

数学・物理通信

10 卷 2 号 2020 年 3 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 3 月 28 日

目次 (Contents)

1. 鍵盤打楽器の固有振動 (6)

世戸 憲治 2

2. ウイルス感染における SIR モデル

世戸憲治 13

3. 微分方程式と三角関数

矢野 忠 19

4. 編集後記

世戸 憲治 31

1. Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (6)

Kenji SETO 2

2. SIR Model for the Virus Infection

Kenji SETO 13

3. Differential Equations and Trigonometric Functions

Tadashi YANO 19

4. Editorial Comments

Kenji SETO 31

鍵盤打楽器の固有振動 (6)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (6)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「鍵盤打楽器の固有振動 (5)」(「数学・物理通信」10 巻 1 号) では図 1 (a) に示すような鍵盤の両端に錘を付けた場合の固有振動を求めた。この振動系では、錘の質量を鍵盤の質量に対しいろいろと変化させることで、高調波の振動数を基本振動数のほぼ整数倍にすることができた。実際の鍵盤の形は、図 1 (b) に示すように鍵盤中央部の厚さが周辺部より薄くなるように作られている。ここでは、第 3 の方法として、鍵盤自体を異なる材質のものを繋ぎ合わせて作ることにし、図 1 (c) に示すように、その厚さを変える代わりに密度を変化させることで、厚さを変えるのと同じ効果が出せるかを考察することにする。この方法は中央部を薄く作ったものと、等価とはいかないまでも本質的に同じ効果をもたらすものと考えられる。

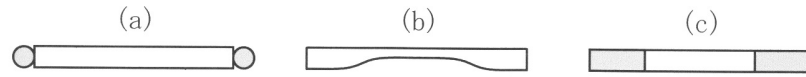


図 1 両端に錘を付けたもの (a), 中央部を薄くしたもの (b), 密度を変えたもの (c)

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

鍵盤打楽器の鍵盤を一本の弾性棒と考え、その長さを 2ℓ , 幅を a , 厚さを h とする。この棒の密度は、図 1 (c) に示すように、中心部と端のほうでは違っていて、中心から前後に長さ $\ell_0 (< \ell)$ の範囲では、 ρ_0 とし、それ以外の端の部分では ρ_1 とする。すなわち、棒の中心を原点として長さ方向に x 軸をとったとき、 x の関数としての密度 $\rho(x)$ は、階段関数 $\theta(x)$ を用いて、

$$\rho(x) = \rho_0 \theta(\ell_0 - |x|) + \rho_1 \theta(|x| - \ell_0) \quad (2.1)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

と定義する．この棒の振動方程式は Bernoulli-Euler 梁のものを採用し，時刻 t ，座標 x での棒の長さに対し垂直方向の変位を $V(x, t)$ としたとき，

$$\rho(x) ahV_{tt} = -\partial_x^2 [EIV_{xx}], \quad I = \frac{ah^3}{12} \quad (2.2)$$

とする．ここで，変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す．また， E は棒の Young 率， I は断面 2 次モーメントでこの第 2 式で定義するが，これら E, I は棒全体にわたって一定とする*¹．この方程式を境界条件，すなち，棒の両端 $x = \pm\ell$ は自由端とするので，そこでは，曲げモーメント $M = EIV_{xx}$ をゼロ，および，剪断力 $Q = \partial_x [EIV_{xx}]$ をゼロとして，

$$M = EIV_{xx} \Big|_{x=\pm\ell} = 0, \quad Q = \partial_x [EIV_{xx}] \Big|_{x=\pm\ell} = 0 \quad (2.3)$$

とした条件の下に解くことになる．また，ここでは，密度が途中で変わるために， $x = \pm\ell_0$ のところで折れ曲がってはいないことを示す接続条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\ell_0-0} V(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0+0} V(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0-0} V_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0+0} V_x(x, t) \quad (2.4)$$

の他に，曲げモーメント M と剪断力 Q が，この点で連続という条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\ell_0-0} V_{xx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0+0} V_{xx}(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0-0} V_{xxx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\ell_0+0} V_{xxx}(x, t) \quad (2.5)$$

を課すことになる．

方程式を解く前に，数式の簡素化のため，変数の無次元化をしておく．速度の次元を持つ c ，および時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho_1}}, \quad \tau = \frac{\ell}{c} \quad (2.6)$$

と導入しておく．これを用いて， ℓ を長さの単位，また， τ を時間の単位として， x, h, ℓ_0, V, t を，改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad h/\ell \rightarrow h, \quad \ell_0/\ell \rightarrow \ell_0, \quad V/\ell \rightarrow V, \quad t/\tau \rightarrow t \quad (2.7)$$

とおき直す．この変換で方程式 (2.2) は，

$$\rho(x)V_{tt}(x, t) = -h^2V_{xxxx}(x, t) \quad (2.8)$$

となる．ここで，(2.1) 式に替わって新しく定義された無次元の密度関数 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \gamma^4 \theta(\ell_0 - |x|) + \theta(|x| - \ell_0), \quad \gamma = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/4} \quad (2.9)$$

となる．ここに， γ は ρ_0 の ρ_1 に対する比の 4 乗根で，この第 2 式で定義する．

*¹ 断面 2 次モーメントは鍵盤のサイズだけできまるので，棒全体にわたって一定とみなせる．しかし， $|x| < \ell_0$ と $|x| > \ell_0$ で鍵盤を作る材質が違ってくるので，Young 率 E の方は $|x| = \ell_0$ の左右で違ってくるはずである．そこで， $|x| < \ell_0$ での Young 率を E_0 ， $|x| > \ell_0$ でのそれを E_1 としたとき， $|x| > \ell_0$ のところでは， $(E_0/E_1)\rho_1$ を改めて ρ_1 と定義しなおすと，形式的に Young 率 E を鍵盤全体で一定とみなすことができる．つまり，Young 率の違いを形式的に密度に繰り込んでしまうことができる．

2.2 固有値と固有関数

ここで、変位 $V(x, t)$ を、座標 x と時間 t について、変数分離形にし、時間部分を三角関数として、

$$V(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.10)$$

としてみる． ω は無次元化された角振動数， α は位相定数である．このとき， $X(x)$ が満たす方程式は、

$$\rho(x)\omega^2 X(x) = h^2 X_{xxxx}(x) \quad (2.11)$$

となり、これを (2.3) 式からでる境界条件

$$X_{xx}(\pm 1) = 0, \quad X_{xxx}(\pm 1) = 0 \quad (2.12)$$

および、(2.4) (2.5) 式からでる接続条件

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} X(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} X(x), & \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} X_x(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} X_x(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} X_{xx}(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} X_{xx}(x), & \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} X_{xxx}(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} X_{xxx}(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

の下に解くことになる．

方程式 (2.11) は、(2.9) 式の $\rho(x)$ を用いて、三角関数、双曲線関数を使って簡単に解け、その独立解は、

$$X(x) = \begin{cases} \cos(\gamma kx), & \cosh(\gamma kx), & \sin(\gamma kx), & \sinh(\gamma kx), & \text{for } |x| < \ell_0 \\ \cos(kx), & \cosh(kx), & \sin(kx), & \sinh(kx), & \text{for } |x| > \ell_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

となる．ここに、波数 k を

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{h}} \quad (2.15)$$

と定義する*2．

方程式 (2.11)、境界条件 (2.12)、接続条件 (2.13) は x の符号反転に対し不変なので、これらを満たす解は、偶関数の場合と奇関数の場合があり得る．ここでは、偶関数の解を $F(x)$ 、奇関数の解を $G(x)$ とすると、その形は、 A, B, C, D, E, F を任意係数として、

$$F(x) = [A \cos(\gamma kx) + B \cosh(\gamma kx)]\theta(\ell_0 - |x|) + [C \cos(kx) + D \cosh(kx) + E \sin(k|x|) + F \sinh(k|x|)]\theta(|x| - \ell_0) \quad (2.16)$$

および、同じ係数名を用いて、

$$\begin{aligned} G(x) &= [A \sin(\gamma kx) + B \sinh(\gamma kx)]\theta(\ell_0 - |x|) \\ &\quad + \text{sgn}(x)[C \cos(kx) + D \cosh(kx) + E \sin(k|x|) + F \sinh(k|x|)]\theta(|x| - \ell_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

と書ける．ここでは、 $F(x)$ 、 $G(x)$ で同じ係数名を用いたが、これらは、もちろん、異なるものである．これは、変数名が無用が増えてしまうのを避けるためと、同じ式になる部分があるため、式の重複を避けるためである．また、この $G(x)$ の式にある sgn は符号関数である．これら関数に (2.12) (2.13) の条件を課すときは、偶奇性が決まっているので、 x の正の方だけの条件を課すだけでよい．

*2 ここでは、三角関数の他に双曲線関数も含まれるので、 k を「波数」と呼ぶのは、ちょっといきすぎかもしれない．しかし、便宜上、こう呼ぶことにする．

2.2.1 偶関数 $F(x)$ の場合

初めに偶関数の $F(x)$ の方から, (2.12) 式の境界条件を課すと,

$$\begin{aligned} -C \cos(k) + D \cosh(k) - E \sin(k) + F \sinh(k) &= 0, \\ C \sin(k) + D \sinh(k) - E \cos(k) + F \cosh(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

となり, (2.13) 式の接続条件を課すと,

$$\begin{aligned} A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) - [C \cos(k \ell_0) + D \cosh(k \ell_0) + E \sin(k \ell_0) + F \sinh(k \ell_0)] &= 0, \\ -A\gamma \sin(\gamma k \ell_0) + B\gamma \sinh(\gamma k \ell_0) - [-C \sin(k \ell_0) + D \sinh(k \ell_0) + E \cos(k \ell_0) + F \cosh(k \ell_0)] &= 0, \\ -A\gamma^2 \cos(\gamma k \ell_0) + B\gamma^2 \cosh(\gamma k \ell_0) - [-C \cos(k \ell_0) + D \cosh(k \ell_0) - E \sin(k \ell_0) + F \sinh(k \ell_0)] &= 0, \\ A\gamma^3 \sin(\gamma k \ell_0) + B\gamma^3 \sinh(\gamma k \ell_0) - [C \sin(k \ell_0) + D \sinh(k \ell_0) - E \cos(k \ell_0) + F \cosh(k \ell_0)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

と, 6 個の係数 A, B, C, D, E, F に対する合計 6 本の式を得る.

これら係数の個数を減らすため (2.18) 式から C, E を求め, D, F を用いて表わすと,

$$C = DR_1(k) + FR_2(k), \quad E = DR_3(k) + FR_4(k) \quad (2.20)$$

となる. ここに, $R_1(k) \sim R_4(k)$ は後でこの式を引用するとき, 式を簡素化するためのもので,

$$\begin{aligned} R_1(k) &= \cosh(k) \cos(k) - \sinh(k) \sin(k), & R_2(k) &= \sinh(k) \cos(k) - \cosh(k) \sin(k), \\ R_3(k) &= \cosh(k) \sin(k) + \sinh(k) \cos(k), & R_4(k) &= \sinh(k) \sin(k) + \cosh(k) \cos(k) \end{aligned} \quad (2.21)$$

と定義する.

一方, (2.19) 式の第 1 式と第 3 式の和, および, 第 2 式と第 4 式の和をとると, C, E が消え,

$$\begin{aligned} A(1 - \gamma^2) \cos(\gamma k \ell_0) + B(1 + \gamma^2) \cosh(\gamma k \ell_0) - 2D \cosh(k \ell_0) - 2F \sinh(k \ell_0) &= 0, \\ -A\gamma(1 - \gamma^2) \sin(\gamma k \ell_0) + B\gamma(1 + \gamma^2) \sinh(\gamma k \ell_0) - 2D \sinh(k \ell_0) - 2F \cosh(k \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる. さらに, (2.20) 式の C, E を (2.19) 式の第 1, 第 2 式に代入すると, それぞれ,

$$\begin{aligned} A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) - DS_1(k, \ell_0) - FS_2(k, \ell_0) &= 0, \\ -A\gamma \sin(\gamma k \ell_0) + B\gamma \sinh(\gamma k \ell_0) - DS_3(k, \ell_0) - FS_4(k, \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる. ここに, $S_1(k, \ell_0) \sim S_4(k, \ell_0)$ は, さらに, 式を簡素化するためのもので,

$$\begin{aligned} S_1(k, \ell_0) &= \cosh(k \ell_0) + R_1(k) \cos(k \ell_0) + R_3(k) \sin(k \ell_0), \\ S_2(k, \ell_0) &= \sinh(k \ell_0) + R_2(k) \cos(k \ell_0) + R_4(k) \sin(k \ell_0), \\ S_3(k, \ell_0) &= \sinh(k \ell_0) - R_1(k) \sin(k \ell_0) + R_3(k) \cos(k \ell_0), \\ S_4(k, \ell_0) &= \cosh(k \ell_0) - R_2(k) \sin(k \ell_0) + R_4(k) \cos(k \ell_0) \end{aligned} \quad (2.24)$$

と定義する. これで, 4 個の係数 A, B, D, F を求めるための 4 本の方程式 (2.22) (2.23) を得たが, これらはすべてイコールゼロの形をしているので, これら係数がすべてゼロとならないためには, その係数行列式の値が

ゼロでなければならない。すなわち、

$$A_F(k) \equiv \begin{vmatrix} (1 - \gamma^2) \cos(\gamma k \ell_0) & (1 + \gamma^2) \cosh(\gamma k \ell_0) & -2 \cosh(k \ell_0) & -2 \sinh(k \ell_0) \\ -\gamma(1 - \gamma^2) \sin(\gamma k \ell_0) & \gamma(1 + \gamma^2) \sinh(\gamma k \ell_0) & -2 \sinh(k \ell_0) & -2 \cosh(k \ell_0) \\ \cos(\gamma k \ell_0) & \cosh(\gamma k \ell_0) & -S_1(k, \ell_0) & -S_2(k, \ell_0) \\ -\gamma \sin(\gamma k \ell_0) & \gamma \sinh(\gamma k \ell_0) & -S_3(k, \ell_0) & -S_4(k, \ell_0) \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

と定義したとき、

$$A_F(k) = 0 \quad (2.26)$$

が k を決めるための固有値方程式となる。これはもちろん、パラメータ γ , ℓ_0 に依存した形で決まる。この式を実際に展開して固有値 k を求めることは解析的には不可能である。ここで、一旦、保留にして奇関数 $G(x)$ の方に進む。

2.2.2 奇関数 $G(x)$ の場合

(2.17) 式で定義した奇関数 $G(x)$ に対し、境界条件 (2.12) 式を適用すると、(2.18) 式と同じものがでる。また、これから、 C , E を求めると、(2.20) 式と同じものになり、ここに表れる $R_1(k) \sim R_4(k)$ は (2.21) 式で与えられるものである。つぎに、この $G(x)$ に (2.13) 式の接続条件を課すと、

$$\begin{aligned} A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) - [C \cos(k \ell_0) + D \cosh(k \ell_0) + E \sin(k \ell_0) + F \sinh(k \ell_0)] &= 0, \\ A\gamma \cos(\gamma k \ell_0) + B\gamma \cosh(\gamma k \ell_0) - [-C \sin(k \ell_0) + D \sinh(k \ell_0) + E \cos(k \ell_0) + F \cosh(k \ell_0)] &= 0, \\ -A\gamma^2 \sin(\gamma k \ell_0) + B\gamma^2 \sinh(\gamma k \ell_0) - [-C \cos(k \ell_0) + D \cosh(k \ell_0) - E \sin(k \ell_0) + F \sinh(k \ell_0)] &= 0, \\ -A\gamma^3 \cos(\gamma k \ell_0) + B\gamma^3 \cosh(\gamma k \ell_0) - [C \sin(k \ell_0) + D \sinh(k \ell_0) - E \cos(k \ell_0) + F \cosh(k \ell_0)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。この第 1 式と第 3 式の和、および、第 2 式と第 4 式の和をとると、係数 C , E が消え、

$$\begin{aligned} A(1 - \gamma^2) \sin(\gamma k \ell_0) + B(1 + \gamma^2) \sinh(\gamma k \ell_0) - 2D \cosh(k \ell_0) - 2F \sinh(k \ell_0) &= 0, \\ A\gamma(1 - \gamma^2) \cos(\gamma k \ell_0) + B\gamma(1 + \gamma^2) \cosh(\gamma k \ell_0) - 2D \sinh(k \ell_0) - 2F \cosh(k \ell_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

を得る。つぎに、この (2.27) 式の第 1 式、第 2 式に、(2.20) 式の C , E を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) - DS_1(k, \ell_0) - FS_2(k, \ell_0) &= 0, \\ A\gamma \cos(\gamma k \ell_0) + B\gamma \cosh(\gamma k \ell_0) - DS_3(k, \ell_0) - FS_4(k, \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ここに表れる $S_1(k, \ell_0) \sim S_4(k, \ell_0)$ は (2.24) 式で定義するものである。これで、係数 A , B , D , F に関する 4 本の方程式 (2.28) (2.29) が得られたが、これらはすべてイコールゼロの式である。したがって、これら係数がすべてゼロにならないためには、係数行列式の値がゼロでなければならない。すなわち、

$$A_G(k) \equiv \begin{vmatrix} (1 - \gamma^2) \sin(\gamma k \ell_0) & (1 + \gamma^2) \sinh(\gamma k \ell_0) & -2 \cosh(k \ell_0) & -2 \sinh(k \ell_0) \\ \gamma(1 - \gamma^2) \cos(\gamma k \ell_0) & \gamma(1 + \gamma^2) \cosh(\gamma k \ell_0) & -2 \sinh(k \ell_0) & -2 \cosh(k \ell_0) \\ \sin(\gamma k \ell_0) & \sinh(\gamma k \ell_0) & -S_1(k, \ell_0) & -S_2(k, \ell_0) \\ \gamma \cos(\gamma k \ell_0) & \gamma \cosh(\gamma k \ell_0) & -S_3(k, \ell_0) & -S_4(k, \ell_0) \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

と定義したとき,

$$\Lambda_G(k) = 0 \quad (2.31)$$

がこのときの固有値方程式となる.

2.3 Maxima を使った解析

固有値方程式 (2.26) (2.31) を手計算で解析するのはあまりにも大変である. 実際, (2.25) (2.30) 式で定義される行列式を展開し, その中に含まれる $S_i(k, \ell_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, さらに, その中に含まれる $R_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$ に (2.21) (2.24) 式の定義を代入すると, その項数は実に 184 項にもなる. 以下では, 数式処理ソフト Maxima を用いた解析を試みるが, その前に $\ell_0 = 0$, または, $\ell_0 = 1$ という特別な場合は, 手計算で処理できるので述べておこう. この場合はどちらも密度変化のない単純な弾性棒になる.

まず, $\ell_0 = 0$ の場合, (2.24) 式で定義される $S_1(k, \ell_0) \sim S_4(k, \ell_0)$ は,

$$S_1(k, 0) = 1 + R_1(k), \quad S_2(k, 0) = R_2(k), \quad S_3(k, 0) = R_3(k), \quad S_4(k, 0) = 1 + R_4(k) \quad (2.32)$$

となる. これを用いて, (2.25) (2.30) 式で定義される行列式 $\Lambda_F(k)$, $\Lambda_G(k)$ は, $\ell_0 = 0$ のとき,

$$\Lambda_F(k) = -4\gamma^2 R_3(k), \quad \Lambda_G(k) = 4\gamma^4 R_2(k) \quad (2.33)$$

となるので, これらがゼロとなるためには, (2.21) の定義式から,

$$\tanh(k) = -\tan(k), \quad \text{および}, \quad \tanh(k) = \tan(k) \quad (2.34)$$

であればよい. これは前に「鍵盤打楽器の固有振動 (1)」で述べたような棒の場合の固有値方程式である.

つぎに, $\ell_0 = 1$ の場合 $S_1(k, \ell_0) \sim S_4(k, \ell_0)$ は,

$$S_1(k, 1) = 2 \cosh(k), \quad S_2(k, 1) = 2 \sinh(k), \quad S_3(k, 1) = 2 \sinh(k), \quad S_4(k, 1) = 2 \cosh(k) \quad (2.35)$$

となり, これを用いて, 行列式 $\Lambda_F(k)$, $\Lambda_G(k)$ を求めると,

$$\Lambda_F(k) = -4\gamma^5 [\cos(\gamma k) \sinh(\gamma k) + \sin(\gamma k) \cosh(\gamma k)], \quad \Lambda_G(k) = 4\gamma^5 [\cos(\gamma k) \sinh(\gamma k) - \sin(\gamma k) \cosh(\gamma k)] \quad (2.36)$$

となるので, これらがゼロとなるには,

$$\tanh(\gamma k) = -\tan(\gamma k), \quad \text{および}, \quad \tanh(\gamma k) = \tan(\gamma k) \quad (2.37)$$

であればよい. これは (2.34) 式の k が γk に変わっただけなので, (2.34) 式の解 k を γ で割ったものがこの式の解 k になる.

これ以上の計算は手計算では無理なので, Maxima を用いて行列式 (2.25) (2.30) を展開し, 数値的に固有値方程式 $\Lambda_F(k) = 0$, $\Lambda_G(k) = 0$ を解いてみる. その際, 2 個あるパラメータのうち, ここでは, 密度 ρ_0 を ρ_1 の $1/2$ として, (2.9) 式から γ の値を

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} = 0.840896 \dots \quad (2.38)$$

に固定し、もう一つのパラメータ ℓ_0 の方は、 $\ell_0 = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ の 5 通りについて解いてみる。

以下では、 $A_F(k) = 0$ から求めた解を小さい方から $k_0, k_2, k_4, \dots$ と偶数番号を付け、また、 $A_G(k) = 0$ から求めた解を小さい方から $k_1, k_3, k_5, \dots$ と奇数番号を付ける。こうして求めた固有値の大小関係は、必ず、 $k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$ となる。各 ℓ_0 に対し、数値的に求めた固有値 k_n の値を $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 個について小数 4 桁の精度で挙げると、

$$\begin{array}{lllllll} \ell_0 = 0 & \text{に対し} & k_n = & 2.3650, & 3.9266, & 5.4978, & 7.0685, & 8.6393, & 10.2101 \\ \ell_0 = 1/4 & \text{に対し} & k_n = & 2.4854, & 3.9890, & 5.8034, & 7.3429, & 8.9550, & 10.7138 \\ \ell_0 = 1/2 & \text{に対し} & k_n = & 2.5602, & 4.2537, & 5.8782, & 7.6845, & 9.4824, & 11.0687 \\ \ell_0 = 3/4 & \text{に対し} & k_n = & 2.5704, & 4.4257, & 6.2620, & 8.0295, & 9.7527, & 11.4953 \\ \ell_0 = 1 & \text{に対し} & k_n = & 2.8124, & 4.6695, & 6.5380, & 8.4060, & 10.2740, & 12.1420 \end{array} \quad (2.39)$$

という値になる。どの固有値 k_n も ℓ_0 の値が大きくなるにつれ少しずつ大きくなる。 ℓ_0 が大きくなるということとは、それだけ密度が小さい部分が増えるということで、振動しやすくなり波数 k が大きくなるということである。

これらの固有値 k_n に対し、(2.15) 式から角振動数 ω_n を

$$\omega_n = h k_n^2 \quad (2.40)$$

として求め、最も低い基本振動数 ω_0 に対する ω_n の比を、各 ℓ_0 に対し、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に求めると、

$$\begin{array}{lllllll} \ell_0 = 0 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.7565, & 5.4039, & 8.9329, & 13.3442, & 18.6378 \\ \ell_0 = 1/4 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.5759, & 5.4521, & 8.7286, & 12.9819, & 18.5818 \\ \ell_0 = 1/2 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.7605, & 5.2716, & 9.0090, & 13.7177, & 18.6915 \\ \ell_0 = 3/4 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.9644, & 5.9347, & 9.7578, & 14.3954, & 19.9993 \\ \ell_0 = 1 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.7565, & 5.4039, & 8.9329, & 13.3442, & 18.6378 \end{array} \quad (2.41)$$

という値が得られる。ここで、注目すべきは、 $\ell_0 = 3/4$ のとき、第 1 高調波と第 2 高調波の振動数が基本振動数の、ほぼ、3 倍、6 倍と整数倍に近い値になっていることである。西洋音楽にとっては、このように高調波の振動数が基本振動数の整数倍になることは非常に大事なことで、もし、そうならないときは不協和音がでてしまう。ここで、基本波の音を「ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ド」の音階の低い方の「ド」の音とすると、3 倍の高調波の音は 1 オクターブ上の「ソ」となり、6 倍は 2 オクターブ上の同じ「ソ」の音となる。

もう一つは、 $\ell_0 = 0$ の場合と $\ell_0 = 1$ の場合とでは、基本振動に対する高調波の振動数の比の値が同じになることである*³。これは (2.34) 式と (2.37) 式のところで説明したとおり、どちらも密度変化のない様な弾性棒の場合に相当するので、当然の結果である。

n が偶数の固有値 k_n に属する偶関数 $F(x)$ 、また、 n が奇数のときの固有値 k_n に属する奇関数 $G(x)$ を、固有値の依存性を明示するため、それぞれ、 $F(x, k_n)$ 、 $G(x, k_n)$ と書き、これらを固有関数と呼ぶ。

*³ 実は、 k_n を小数以下 4 桁で計算すると、これら比の値は小数 2 桁までしか一致しない。ここでは、 k_n の値を小数 6 桁まで求めて比の値を計算した結果、4 桁までの範囲で一致した。

2.4 固有関数の正規化

初めに、2 個の固有値 $k_n, k_{n'}$ があって、 n, n' の偶奇性が異なる时候を考える。例えば、 n が偶数、 n' が奇数のとき、これら固有関数の積に、密度の $\rho(x)$ を重みとして付けた積分が、

$$\int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = 0 \quad (2.42)$$

と直交することは、密度関数 $\rho(x)$ が偶関数であること、および、関数 F, G の偶奇性から明らかである。したがって、固有関数の積の積分を考えるときは、偶関数同士、または、奇関数同士の積分を考えるといふ。どちらにしても方法は同じなので、ここでは、偶関数同士の場合を考える。

まず、固有値とは限らない 2 個の k, k' があって、これに属する関数 $F(x)$ を、それぞれ、 $F(x, k), F(x, k')$ と書くことにする。これら関数は、方程式 (2.11) を満たしているので、

$$\rho(x) \omega^2 F(x, k) = h^2 F_{xxx}(x, k), \quad \rho(x) \omega'^2 F(x, k') = h^2 F_{xxx}(x, k') \quad (2.43)$$

が成立する。ここで、 k と ω 、および、 k' と ω' は (2.15) 式の関係で結ばれている。この第 1 式に $F(x, k')$ を掛け、第 2 式に $F(x, k)$ を掛けてから、辺々を引き算すると、

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega'^2) \rho(x) F(x, k) F(x, k') \\ &= h^2 \frac{d}{dx} \left[F_{xxx}(x, k) F(x, k') - F(x, k) F_{xxx}(x, k') - F_{xx}(x, k) F_x(x, k') + F_x(x, k) F_{xx}(x, k') \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。この式の両辺を x で -1 から 1 まで積分するが、そのとき、関数 F は (2.16) 式で見るとに区分的に異なる定義になるので、積分の方も

$$\int_{-1}^1 \rightarrow \int_{-1}^{-\ell_0} + \int_{-\ell_0}^{\ell_0} + \int_{\ell_0}^1 \quad (2.45)$$

と各区分に分ける必要がでてくる。このとき、接続条件である (2.13) 式が成立しているものとする、 $x = \pm \ell_0$ のところで F, F_x, F_{xx}, F_{xxx} が各々連続になるので、そこでの境界値は相殺され、形式的には -1 から 1 までの積分としてよい。結果は、

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega'^2) \int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k) F(x, k') dx \\ &= h^2 \left[F_{xxx}(x, k) F(x, k') - F(x, k) F_{xxx}(x, k') - F_{xx}(x, k) F_x(x, k') + F_x(x, k) F_{xx}(x, k') \right]_{-1}^1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

となる。ここでさらに、境界条件である (2.12) の第 1 式 $F_{xx}(\pm 1) = 0$ が成立しているものとする、この式は、

$$\int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{h^2}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F_{xxx}(x, k) F(x, k') - F(x, k) F_{xxx}(x, k') \right]_{-1}^1 \quad (2.47)$$

と簡単化されるが、さらに、 F が偶関数、 F_{xxx} が奇関数ということを使うと、

$$\int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{2h^2}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F_{xxx}(1, k) F(1, k') - F(1, k) F_{xxx}(1, k') \right] \quad (2.48)$$

となる．ここで、最後の境界条件である (2.12) の第 2 式である $F_{xxx}(1) = 0$ が満たされて、 k, k' が異なる固有値 $k_n, k_{n'}$ となるときは、この式の右辺がゼロとなるので、異なる固有値に属する固有関数同士の直交性

$$\int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = 0, \quad n \neq n' \quad (2.49)$$

が得られる．同じ固有値になるときは、(2.48) 式の右辺は、 $0/0$ となるので、先に $k' = k_n$ とおいてから、l'Hopital の定理を用いて、 $k \rightarrow k_n$ の極限をとる．結果として、固有関数同士の直交性の式

$$\int_{-1}^1 \rho(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = N_{F,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{F,n}^2 = \frac{1}{2k_n^3} \left[\partial_k F_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} F(1, k_n), \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (2.50)$$

を得る．同様に、奇関数 $G(x, k_n)$ 同士の直交性の式

$$\int_{-1}^1 \rho(x) G(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = N_{G,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{G,n}^2 = \frac{1}{2k_n^3} \left[\partial_k G_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} G(1, k_n), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.51)$$

も得られる．ここに、 $N_{F,n}, N_{G,n}$ は正規化定数で、 $F(x, k_n)/N_{F,n}, G(x, k_n)/N_{G,n}$ が正規化された固有関数となる．

2.5 再び Maxima を用いた解析

ここで採用した正規化の方法は、これまでの「鍵盤打楽器の固有振動」を踏襲したものである．ここで、正規化された固有関数の求め方に関し、具体的な処方箋を述べておく．まず、(2.16) (2.17) 式で定義した関数 $F(x), G(x)$ には 6 個の未定係数 A, B, C, D, E, F が含まれる．このうち、 A を $A = 1$ とおき、残り 5 個の B, C, D, E, F を、境界条件である (2.12) の第 1 式、および、接続条件である (2.13) の 4 本の式、合計 5 本の式から求めておく．これら方程式を具体的に表した式が、(2.18) の第 1 式、および、(2.19) 式、あるいは、(2.27) 式である．このとき、パラメータの γ と ℓ_0 は与えておくが、波数の k は固有値の k_n としておく．ただし、正規化定数 (2.50) (2.51) 式の $N_{F,n}, N_{G,n}$ に含まれる $\partial_k F_{xxx}(1, k) \Big|_{k=k_n}, \partial_k G_{xxx}(1, k) \Big|_{k=k_n}$ を求めるときは、 ε を微小量として、 k を $k = k_n + \varepsilon$ として $F_{xxx}(1, k), G_{xxx}(1, k)$ を求め、その結果を ε で割ることになる．

この 5 元連立方程式を解くことは、手計算では事実上無理なので、Maxima を用いて解くことになる．この係数と正規化定数が求められると正規化された固有関数が求められる．ここでは、パラメータ γ を (2.38) 式の値 $\gamma = (1/2)^{1/4}$ 、 ℓ_0 を (2.41) 式のうち、第 1 高調波と第 2 高調波の振動数が基本振動数のほぼ、3 倍、6 倍となる $\ell_0 = 3/4$ に選ぶことにし、Maxima を用いて求めた正規化された固有関数 $F(x, k_n)/N_{F,n}, n = 0, 2, 4, G(x, k_n)/N_{G,n}, n = 1, 3, 5$ の 6 個の場合を、次ページの図 2 に示す．このグラフは、一見したところ、前回から求めている「鍵盤打楽器の固有振動 (1)~(5)」で得たものとほとんど変わらない．どのグラフも $n + 2$ 個のゼロ点を持つ．

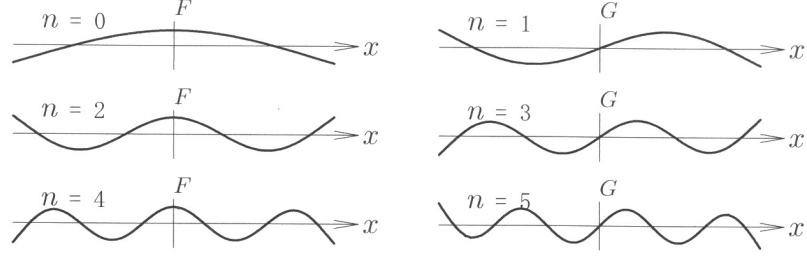


図 2 固有関数のグラフ

ここで、正規化定数 $N_{F,n}$, $N_{G,n}$ を定義する (2.50) (2.51) について、数値計算をする段階で気付いたことを述べておく．この定数に含まれる因子を数値的に求めると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n^3} \partial_k [F_{xxx}(1, k)]_{k=k_n} F(1, k_n) &= 1.025558, & 1.035995, & 1.084820, & n = 0, 2, 4 \\ \frac{1}{k_n^3} \partial_k [G_{xxx}(1, k)]_{k=k_n} G(1, k_n) &= 1.002861, & 1.075828, & 1.054842, & n = 1, 3, 5 \end{aligned} \quad (2.52)$$

となって、ほとんど 1 に近い値をとる．したがって、正規化定数は、 n に無関係に、ほぼ、

$$N_{F,n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_{G,n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.53)$$

という値になる．これは何か理由のあることであろうか？

3 おわりに

今回の解析で得た一番大きな成果は、鍵盤の密度を変えることで、高調波の振動数を基本波のほぼ整数倍にできたことである．今回は鍵盤の両端に錘を付け、鍵盤半分の質量に対する錘の質量比を μ として、同じような解析をした結果、 $\mu = 1/4$ のとき、

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.935, \quad 6.001, \quad 10.221, \quad 15.612, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.1)$$

という結果を得ていた．これは (2.41) 式の $\ell_0 = 3/4$ の場合と比べると分かるように、第 1, 第 2 高調波の振動数が基本波のほぼ、3 倍、6 倍という同じ結果が得られたことになる．実際に存在する鍵盤打楽器の鍵盤は図 1 (b) に示すような盤の中央部の厚さを薄くしたものであるが、これらの結果から考えると、鍵盤の両端に錘を付けたものや、鍵盤の端の方の材質を変えて密度を変化させたもの、すなわち、木琴と鉄琴を合わせたようなものが作られてもよさそうなものである．

もう一つ述べておきたいことは、今回のものは方程式を解析的に解くと言っておきながら、途中で、数式処理ソフト Maxima を使わざるを得なくなったことである．実は、この Maxima を使うのは 4 年ぶり、すっかりその使い方を忘れてしまい、解説書を頭から読むはめになってしまった．2.3 節「Maxima を使った解析」のところで述べたように (2.25) (2.30) 式で定義される 4×4 行列 Λ_F , Λ_G を展開すると、実に 184 項にもなるが、それらをゼロとおいたときの固有値方程式は、Maxima を用いると、固有値 1 個ずつではあるが、ほんの 1 秒もかからないで解かれてしまう．たしかに Maxima は優れたものである．しかし、今回、Maxima を使ってみて思ったことは、使えばそれなりの結果はでるが、そこに至るまでの過程はコンピュータまかせになってしまい、

使う側としては、自分で解析する楽しさを奪われた気分になってしまう。やはり、このようなものは、必要最小限に使うべきものということを思い知らされた。

これまで、鍵盤打楽器の鍵盤の形をどのようにすると、高調波の振動数が基本波の振動数の整数倍になるかということで、種々のモデルを設定し、解析してきた。これまでシリーズで書いてきたことをまとめると、

- (1) 鍵盤の厚さを一様とした場合
- (2) 鍵盤の厚さを不連続に変化させた場合
- (3) 鍵盤の厚さを直線的に変化させた場合
- (4) 鍵盤の厚さを 2 次曲線で変化させた場合
- (5) 鍵盤の両端に錘を付けた場合、および、鍵盤の両端を埋込固定、自在固定とした場合
- (6) 鍵盤の密度を不連続に変化させた場合

の 6 通りの場合を、解析的に考察してきた。結果的にはそれ相応の結論をだすことができたと思われるが、あまりこんなことを続けていると、数学遊びになってしまいそうである。という訳で、この「鍵盤打楽器の固有振動」のシリーズは今回で終わりとしたい。

ウイルス感染における SIR モデル

世戸 憲治 *

SIR Model for the Virus Infection

Kenji SETO*

1 はじめに

今年 (2020 年) 1 月から、中国武漢市で新型コロナウイルス (coronavirus) による肺炎が流行りだした。この病気は、伝染力が強く、2 月には早くも日本にもまん延し、3 月にはまたたくまにヨーロッパ、アメリカまでも伝播し、世界中で、きわめて危険な事態にいたっている。

この種の伝染病がどのようにまん延していくかということに関し、SIR モデルというものがある。このモデルは、1927 年に、W.O.Kermack と A.G. McKendrick によって提唱されたウイルス感染に関するモデルで、患者数が時間的にどのように変化していくかをモデル化したものである。SIR の S は susceptible (感受性保持者)、I は infected (感染者)、R は recovered (回復者) を意味する^{*1}。この S は感受性保持者と素人には分かり難い奇妙な名前になっているが、以下では、まだ感染していない健常者を意味するものとする。

このモデル方程式は、時刻 t における各変数の値 (人数) を、それぞれ、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ としたとき、

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

と表される。この第 1 式は、健常者数 $S(t)$ は、健常者数と感染者数の積に比例して減少することを意味し、その比例係数を β とする。また、第 2 式は、感染者数 $I(t)$ は、健常者が感染者に変化した分だけ増加し、感染者が回復した分だけ減少する。このときの感染者が回復するときの係数を γ とする。最後の第 3 式は、回復者数 $R(t)$ は感染者が回復するにしたがい増加することを表す。以下では、後の計算がしやすいように、変数 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ を無次元化する。すなわち、 $S(t)$ の初期値 $S(0)$ を用いて、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, β を

$$S(t)/S(0) \rightarrow S(t), \quad I(t)/S(0) \rightarrow I(t), \quad R(t)/S(0) \rightarrow R(t), \quad \beta S(0) \rightarrow \beta\tag{1.2}$$

と、改めておき直す。これで、 $S(t)$ の初期値 $S(0)$ は 1 に、また、 β と γ は同じ次元で、時間の逆数となる。このときの β を感染率、 γ を回復率という。このような操作をしても式としての形は元のままであることに注

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

^{*1} この R は ウイルスを移さなくなった人という意味で、厳密な言い方をすると、回復者のほかに死亡した人も含む。

意する.

この SIR モデル方程式からすぐにわかることは、これら方程式の辺々を加えると

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0, \quad \text{すなわち,} \quad S + I + R = \text{一定} \quad (1.3)$$

となることである. したがって, 3 個ある変数のうちいずれか 2 個が分かればよい.

2 方程式の解法

解析的解法

この方程式は 3 変数, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ に関するものであるが, 実際は, 最初の 2 式で $S(t)$, $I(t)$ を求め, $I(t)$ が求まると, 3 番目の式から $R(t)$ が求まる. ここでは, これら方程式を, でき得るかぎり, 解析的に解くことを目標とする.

初めの 2 式を, それぞれ, 変数分離形にすると,

$$\frac{dS}{S} = -\beta I dt, \quad \frac{dI}{I} = (\beta S - \gamma) dt \quad (2.1)$$

となるので, これらを積分し,

$$\log S = -\beta \int I dt, \quad \log I = \int (\beta S - \gamma) dt \quad (2.2)$$

となる. この第 2 式から I を求め, 第 1 式に代入すると,

$$\log S = -\beta \int e^{\int (\beta S - \gamma) dt} dt \quad (2.3)$$

となって, S だけの方程式となる. この式の両辺を t で微分すると,

$$\frac{\dot{S}}{S} = -\beta e^{\int (\beta S - \gamma) dt} \quad (2.4)$$

となる. ただし, これ以降, dS/dt を Newton 流の $\dot{S}$ と記す. これを変形して,

$$\log \left(\frac{\dot{S}}{-\beta S} \right) = \int (\beta S - \gamma) dt \quad (2.5)$$

となり, さらに t で微分すると,

$$\frac{S\ddot{S} - \dot{S}^2}{S\dot{S}} = \beta S - \gamma \quad (2.6)$$

となる. ここで,

$$P = \dot{S} \quad (2.7)$$

とおくことにし,

$$\ddot{S} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dt} \frac{dP}{dS} = P \frac{dP}{dS} \quad (2.8)$$

となるので, (2.6) 式は

$$\frac{dP}{dS} - \frac{1}{S}P = \beta S - \gamma \quad (2.9)$$

となる。これは P に関する非同次線形の 1 階微分方程式である。これを解くために、まず、同次部分の

$$\frac{dP}{dS} - \frac{1}{S}P = 0 \quad (2.10)$$

を解くと、 C を積分定数として、

$$P = CS \quad (2.11)$$

となる。あとは定数変化法にしたいが、 C を改めて S の変数とし、(2.9) 式に代入すると、

$$\frac{dC}{dS} = \beta - \frac{\gamma}{S} \quad (2.12)$$

となり、これを積分すると、 D を積分定数として、

$$C = \beta S - \gamma \log S + D \quad (2.13)$$

となるので、(2.11), (2.7) 式から

$$\dot{S} = (\beta S - \gamma \log S + D)S \quad (2.14)$$

と求められる。ここで定数 D を決めるため、初期条件

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad S(0) = 1, \quad \dot{S}(0) = 0 \quad (2.15)$$

を用いると $D = -\beta$ となるので、(2.14) 式は

$$\dot{S} = F(S), \quad \text{ただし,} \quad F(S) \equiv [\beta(S - 1) - \gamma \log S]S \quad (2.16)$$

となる。これをさらに変数分離し、定積分の形にすると、

$$t = \int_1^S \frac{dS'}{F(S')} \quad (2.17)$$

となるが、この積分を解析的に実行することは、ほぼ不可能であろう。ここで注意すべきことは、時間が経つにしたがい感染者数 I が増え、健常者数 S が、初めの 1 からしだいに減っていくので、 $F(S)$ の値が負になるところが実際に適用される範囲となることである。それはこの積分形からも分かるとおり、 $S < 1$ で $t > 0$ であるためには、 $F(S) < 0$ でなければならない。この関数 $F(S)$ は $S = 1$ のところで、

$$F(1) = 0, \quad F'(1) = \beta - \gamma \quad (2.18)$$

となるので、 $S < 1$ の側、 $S = 1$ の近傍で $F(S) < 0$ となるためには、条件

$$\beta > \gamma \quad (2.19)$$

が必要になる。すなわち、感染率 β が回復率 γ より大でなければならない。この条件のもとに関数 $F(S)$ のグラフを図示すると、以下の図 1 のようになる。

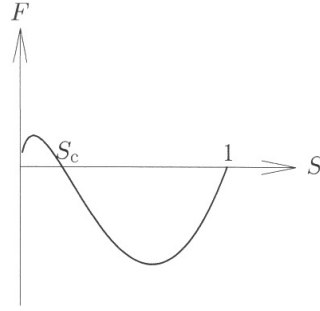


図1 $F(S)$ のグラフ, $\beta = 0.2/\text{day}$, $\gamma = 0.1/\text{day}$ の場合

この図1からわかるように, $S = 1$ で $F(S) = 0$ となるが, そのほかに, $0 < S < 1$ の範囲に, もう1個のゼロ点が存在する. これを S_c とすると, S のとり得る範囲は, $S_c < S < 1$ となり, この範囲で $F(s)$ は負の値をとる. 逆の言い方をすると, S の値は, この S_c よりも小さくはならないということである. なお, この S_c を求めるための方程式 $F(S) = 0$ は超越方程式になるので, 厳密解は求められない.

この図1では, 回復にかかる日数を10日として, $1/\gamma = 10 \text{ day}$, すなわち, $\gamma = 0.1/\text{day}$ とし, β の値を, γ の値の2倍, すなわち, $\beta = 0.2/\text{day}$ とすることにした.

数値的試み

先に述べたように, (2.17) 式の積分を解析的に実行することは不可能と考えられるので, 以下では, 数値的に計算してみよう. 初めに, 健常者数の $S(t)$ を数値的に求めるには, (2.16) 式における $\dot{S}$ を $\Delta S/\Delta t$ として,

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{F(S)} \quad (2.20)$$

としておく. ここで, ΔS を1の1000分の1; $\Delta S = 0.001$ とし, Δt を求める. このとき, S の初期値を1としてしまうと, この式右辺は発散してしまうので, S の初期値を $1 - \Delta S$ とし, $(\Delta t)_1$ を求める. これで, $(S, t) = (1 - \Delta S, (\Delta t)_1)$ の点が決まる. つぎに, S の値を, $1 - 2\Delta S$ とし, $(\Delta t)_2$ を求め, これで, $(S, t) = (1 - 2\Delta S, (\Delta t)_1 + (\Delta t)_2)$ の点が決まる. 以下同様にして, 点 $(S, t) = (1 - n\Delta S, \sum_{k=1}^n (\Delta t)_k)$ を求めて線で結んでいくと, 図2に示す解曲線が求められる. この図から, $S(t)$ の値は, $t \rightarrow \infty$ で, S_c の値に収束していくのが分かる.

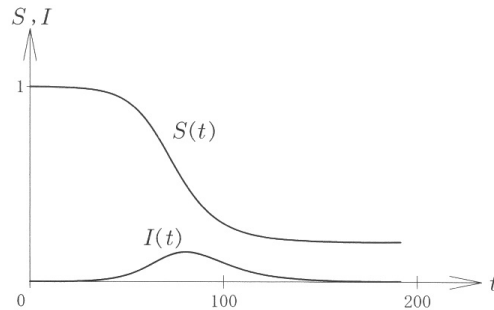


図2 $S(t), I(t)$ のグラフ, $\beta = 0.2/\text{day}$, $\gamma = 0.1/\text{day}$ の場合

つぎに, 感染者数 $I(t)$ を求める. そのためには, (2.16) 式の $\dot{S}$ を, (1.1) の第1式に代入して, $I(t)$ を求め

ると,

$$I(t) = -\frac{F(S(t))}{\beta S(t)} = 1 - S(t) + \frac{\gamma}{\beta} \log S(t) \quad (2.21)$$

と $S(t)$ を用いて表わされる. $S(t)$ は, すでに数値的に求まっているので, $I(t)$ も求まったことになる. $S(t)$ の初期値は 1 なので, これから $I(t)$ の初期値はゼロであり, また, $S(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で S_c となるが, この式は S_c を求める式 $F(S) = 0$ と等価になるので, $I(t)$ は $t \rightarrow \infty$ でゼロに収束する. 図 2 に, これら $S(t)$, $I(t)$ のグラフを示す. パラメータ β , γ は前と同じく, $\beta = 0.2/\text{day}$, $\gamma = 0.1/\text{day}$ とした.

曲線 $I(t)$ について

曲線 $I(t)$ は図 2 で見るように山形の曲線になる. この曲線の最大になるところは, (1.1) の第 2 式で $dI/dt = 0$ として,

$$S(t) = \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.22)$$

となるところで, その最大値は, (2.21) 式から,

$$I_{\max} = 1 - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \log \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \quad (2.23)$$

と γ/β のみの関数となる. これから, β が γ に比べ大きいほど, $I_{\max}$ は 1 に近くなり, 逆に, β が γ に近づくほど, $I_{\max}$ はゼロに近づく.

このように, $I_{\max}$ の値は, γ/β の値に依存して決まるが, この最大値が大きいほど幅は狭くなるので, その積分値はそれほど変わらないのではと期待される. 実際, $I(t)$ の t に関する 0 から ∞ までの積分値は, (2.2) の第 1 式から,

$$\int_0^\infty I(t) dt = -\frac{1}{\beta} \log S_c = \frac{1}{\gamma} (1 - S_c) \quad (2.24)$$

となる. S_c は (2.16) で定義した $F(S)$ のゼロ点で, この最後の式は $F(S_c) = 0$ を用いて変形したものである. これから, この積分値は最終的なトータルの感染者数 $1 - S_c$ を γ で割ったものになる. また, この S_c は γ/β で決まる量であるので, 積分値は γ , β の両方に依存して決まる量となり, 簡単には一定値とは言えない.

3 おわりに

これまで, SIR モデルについては, 数値的に解を求めたものは, たくさん発表されているので, ここでは, でき得るかぎり, 解析的に解くことを主眼とした. その結果, $S(t)$ の $t \rightarrow \infty$ での収束値 S_c の存在, また, $I(t)$ の最大値の式などを得たことが, ここでの大きな成果である. もちろん, ここでの解析がそのまま現実の世界に当てはまるとは考えていないが, おおまかな傾向としては当てはまることがあるだろう.

インターネットで調べてみると, この SIR モデルをさらに拡張したものがいくつか存在するようである. 例えば, 感染してもすぐには他人に移さない潜伏期というものがあるので, これを考慮したモデルなどが存在する. いずれ, これらのモデルについても考慮してみる価値があるだろう.

それにつけても, 今回の新型コロナ・ウイルスの感染者数は, 3 月下旬になって, ヨーロッパ, アメリカで莫大的に増加してきた. このままいくと人類は滅びてしまうのではと思えるほどの勢いである. しかし, ここでの解析のとおりとすると, どんなに感染が広がっても, S_c だけの人は感染することなく, 生き延びることができ

るので、人類が減びるなどという大げさなことまでは考えなくともよいはずである。こんな騒ぎは、早く終息してくれるよう願わずにはいられない。

[謝辞 1]

私が、この SIR モデルを解析してみようと思い立ったのは、小方厚氏によるブログの記事、「新型コロナウイルス対策の目的」(3月13日)、「Mathematica によるウイルス感染シミュレーション」(3月14日) を読んだせいである。私は、この SIR モデルのことをまったく知らなかったの、これを知らせてくれたという点で、小方厚氏に感謝します。興味ある方は、下記の url でご覧ください。

<https://blog.goo.ne.jp/ablerail1007/e/7e8f99494b597eaa1d714c131a9e2f28>

<https://blog.goo.ne.jp/ablerail1007/e/b3e13319f56c7e36eec51de0f82e3584>

[謝辞 2]

例によって、いつもコメントをいただいている京都大学名誉教授の中西襄先生にも見ていただきました。今回の (2.17) 式から (2.19) 式にかけての部分は、先生のご意見にしたがい書き換えたものです。また、先生からいただいたコメントには、(1.1) の第 3 式、つまり $R(t)$ に関する式は蛇足のようなもので、 R は回復者のみならず非回復者、すなわち死亡者をも含んでいるのであまり意味がない、というもので、そのとおりだと思います。もう一つ、先生からいただいたご意見で、 $\beta < \gamma$ の場合はどうなっているのかというのがあります。これは現実にはあり得る話であって、SIR モデルをそのまま適用すると $S(t) \equiv 1$ という解が安定解として存在する。これによしとするのか、あるいは、SIR モデルがその場合を想定していないのか、そこのところはよく分かりません。また、問題が残ってしまいました。

いつも適切なご意見をいただく先生に感謝します。

(編集者の追記)

世戸さんから今回いただいた、この「ウイルス感染における SIR モデル」の論文は時宜を得たものであるが、微分方程式でいろいろな自然と社会の数理を解明した本として日本語で書かれた参考文献として、つぎのものをあげておきたい。

1. 佐藤總夫、『自然の数理と社会の数理』 I (日本評論社, 1984)
2. 佐藤總夫、『自然の数理と社会の数理』 II (日本評論社, 1987)

これは 3 巻の本として予定されていたものらしいが、著者が死亡されたために第 3 巻は実現しなかったらしい。佐藤總夫さんは数学者であるが、編集者(世戸, 矢野)よりも 7~8 歳年上の方である。

第 2 巻の 7-9 章に伝染病とかインフルエンザ等についての取り扱いがある。ちょっと取り扱いが異なっているかもしれないが。

この論文の著者の世戸さんの多くの論文も、佐藤さんの著書でとりあげられた微分方程式で自然や社会の数理を解きほぐすという点で共通点がある。佐藤さんは従来の大学の数学教育についても批判的であったともとれる書きぶりも見られるので、そういう点では編集者(矢野)の立場とも重なるところがある。

微分方程式と三角関数

矢野 忠^{*1}

Differential Equations and Trigonometric Functions

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

『ピタゴラスからオイラーまで』 [1] を読んでいたら,

$$e^{ix} = f(x) + ig(x) \quad (1.1)$$

において, この式の両辺を x で微分すると

$$ie^{ix} = f'(x) + ig'(x) \quad (1.2)$$

が得られ, この式の両辺に $-i$ をかければ

$$e^{ix} = g'(x) - if'(x) \quad (1.3)$$

が得られる. (1.1) と (1.3) から

$$g'(x) - if'(x) = f(x) + ig(x) \quad (1.4)$$

が成り立つ. すなわち

$$f'(x) = -g(x), \quad (1.5)$$

$$g'(x) = f(x) \quad (1.6)$$

が成り立つ. これは $f(x), g(x)$ に関する連立微分方程式である.

(1.1) 式で $x = 0$ を代入すると $e^0 = f(0) + ig(0)$ であり, $e^0 = 1$ であることから

$$f(0) = 1, \quad (1.7)$$

$$g(0) = 0 \quad (1.8)$$

という微分方程式 (1.5), (1.6) の初期条件も得られる.

よく知られているように, 関数 $f(x), g(x)$ はそれぞれ $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ であるが, そのことを知らないことにして三角関数のいくつかの性質を導くことができる.

そのうちで,

1. $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$ の導出
2. 微分方程式 (1.5), (1.6) の解の一意性
3. 三角関数の加法定理の導出
4. $f(-x) = f(x), g(x) = -g(x)$ の導出
5. $f(x)$ と $g(x)$ の周期性

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

の5つの性質を微分方程式とその初期条件から導いてみたい。

『ピタゴラスからオイラーまで』には他の三角関数の性質の微分方程式からの導出も述べられているのだが、そこにはあまり問題がないと思われるのでここではとりあげない。 $f(x)$ と $g(x)$ の周期性の記述には問題がないのだが、重要な三角関数の性質であるので補足のためにとりあげた。

前に挙げた 1-5 の性質の中の 2-4 を導くための連立方程式の導出がちょっと問題だと私には思われたので、そこを考えてみたい。

2 節では $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$ の導出について述べる。3 節では微分方程式 (1.5), (1.6) の解の一意性を述べ、4 節では三角関数の加法定理の導出を述べ、5 節では $f(-x) = f(x), g(x) = -g(x)$ の導出を述べる。さらに、6 節では $f(x)$ と $g(x)$ の周期性について述べる。7 節はまとめである。

付録 1 では (3.15) と (3.19) の証明をする。付録 2 では (3.24) と (3.25) の解法を示し、付録 3 では (4.3) と (4.4) の証明をする。付録 4 では (4.8) と (4.9) の解法を示し、付録 5 では (5.19) と (5.20) の解法を示す。

このエッセイでは三角関数 $\cos x, \sin x$ のしたがう微分方程式 (1.5), (1.6) の解の一意性を示したので、参考までに関心をもった e^x の一意性を [2] にしたがって付録 6 に示しておく。

2 $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$ の証明

この 2 節では $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$ の証明をしよう。これはまったく難しくない。関数 $f(x)$ と $g(x)$ を変数 x を省いて書こう。以下ではプライム ' は変数 x での微分を示している。

$$\begin{aligned}(f^2 + g^2)' &= 2ff' + 2gg' \\ &= 2f(-g) + 2gf \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

したがって

$$f^2 + g^2 = c, \quad c = \text{一定}\tag{2.2}$$

である。この定数 c を初期条件から決めればよい。

$$\begin{aligned}c &= [f(0)]^2 + [g(0)]^2 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}\tag{2.3}$$

すなわち $c = 1$ であることがわかったから、

$$f^2 + g^2 = 1\tag{2.4}$$

が証明された。

3 (1.5), (1.6) の解の一意性の証明

$f(x)$ と $g(x)$ とを求める微分方程式は 1 節で (1.5), (1.6) であることを述べた。また、その初期条件は (1.7), (1.8) で与えられている。このときの解がただ一つに限られることを証明しよう。

この f と g と同じ微分方程式と初期条件をみたす解 $X(x), Y(x)$ が $f(x), g(x)$ 以外にあるとしよう。すなわち

$$X'(x) = -Y(x)\tag{3.1}$$

$$Y'(x) = X(x)\tag{3.2}$$

が成り立ち、また初期条件

$$X(0) = 1 \quad (3.3)$$

$$Y(0) = 0 \quad (3.4)$$

をみたすとする．この X, Y についての連立方程式を求めたい．

関数は $f(x), g(x)$ と $X(x), Y(x)$ の4つである．もちろん， $f(x), g(x)$ は既知の関数であり， $X(x), Y(x)$ は未知の関数である．

このとき，これらの4つの関数からできる積の関数は

$$fX, gY, fY, gX \quad (3.5)$$

の4つが考えられる．これらの積の関数を用いてつくることのできる1次結合は4つの定数 a, b, c, d を用いれば，つぎのような3つの可能性が考えられる．

$$a(fX) + b(gY) \quad (3.6)$$

$$c(gX) + d(fY) \quad (3.7)$$

$$a(fX) + b(gX) \quad (3.8)$$

$$c(fY) + d(gY) \quad (3.9)$$

$$a(fX) + b(fY) \quad (3.10)$$

$$c(gX) + d(gY) \quad (3.11)$$

ところで微分方程式は関数 $f(x), g(x)$ の連立微分方程式であるが，2番目と3番目の可能性は f, g または X, Y が結合されていないので，多分採用できないであろう．1番目の可能性はその条件をみたしている．

それで $[a(fX) + b(gY)]$ と $[c(gX) + d(fY)]$ の x での微分が0であるという条件を課すことにしよう．これによって定数 a, b および c, d の間に関係を導き出せるのではないかと期待される．これは $a(fX) + b(gY)$ と $c(gX) + d(fY)$ が定数になることを要請することになる．

まず $a(fX) + b(gY)$ から

$$\begin{aligned} [a(fX) + b(gY)]' &= a(f'X + fX') + b(g'Y + gY') \\ &= a(-gX - fY) + b(fY + gX) \\ &= (b - a)(gX + fY) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

が得られる．これから

$$b = a \quad (3.13)$$

となり，したがって

$$a(fX) + b(gY) = a(fX + gY) \quad (3.14)$$

が得られて，ここで $a = 0$ であるとする，式が無意味となるから， $a \neq 0$ とすると

$$(fX + gY)' = 0 \quad (3.15)$$

となることを示すことができる *3．

*3 付録1でこのことを示す．

つぎに $c(gX) + d(fY)$ から

$$\begin{aligned}[c(gX) + d(fY)]' &= c(g'X + gX') + d(f'Y + fY') \\ &= c(fX - gY) + d(-gY + fX) \\ &= (c + d)(fX - gY) \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.16}$$

となる。これから

$$d = -c\tag{3.17}$$

が得られる。したがって

$$c(gX) + d(fY) = c(gX - fY)\tag{3.18}$$

となり、ここで $c = 0$ とすると、式が無意味となるので、 $c \neq 0$ とすると

$$(gX - fY)' = 0\tag{3.19}$$

となることを示すことができる *4。

$(fX + gY)' = 0, (gX - fY)' = 0$ は $fX + gY, gX - fY$ がそれぞれ定数であることを示している。
すなわち

$$fX + gY = k, \quad k = \text{一定}\tag{3.20}$$

$$gX - fY = K, \quad K = \text{一定}\tag{3.21}$$

が得られる。

初期条件を用いてこの定数 k, K を求めれば、

$$\begin{aligned}k &= f(0)X(0) + g(0)Y(0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}K &= g(0)X(0) - f(0)Y(0) \\ &= 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.23}$$

定数の k, K とが求まったから、連立方程式

$$fX + gY = 1\tag{3.24}$$

$$gX - fY = 0\tag{3.25}$$

が得られる。

X, Y は未知の関数であったから、この X, Y について解けば、これは Cramer の公式を用いて

$$X = f\tag{3.26}$$

$$Y = g\tag{3.27}$$

が求められる。もちろん、ここで $f^2 + g^2 = 1$ であることが使われている。

これから連立微分方程式 (1.5), (1.6) の解は一意的であり、解はただ一つであることがわかった。

*4 付録 1 でこのことを示す。

4 加法定理の導出

この4節では、加法定理を導出をしよう [1]. まず $X(x) = f(x+y), Y(x) = g(x+y)$ とおこう.
 $f(x)$ は $\cos x$ に対応しており, $g(x)$ は $\sin x$ に対応しているから

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad (4.1)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \quad (4.2)$$

が成り立つはずである.

まずはじめに

$$X' = -Y, \quad (4.3)$$

$$Y' = X \quad (4.4)$$

が成り立つことを示すことができる *5. ここで X', Y' の ' は x についての微分を表す. y は定数と考える.

$f(x), g(x)$ および X, Y は2節で示したと同じ微分方程式をみたすから, $a(fX) + b(gY)$ と $c(gX) + d(fY)$ についての議論は3節とまったく同じである. だからこの詳細はくりかえさない.

X, Y についての連立方程式

$$fX + gY = k, \quad k = \text{一定} \quad (4.5)$$

$$gX - fY = K, \quad K = \text{一定} \quad (4.6)$$

が得られるところまでは同じである.

だが, 定数 k, K を求めるところはちがってくる.

$$\begin{aligned} k &= f(0)X(0) + g(0)Y(0) \\ &= 1 \cdot f(y) + 0 \cdot g(y) \\ &= f(y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} K &= g(0)X(0) - f(0)Y(0) \\ &= 0 \cdot f(y) - 1 \cdot g(y) \\ &= -g(y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる.

定数の k, K とが求まったから, 連立方程式

$$fX + gY = f(y) \quad (4.9)$$

$$gX - fY = -g(y) \quad (4.10)$$

が得られる *6.

この連立方程式を X, Y について解けば

$$X = f(x)f(y) - g(x)g(y) \quad (4.11)$$

$$Y = f(x)g(y) + g(x)f(y) \quad (4.12)$$

が求められる. これは $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ とおけば, これらが加法定理であることがわかる.

*5 付録2に示す.

*6 付録3にこの解法を示す.

5 $f(-x) = f(x), g(x) = -g(x)$ の導出

この5節では $f(-x) = f(x), g(x) = -g(x)$ の導出をしよう.

未知関数を $X(x) = f(-x), Y(x) = g(-x)$ とおく. この未知関数 $X(x), Y(x)$ に対する連立方程式を求める. その前に $X(x)$ と $Y(x)$ との関係をまず求めたい. そのために $X(x)$ と $Y(x)$ を x で微分してみよう. ここで $u = -x$ とおくと $u' = -1$ であるから

$$\begin{aligned} X'(x) &= f'(u)u' \\ &= -f'(u) \\ &= -(-g(u)) \\ &= g(u) \\ &= Y(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} Y'(x) &= g'(u)u' \\ &= -g'(u) \\ &= -f(u) \\ &= -X(x) \end{aligned} \tag{5.2}$$

この X, Y についての微分方程式と $f(x), g(x)$ についての微分方程式とを用いて

$$a(fX) + b(gY) \tag{5.3}$$

$$c(gX) + d(fY) \tag{5.4}$$

の a, b と c, d との関係を求めよう.

これらは $a(fX) + b(gY)$ と $c(gX) + d(fY)$ の微分が0となるという条件から求める.

まず $a(fX) + b(gY)$ を x で微分すれば,

$$\begin{aligned} [a(fX) + b(gY)]' &= a(f'X + fX') + b(g'Y + gY') \\ &= a(-gX + fY) + b(fY - gX) \\ &= (a + b)(fY - gX) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

これから

$$a + b = 0 \tag{5.6}$$

が得られ,

$$b = -a \tag{5.7}$$

となる.

したがって

$$a(fX) + b(gY) = a(fX - gY), \quad a \neq 0 \tag{5.8}$$

が得られる.

つぎに $c(gX) + d(fY)$ を x で微分すれば,

$$\begin{aligned} [c(gX) + d(fY)]' &= c(g'X + gX') + d(f'Y + fY') \\ &= c(fX + gY) + d(-gY - fX) \\ &= (c - d)(fX + gY) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

これから

$$c - d = 0 \quad (5.10)$$

が得られ,

$$d = c \quad (5.11)$$

となる.

したがって

$$c(gX) + d(fY) = c(gX + fY), \quad c \neq 0 \quad (5.12)$$

が得られる.

$(fX - gY), (gX + fY)$ を微分すれば, まず

$$\begin{aligned} (fX - gY)' &= f'X + fX' - g'Y - gY' \\ &= -gX + fY - fY + gX \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

であるから

$$fX - gY = k, \quad k = \text{一定} \quad (5.14)$$

つぎに

$$\begin{aligned} (gX + fY)' &= g'X + gX' + f'Y + fY' \\ &= fX + gY - gY - fX \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

であるから

$$gX + fY = K, \quad K = \text{一定} \quad (5.16)$$

初期条件から定数 k, K を求めよう.

$$\begin{aligned} k &= f(0)X(0) - g(0)Y(0) \\ &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} K &= g(0)X(0) + f(0)Y(0) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

これらの定数から, 連立方程式

$$fX - gY = 1 \quad (5.19)$$

$$gX + fY = 0 \quad (5.20)$$

が得られる *7.

この連立方程式を X, Y について解けば,

$$X = f \quad (5.21)$$

$$Y = -g \quad (5.22)$$

*7 付録 4 にこの解法を示す.

が求まる.

ここで $X(x) = f(-x), Y(x) = g(-x)$ であったから

$$f(-x) = f(x) \quad (5.23)$$

$$g(-x) = -g(x) \quad (5.24)$$

であることがわかった.

すなわち, $f(x)$ は偶関数であること, また $g(x)$ は奇関数であることが示された. これは $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ であることを示している.

以上は私が『ピタゴラスからオイラーまで』を読んで気になったところである. ついでに坂江先生にしたがって, 三角関数の重要な性質である, $f(x), g(x)$ の周期性について次の 6 節で述べる.

6 $f(x), g(x)$ の周期性

この 6 節では三角関数の重要な性質である, $f(x), g(x)$ の周期性について述べよう. これについては私自身の工夫はないが, やはり周期性についての言及が必要であると思ったのでつけ加えた.

$f(x), g(x)$ の $x = 0$ での初期値は $f(0) = 1, g(0) = 0$ であった. いま区間 I ($x \geq 0$) で $f(x) = 0, g(x) = 1$ となる最小の x の値を $\frac{\pi}{2}$ としよう. π はもちろん円周率である. すなわち

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (6.1)$$

とする.

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ においては $f(x) = 0, g(x) = 1$ となる x は存在しない. 加法定理を用いると

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(x)g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -g(x) \quad (6.2)$$

$$g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)g\left(\frac{\pi}{2}\right) + g(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(x) \quad (6.3)$$

また

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= f\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} g(x + \pi) &= g\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -g(x) \end{aligned} \quad (6.5)$$

であるから, まず (6.4), (6.5) で $x = 0$ とおけば

$$f(\pi) = -f(0) = -1 \quad (6.6)$$

$$g(\pi) = -g(0) = 0 \quad (6.7)$$

つぎに (6.4), (6.5) で $x = \frac{\pi}{2}$ とおけば

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (6.8)$$

$$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad (6.9)$$

さらに

$$\begin{aligned}
 f(x+2\pi) &= f(x+\pi+\pi) \\
 &= -f(x+\pi) \\
 &= -[-f(x)] \\
 &= f(x)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
 g(x+2\pi) &= g(x+\pi+\pi) \\
 &= -g(x+\pi) \\
 &= -[-g(x)] \\
 &= g(x)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

これで, (6.10), (6.11) で $x = 0$ とおけば,

$$f(2\pi) = f(0) = 1 \tag{6.12}$$

$$g(2\pi) = g(0) = 0 \tag{6.13}$$

これらの結果から $f(x), g(x)$ がともに周期 2π の周期関数であり, $f(x)$ が偶関数, $g(x)$ が奇関数であることを考えると下表に示すような関数の増減表が得られる.

x		$-\frac{\pi}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π		
$f' = -g$	+	1	+	0	-	-1	-	0	+	1	+	0	-
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$
$g' = f$	-	0	+	1	+	0	-	-1	-	0	+	1	+
g	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$

7 おわりに

『ピタゴラスからオイラーまで』を読んで気になったところを中心にして, それを敷衍するように述べてみた.

また [1] には

1. $f(x) = 0, g(x) = 1$ となる x の存在の証明
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 1$

についても述べられている.

また, 1 次連立方程式を中学生のように加減法で解いているが, このエッセイでは Cramer の公式を用いた. この公式を知らない人のために付録 2 のはじめのところに公式を示した.

微分方程式の解の存在とか一意性についてはいままでほとんど関心がなかったが, その定理の説明をはじめて読んでみるという経験をもった. もっともそれがよくわかったというところまでにはまだいたっていない.

8 付録 1 (3.15) と (3.19) の導出

$$\begin{aligned}
 (fX + gY)' &= f'X + fX' + g'Y + gY' \\
 &= -gX - fY + fY + gX \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
(gX - fY)' &= g'X + gX' - f'Y - fY' \\
&= fX - gY + gY - fX \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

9 付録 2 (3.26) と (3.27) の導出

まず 2 元 1 次連立方程式の Cramer の公式を与えておく.

a, b, c, d, p, q を定数とし, x, y を未知数とすると,

$$ax + by = p \tag{9.1}$$

$$cx + dy = q \tag{9.2}$$

の 2 元連立 1 次方程式があるとき, x, y の解はつぎのように与えられる.

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} \tag{9.3}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} \tag{9.4}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{9.5}$$

である. ここで, 2 次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{9.6}$$

である.

この Cramer の公式を用いれば, (3.24) と (3.25) の解は

$$X = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & g \\ 0 & -f \end{vmatrix} = \frac{-f}{-(f^2 + g^2)} = f \tag{3.26}$$

$$Y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f & 1 \\ g & 0 \end{vmatrix} = \frac{-g}{-(f^2 + g^2)} = g \tag{3.27}$$

$$D = \begin{vmatrix} f & g \\ g & -f \end{vmatrix} = -(f^2 + g^2) = -1 \tag{9.7}$$

となる.

10 付録 3 (4.3) と (4.4) の導出

$X(x) = f(x+y), Y(x) = g(x+y)$ とするとき, いま $u = x+y$ とおけば, $u' = 1$ となる. ここでプライム ($\prime$) は x についての微分を表す. したがって

$$\begin{aligned}
X' &= f'(u)u' \\
&= -g(u) \\
&= -Y
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
Y' &= g'(u)u' \\
&= f(u) \\
&= X
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる. これから (4.3) と (4.4) とが成り立つことが示された.

11 付録 4 (4.11) と (4.12) の導出

$$X = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f(y) & g \\ -g(y) & -f \end{vmatrix} = \frac{-(ff(y) - gg(y))}{-(f^2 + g^2)} = f(x)f(y) - g(x)g(y) \quad (4.11)$$

$$Y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f & f(y) \\ g & -g(y) \end{vmatrix} = \frac{-(fg(y) + gg(y))}{-(f^2 + g^2)} = g(x)f(y) + f(x)g(y) \quad (4.12)$$

$$D = \begin{vmatrix} f & g \\ g & -f \end{vmatrix} = -(f^2 + g^2) = 1 \quad (11.1)$$

これで (4.11), (4.12) が導出された.

12 付録 5 (5.21) と (5.22) の導出

$$X = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -g \\ 0 & f \end{vmatrix} = \frac{f}{f^2 + g^2} = f \quad (5.21)$$

$$Y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f & 1 \\ g & 0 \end{vmatrix} = \frac{-g}{f^2 + g^2} = -g \quad (5.22)$$

$$D = \begin{vmatrix} f & -g \\ g & f \end{vmatrix} = f^2 + g^2 = 1 \quad (12.1)$$

13 付録 6 指数関数 e^x の一意性

この証明は [2] に述べられているものである.

関数 $f(x)$ が

$$f'(x) = f(x) \quad (13.1)$$

をみたすとき, 適当な定数 C をとると

$$f(x) = Ce^x \quad (13.2)$$

と表される.

(証明)

$$G(x) = \frac{f(x)}{e^x} \quad (13.3)$$

という関数を考える. この $G(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

したがって $G(x) = C$ となる. これから (13.3) により

$$f(x) = Ce^x \quad (13.5)$$

が得られる.

微分方程式の解は定数 C だけの不定性があるが, これは初期条件を用いて C の値を決めてやれば, 解は一意的になる. たとえば, $x = 0$ のとき, $f(x) = 1$ と初期条件を与えると

$$C = f(0) = 1 \quad (13.6)$$

となり,

$$f(x) = e^x \quad (13.7)$$

となる.

(2020.3.25)

参考文献

- [1] 坂江 正, 『ピタゴラスからオイラーまで』(海鳴社, 2019) 414-422
- [2] 志賀浩二, 『中高一貫数学コース』数学 3 (岩波書店, 2003) 118-119

(追加) このエッセイを書いた後で編集委員の世戸憲治氏からつぎのようなコメントをいただいた. コメント有難うございました.

(コメント) 初めに読んだときに, (3.5) ~ (3.14) までは何のために何をやっているのか, さっぱり理解できませんでした. 何度か読み返してようやく, 理解できたのですが, この部分は何とかなりませんか. (3.15), (3.19) 式を出したいためのようですが, この式は, (3.5) ~ (3.14) がなくても (1.5), (1.6) および (3.1), (3.2) から, 付録 1 にあるように, 直接出せるものなので, (3.5) ~ (3.14) はなくてもかまわないはずです. これは, 何故, このようなものを考えるかを説明するための部分かと思うのですが, もしそうなら, もっと分かりやすく書く方法はないのかなと思います. (3.16) ~ (3.18) も同じことが言えます.

(答) 元の文献の『ピタゴラスからオイラーまで』では実は世戸さんのご指摘のように (3.15), (3.19) から出発しています. しかし, 私はその出発点となる方程式をどうやって導いたかがわからないといけないのではないかなと思って, その部分を書き加えてみたつもりです. もっともきちんと合理的な根拠を与えることができたかどうかは自分でも疑問に思っています.

仰せのようにもっとわかりやすい書き方があるかとは思いますが, すぐには思いつかないので, せっかくアドバイスをいただいたのですが, このままとさせていただきます.

編集後記

初めて、編集後記を書く世戸憲治です。と改まってしまうと何を書いてよいのか分からなくなってしまう。ここは、気どらずに思うままに書いてみます。これまで、私は「数学・物理通信」にほとんど毎号ごとに何かを書いてきました。これまでに書いたものは今回のものを含め、81 編になります。編集長の矢野忠氏について多くなりました。自分でも驚くくらいです。100 編までは是が非でも頑張るつもりです。ところで、この「数学・物理通信」も最近を書く人が限られてきて、少し、マンネリ化してきた感がぬぐえません。ぜひ、新しい人の投稿をお待ちしています。

ところで、と言ったついでですが、右を向いても左を見ても、昨今のコロナ騒ぎはすさまじいものがあります。私の子供時代にも伝染病はたくさんありました。不治の病と言われた結核をはじめ、赤痢や疫痢、日本脳炎といったものが流行っていました。私の父や歳の多い従兄が結核にかかり苦しんでいたことを思い出します。小学生のときは、私と同じクラスの人が日本脳炎で亡くなったりしました。また、私自身、若いときに結核にかかりましたが、このときはすでに、抗生物質ができていましたので治すことができました。でも、今回のコロナ・ウイルスほどひどいものはありません。「パンデミック (pandemic)」や「オーバーシュート (overshoot)」といった言葉を初めて知りました。これほどに感染者が増えてくると、もう、他人事とは言えなくなってしまう。このコロナ騒ぎに便乗して、私も、ちょっとした小論を書いてみました。これがそのまま、現実のものに当てはまるとは思っていませんが、何らかの真実は掴んでいると思いたいところです。早くワクチンができて、この騒ぎが終息することを願っています。

世戸憲治