\mathrm{HB}}$ を表す方法を考えればよい．$\overline{\mathrm{HB}}$ を三角形 $\triangle$BPH の角 α の対辺（高さ）と考えれば，すぐに

$$\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{BP}}\sin\alpha \tag{4.10}$$

が得られる．

(4.8) から $\overline{\mathrm{BP}} = 2\sin\alpha$ であったから，結局

$$\overline{\mathrm{HB}} = 2\sin^2\alpha \tag{4.11}$$

が得られ，したがって

$$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{HB}} = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{4.12}$$

となる．

(4.9) と (4.12) から

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{4.2}$$

が得られる．

5　倍角公式の導出 3

この 5 節では秋山の方法にしたがった，倍角の公式の導出を述べよう [2]．

斜辺 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ である直角三角形 $\triangle$ABC を考える（図 3 参照）．角 $\angle A = \alpha$ とする．この角 α の隣辺（底辺）AC の長さは $\cos\alpha$ で，対辺（高さ）BC の長さは $\sin\alpha$ である．

これだけでは $\sin 2\alpha$ とか $\cos 2\alpha$ の量がでて来ないので，直角三角形 $\triangle$ABC を隣辺（底辺）AC に対して折り返した三角形 AEC を合わせて考えよう（図 3 の点線部分）．このとき頂点 E から三角形の斜辺 AB への垂線を下ろし，その足を F とし，また三角形 $\triangle$ABC の頂点 C から同じように斜辺 AB に垂線を下ろして，その足を D とする．

そうすると，辺 EF は $\overline{\mathrm{EF}} = \sin 2\alpha$ となり，また辺 AF は $\overline{\mathrm{AF}} = \cos 2\alpha$ となる．あとはこれらの辺の長さ $\overline{\mathrm{EF}}$ と $\overline{\mathrm{AF}}$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ で表すことを考えればよい．

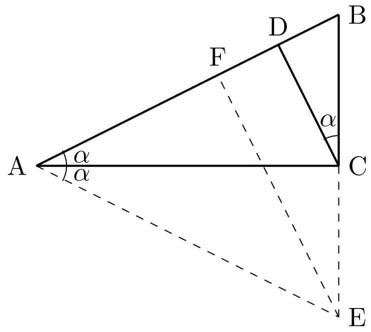

図 3　倍角公式の導出 3

$\overline{\mathrm{AC}} = \cos\alpha$,　$\overline{\mathrm{BC}} = \sin\alpha$,　$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BC}}\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ であるから

$$\overline{\mathrm{EF}} = 2\overline{\mathrm{CD}} = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{5.1}$$

となり，(5.1) と $\overline{\mathrm{EF}} = \sin 2\alpha$ とを用いれば，

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が求められる．

また，$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AC}}\cos\alpha = \cos^2\alpha$,　$\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{BC}}\sin\alpha = \sin^2\alpha$ であるから，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AF}} &= \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{FD}}, \\ &= \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{DB}}, \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned} \tag{5.2}$$

となり，$\overline{\mathrm{AF}} = \cos 2\alpha$ と (5.2) とから

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.4}$$

が求められる．

途中で詳しい説明をしなかったが，三角形 △BDC と三角形 △BFE とは相似な三角形であり，辺の長さ $\overline{\mathrm{EF}} = 2\overline{\mathrm{CD}}$ であること，および辺の長さ $\overline{\mathrm{FD}} = \overline{\mathrm{DB}}$ が成り立つことを用いた．

つけ加えておくと，$\overline{\mathrm{AD}} = \cos^2\alpha$, $\overline{\mathrm{DB}} = \sin^2\alpha$ であるから，

$$\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AB}} = 1$$

であることが確かめられるし，したがって

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

も成り立っている．

6　倍角公式の導出 4

倍角公式の導出 3 も二等辺三角形を用いた倍角公式の導出であったが，二等辺三角形 △ABC に対する正弦法則と余弦法則を用いた，倍角の公式の導出を述べよう（図 4 参照）[12].

図 4 のような二等辺三角形 △ABC を考えよう．$\angle\mathrm{A} = 2\alpha$ とする．また底角は β とする．辺の長さは図の中に示したように表す．

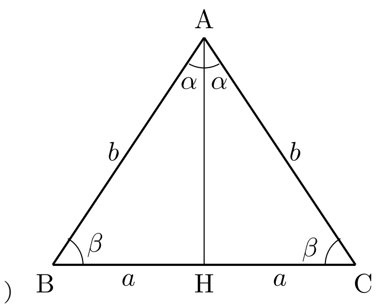

図 4　倍角公式の導出 4

正弦法則から

$$\frac{2a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$
$$\sin 2\alpha = 2a\frac{\sin\beta}{b} \tag{6.1}$$

である．図 4 からわかるように

$$a = b\sin\alpha, \tag{6.2}$$
$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \tag{6.3}$$

となる．(6.2) と (6.3) を (6.1) へ代入すれば，

$$\sin 2\alpha = \frac{2b\sin\alpha\cos\alpha}{b} = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{6.4}$$

つぎに余弦法則から $\cos 2\alpha$ を求めれば，

$$\cos 2\alpha = \frac{b^2 + b^2 - (2a)^2}{2b^2},$$
$$= \frac{b^2 - 2a^2}{b^2} \tag{6.5}$$

(6.5) に $a = b\sin\alpha$ を代入すれば，

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{b^2}b^2(1 - 2\sin^2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{6.6}$$

したがって，つぎの倍角公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \tag{4.2}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が得られる．

7　倍角公式の導出　5

この 7 節では，de Moivre の定理による倍角公式の導出を述べよう．

まず，de Moivre の定理とは n を任意の整数として，

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \tag{7.1}$$

であった．

この de Moivre の定理で $n = 2$ とおくと

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2, \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i(2\sin\alpha\cos\alpha) \end{aligned} \tag{7.2}$$

であるから，

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2.4}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が得られる．

8　倍角公式の導出 6

加法公式を回転行列で導くときと同じ考えで倍角の公式を導くことができる [13].

平面上の原点 O を中心とする，半径 1 の円周上の点 A$(1, 0)$ を反時計回りに角 α の回転をしたとき，その点 A は回転によって同じ円上の点 P$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ へ移動する．

この回転を $R(\alpha)$ と表せば，これは

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

と表すことができる．この回転を 2 回続けると角度 2α の回転が得られる．すなわち

$$R(2\alpha) = [R(\alpha)]^2 \tag{8.2}$$

である．これを回転行列で表すと

$$R(2\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

である．また

$$\begin{aligned} [R(\alpha)]^2 &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.4}$$

であるから，(8.3) と (8.4) を (8.2) に代入すれば

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2.4}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が導出される．

9　倍角公式の導出 7

最後に，Euler の公式で加法公式を導くのと同じ方法で倍角公式を導いておこう．

Euler の公式は

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{9.1}$$

であった．

$$\mathrm{e}^{2i\alpha} = (\mathrm{e}^{i\alpha})^2 \tag{9.2}$$

であるから

$$\mathrm{e}^{2i\alpha} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \tag{9.3}$$

と

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{i\alpha})^2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i(2\sin\alpha\cos\alpha)\end{aligned} \tag{9.4}$$

が成り立つ．この (9.3) と (9.4) とを (9.2) に代入すれば，

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i(2\sin\alpha\cos\alpha) \tag{9.5}$$

であるから

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2.4}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.3}$$

が得られる．

10　おわりに

3 節から 9 節まで 7 つの方法で加法公式を直接用いないで倍角公式の導出を示した．どういう方法で倍角公式を導いたにせよ，倍角公式から半角公式を導くことは簡単である．4 節，5 節の説明はできるだけ見通しのよい説明を試みたつもりだが，はたして成功しているかどうか読者の判断を待ちたい．

11　付録 1　通常の半角公式の導出

多くのテクストでの半角公式の導出法は

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.6}$$

から始める．

この (2.6) から (2.5) を用いて，$\sin^2\alpha$ を消去すれば，

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{4.1}$$

が得られ，また (2.6) から (2.5) を用いて，$\cos^2\alpha$ を消去すれば，

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{4.2}$$

が得られる．

それでほとんどのテクストでは

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2.6}$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \tag{4.1}$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{4.2}$$

とまとめて書かれている．これらは覚えるのもそれほど難しくはないので，これを全部覚えている人も多い．

この (4.1) を $\cos^2\alpha$ について解けば,

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \tag{11.1}$$

また (4.2) を $\sin^2\alpha$ について解けば,

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \tag{11.2}$$

が得られる．この (11.1),(11.2) で $\alpha \to \frac{\alpha}{2}$ とおきかえれば，半角公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha), \tag{2.9}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \tag{2.10}$$

が得られる．

12　付録 2　$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ の導出法

（方法 1）

(2.2) で $\beta=-\alpha$ とおけば，直ちに

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \tag{2.5}$$

が得られる．もちろん，$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ を用いる．

（方法 2）

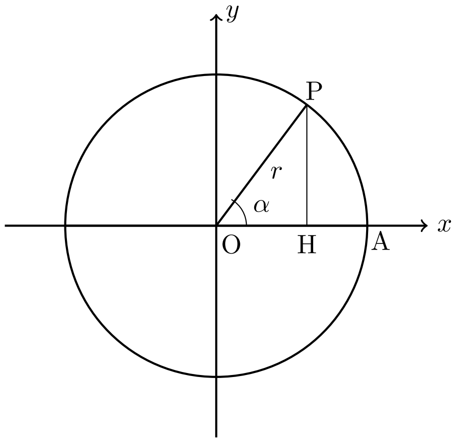

図 5　$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ の導出方法 2

座標系の原点 O を中心とした半径 r の円を描く．円周上の点 P から辺 OA に垂線を下ろして，その足を H とする（図 5 参照)．このとき三角形 △POH は直角三角形であり，角度 ∠POH $=\alpha$ とすれば,

$$\overline{\mathrm{OP}}=r,\quad \overline{\mathrm{OH}}=r\cos\alpha,\quad \overline{\mathrm{PH}}=r\sin\alpha \tag{12.1}$$

であるから，ピタゴラスの定理によって

$$r^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha \tag{12.2}$$

が成り立つ．この式の両辺を r^2 でわって（または $r=1$ とおけば）

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \tag{2.5}$$

が得られる．

13　付録 3　(3.3) と (3.4) の解法

（解法 1)

(3.1) と (3.2) とは未知数を x, y とする簡単な連立方程式である．中学生でも解けるであろう．ここでは計算下手の見本として（解法 1）を示しておく*11．

(3.1) を (3.2) へ代入すると

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1,$$
$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

これを因数分解すれば，

$$(x+1)[(1+t^2)x - (1-t^2)] = 0$$

が得られる．

この解で $x \neq -1$ の解を求めれば，

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{13.1}$$

となる．

y を求めるには，この x を (3.1) に代入すればいいのだが，前もって $x+1$ を計算しておけば，

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \\ &= \frac{2}{1+t^2} \end{aligned}$$

これを (3.1) に代入すれば，

$$y = \frac{2t}{1+t^2} \tag{13.2}$$

が得られる．

（解法 2)

（解法 1) は教育的観点からわざと計算下手の解法を示した．(解法 2) ではラングの解法を示そう [9]．(3.2) を y について解けば，

$$y^2 = 1 - x^2 \tag{13.3}$$

また (3.1) の両辺を 2 乗すると

$$y^2 = t^2(x+1)^2 \tag{13.4}$$

となる．

(13.3) と (13.4) から

$$1 - x^2 = t^2(x+1)^2 \tag{13.5}$$

となるが，この両辺には共通因数 $x+1$ があるので，$x+1 \neq 0$ として両辺をわれば，

$$1 - x = t^2(x+1) \tag{13.6}$$

が得られる．これを x について解けば，

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{13.7}$$

*11 ここは計算上手の誤植ではない．

と求められる．これから y を求めるところは（解法 1）と同じである．

図 1 から直線が $x=-1$ を通ることはわかっているから，そのことをしっかり意識していれば，これはまことに自然な解法である．すなわち，y を消去して得られる 2 次方程式は $x+1$ の因子をもつことがわかっているから，この因数が 0 でないときは割り算ができて簡単となる．

(2020.3.7)

参考文献

[1] 宇沢弘文，『好きになる数学入門 3』（岩波書店，2015）162

[2] 秋山武太郎，『わかる三角法』（日新出版，1960）85-87

[3] 矢野　忠，$\cos x$ と $\sin x$ を $\tan(x/2)$ で表す，数学・物理通信，5 巻 11 号 (2015.12.30) 13-20

[4] 藤森良夫，『解析の基礎』（考え方研究社，1954）667

[5] 秋山武太郎，『わかる三角法』（日新出版，1960）89

[6] S. ラング（松坂和夫，片山孝次訳）『解析入門』（岩波書店，1978）268

[7] 金田数正，『三角関数ーひとりで解ける』（内田老鶴圃， 1984）　ページ数不明

[8] 安藤洋美，山野熙，『大道を行く高校数学』解析編（現代数学社，2001）107-108

[9] S. ラング（松坂和夫，片山孝次訳）『解析入門』（岩波書店，1978）156-157

[10] 松坂和夫，『数学読本』2（岩波書店，1989）285-291

[11] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Dover, 2004) 44-46

[12] 田島一郎，中村幸四郎，中村勝彦，『数学 I　幾何編』（好学社，1957）121

[13] 中田義元，根岸世雄，藤田宏，『大学への数学』IIB （研文書院，1975）199, 210

編集委員就任の挨拶

「数学・物理通信」は，これまで，新関章三・矢野忠の両氏が編集作業をされてきましたが，今回の 10 巻 1 号から，私，世戸憲治が 3 人目の編集委員として加わることになりました．

前者お二人は四国松山市にお住まいですが，私は遠く離れた北海道札幌市に住んでいます．ここで，ちょっと，札幌のことを紹介しておきます．札幌の人口はほぼ 200 万人で，東京，横浜，大阪，名古屋に次ぐ，日本で 5 番目の大都市です．

ただし，私は札幌の郊外に住んでおり，めったに街中には行くこともないので，札幌の大きさがよく分かっていません．いまどき，いつもの年なら 1 メートル位の雪に覆われているはずですが，今冬はその半分くらいしかありません．これほど雪が少ないのは私にとって生まれて初めての経験です．やはり地球温暖化のせいでしょうか．

「数学・物理通信」には，これまでほとんど毎号に投稿してきましたので，これを読まれてきた方には，私の名前は知られているのかもしれません．しかし，自分でもこれまでこんなに投稿できたのが不思議なくらいです．いつも，もう書く種がつきたと思いながらも，これに書くことがいつのまにか，私の生きがいになってしまいました．

いままでは，投稿するだけで，実際の編集は前のお二人に任せきりでした．しかし，これからは，編集委員としても，私なりに，頑張るつもりですので，よろしくお願いいたします．

世戸憲治

編集後記

つい先日 9 巻 10 号を発行したと思ったのですが，早いもので 10 巻を発行する 3 月が来てしまいましました．

3 月となりましたので，10 巻 1 号を発行いたします．9 巻 10 号でもお知らせしたように論文の最多の投稿者でもある世戸憲治さんを編集委員としてお迎えいたしました．その清新な風を今後ともにこの「数学・物理通信」に送りこんでくださるものと期待しています．

その抱負の片鱗が世戸さんのご挨拶の中にも秘められていると思います．鋭い頭の持ち主ですが，それだけではなく暖かい心ももっておられると拝察します．世戸さんの今後の編集委員としての活躍にもご期待ください．

（矢野　忠）