

数学・物理通信

10 卷 10 号 2020 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 12 月 16 日

目次 (Contents)

1. ラプラス演算子の極座標表示再考 2 (改訂版)

矢野 忠 2

2. なぜ平方根は二つあるのか

矢野 忠 16

3. 扇形の面積 1

矢野 忠 21

4. 扇形の面積 2

矢野 忠 24

5. 編集後記

世戸憲治 28

1. The Laplacian in Polar Coordinates Revisited 2 (Revised Version)

Tadashi YANO 2

2. Why Do Two Squareroots Exist ?

Tadashi YANO 16

3. Area of Sectors 1

Tadashi YANO 21

4. Area of Sectors 2

Tadashi YANO 24

5. Editorial Comments

Kenji SETO 28

ラプラス演算子の極座標表示再考 2 (改訂版)

矢野 忠^{*1}

The Laplacian in Polar Coordinates Revisited 2 (Revised Version)

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

これは「ラプラス演算子の極座標表示再考 2」 [1] の改訂版である。主な改訂点は (3.1) の終わりの行の上に 1 行挿入して、つぎの行の A_i の導出をわかりやすくした。また (3.4) の $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ の定義式を変えたことである。いずれもまちがいはなかったのだが、わかりやすくした。

「ラプラス演算子の極座標表示」という表題のエッセイを以前に書いた [2]。このエッセイを『数学散歩』 [3] に収録したころには、江沢洋先生の『微分積分の基礎と応用』 [4] が出版されていたので、これを参考文献として追加し、その計算法の特徴について言及したが、その考えにしたがって、計算を実行したことはなかった。

このエッセイでは江沢先生のアイディアにもとづいた、導出を述べることを目的とする。ただ、ちょっとした小さな計算の改良も試みる。これは以前の計算で長々とした数式を展開してしまったことを反省した「式の計算を小分けに」した試みである^{*3}。

前のエッセイ [5] では、3 次元のラプラス演算子の直交座標（デカルト座標）表示から極座標系表示への変換には、一度円柱座標系に変換した後に、極座標系に変換する方法について述べた。この方法に関心のある方は [5] をご参照ください。

2 節では計算の出発点と方針を述べる。3 節では (2.12), すなわち, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ を計算する。4 節は計算の核心部分であり、ラプラス演算子の極座標表示を求める。5 節はまとめである。6 節は付録 1 で $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ を求めるときの注意である。7 節は付録 2 で 4 節の $\Delta \psi$ を表す、係数 $P_i, (i = 1-9)$ の計算を示す。8 節は付録 3 で P_4, P_5, P_6 の補助計算である。9 節は付録 4 で 2 次元ラプラス演算子の極座標表示の導出である。10 節は付録 5 で 9 節の 2 次元ラプラス演算子の極座標表示の係数 A, B, C, D, E の計算である。11 節は付録 6 で係数 B, D の補助計算である。

2 計算の出発点と方針

エッセイ「直交座標系から極座標系へ 1 (改訂版)」 [6] ですでに求め方を述べた

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\end{aligned}\tag{2.1}$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} こういう長々とした式の計算のことを、かつて一世を風靡した受験数学の「考え方」で知られた、藤森良蔵、良夫父子は「万里の長城を築く」と比喩的にいい、「式の計算は小分けに」というのを代数計算のモットーとされた。

が計算の出発点である。この式の導出は先のエッセイ [6] に詳しく述べたから、これらの式を前提とする。ただし、ここで $\psi(x, y, z)$ であるが、変換後も $\psi(r, \theta, \phi)$ とする。変数が変われば、関数名も変えるべきかと思うが、同じ関数の記号を使う。

さて、(2.1) から

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

を計算して、これをくわえた

$$\Delta \psi := \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

を 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) で表すことが目的である。得られる最終的な式を先取りして示しておけば、

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda \psi \quad (2.4)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.5)$$

である。

さて、 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ を計算するためにちょっとした工夫をする。それはつぎの置換えである。

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = b_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + b_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + b_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = c_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + c_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + c_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (2.8)$$

ここで $a_r, a_\theta, \dots, c_\phi$ はつぎのように定義されている。

$$a_r = \sin \theta \cos \phi, \quad a_\theta = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \quad a_\phi = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad (2.9)$$

$$b_r = \sin \theta \sin \phi, \quad b_\theta = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \quad b_\phi = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \quad (2.10)$$

$$c_r = \cos \theta, \quad c_\theta = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad c_\phi = 0 \quad (2.11)$$

この形を用いて $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ を表せば

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left(b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + b_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(c_r \frac{\partial}{\partial r} + c_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + c_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi \quad (2.14)$$

この式の形を見ると 3 つの式がすべて同じ形となっている。それではじめの $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ だけの式を計算して、残りの 2 つ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ は係数の中味を計算するときその違いを考慮すればよい。

それでは、3 節で $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ を詳しく計算することにしよう。

3 (2.12) の計算

この3節では (2.12) の $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ を計算しよう。どういう計算かは以下の展開を見て頂くとわかる。 a_θ, a_ϕ は3つの変数 r, θ, ϕ をすべて含むが, a_r は r を含んでいないのだが, そのことを一応無視して, つぎの計算をする。ただ, 実際に係数を計算するときには, このことを忘れてはならない。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi \\
&= \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi \\
&= a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(a_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \\
&= a_r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + a_\theta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + a_\phi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \left(a_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \\
&\quad + \left(a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \left(a_r \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\
&\quad + 2a_r a_\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + 2a_r a_\phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + 2a_\theta a_\phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi} \\
&= A_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\
&\quad + A_4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + A_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + A_6 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\
&\quad + A_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + A_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + A_9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi} \tag{3.1}
\end{aligned}$$

となる^{*4}。ここで, $A_i, (i = 1-9)$ はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_r^2, & A_2 &= a_\theta^2, & A_3 &= a_\phi^2 \\
A_4 &= a_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_r}{\partial \phi}, & A_5 &= a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi}, & A_6 &= a_r \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \\
A_7 &= 2a_r a_\theta, & A_8 &= 2a_r a_\phi, & A_9 &= 2a_\theta a_\phi
\end{aligned} \tag{3.2}$$

^{*4} (3.1) の第2行目をわざわざ書いたことに注意せよ。付録1を参照せよ。

(3.1) と同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= B_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + B_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ &\quad + B_4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + B_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_6 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &\quad + B_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + B_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + B_9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi}\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= C_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + C_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + C_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ &\quad + C_4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + C_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + C_6 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &\quad + C_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + C_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + C_9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi}\end{aligned}\quad (3.4)$$

(3.4) の $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ では $c_\phi = 0$ であるために C_1 - C_9 の中で 0 でないものは C_1, C_2, C_4, C_5, C_7 の 5 つだけである。ここではわざと 9 つの C_i を全部を残した式を形式的に書いている。当然

$$C_3 = C_6 = C_8 = C_9 = 0 \quad (3.5)$$

が成り立っている。このこともまた係数の計算を簡単にするが、実際に係数を計算するときまで形式的に残しておく。

B_i は A_i の定義で a_r, a_θ, a_ϕ を b_r, b_θ, b_ϕ で置き換えたものであり、 C_i は A_i の定義で a_r, a_θ, a_ϕ を $c_r, c_\theta, c_\phi = 0$ で置き換えたものである。

4 3次元のラプラス演算子の極座標表示

以上の計算結果から 3 次元のラプラス演算子の極座標表示は

$$\begin{aligned}\Delta \psi &= P_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + P_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + P_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ &\quad + P_4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + P_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + P_6 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &\quad + P_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + P_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + P_9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi}\end{aligned}\quad (4.1)$$

と表される。

微分演算子の前の係数は $P_i = A_i + B_i + C_i, (i = 1-9)$ で定義される。すなわち、

$$\begin{aligned}P_1 &= A_1 + B_1 + C_1, & P_2 &= A_2 + B_2 + C_2, & P_3 &= A_3 + B_3 + C_3 \\ P_4 &= A_4 + B_4 + C_4, & P_5 &= A_5 + B_5 + C_5, & P_6 &= A_6 + B_6 + C_6 \\ P_7 &= A_7 + B_7 + C_7, & P_8 &= A_8 + B_8 + C_8, & P_9 &= A_9 + B_9 + C_9\end{aligned}\quad (4.2)$$

である。実は上の P_i の定義式で $C_3 = C_6 = C_8 = C_9 = 0$ が成り立つが、わざと形式的に残してある。実際の P_i の計算ではこのことを使う。

これらの係数の計算は付録 2 に述べることにして, 0 でない P_i だけの結果をまとめておくと

$$P_1 = 1 \quad (4.3)$$

$$P_2 = \frac{1}{r^2} \quad (4.4)$$

$$P_3 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.5)$$

$$P_4 = \frac{2}{r} \quad (4.6)$$

$$P_5 = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

となる. これ以外の係数は $P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = 0$ である.

したがって

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \quad (4.9)$$

いま

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \right) \quad (4.11)$$

であるから, (4.9) は

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (4.12)$$

と表される. いま

$$\Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.5)$$

と定義すれば, (4.12) は

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda\psi \quad (2.4)$$

と表される. これらが 2 節の (2.4) と (2.5) で表された 3 次元のラプラス演算子の極座標表示である. (2.4) と (2.5) の $\Delta\psi$ の極座標表示の式の特徴をつかめば, この式を覚えやすいと思う. なお, (2.4),(2.5) は直交曲線座標系によって直接に導くことができる [3].

5 おわりに

このエッセイでは, 3 次元のラプラス演算子 (ラプラシアン) の極座標表示を導いた. その結果は (2.4),(2.5) である. 計算に要した時間は延べ 2 日にわたってそれぞれ数時間をかけて間違いなく導出ができた. 1 ヶ所だけ計算があわなくてちょっとあわてたが,

これは (3.1) の表し方が簡潔でよかったことと, それに同じ形の残り 2 つの式の計算をする必要がなかったの
で, 簡略化されたことによる. このアイディアは江沢洋先生の「式を小分けに計算する」という考えである.

3 次元のラプラス演算子を極座標で表すことは学生のときに誰でも一度は試みて挫折したことがあるか, または
中西先生が示唆されたように 2 次元のラプラス演算子の円柱座標の変換を用いて, 3 次元の極座標での表示を導く
のが普通であろう [5].

しかし、真向から立ち向かってでもここで示したやり方ならば、数時間で導出できることがわかった。だが、若いときにはこういうやり方にはまったく考えが及ばず、中西先生から [3] の計算は「数学嫌いをつくりだすのではないか」といわれたのであった。そのご意見はもっともだと思う。

確かに、学生時代にまともに計算して 1 週間ほどかかっても、結果があわなかったから、その計算のしかたは芸がなかった。もっとも今回示した計算では高等な考えは全く使っていないので、テクニカルにすぎるかもしれない。

6 付録 1 (3.1) についての注意

(3.1) の第 2 行をわざわざ書いてあることを注意しておこう。すなわち、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi \\ &= A_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ &\quad + A_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + A_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + A_9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi}\end{aligned}$$

ではなく、ほかに

$$A_4 \frac{\partial \psi}{\partial r} + A_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + A_6 \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

の 3 項があるのが正しい。こういうまちがいを演算子の取り扱いに慣れていないときにはすることがある。そういうまちがいを防ぎたいという気持ちから、(3.1) の第 2 行をわざわざ書いた。こういうまちがいの原因は $\left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \psi$ の演算子の部分だけを普通の式の 2 乗と同じように扱うことによると考えられる。

7 付録 2 P_i , ($i = 1-9$) の導出

P_i , ($i = 1-9$) の導出を行うためには、その各部分 $a_r, a_\theta, \dots, c_\theta, c_\phi$ の具体的な式は (2.9), (2.10), (2.11) に与えられている。

これらの式を前にもどって参照するのは面倒であるから、ここに再記しておく。

$$a_r = \sin \theta \cos \phi, \quad a_\theta = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \quad a_\phi = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad (2.9)$$

$$b_r = \sin \theta \sin \phi, \quad b_\theta = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \quad b_\phi = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \quad (2.10)$$

$$c_r = \cos \theta, \quad c_\theta = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad c_\phi = 0 \quad (2.11)$$

これらの式を参照すれば、つぎのように P_i , ($i = 1-9$) を導出できる。この計算をするためには一部には補助計算

が必要となるので、それは付録 3 に与える。

$$\begin{aligned}
P_1 &= A_1 + B_1 + C_1 \\
&= a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 \\
&= \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= 1
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= A_2 + B_2 + C_2 \\
&= a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2 \\
&= \frac{1}{r^2} (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= A_3 + B_3 + C_3 \\
&= a_\phi^2 + b_\phi^2 + 0 \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= A_4 + B_4 + C_4 \\
&= \underbrace{a_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_r}{\partial r} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r}}_0 + \underbrace{a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} + c_\theta \frac{\partial c_r}{\partial \theta}}_{\frac{1}{r}} + \underbrace{a_\phi \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_r}{\partial \phi}}_{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{2}{r}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
P_5 &= A_5 + B_5 + C_5 \\
&= \underbrace{a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r}}_0 + \underbrace{a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + c_\theta \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta}}_0 + \underbrace{a_\phi \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_\theta}{\partial \phi}}_{\frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta}} \\
&= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}
P_6 &= A_6 + B_6 + C_6 \\
&= \underbrace{a_r \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\phi}{\partial r}}_0 + \underbrace{a_\theta \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\phi}{\partial \theta}}_0 + \underbrace{a_\phi \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi}}_0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
P_7 &= A_7 + B_7 + C_7 \\
&= 2(a_r a_\theta + b_r b_\theta + c_r c_\theta) \\
&= \frac{2}{r}(\cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi - \cos \theta \sin \theta) \\
&= \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
P_8 &= A_8 + B_8 + C_8 \\
&= 2(a_r a_\phi + b_r b_\phi) + 0 \\
&= \frac{2}{r} \cos \phi \sin \phi (-1 + 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}
P_9 &= A_9 + B_9 + C_9 \\
&= 2(a_\theta a_\phi + b_\theta b_\phi) + 0 \\
&= \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cos \theta \cos \phi \sin \phi (-1 + 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.9}$$

である.

P_4, P_5, P_6 の補助計算は付録 3 に述べる.

8 付録 3 P_4, P_5, P_6 の補助計算

8.1 P_4 の補助計算

$$\frac{\partial a_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\sin \theta \cos \theta) = 0 \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\sin \theta \sin \theta) = 0 \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\cos \theta) = 0 \tag{8.3}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_r}{\partial r} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \theta) \cdot 0 + (\sin \theta \sin \theta) \cdot 0 + (\cos \theta) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.4}$$

となる. また

$$\frac{\partial a_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \cos \phi) = \cos \theta \cos \phi \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \sin \phi) = \cos \theta \sin \phi \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos \theta) = -\sin \theta \tag{8.7}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} + c_\theta \frac{\partial c_r}{\partial \theta} &= \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) \cos \theta \cos \phi + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) \cos \theta \sin \phi + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) (-\sin \theta) \\
&= \frac{1}{r} \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \\
&= \frac{1}{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

となる. さらに

$$\frac{\partial a_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \cos \phi) = -\sin \theta \sin \phi \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \sin \phi) = \sin \theta \cos \phi \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \theta) = 0 \tag{8.11}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_\phi \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_r}{\partial \phi} + c_\phi \frac{\partial c_r}{\partial \phi} &= \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) (-\sin \theta \sin \phi) + \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) (\sin \theta \cos \phi) + 0 \cdot 0 \\
&= \frac{1}{r} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

となる.

8.2 P_5 の補助計算

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cos \theta \cos \phi \tag{8.13}$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \phi \tag{8.14}$$

$$\frac{\partial c_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \sin \theta \tag{8.15}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \left(-\frac{\cos \theta \cos \phi}{r^2} \right) + \sin \theta \sin \phi \left(-\frac{\cos \theta \sin \phi}{r^2} \right) + \cos \theta \left(\frac{\sin \theta}{r^2} \right) \\
&= -\frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \\
&= \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta (-1 + 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.16}$$

となる. また

$$a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2 = \frac{1}{r^2} [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta] = \frac{1}{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{r^2} \tag{8.17}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + c_\theta \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.18}$$

となる. さらに

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) = -\frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \tag{8.20}$$

であるから

$$\begin{aligned}
a_\phi \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_\theta}{\partial \phi} &= \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) \left(-\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) + \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cos \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
&= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

となる.

8.3 P_6 の補助計算

$$\frac{\partial a_\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) = \frac{\sin \phi}{r^2 \sin \theta} \tag{8.22}$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) = -\frac{\cos \phi}{r^2 \sin \theta} \tag{8.23}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_r \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\phi}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \left(\frac{\sin \phi}{r^2 \sin \theta} \right) + \sin \theta \sin \phi \left(-\frac{\cos \phi}{r^2 \sin \theta} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi (1 - 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.24}$$

となる. さらに

$$\frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r \sin^2 \theta} \tag{8.25}$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) = -\frac{\cos \theta \cos \phi}{r \sin^2 \theta} \tag{8.26}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\phi}{\partial \theta} &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r \sin^2 \theta} \right) + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \left(-\frac{\cos \theta \cos \phi}{r \sin^2 \theta} \right) \\
&= \frac{\cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi}{r^2 \sin^2 \theta} (1 - 1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.27}$$

となる。最後に

$$\begin{aligned} a_\phi^2 + b_\phi^2 &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (8.28)$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_\phi \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} (a_\phi^2 + b_\phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

となる。

9 付録 4 2次元ラプラス演算子の極座標表示

このエッセイで使った方法で2次元ラプラス演算子の極座標表示を参考のために導出しておこう。

まず, 直交座標 (x, y) と2次元の極座標 (r, θ) との関係は

$$x = r \cos \theta \quad (9.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (9.2)$$

である。これから (x, y) の微分 (dx, dy) は

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad (9.3)$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (9.4)$$

となる。これから微分 $(dr, d\theta)$ は

$$dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy \quad (9.5)$$

$$d\theta = -\frac{\sin \theta}{r} dx + \frac{\cos \theta}{r} dy \quad (9.6)$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= b_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + b_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで

$$a_r = \cos \theta, \quad a_\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (9.9)$$

$$b_r = \sin \theta, \quad b_\theta = \frac{\cos \theta}{r} \quad (9.10)$$

である。これらを用いれば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \psi \\
&= a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + a_r \frac{\partial}{\partial r} \left(a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a_r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + a_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\
&= a_r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 2a_r a_\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} + a_\theta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{9.11}$$

同様に

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = b_r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 2b_r b_\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} + b_\theta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \tag{9.12}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= A \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + B \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + D \frac{\partial \psi}{\partial r} + E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{9.13}$$

ここで

$$A = a_r^2 + b_r^2 = 1 \tag{9.14}$$

$$B = a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} = 0 \tag{9.15}$$

$$C = 2(a_r a_\theta + b_r b_\theta) = 0 \tag{9.16}$$

$$D = a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \tag{9.17}$$

$$E = a_\theta^2 + b_\theta^2 = \frac{1}{r^2} \tag{9.18}$$

である。

A, B, C, D, E の計算は付録 5 に示す。

10 付録 5 A, B, C, D, E の計算

この節では付録 4 で省略した A, B, C, D, E の計算を示す。

A, B, C, D, E はつぎのようになる。

$$A = a_r^2 + b_r^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \tag{10.1}$$

$$B = \underbrace{a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r}}_0 + \underbrace{a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta}}_0 = 0 \tag{10.2}$$

$$C = 2(a_r a_\theta + b_r b_\theta) = \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta (-1 + 1) = 0 \tag{10.3}$$

$$D = a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \tag{10.4}$$

$$E = a_\theta^2 + b_\theta^2 = \frac{1}{r^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{r^2} \tag{10.5}$$

となる。

なお, B, D の補助計算は付録 6 に示す。

11 付録 6 B, D の補助計算

まず, B の計算に必要な偏微分は

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\cos \theta}{r} \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial r} = -\frac{\cos \theta}{r^2} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (11.4)$$

である. これを用いると

$$\begin{aligned} a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} &= \cos \theta \left(\frac{\sin \theta}{r^2} \right) + \sin \theta \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

であり, また係数 E の計算から

$$a_\theta^2 + b_\theta^2 = \frac{1}{r^2} \quad (11.6)$$

であるから

$$\begin{aligned} a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta^2 + b_\theta^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.7)$$

つぎに D に必要な偏微分はさらに, D の計算に必要な偏微分は

$$\frac{\partial a_r}{\partial \theta} = -\sin \theta \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial \theta} = \cos \theta \quad (11.9)$$

である. したがって

$$\begin{aligned} a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} &= \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) (-\sin \theta) + \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) (\cos \theta) \\ &= \frac{1}{r} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (11.10)$$

(2018.5.19)(2020.12.5 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, ラプラス演算子の極座標表示再考 2, 数学・物理通信, 8 巻 5 号 (2018.6) 16-27

- [2] 矢野 忠, ラプラス演算子の極座標表示, 研究と実践 (愛数協), No. 25 (1988.3) 16-29
- [3] 矢野 忠, 『数学散歩』 (国土社, 2005) 109-118, (『物理数学散歩』 (国土社, 2011) 38-47 にも再収録)
- [4] 江沢 洋, 『微分積分の基礎と応用』 (サイエンス社, 2000) 179, 243-246
- [5] 矢野 忠, ラプラス演算子の極座標表示再考, 数学・物理通信, 7 巻 9 号 (2017.12) 10-20
- [6] 矢野 忠, 直交座標系から極座標系へ 1 (改訂版), 数学・物理通信, 10 巻 8 号, (2020.12) 13-22

なぜ平方根は二つあるのか

矢野 忠^{*1}

Why Do Two Squareroots Exist ?

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

ある中学生君にピタゴラスの定理を説明したときに、ある数の平方根が二つあることを説明したが、このときに平方根がどうして二つあるのかをうまく説明できなかった。

一言でいってしまうと、それは $x^2 = a$ という 2 次方程式の解だから、二つ平方根があるということになるだろう。しかし、そういう形式的な説明ではなかなか納得できない。それでそのことの納得できる説明をしたいと思うようになった。

以下はその試みであるが、はたして納得してもらえるだろうか。

2 因数分解による説明

まず、予備知識が少なくてもすむと思える因数分解による方法を説明しよう。

これは $x^2 = a$, ($a > 0$) のときと $x^2 = -a$, ($a > 0$) のときとを分けて説明しよう。

まずは $x^2 = a$, ($a > 0$) のときである。

$$\begin{aligned}x^2 &= a, \quad (a > 0) \\x^2 - a &= 0 \\x^2 - (\sqrt{a})^2 &= 0 \\(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \\x &= \pm\sqrt{a}\end{aligned}\tag{2.1}$$

この因数分解を図解したものが、図 1 である。図 1 で左上の長方形の面積 $\sqrt{a}x$ と右下の長方形の面積（黄色部分） $-\sqrt{a}x$ とがキャンセルして全体で $x^2 - a$ となっている。黄色部分は面積が負であることを示している^{*3}。図 1 の正方形の横と縦の長さを見れば、横は $x - \sqrt{a}$ であり、縦は $x + \sqrt{a}$ であるので、

$$x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$$

と因数分解できる。

つぎは $x^2 = -a$, ($a > 0$) のときである。これも図 1 と同じように図解できる（図 2 参照）。図 2 の正方形の場合も図 1 と同様に因数分解できる。式の計算ではつぎのようになる。このとき $i^2 = -1$ をつかう。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} このような文字タイルを用いて因数分解を考えることは [1] で学んだことである。

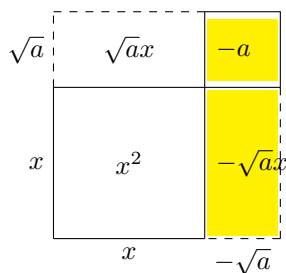


図1 $x^2 - a$ の因数分解

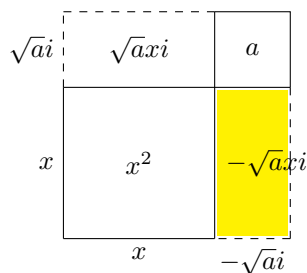


図2 $x^2 + a$ の因数分解

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -a, \quad (a > 0) \\
 x^2 + a &= 0 \\
 x^2 - (\sqrt{ai})^2 &= 0 \\
 (x - \sqrt{ai})(x + \sqrt{ai}) &= 0 \\
 x &= \pm \sqrt{ai}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただ、難しいのは図2において右上の小さい正方形を辺 $\sqrt{ai}$ と $-\sqrt{ai}$ ともつ面積 a の正方形を形式的に図1と同じように考えるところである。しかし、それを認めると別に難しいところはなく、2つの平方根があるということがわかる。

しかし、この説明で納得できたと感じるかどうかは人によるだろう。

つぎの3節ではこの因数分解によるものとはちがった説明を試みよう。

3 正の数の平方根

正の数の平方根が2つあることは簡単に納得してもらえそうである。これは $y = x^2$ のグラフを描いて、それと

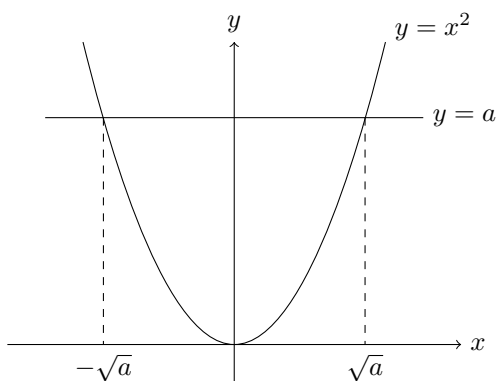


図3 $y = x^2$ と $y = a$ との交点

$y = a, (a > 0)$ という直線との交点をグラフに描いてみると、かならず二つの交点がある。それも片方の交点の x 座標が正ならば、もう一方の交点の x 座標が負となっている（図3参照）[2]。

ところが虚数の解が現れるときには、グラフを描いても $y = a$ の直線は $y = x^2$ と交点をもたない。実数解のときと類推で前にプラスとマイナスの記号がついた二つの虚数解があることを予想することができるが、これは単に類推であって、なかなか納得してもらうことは難しい。

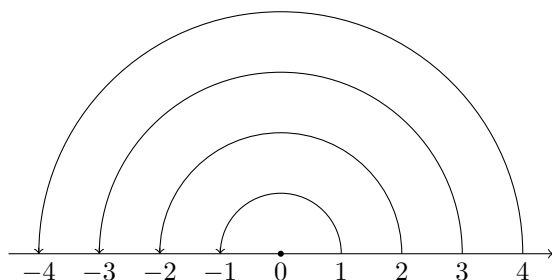


図4 180°の原点のまわりの回転1

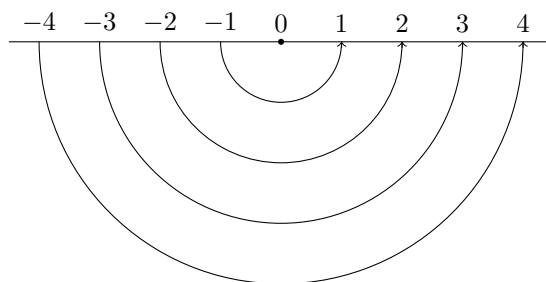


図5 180°の原点のまわりの回転2

もう少しもっともらしい説明はないのだろうか。うまい説明法は今もって思い浮かばないが、苦しまぎれにuzziのように考えてみた。それを4節で述べよう。

4 負の数の平方根

負の数の平方根は正負の符号がついた虚数である。要するになぜ二つの解があるかという問題だから、その二つの可能性があるという事情を説明できればいい。

いま、 $x^2 = -2$ という方程式を考えよう。普通には $x = \pm\sqrt{-2}$ という解があるというのが普通の説明だが、なぜ2つの解があるかを説明したい。

ここで $\sqrt{-1} := i$ という記号を用いて、たとえば $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ と表すことにしよう。

いま、 $\sqrt{-1} := i$ の意味を考えることにする。これは $(\sqrt{-1})^2 = -1$ である。

さて、この数 -1 をある数にかけるのはどういう意味をもつだろうか*4。

いま、直線上にある点を基準点 O （これを原点という）とこの点から単位長さ1の整数倍だけ離れた点に数をつけた直線を考える（図4を参照）。これを数直線という。

原点 O の右側の点には正の数がついている。原点の左側の点はマイナスの符号がついており、これらは負数である。これらのすべての整数に -1 をかけるとどうなるか。

$$1 \times (-1) = -1$$

$$2 \times (-1) = -2$$

$$3 \times (-1) = -3$$

...

$$(-1) \times (-1) = 1$$

$$(-2) \times (-1) = 2$$

$$(-3) \times (-1) = 3$$

...

となる。これらは正の数と負の数に負の数 -1 をかけた結果である。これは数直線を原点 O のまわりに 180° 回転したものになっている。

それで、ある数に数 -1 をかけたものにまた数 -1 をかければ、もう1回 180° の回転をして、元の数直線にもどる。

正の数ある数にかけてもそのときは数直線の回転は起こさないで、数の符号はかわらない。これらが中学校に入ると学ぶ負の数を含む数の符号の規則である。学校ではあまりそういうふうに教えてくれない。ただ単に数のかけ算の規則として教えられるが、負の数のかけ算の符号の決定にはこういう理由があった。

*4 図4-7に述べた 180° の回転をひき起こす演算子としての -1 と 90° 回転をひき起こす演算子としての i については [3] を見よ。

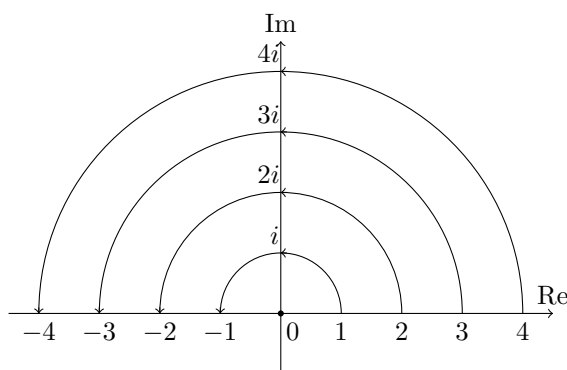


図6 反時計まわりの $90^\circ, 180^\circ$ の回転

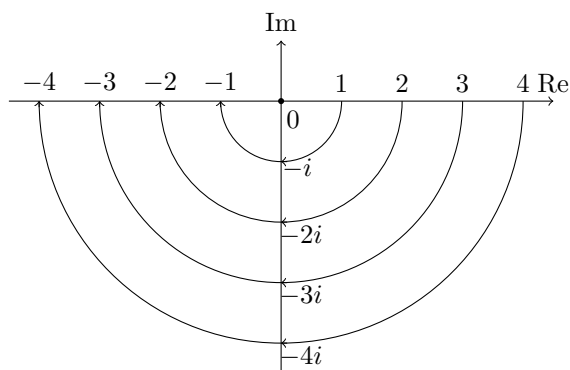


図7 時計まわりの $90^\circ, 180^\circ$ の回転

それはともかくとして、 $i^2 = -1$ という規約であった。 $i = \sqrt{-1}$ を2度かけると -1 になるのだが、 -1 は数直線の原点 O の周りの 180° を意味する。 $-1 = i^2$ であるが、これを $\times i \times i$ と考えると、 i を2回続けてかけると原点 O のまわりの数直線の 180° となるので、 i をかけるのは数直線の原点 O のまわりの 90° の反時計まわりの回転を表している（図6参照）。数直線の実軸 Re は 90° 回転して虚軸 Im となる。座標平面で x 軸、 y 軸が、複素平面ではそれぞれ実軸 Re と虚軸 Im となっている。

ここで $x^2 = -a$, ($a > 0$) を考えてみよう。これから x を求めると $x = \pm\sqrt{ai}$ が得られるが、これらは虚軸の直線上にある。 $x = \sqrt{ai}$ は実軸より上の虚軸上にあり、 $x = -\sqrt{ai}$ は実軸より下側の虚軸上にある。そしてそれらの原点 O からの隔たりは同じ大きさである。

2つの x の値を2乗して $-a$ となるのは原点 O のまわりの数直線が反時計方向に 180° 回転するか、または時計方向に 180° 回転するかの、二つの可能性があるからである（図6, 7参照）。反時計方向まわりにしろ、時計方向まわりにしろ最終的に2度の回転によって、 $-a$ となることはわかるだろう。

5節では少し高級な説明をしてみよう。

5 極形式を用いた説明

まず最初に方程式 $x^2 = a$, ($a > 0$) の極形式を用いた解法を述べる。

これは $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ という複素数の極形式を用いると*5

$$r^2 e^{2i\theta} = a \quad (5.1)$$

と表される。これから

$$r^2 = a \quad (5.2)$$

$$e^{2i\theta} = 1 \quad (5.3)$$

となる。 $r > 0$ であるから $r = \sqrt{a}$ であり、

$$2\theta = 0 \quad \text{または} \quad 2\theta = 2\pi \quad (5.4)$$

が成り立つから、

$$\theta = 0 \quad \text{または} \quad \theta = \pi \quad (5.5)$$

が θ のとりうる値となる。

*5 Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いると $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ は簡単に $x = r e^{i\theta}$ と表される。Euler の公式を用いた、この表示を使うと議論と記述が簡単になる。この節ではこの表示が使われている。

$e^0 = 1$ と $e^{i\pi} = -1$ を用いると, $x = re^{i\theta}$ は

$$x = \sqrt{a}, \quad (\theta = 0) \quad (5.6)$$

$$x = -\sqrt{a}, \quad (\theta = \pi) \quad (5.7)$$

となる.

つぎに, 方程式 $x^2 = -a$, ($a > 0$) の極形式を用いた解法を述べる.

$x = re^{i\theta}$ という極形式を用いると

$$r^2 e^{2i\theta} = -a \quad (5.8)$$

これから

$$r^2 = a \quad (5.9)$$

$$e^{2i\theta} = -1 \quad (5.10)$$

となる. $r > 0$ であるから, $r = \sqrt{a}$ であり,

$$2\theta = \pi \quad \text{または} \quad 2\theta = -\pi \quad (5.11)$$

が成り立つから,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

が θ のとりうる値となる.

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ と $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ を用いると, $x = re^{i\theta}$ は

$$x = \sqrt{a}i, \quad (\theta = \frac{\pi}{2}) \quad (5.13)$$

$$x = -\sqrt{a}i, \quad (\theta = -\frac{\pi}{2}) \quad (5.14)$$

となる.

このように複素数の極形式を用いて, 平方根が二つあることを説明できるが, これは中学生にはちょっと難しすぎるかもしれない.

6 おわりに

なんでもないかもしれないことにいくつかの説明をした. 中学生くらいだと 2 節の因数分解による説明で十分に納得してくれるのかもしれない.

高校の 2 年生ごろに因数分解による方法を知って, ある数の平方根が正負の二つあることをようやく納得した覚えがある. もっとも図 1, 2 のような図解による因数分解はそこにはまったく知らなかった.

(2020.5.10)(2020.12.8 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 寛, 『矢野 寛研究論文集』(四国地区数学教育協議会, 1992) 146-157
- [2] 矢野 忠, 平方根の近似値 1, 研究と実践 (愛数協), No. 111 (2012.4) 30-36
- [3] 遠山 啓, 『数学入門』上 (岩波書店, 1959) 195-197

扇形の面積 1

矢野 忠^{*1}

Area of Sectors 1

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

このエッセイはすでに愛数協の「研究と実践」に発表したものの改訂版である [1]. 実はあまり本質的な改訂ではないのだが, 扇形の面積 2 を「数学・物理通信」に掲載するので, そのためにここに投稿する.

円の一部をその 2 つの半径と円弧で切り取った扇形の面積 S はその円弧に対応した中心角 θ に比例する.

それでいつも比例式

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad (1.1)$$

から

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad (1.2)$$

と求めることに疑問をもったことがなかった.

ところが先日ひょっとしたことからこのことが自明なのかと疑問に思い始めた. それでそのことを述べた文献を探した. はじめこのことはどの高校のテキストにも書いてあるのだろうとタカをくくって調べ始めたが, 意外にそのことを私にも納得できるように書いた本をなかなか見つけることができなかった. それどころか, この事実さえも高校のテキストに見出すことがどうも難しい. 中学校の数学や高校数学のテキストの欠陥かとも思えるくらいだ.

それはともかくとして, 扇形の面積がその中心角に比例することは当然でもあるようだが, あまりにも当然だからかどうか, 意外にそのことをきちんと理由を述べて示した文献に出会えなかった. それでもいくつかの書にあたっているうちに高校の古い学習参考書 [2] に出会った. そこに私にも納得できる説明があったので, 以下に補足を加えながら述べる.

2 扇形の面積

円の中心角 θ に対応した扇形の面積を $S(\theta)$ と表すことにしよう. ある二つの中心角 α と β とがあれば, それに対応した扇形の面積はそれぞれ $S(\alpha)$ と $S(\beta)$ と表すことができる (図 1, 図 2 参照).

このときこの二つの中心角の和 $\alpha + \beta$ に対応した扇形の面積は $S(\alpha + \beta)$ と表すことができる. このとき

$$S(\alpha) + S(\beta) = S(\alpha + \beta) \quad (2.1)$$

が成り立つことは図 3 から明らかである. いま二つの中心角 $\alpha = 0, \beta = 0$ のとき, その和の $\alpha + \beta = 0$ であるが, 中心角が 0 のときにはそれに対する扇形の面積が 0 であることは自明であろう. すなわち, 式で表せば

$$S(0) = 0 \quad (2.2)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

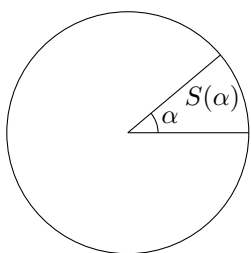


図 1 扇形 1

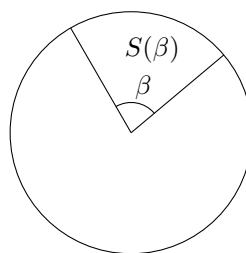


図 2 扇形 2

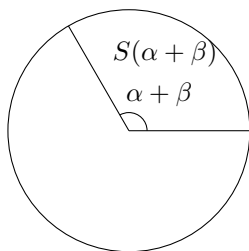


図 3 扇形 3

が成り立っている*3.

(2.1) は S が中心角 θ の 1 次関数であることを示しているので,

$$S(\theta) = m\theta + n, \quad m, n = \text{一定} \quad (2.3)$$

と表すことができる.

(2.3) に (2.2) を用いれば, $n = 0$ と求められて, 結局

$$S(\theta) = m\theta \quad (2.4)$$

が得られる. このことは中心角に扇形の面積は比例していることを示している.

このことがわかれば序節で述べた比例を用いて, 中心角 θ に対応した扇形の面積を求めることは当然でもあろうし, 別に難しいことはなにもない.

3 よく考えてみれば

いや, よく考えてみるほどのこともないだろうが, 中心角 θ の扇形を切り出してきて, その面積を S とすれば, それと同じ中心角をもつ扇形も面積 S をもつであろう.

したがって, この二つをくっつけ合わせた中心角 2θ をもつ扇形は $2S$ となるであろう. 同様に中心角が 3 倍に 3θ になれば, その面積は $3S$ となるであろう.

一般に言うと中心角が n 倍になれば, その扇形の面積は nS となり, S の n 倍になるのは至極当然である.

このことは, すなわち, 中心角とその扇形の面積が比例していることを示している.

なお, 1 節では比例式を用いて中心角 θ に対する面積 S を求めたが, 比例定数 m をどこかの中心角の値で決めると考えてもよい. その場合には, たとえば $\theta = 2\pi$ のときに $S(2\pi) = \pi r^2$ であることを用いて

$$S(2\pi) = \pi r^2 = 2m\pi \quad (3.1)$$

*3 代数的な証明を付録に述べた.

から

$$m = \frac{r^2}{2} \quad (3.2)$$

を求めて、

$$S(\theta) = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (3.3)$$

が得られる.

これは結局のところ比例式を用いたのとおなじことになっている.

4 おわりに

一般の人にとって何でもないかもしれないことをとりあげて考えてみた. 3 節に述べたようなことをはじめから考えることができれば, 全く悩む必要がなかったのだが, そのことを思いついたのはやっと文献の記述を読んだ後だったことが悔しい.

私のものわकारの悪さを痛感しながら, 筆をおく.

5 付録 (2.2) の代数的証明

わざわざ代数的に $S(0) = 0$ であることを示す必要もないであろうが, $\alpha = 0, \beta = 0$ を (2.1) に代入すれば

$$S(0) + S(0) = S(0) \quad (5.1)$$

となる. したがって

$$S(0) = 0 \quad (2.2)$$

が代数的に得られる.

(2014. 9. 12)(2020.5.5 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 扇形の面積, 研究と実践 (愛数協), No. 116 (2014.11) 6-8
- [2] 山野 熙, 安藤洋美, 『現代の総合数学 II』(現代数学社, 1973) 91-93, この書は『大道を行く高校数学』(解析編) (現代数学社, 2001) として復刊されている.

扇形の面積 2

矢野 忠^{*1}

Area of Sectors 2

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

これは前のエッセイ「扇形の面積 1」[1]の続編である．そこでは扇形の面積 S がその中心角 θ の 1 次関数である [2] ということから，扇形の面積はその中心角に比例することを導いた．今回はもっと単純な観点からこのエッセイを書く．

円の一部分を 2 つの半径と円弧で切り取った，円の扇形の面積 S はその円弧に対応した中心角 θ に比例する^{*3}．それは円の半径 r ，それにその扇形のもつ円の中心角 θ を用いると

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (1.1)$$

と表される (図 1 を参照)．

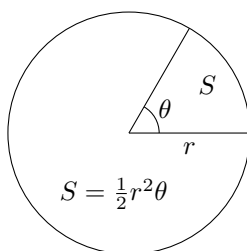


図 1 扇形の面積 1

弧度法による角度の定義

$$\theta := \frac{l}{r}, \quad l = \text{円弧の長さ} \quad (1.2)$$

から求められる円弧の長さ l を用いて (1.1) を書き換えると

$$S = \frac{1}{2}rl \quad (1.3)$$

と表せる．この (1.3) はちょっと三角形の面積を求める公式 (1.4) と似ている (図 2, 3 を参照)．

というのも，三角形の面積 S はその底辺の長さ a と高さ h とが与えられると

$$S = \frac{1}{2}ha \quad (1.4)$$

と表されるから (図 3 を参照)．それで，どうやって扇形の面積 S を求めたのかを知りたいであろう．

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} このエッセイでは，扇形の中心角を弧度法で表している．角度を弧度法で表すことについては付録を見てほしい．

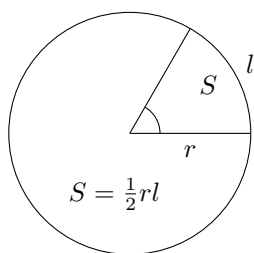


図2 扇形の面積 2

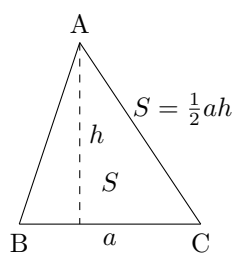


図3 三角形の面積

2 扇形の面積は中心角に比例する

円の扇形の面積 S はその円弧に対応した中心角 θ に比例すると 1 節でなにげなく書いた．ところでそれは本当だろうか．この節ではそのことを再検討しよう．

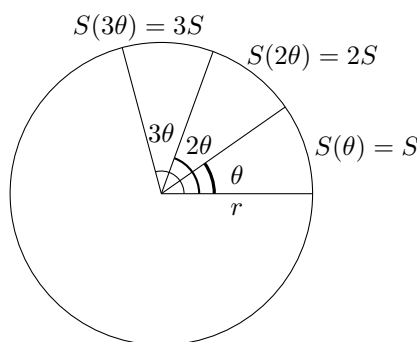


図4 扇形の面積は中心角に比例する

中心角 θ の扇形を切り出してきて，その面積を $S(\theta) = S$ とすれば，それと同じ中心角 θ をもつ扇形も面積 S をもつであろう．

したがって，この二つをくっつけ合わせた中心角 2θ をもつ扇形は $S(2\theta) = 2S$ となるであろう．同様に中心角が 3 倍に 3θ になれば，その面積は $S(3\theta) = 3S$ となるであろう．

一般に言うとも中心角が n 倍になれば，その扇形の面積は nS となり， S の n 倍になるのは至極当然である．もちろん中心角が $1/n$ になれば，その面積は $\frac{S}{n}$ となる．

このことから扇形の中心角とその面積が比例することがわかる (図 4 参照)．

3 扇形の面積

2 節で扇形の面積 S がその中心角 θ に比例することがわかった．これから扇形がもつ中心角 θ と円の中心のまわりの中心角 2π との比の値 $\frac{\theta}{2\pi}$ が扇形の面積 S と円の面積 πr^2 の比の値 $\frac{S}{\pi r^2}$ に等しいことは自明である．だから

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad (3.1)$$

が成り立つ．したがって，扇形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad (3.2)$$

と表される．

つぎのように考えてもよい．扇形の面積 S はその中心角 θ に比例するので，定数 c を用いて

$$S = c\theta, \quad c = \text{定数} \quad (3.3)$$

と表すことができる．ここで定数 c はつぎのようにして決めることができる．

この式は中心角が 2π のとき円の面積を表しているはずだから

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 2\pi c \\ c &= \frac{r^2}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

定数 c が決まったから，これを扇形の面積の定数 c に代入すると

$$S = \frac{r^2}{2}\theta \quad (3.5)$$

が得られる．

ここで，定数 c についてひとこと注意しておこう．

上に得られた定数 c は円の半径 r の 2 乗の $1/2$ であって，円の半径に依存している．円の半径は任意に変えることができるから，これは定数ではないという見方も成り立つ．ここでの定数という意味は扇形の面積を表す変数の中心角 θ にはよらないという意味である．

4 おわりに

図解によって，扇形の面積がその中心角に比例するという事実から，その表現する式を求めた．世の大多数の科学・技術者にとっては何でもない知識であろうが，ときどきはこういう反省をするのもいいことかもしれない．

5 付録 弧度法による角度と立体角

円弧の長さ l はその中心角 θ に比例する [3]．

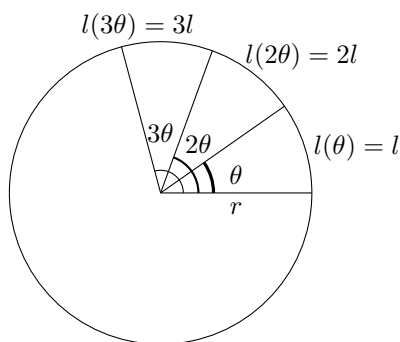


図5 円弧の長さは中心角に比例する

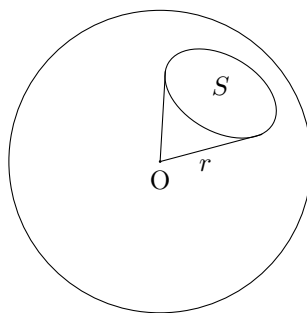


図6 半径 r の球と立体角

扇形の面積と中心角の議論と同じように，ある一定の中心角 θ に対する円弧の長さを l とする．その同じもう一つの中心角 θ に対する円弧の長さも l であるから，その二つの中心角を加えた中心角 2θ に対する円弧は $2l$ となる．同じように中心角が 3θ になれば，それに対する円弧の長さも $3l$ となる（図5参照）．

したがって，円弧の長さ l を円の半径 r でわれば，円弧に比例した中心角 θ が得られる．こうやって角度が決められる．この角度の決め方を弧度法による角度という．式で表すと

$$\theta := \frac{l}{r} \quad (1.2)$$

で中心角が決められる。

普通の度数法で決められる角度との関係は次のようにして決めればよい。それは円の中心のまわりの 1 周の角度は度数法では 360° であるが、これは弧度法では $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ であるから、

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad (5.1)$$

の関係にある。弧度法での角度の単位をラディアンといい、rad で表す。

これですべての度数法での角度と弧度法の角度の関係がわかるが、便宜のためにいくつかの弧度法での角度と度数法での角度をあたえておく。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \text{ rad} &= 90^\circ \\ \pi \text{ rad} &= 180^\circ \\ 1 \text{ rad} &= 57.29578^\circ \end{aligned}$$

微分積分法での三角関数の角度は弧度法で表すので、できるだけはやく度数法の角度から弧度法での角度に切り替えておくのがよい。

話が急にとぶが、平面上の角を弧度法で定義すれば、空間における立体角への拡張はやさしい [4]。これは平面上の半径 r の円の代わりに、半径 r の球を考え、円弧の長さ l の代わりに、球面上の面積 S を考える。

円弧の長さ l を円の半径 r でわったものが弧度法での角度の定義であったから、それに対応して球面上の面積 S を球の半径の 2 乗 r^2 でわったものを立体角 Ω の定義とする。すなわち、

$$\Omega := \frac{S}{r^2} \quad (5.2)$$

が立体角の定義である (図 6 参照)。これが弧度法での角度の定義 (1.2) の一般化であることは明らかであろう。立体角の大きさの単位をステラディアンといい、sr で表す。そして、ある一点から全方位を望む、全立体角は

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr} \quad (5.3)$$

である。

これから、平面上のある一点のまわりの全方位角 2π ラディアンに対応した、全立体角は 4π ステラディアンであることがわかる。

具体的に立体角をイメージするには新聞紙でたとえばロート状の円錐をつくれば、その円錐のなす空間的な角が立体角の実例となるであろう。もっとも立体角はこの例のような円錐状の角でなくても角錐状のものであっていいし、その他の名前がついていない、どんな空間角でもいい。その空間の角が半径 r の球上で面積 S を切り取れば、その面積 S を球の半径の 2 乗 r^2 でわった大きさの立体角をもっている。

立体角はこのように定義されている。ベクトル解析のテキストに出ている、難しげな立体角の定義はまちがっているわけではないが、ペダンティックであり、その本質を見誤らせるかもしれない。

(2020.5.5)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 扇形の面積 1, 数学・物理通信, 10 巻 10 号 (2020.12) 21-23
- [2] 安藤洋美, 山野 熙, 『大道を行く高校数学』(現代数学社, 2001) 92-93
- [3] 安藤洋美, 山野 熙, 『大道を行く高校数学』(現代数学社, 2001) 91-92
- [4] 矢野 忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) 75-77

編集後記

『数学・物理通信』の読者の皆様こんにちは。今回も私(世戸)が編集後記を書くことになりました。私が住む北海道は、このところ急に寒さが増し、日中もマイナス気温が続いています。北海道の最も寒いところでは、すでにマイナス 20 度以下になったそうで、札幌はそれほどでもありませんが、いよいよ冬将軍がやってきたなという感じです。

今号は、編集長の矢野さんの論文で一冊となりました。矢野さんが書かれた『扇形の面積』というのを読んでいて驚いたことがあります。それは、「扇形」の英語が“sector”だったことです。これはまったく知りませんでした。セクターというとすぐに「第 3 セクター」を思いだしてしまい、これは「官民共同事業体」を意味します。したがって、この sector というのは、普通は、「部門」「分野」などと言った意味しかないと思っていました。英語が不得意な私にとっては、どうも分からないことが多すぎます。

最近も「三日月」という英語を調べる必要があり、辞書を引くと、“crescent”とあります。これもまったく予想外の言葉でした。「満月」は“full moon”，「新月」は“new moon”で予想どおりですが、この三日月だけどうしてまったく異なる言葉になってしまうのか。良く調べてみると、これは音楽で使われるイタリア語の“crescent”（だんだん強く），“decrecent”（だんだん弱く）からきている言葉だそうです。英語って分からない言葉ですね。

これで思いだすのは、私がまだ中学生のときに知ったことですが、「雨傘」が英語で“umbrella”「日傘」が“parasol”というやつです。「雨傘」は“pararain”でいいはずではないかと考えてしまいました。これでは英語圏の人自体が不便と思わないのか不思議な気がしたものです。もう少し、勝手なことを言わせてもらおうと、「1 月, 2 月, 3 月, , ,」はどうして, “January, February, March, . . .”なのか, これを “First Month, Second Month, Third Month, . . .”と言ったらだめなのかなんてことまで考えてしまいました。本当に英語って分からない言葉ですね。これに比べると、フランス語やドイツ語の方が「合成語」が多いのでその点分かりやすいような気がするのですが、語学に弱い私にはよく分かりません。

この『数学・物理通信』は今号で通算 95 号になるそうです。もうすぐ、通算 100 号も目の前です。よくこんなに続いたものと感心してしまいます。これには、矢野忠さんのひた向きの努力があつてのことと思います。どうか、今後とも『数学・物理通信』が長く続くことを願っています。

(世戸憲治)

世戸さんが編集後記を書いてくださったので、余計なことを書くべきではないのですが、ついつられて書きます。英語の雨傘 umbrella と日傘 parasol ですが、フランス語では雨傘は le parapluie で日傘が le parasol でうまく対応しています。la pluie は雨を意味します。ちなみに「雨が降る」を il pluet といい、雪が降るを il neige といいます。il は英語でいうなら, he にあたる代名詞ですが、この場合の il は非人称の il といい、天候や時刻を示すときに使われます。

シャンソンに「雪が降る」というのがありますが、これは Tombe la neige で il neige とは歌っていません。(矢野 忠)