

数学・物理通信

10 卷 3 号 2020 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 6 月 4 日

目次 (Contents)

1. Radon 変換と CT スキャナー (1)

世戸 憲治 2

2. 粒子のスピン

秋葉敏男 10

3. 1m の高さからどこまで見渡せるか

矢野 忠 13

4. ピタゴラスの定理

矢野 忠 17

5. 編集後記

矢野 忠 20

1. Radon Transform and CT Scanner (1)

Kenji SETO 2

2. Spin of Particles

Toshio AKIBA 10

3. How far can we see from the height of 1m ?

Tadashi YANO 13

4. Pythagorean Theorem

Tadashi YANO 17

5. Editorial Comments

Tadashi YANO 20

Radon 変換と CT スキャナー (1)

世戸 憲治 *

Radon Transform and CT Scanner (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

Radon と言っても、放射性元素のラドンのことではない。これは、1917年に Radon 変換を提唱したオーストリアの数学者 Johann Radon(1887-1956) のことである。彼が証明したことを言葉で表すと、「平面上の関数の任意の点の値は、その平面上のすべての線分上での線積分の値から一意的に再現することができる。」というものである。言葉で言ってしまうと理解に苦しむが、この変換は、CT (Computerized Tomography コンピューター断層撮影) スキャナーの基本原則をなすものである。この原理は画像処理の世界では、良く知られたものと思われるが、一般には、馴染みの薄いものである。ここでは、素人ながら、私の理解する範囲で、この Radon 変換について、できるだけ分かりやすく紹介する。

この 1917 年に発表された Radon 変換は長い間、忘れられていたが、1960 年代になってから、X 線断層撮影のために、A.Cormack によって再研究され、さらに、G.Hounsfield の協力のもとに、CT スキャナーが開発されることになる。1971 年、最初にできた試作品の CT スキャナーは撮影に 5 分かかり、その後、画像を処理するのに当時の大型コンピュータで 2 時間半もかかったということである。いまでは、コンピュータの進歩と、アルゴリズムの改良で、撮影後はほとんど瞬時に断層画面ができるほどに進歩している。A.Cormack と G.Hounsfield はこの業績によって、1979 年にノーベル医学・生理学賞を受けている。

2 Radon 変換の導入とその逆変換

2.1 Radon 変換

W.Roentgen が X 線を発見して以来、レントゲン写真は人間の体の内部を撮影するために使われてきた。しかし、1 枚のレントゲン写真は、体の内部の筋肉、血管、骨などのすべてのものが重なった結果の写真が得られるだけで、その立体的な構造がどうなっているかは分からない。これを改良するものが、断層撮影法である。人間の体は、もちろん、3 次元的なものであるが、ここでは、何枚もの薄い輪切り状のものにしたうちの 1 枚を 2 次元平面として考えることにする。次ページ図 1 に示すように、この平面上に、適当に、 $x-y$ 座標をとり、X 線が通る道筋に沿った 1 本の直線を考える。X 線はこの直線の下の方から入射され、上のほうに通り抜けるものとする。この直線に座標原点から下ろした垂線の長さを s 、垂線が x 軸となす角を θ とすると、この直線の傾き

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

は、 $-\cot \theta$ であり、 y 切片は、 $s/\sin \theta$ となるので、直線の方程式は、

$$x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0 \quad (2.1)$$

となる。

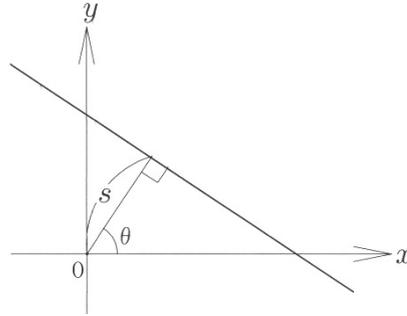


図1 CT スキャンの2次元モデル

あるいは、この式は、原点から直線上の任意の点までのベクトル (x, y) と、原点から直線に下ろした垂線を単位長さにしたときのベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ との内積 $(x, y) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)$ が $= s$ と言い換えた方がスマートである。いずれにしても、この直線はパラメータ s, θ によって決まることに注意する。この s, θ のとり得る範囲は、

$$-\infty < s < \infty, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (2.2)$$

とする。この範囲にとる理由については後で説明する。

ここで、点 (x, y) における X 線に対する物質の減衰率を $f(x, y)$ とする。これは単位長さだけ X 線が通過したときの減衰する割合であり、体内部の構造によって、それぞれ、異なる値をとる。いま、点 (x, y) における X 線の強度を $I(x, y)$ とし、X 線がこの直線に沿って、点 (x, y) から点 $(x + dx, y + dy)$ まで来た時に変化した量を dI とすると、

$$\frac{dI}{I(x, y)} = -f(x, y)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)dx dy \quad (2.3)$$

となる。ここに、 δ は Dirac のデルタ関数である。この式を積分し、X 線が初めに持っていた強度を I_0 、この直線に沿って物体通過後に持っている強度を $K(s, \theta)$ とすると、

$$K(s, \theta) = I_0 \exp \left[- \iint_D f(x, y)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)dx dy \right] \quad (2.4)$$

となる。ここで積分に付けた D は、考えている直線上で物体が存在するすべての領域にわたる積分であることを意味する。ここで得られる $K(s, \theta)$ は X 線検知器上の強度であり、これはもちろん観測可能量である。問題は、この $K(s, \theta)$ から、逆に、各場所ごとの減衰率 $f(x, y)$ を求めることである。指数関数は、その逆関数も 1 価関数なので、指数関数の中身の符号を変えたものを

$$g(s, \theta) = \iint_D f(x, y)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)dx dy \quad (2.5)$$

と定義したとき、この $g(s, \theta)$ から $f(x, y)$ を求めることと言い換えてもよい。この $g(s, \theta)$ を関数 $f(x, y)$ の Radon 変換という。そのためには、 s と θ をいろいろ変えたときの $g(s, \theta)$ の値が必要である。1 枚の X 線写真には、いろいろな s の異なるものが入ってくるが、 θ を変えるためには、X 線の装置全体を回転させて何枚もの写真をとる必要がある。通常、CT スキャナーは半回転するようできていて、それが先に (2.2) 式で示した

θ の範囲である。また、1つの θ に対し、原点の右側を通る X 線に対し正の s 、左側を通る X 線に対し負の s をとることとする。なお、X 線は1点から発するので、平行光線にはならないが、ここでは点源は十分遠くにあるものとして、平行光線として入射されるものとする。

(2.5) 式はデルタ関数を用いて表わされているが、1917年に発表した Radon が Dirac のデルタ関数を知っていたはずはない。この式は、デルタ関数を使わない形に書き換えることができる。すなわち、 (x, y) 座標系を原点まわりに角度 θ だけ回転した座標系を (u, v) とすると、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{逆は} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

となる*1。そこで、(2.5) 式の積分変数を (x, y) から (u, v) に変えると、Jacobian は $\partial(x, y)/\partial(u, v) = 1$ となるので、

$$\begin{aligned} g(s, \theta) &= \iint_D f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) \delta(u - s) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - v \sin \theta, s \sin \theta + v \cos \theta) dv \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。おそらく、Radon が最初に提唱したのはこの形と思われるが、デルタ関数に慣れてしまった現代人には (2.5) 式の方が理解しやすい。

2.2 Radon 変換の逆変換

前節で定義した $g(s, \theta)$ から $f(x, y)$ を求める方法はいくつかあるようであるが、ここでは、Fourier 変換を用いた方法を紹介する。

関数 $g(s, \theta)$ を s について Fourier 変換したものを、 $G(\rho, \theta)$ とすると、

$$G(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) e^{-i\rho s} ds, \quad \text{逆変換は} \quad g(s, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, \theta) e^{i\rho s} d\rho \quad (2.8)$$

が成立する。また、関数 $f(x, y)$ を2変数 (x, y) について Fourier 変換したものを $F(\xi, \eta)$ とすると、

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \quad \text{逆変換は} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

が成立する。ここで、(2.8) 第1式の右辺に (2.7) 式の $g(s, \theta)$ を代入すると、

$$G(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - v \sin \theta, s \sin \theta + v \cos \theta) e^{-i\rho s} ds dv \quad (2.10)$$

となるが、ここで、積分変数を s, v から x, y に、

$$x = s \cos \theta - v \sin \theta, \quad y = s \sin \theta + v \cos \theta \quad (2.11)$$

とおき直すと、この式は

$$G(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (2.12)$$

*1 座標を固定し点を回転したときと、点を固定し座標を回転したときでは、 θ の符号が変わることに注意する。ここでは、後者の方である。

となる。この式は、(2.8) 第 1 式右辺の $g(s, \theta)$ に (2.5) 式を直接代入した方がより簡単に得られるが、ここでは遠回りをしてみた。ここで、この式と (2.9) の第 1 式を比較すると、

$$G(\rho, \theta) = \sqrt{2\pi}F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad (2.13)$$

となることが分かる。これで、関数 g と関数 f の Fourier 変換同士が結びついたことになる。ここで、

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta \quad (2.14)$$

と変数変換をすると、その逆は、

$$\rho = \pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \text{Tan}^{-1}(\eta/\xi) \quad (2.15)$$

となる。ここで、 \pm の符号は ξ の符号に合わせてとることにする。これで、関数 $f(x, y)$ の Fourier 変換が

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}G(\pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \text{Tan}^{-1}(\eta/\xi)) \quad (2.16)$$

と求められたことになる。これを (2.9) の第 2 式に代入すると、

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int_{-\infty}^{\infty} G(\pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \text{Tan}^{-1}(\eta/\xi)) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.17)$$

となり、最後に、(2.8) の第 1 式を用いて、Fourier 変換 G を元の g で表すと、

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \text{Tan}^{-1}(\eta/\xi)) e^{i(x\xi + y\eta) \mp is\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta ds \quad (2.18)$$

と観測可能な関数 $g(s, \theta)$ から各点における減衰率 $f(x, y)$ が求められたことになる。この場所ごとの減衰率から断層写真が構成される。

なお、ここで得られた $f(x, y)$ は実関数になることが確かめられる。実際、この式の複素共役をとると、

$$\overline{f(x, y)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \text{Tan}^{-1}(\eta/\xi)) e^{-i(x\xi + y\eta) \pm is\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta ds \quad (2.19)$$

となるが、ここで積分変数 ξ, η の符号を変えて、 $\xi \rightarrow -\xi, \eta \rightarrow -\eta$ とすると、指数関数の指数部は元に戻り、積分範囲も元に戻るの、結局、 $\overline{f(x, y)} = f(x, y)$ が示される。

極表示による解

ここで得た結果 (2.18) 式は、(2.13) が極表示 (ρ, θ) であったものを、(2.14) (2.15) 式で直交系の (ξ, η) に直したものである。これを元の極表示 (ρ, θ) のままで実行したときはどうなるかを書いておく。(2.9) の第 2 式で積分変数の (ξ, η) を (2.14) 式の (ρ, θ) を用いて極表示にすると、 ρ, θ の範囲が (2.2) 式であることに注意して、

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| d\rho F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (2.20)$$

となる。ここで、 ρ 積分のところで付けた絶対値は、 ρ が負の場合も面積要素 $\rho d\rho d\theta$ を正にするためのものである。この式に (2.13) 式の $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ を代入し、 $G(\rho, \theta)$ で表すと、

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| d\rho G(\rho, \theta) e^{i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (2.21)$$

さらに, (2.8) の第 1 式を用いて, $G(\rho, \theta)$ を元の $g(s, \theta)$ にすると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta) \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| d\rho e^{i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta - s)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta) \int_0^{\infty} \rho d\rho \cos [\rho(x \cos \theta + y \sin \theta - s)] \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる. ここで, 最後の式は, ρ が負のところの積分で変数変換 $\rho \rightarrow -\rho$ をした結果である. もちろん, この式は, (2.18) 式から直接導くことも可能である. さらに, この式の ρ 積分は実行可能である. この積分を

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta) \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} d\rho \sin [\rho(x \cos \theta + y \sin \theta - s)] \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - s} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

と実行する. ここで, 超関数的に,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(Mx)}{x} = 0 \quad (2.24)$$

となることを用いた. さらに, s 積分に関して, 部分積分を実行すると,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} P \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\partial_s g(s, \theta)}{x \cos \theta + y \sin \theta - s} \quad (2.25)$$

となる. ここで, P は積分の主値をとることを意味する.

3 具体例

[その 1]

ここで, 減衰率 $f(x, y)$ として, 簡単ではあるが, 原点に, 底面の半径 ℓ , 高さ f_0 で, 円柱の形になったもの, すなわち,

$$f(x, y) = f_0 H(\ell^2 - (x^2 + y^2)) \quad (3.1)$$

という場合を考えてみる. ここに, H は Heaviside の階段関数である*2. (2.5) 式の定義にしたがって, このときの Radon 変換 $g(s, \theta)$ を求めると,

$$g(s, \theta) = 2f_0 \sqrt{\ell^2 - s^2} H(\ell^2 - s^2) \quad (3.2)$$

となる. この場合は θ 依存性がなくなること注意到する. これを逆変換の式 (2.25) に代入したとき, 元の $f(x, y)$ に戻るかを確かめてみる. 実際に代入すると,

$$f(x, y) = -\frac{f_0}{\pi^2} P \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} s ds \frac{H(\ell^2 - s^2)}{\sqrt{\ell^2 - s^2} [x \cos \theta + y \sin \theta - s]} \quad (3.3)$$

となる. ここで, (x, y) を極表示して,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (3.4)$$

*2 物理では, 通常, 階段関数は θ を用いて表わすが, ここではすでに θ が使われているので, 記号の重複を避けるため, H と書くことにする.

とおくと,

$$f(x, y) = -\frac{f_0}{\pi^2} \text{P} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} s ds \frac{H(\ell^2 - s^2)}{\sqrt{\ell^2 - s^2} [r \cos(\theta - \phi) - s]} \quad (3.5)$$

となり, さらに, s 積分を $-\infty$ から 0 までと, 0 から $+\infty$ までに分けてから, s 負の部分では $s \rightarrow -s$ と置き換えると,

$$f(x, y) = -\frac{2f_0}{\pi^2} \text{P} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} s^2 ds \frac{H(\ell^2 - s^2)}{\sqrt{\ell^2 - s^2} [r^2 \cos^2(\theta - \phi) - s^2]} \quad (3.6)$$

となる. この式の分母は, θ について, 周期 π の周期関数なので, $\theta - \phi \rightarrow \theta$ と置き換えてしまうと, 事実上, ϕ は消え, 積分範囲も 1 周期分の積分なので, 0 から π としてよい. ただし, ここでは, 既成の公式を使うため, この形のまま積分しないで, 前の (3.5) 式に戻って,

$$f(x, y) = -\frac{f_0}{\pi^2} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} s ds \frac{H(\ell^2 - s^2)}{\sqrt{\ell^2 - s^2}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{r \cos \theta - s} \quad (3.7)$$

としておく. この θ 積分は, 岩波「数学公式 I」P.247 にある公式

$$\text{P} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & a > |b| \\ 0, & |a| < |b| \end{cases} \quad (3.8)$$

を使うと, 符号関数 sgn を用いて,

$$\text{P} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{r \cos \theta - s} = -\frac{\text{sgn}(s)\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s^2 - r^2) \quad (3.9)$$

となるので, (3.7) 式は

$$f(x, y) = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s ds \frac{\text{sgn}(s)H(\ell^2 - s^2)H(s^2 - r^2)}{\sqrt{(\ell^2 - s^2)(s^2 - r^2)}} = \frac{2f_0}{\pi} \int_0^{\infty} s ds \frac{H(\ell^2 - s^2)H(s^2 - r^2)}{\sqrt{(\ell^2 - s^2)(s^2 - r^2)}} \quad (3.10)$$

となる. この積分は, $r > \ell$ のときは, 積分範囲がなくなるので,

$$f(x, y) = 0, \quad r > \ell \quad (3.11)$$

となり, また, $r < \ell$ のときは, 積分変数を $s^2 = t$ と置き換えると,

$$f(x, y) = \frac{f_0}{\pi} \int_{r^2}^{\ell^2} \frac{dt}{\sqrt{(\ell^2 - t)(t - r^2)}} = \frac{2f_0}{\pi} \left[\text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{t - r^2}{\ell^2 - t}} \right]_{r^2}^{\ell^2} = f_0, \quad r < \ell \quad (3.12)$$

となって, (3.1) 式の $f(x, y)$ に戻ることが確かめられる.

ここで, 中西襄先生から教わったことを記しておく. 先生が書かれた本「微分方程式」(丸善出版)の P.49 から P.52 にかけて Y 超関数のことが書かれている. この関数は, 階段関数 H を使って,

$$Y_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} H(x) \quad (3.13)$$

と定義され, さらに, この本の (10.30) 式にあるように, 合成積の公式

$$\int_0^{\infty} dy Y_{\mu}(x - y) Y_{\nu}(y) = Y_{\mu+\nu}(x) \quad (3.14)$$

を満たす。これを用いると、ここでの (3.10) 式は

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2f_0 \int_0^\infty s ds Y_{1/2}(\ell^2 - s^2) Y_{1/2}(s^2 - r^2) \\ &= f_0 \int_0^\infty dt Y_{1/2}(\ell^2 - t) Y_{1/2}(t - r^2) = f_0 Y_1(\ell^2 - r^2) = f_0 H(\ell^2 - r^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となって、よりスマートな形での証明ができる。

[その 2]

似たような例ではあるが、減衰率 $f(x, y)$ が 2 次元 Gauss 分布の形

$$f(x, y) = f_0 e^{-a^2(x^2+y^2)} \quad (3.16)$$

の場合を考える。ここに、 a は長さの逆数の次元を持つ定数とする。このときの Radon 変換は、(2.7) 式から、

$$g(s, \theta) = f_0 \int_{-\infty}^\infty e^{-a^2(s^2+v^2)} dv = \frac{\sqrt{\pi} f_0}{a} e^{-a^2 s^2} \quad (3.17)$$

となり、これを (2.25) 式に代入すると、

$$f(x, y) = -\frac{a f_0}{\pi^{3/2}} \text{P} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^\infty s ds \frac{e^{-a^2 s^2}}{x \cos \theta + y \sin \theta - s} \quad (3.18)$$

となる。あとは、前の (3.3) 式から (3.9) 式までと同様の計算をして、(3.10) 式に替わるものとして、

$$f(x, y) = \frac{2a f_0}{\sqrt{\pi}} \int_r^\infty s ds \frac{e^{-a^2 s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} \quad (3.19)$$

となる。ここで、変数変換 $\sqrt{s^2 - r^2} = t$ とおき直すと、

$$f(x, y) = \frac{2a f_0}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 r^2} \int_0^\infty e^{-a^2 t^2} dt = f_0 e^{-a^2 r^2} = f_0 e^{-a^2(x^2+y^2)} \quad (3.20)$$

となって、確かに、(3.16) 式の $f(x, y)$ に戻る。

この 2 次元 Gauss 分布の場合の計算は、一般の $f(x)$ に対しても、その逆変換が元に戻ることを示唆している。まず、この Gauss 分布が原点以外の点 (x_0, y_0) にあって、

$$f(x, y) = f_0 e^{-a^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} \quad (3.21)$$

となるときは、いったん座標を平行移動させて、この Gauss 分布が原点にくるようにしてから変換し、変換後に座標をまた平行移動させて戻すと元に戻ることが証明される。一般の $f(x, y)$ というのは、この (3.21) 式の形の f_0, a, x_0, y_0 をいろいろに変えた集まりと見做すことができる。すなわち、

$$f(x, y) = \sum_{(i,j,k,\ell)} f_{0,i} e^{-a_j^2[(x-x_{0,k})^2+(y-y_{0,\ell})^2]} \quad (3.22)$$

と考えられる。Radon 変換は線形の変換なので、これら和の形の変換は、1 個ずつ変換したものの和になるので、一般の $f(x, y)$ に対しても Radon 変換の逆変換が元に戻ることが証明される。

4 おわりに

今回は、画像処理というまったく専門外のことに首を突っ込んでしまった。Radon 変換というのは今回初めてお目にかかったが、確かに興味ある面白い変換式である。しかしながら、分からないことも多く、インターネットでいろいろと調べながら、ここまでたどり着くのに大変な苦勞をしてしまった。中には数学的にあきらかな間違いと思われるものもあり、また、分かり切ったことだけが書かれていて、こちらが疑問に持つことが書かれていないなど、もう少し丁寧に書いてもらえたらと思うものが多い。

ここでは、2次元平面での Radon 変換だけを述べたが、この変換式は任意の次元の場合にも拡張されている。いずれ、そのうち、この分野も研究してみたいと思う。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき、大変有意義なアドバイスをいただきました。特に、(2.23) 式の ρ 積分のところ、および、具体例のところの (3.6) 式、および、(3.13) (3.14) (3.15) 式は先生のご教示によるもので、これがなければ中途半端なものになってしまうところでした。ここに、謹んで感謝申し上げます。

粒子のスピン

秋葉 敏男

Spin of Particles

Toshio AKIBA*1

1 はじめに

現代物理学の柱の一つである「量子力学」は、原子の世界の探求から創成されました。

原子の世界からのシグナルには、光電効果・黒体放射のスペクトル分布・分光輝線スペクトル分布などがあり、古典力学や古典電磁気学を用いて何とか説明しようと研究されていました。そのような中から、プランクのエネルギー量子仮説・アインシュタインの光量子仮説・ボーアの原子模型を経て、ハイゼンベルクの行列力学（物理量を遷移成分から成る行列と考える理論）が提唱されました。その一方、ほぼ同時期に物質波の挙動を記述する微分方程式が、シュレーディンガーにより提唱されました。

以上のように量子力学が建設されている中で、原子の世界からのシグナルとして「スピン角運動量」の存在が明確になって来ました。パウリにより、「古典的記述が不可能な二価性」と評されたこの物理量は、スカラーやベクトル以外のスピノールで記述されます。

以下、スピンのまつわる話題を随想的に綴って見たいと思います。

2 粒子のスピン

物質を構成する粒子や、相互作用に関与する粒子は、スピンと言う属性を持ち、 $\hbar((\text{プランク定数})/2\pi)$ を単位とした大きさ s によって二つに大別され、 s が整数 (半奇数) の粒子は、ボソン (フェルミオン) と呼ばれます。フェルミオンの代表例は電子 ($s = 1/2$) で、その状態関数は 2 成分から成り、座標変換に対してスピノールの変換規則に従って変化します。

すなわち、 (e_1, e_2, e_3) を単位ベクトルとして

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\alpha = \cos(\theta/2) + ie_3 \sin(\theta/2) \quad (2)$$

$$\beta = i(e_1 - ie_2) \sin(\theta/2) \quad (3)$$

と定義すれば、 σ をパウリ行列として

$$\sigma \mathbf{x}' = S(\sigma \mathbf{x})S^{-1} \quad (4)$$

により座標変換したとき、状態関数 $\phi(\mathbf{x}) = \{\phi_\mu(\mathbf{x})\}$ は

$$\phi'_\mu(\mathbf{x}') = S_{\mu\nu} \phi_\nu(\mathbf{x}) \quad (\mu, \nu = 1, 2) \quad (5)$$

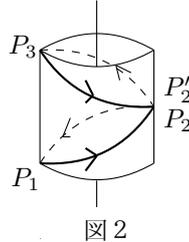
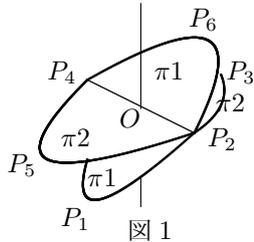
のように変化します。式 (2), (3) から明らかなように、座標変換の回転角が 2π の時に状態関数の符号が反転し、2 回転して元の状態に戻ります*2。

*1 tawarp@mug.biglobe.ne.jp

*2 スピノールの解説書は多くあります。例えば、文献 1 参照

このことを模式的に説明する方法として、つぎのようなものが考えられます。

- (1) ファインマンのワインダンスを実演する [2]
- (2) メービュスバンドを使う
- (3) 2葉平面を使う (図1の π_1 面と π_2 面の交差線上の点 P_2 で、互いの面に乗り移るようにして、点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_2, P_6, P_4, P_1$ の順に移動する)
- (4) 線状の回転運動を使う (図2の円筒面上で、点 P_1, P_2, P_3, P'_2, P_1 の順に移動する)



いずれにしても、単一の2次元平面内の運動に対応させて説明することはできません。

そもそも粒子が整数スピンをとるか半奇数スピンをとるかの、スピンの違いは、同種の2粒子の位置 ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とします) を交換したときに、状態関数がどのように変化するかに関連しています。極微の世界の同種の粒子は全く区別ができず、2粒子の位置を交換しても状態関数 $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ の絶対値の2乗 (存在確率) は不変とされます。

$$|\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)|^2 = |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \quad (6)$$

これから

$$\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = e^{i\theta} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (7)$$

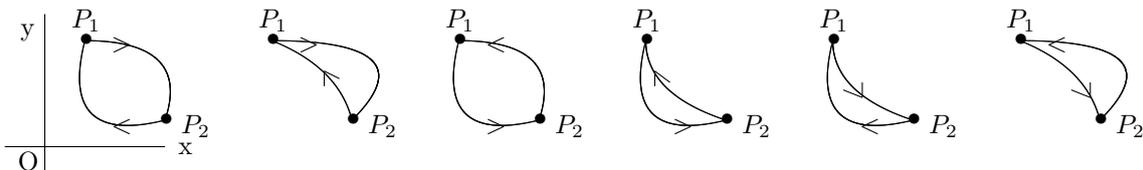
が得られ、関係式 (7) を満たす状態関数は、位相角 θ に対応して無数に存在しますから、フェルミオン ($\theta = \pi$) とボソン ($\theta = 0$) 以外の粒子 (エニオン*3) も存在することになります。

ここで、粒子の交換による位相角の変化について、以下の2つの法則に留意します。

- (1) 2次元仮想空間において、粒子を右回りに移動して交換した場合の位相角の変化を θ とすると、左回りにたどった場合は $-\theta$ となります。
- (2) 3次元 (以上) の空間では、粒子の右回り交換と左回り交換とは、区別出来ません。なぜなら、右回り交換経路は、第3次元の空間を介して左回り交換経路に連続的に変換できるからです。

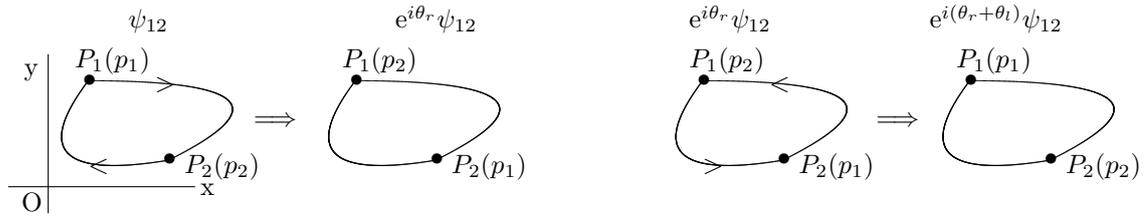
第1の法則は、つぎのように説明されます。

2次元平面内の2点 P_1, P_2 にある粒子 p_1, p_2 の位置交換を考えると、経路の組合せは下図の6通りとなり、 $\{P_1 - P_2 - P_1\}$ と一周した時の向きは、右か左かのいずれかです。



そこで、右 (左) 回り経路で粒子を交換したときの位相角の変化を $\theta_r (\theta_l)$ とすると、状態関数 ψ_{12} は、つぎの図のように変化します。

*3 文献3 p.99 参照



最終状態は、初めの状態に戻っていますから、 $e^{i(\theta_r+\theta_l)} = 1$ となるべき事から、 $\theta_r + \theta_l = 0$ つまり、 $\theta_l = -\theta_r$ が得られます。(法則 (1) の説明終)

そこで、粒子交換前の状態関数を ψ_{12} とし、右 (左) 回り交換後の状態関数を $\psi_{21}^r (\psi_{21}^l)$ とすれば、上記法則 (1) より

$$\begin{aligned}\psi_{21}^r &= \psi_{12}e^{i\theta} \\ \psi_{21}^l &= \psi_{12}e^{-i\theta}\end{aligned}$$

そして、上記の法則 (2) から、3次元 (以上) の空間では、粒子交換に依る状態関数について、 $\psi_{21}^r = \psi_{21}^l$ となりますから、 $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ が得られ、 $\theta = 0$ 又は π となります。

つまり、位相角の違いは2種に類別され、これに対応して、スピンによる粒子の類別も、空間が3次元 (以上) の場合に明白になると言えます [3].

ついでながら、 $s = 1/2$ の場合に倣って、 $s\alpha = 2\pi$ なる角度 α を定義します。そして、平面内を α だけ回転して元の位置に戻る点の軌跡を描いて見ると、 $s = 1, s = 2$ 及び $s = 3/2$ の場合は、つぎの図のようになります。

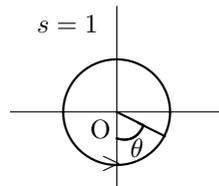


図 3 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

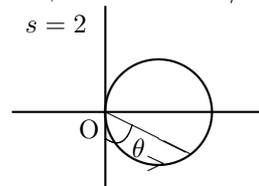


図 4 ($0 \leq \theta \leq \pi$)

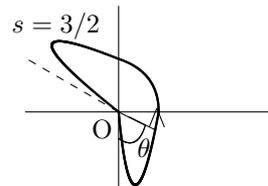


図 5 ($0 \leq \theta \leq 4\pi/3$)

つまり、 $s = n/2$ ($n \geq 2$) の場合は、対応する軌跡図を描く際に第三の空間次元を必要としません。 ($s = 1/m$ ($m \geq 2$) の場合は、第3次元を要し、図2のらせん回線を m 回繰り返せば、元の点に戻ります)

3 おわりに

原子の分光スペクトルの多重項分離現象について、はじめは、原子の外側の遷移電子 (光る電子) と原子内部との磁氣的相互作用に起因するものと予想されましたが、実験事実をうまく説明できませんでした。そこで、パウリは電子自体の属性 (スピン) によるものと考えました。そして、このスピンと言う物理量を表現する演算子として、2行2列の行列 (パウリ行列) を導入すると共に、状態関数を2成分から構成されるベクトルと考えて、力学法則を各成分関数のシュレーンゲル型連立微分方程式としました ([4] 第3話 参照)。

この後ディラックは、変換理論と相対論を論拠にして、時間変数と空間変数に関して共に一階の微分方程式 (4元連立微分方程式) を考案します。こうして、スピンを含む理論が構成されました。これにより、ミクロの粒子は広がり構造を持つと考えられます。しかし、スピンという属性の由来は謎のままです。

参考文献

- [1] 高橋 康, 『物理数学ノート I』 (講談社, 1997) IV 章 106-116
- [2] Feynman, Weinberg 講演 (小林 訳), 『素粒子と物理法則』 (筑摩書房, 2006) 42
- [3] 森 弘之, 『2つの粒子で世界がわかる』 (講談社, 2019) 96-103
- [4] 朝永 振一郎, 『新版 スピンはめぐる』 (みず書房, 2008) 51-74

1mの高さからどこまで見渡せるか

矢野 忠^{*1}

How far can we see from the height of 1m ?

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

もう何年も前のことだが、高松での徳島科学史研究会の総会で元愛媛大学の村上嘉一さんが『地球学と地球「楽」』というテーマで話をされた。

その講演の冒頭にクイズのような問題をだされた。

(問題) 地球が凹凸のない完全な球体であるとする。いま、1mの高さから水平線を眺めたときどのくらい遠くまで見渡せることができるでしょうか [1]。

答えの候補が講演のパワーポイントのその後に4つほど出ていたが、私は1500mくらいと山カンで答えたら、本当は3500mくらいだという。

村上さんは講演の中でこれはピタゴラスの定理を使えば、解けるのだと言われた^{*3}。そのときはどうやってその答えを出せるのかわからなかったが、松山への帰りの電車の中で時間があつたので、考えてみた。

2 水平線までの距離

問題は1メートルの高さから水平線まで見渡せる距離を求めたい。

こういうときに代数ではわざとちょっと一般化して、 h メートルの高さから水平線まで見渡せる距離を x としてこれを求めることにする(図1参照)。地球の半径を R とすれば、視線の水平線のところで円との接線になっているから、この水平線とその接点へ向かう地球の半径といま h メートルのところから、見渡そうとしているところの3点A, B, Cをそれぞれ直線で結ぶとそれはちょうど直角三角形となっている。図1をみてほしい。ここで角 $\angle ABC$ は直角となっている。このときの x の距離を求めるといふうに問題を変えてしまう。 x が R, h で表されれば、その式で $h = 1\text{m}$ とおけば答が求められる。

したがって、

$$(R+h)^2 = R^2 + x^2 \quad (2.1)$$

という式が成り立つ。いま地球の半径 $R = 6,350\text{km}$ とすると、 $x = 3.57\text{km}$ が近似値として得られる。

(2.1)の x についての近似式を解けば、

$$x = \sqrt{2Rh} \quad (2.2)$$

である。

いっぺんに(2.2)の結果を書いたが、どうやって(2.2)を導いたのだろうか。

(2.1)で R は地球の半径だから、これと人の高さと同じくらいの高さの h とを比べると h はとても小さいから、この h はないものと考えてもよい。こういう考えはなかなかできるようにはならないが、頭のよい人はできるか

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 中学生のための注:「ピタゴラスの定理を知らないって」。心配いらない。[2]にやさしい説明をしてある。

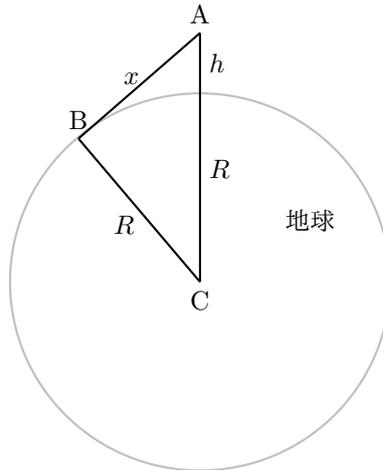


図1 見渡せる距離の図

もしれない。いや私たちは頭のわるい人に徹するのだった。

R は地球の半径だからこの距離に比べて、子どもの背の高さくらいの h はないと考えてよからう。では「実際はないとしてしまえ」とする。

ところがここで問題が起きる。もし (2.1) ではじめから h がなかったことにすると

$$R^2 = R^2 + x^2 \quad (2.3)$$

これだと

$$x^2 = 0 \quad (2.4)$$

となってしまうと、高さ 1m のところから見たらどこも見えないことになってしまう。でもそんなことはない。1m くらいの背の高さでも 100m かもっと遠い先まで見えていた。だから (2.1) ではじめから h をないと思ってしまうのはやはりやりすぎだろう。

この理由は $(R+h)^2$ で $h=0$ とおいてしまうと、 $h \neq 0$ のときに $(R+h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$ に出てくる決して小さい量ではない $2Rh$ を $2Rh=0$ とおいたことになってしまうからである。ではどうしたらいいのだろう。 $(R+h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$ で一番最後の項は小さい量だからこれはないと考えてもいい。そうすると

$$\begin{aligned} R^2 + 2Rh &= R^2 + x^2 \\ 2Rh &= x^2 \\ x &= \sqrt{2Rh} \end{aligned} \quad (2.5)$$

そうだとすると $x = \sqrt{2Rh}$ と考えてよい。これで (2.2) の導き方がわかった。

じゃあ、後はこの式の右辺を計算すればよい。

電車の中なので、電卓も何も持っていないので、筆算でした計算だからいい加減な計算である。前に書いた $x = 3.57\text{km}$ はそうやってした計算である。だが、それほど間違っていないと思う。

身長 1m の子どもが見たら、見渡せるかという問題がはじめの問題であったが、この問題の類題とも思える例題が載っていた [3]。この問題はつぎのようである。

(例題) 国際線のジェット機は高度 1 万 m を飛行している。このジェット機の窓からはどのくらいの距離が見渡せるのだろうか。ただし、地球の半径は 6370km である。

(略解) 前の図1と同じように考えられるから,

$$\begin{aligned}x^2 &= (R+h)^2 - R^2 \\ &= h(2R+h)\end{aligned}\tag{2.6}$$

(2.6)に $R = 6370\text{km}$, $h = 10\text{km}$ を代入し, $2R$ に比べて h を無視すれば

$$\begin{aligned}x^2 &= 10 \times 6370 \times 2 \\ &= 127,400 \\ x &= 357\end{aligned}\tag{2.7}$$

となり, 357km まで見渡せる.

このエッセイを読んでくれた中学生君はジェット機の高度が1mの高さの1万倍だと聞いて, じゃあ3.5kmを一万倍すればいいのかなともらしていたから, ある種の頭のよさをもっている. 答えは残念ながら3.5kmのおよそ100倍で一万倍ではない. どうしてかといえば, 最後のところで平方根をとっているからである. そのことを知っていれば, およそ100倍の距離が見渡せるという結果を予想できるであろう.

こういう例題を見るとすぐに思い浮かぶのは宇宙ステーションである. これはおよそ地上から408kmの高さのところを飛行しているから, はてさて宇宙ステーションからなら, どれくらいまで見えるのか計算して見るのもおもしろいかなどと考えつく.

この宇宙ステーションからは, およそ高度はジェット機の40倍になるから, その平方根をとれば $\sqrt{40} = 2 \times \sqrt{10} = 2 \times 3.16 = 6.32$ くらいだから, これを357kmにかければ, 2256kmくらいになる. これがほぼ正しい答かどうか.

ちなみに(2.6)で導いた式で計算をしてみると

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{h(2R+h)} \\ &= \sqrt{5.11 \times 10^6} \\ &= \sqrt{5.11} \times 10^3 \\ &= 2.26 \times 10^3\end{aligned}\tag{2.8}$$

すなわち, 2260kmくらいになるので, 中学生君の見当はあっている.

ピタゴラスの定理の応用としてつぎの問いをあげておく.

(問) 直方体の箱がある. その箱の縦, 横, 高さの長さはそれぞれ10cm, 15cm, 5cmであるとき, その左下の箱の頂点から右上の頂点までの対角線の長さを求めよ. ただし, 箱の中に糸とかひもを張って, その糸とかひもの長さを測ったりはしないとする.

(答) 18.7cm

ピタゴラスの定理からははずれるが, 宇宙ステーションから見た地球の立体角はどれくらいになるのだろうかとか考えてしまった. しかし, この立体角の大きさはまた別の機会に取り扱うのがよさそうである.

3 おわりに

こういう例題をまるでクイズみたいにピタゴラスの定理のところの演習問題として出すことができれば, 中学校の数学の演習としてもいいのではないかと考えながらの電車の中の2時間半であった.

ちなみに, この問題は古在由秀『地球をはかる』[1]に出ている問題だという. この本の中で求められた数値は3.56kmである. 私の求めた3.57kmとは10mほどの違いがあるが, それくらいは大目に見てもらえる感覚もてるようになったらすばらしいと思う. いや, これは私のような石頭のものにはこの歳(80歳)になるまで難しいことであった.

はじめのところで書いた村上先生の講演を聞いたのだがいつだったかもうわからなくなっている。書き始めたときには講演を聞いてまもなくだったのだろうが、図を描くの面倒だったのでそのままになっていた。Tikzのおかげでわりと簡単に図が描けるようになってきた。Tikzに感謝したい。

4 付録1 基本的な数値

地球の半径を数値として覚えている人もいるのだろうが、私は覚えていない。地球の周囲の長さが4万kmということを知っているだけである。それを円周率の2倍の数 $2\pi = 6.28$ で割ると地球の半径が得られる。

地球の周囲の長さは真空中の光の速さが30万km/秒であることを知っていれば、その光が地球を1秒間に7.5周することから $30\text{万km}/7.5 = 4\text{万km}$ が出てくる。

5 付録2 平方根

平方根について簡単に述べておこう [4]。正方形の面積が a であるとき、その1辺の長さを \sqrt{a} と表す (図2参

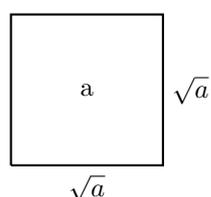


図2 平方根と正方形

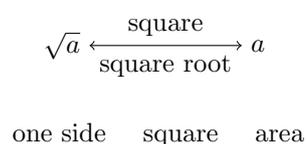


図3 平方根

照)。これは2乗して a になるような数である。 \sqrt{a} は一般に実数である。

a が整数のときを考えてみよう。たとえば、 $a = 25$ とすると、この25は $25 = 5 \times 5$ であるので $\sqrt{25} = \pm 5$ である。すなわち、 $(\pm 5)^2 = 25$ となる。これからわかるように2乗したときに25となる数は5だけではなく、負の数の -5 もある。このことを図2を眺めていただけではなかなか思いつきにくい。

図3で平方と平方根のイメージを定着させたい。図には日本語が入らなかったので、英語で書いたが、one side は日本語の一边を意味し、また square は正方形を、area は正方形の面積を意味する。もっとも英語の square には「正方形」の意味と2乗を意味する「平方」の意味とがある。

英語では平方を square で平方根は square root という。たとえば、平方(2乗)して18になる正の数を18の平方根といって $\sqrt{18}$ と表し、ルート18と読む。

また、ある数の平方根をとったとき、整数や分数で表される数になることはまれであり、一般には無理数といわれる実数となる。無理数を小数で表すと循環しない小数として表される。一方、循環する小数は分数で表すことができる。

(2020.6.8)

参考文献

- [1] 古在由秀, 『地球をはかる』 (岩波書店, 1973) 23
- [2] 矢野 忠, ピタゴラスの定理, 数学・物理通信, 10巻3号 (2020.6.10) 17-19
- [3] 銀林 浩 監修, 『わかる数学指導法事典』 (明治図書, 1985) 155
- [4] 銀林 浩 監修, 『わかる数学指導法事典』 (明治図書, 1985) 82

ピタゴラスの定理

矢野 忠^{*1}

Pythagorean Theorem

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

エッセイ「1mの高さからどこまで見渡せるか」では、ピタゴラスの定理を使う必要があった [1]。ところが、このエッセイを読んでもらった中学生君は4月に中学三年生になったばかりで、ピタゴラスの定理をまだ知らないという。それで、この「ピタゴラスの定理」というエッセイを書く。

ピタゴラスの定理の証明は100以上知られているという。日本語でもそれらの証明を述べた本も出ている。ここではわかりやすい証明の一つを述べるが、中学校でのピタゴラスの定理についての教え方に関心のある方はたとえば [2] を参照してほしい。

2 ピタゴラスの定理とはなにか

ピタゴラスの定理（3平方の定理ともいう）とは何か。これは一言でいえば、直角三角形の辺の長さ a, b, c の2乗の間に成立する関係である。式で表すと下に示す (2.1) が成り立つことである。

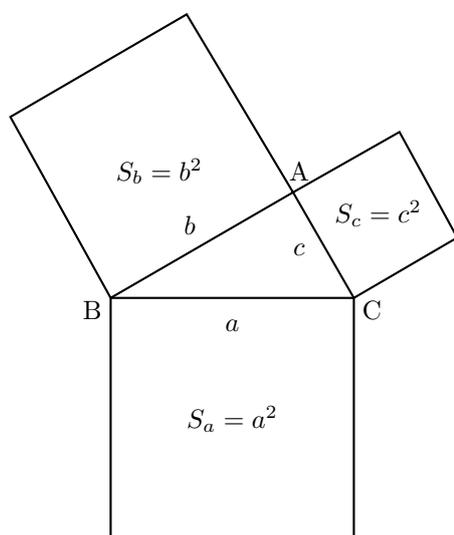


図1 ピタゴラスの定理の幾何学的意味
 $S_a = S_b + S_c$

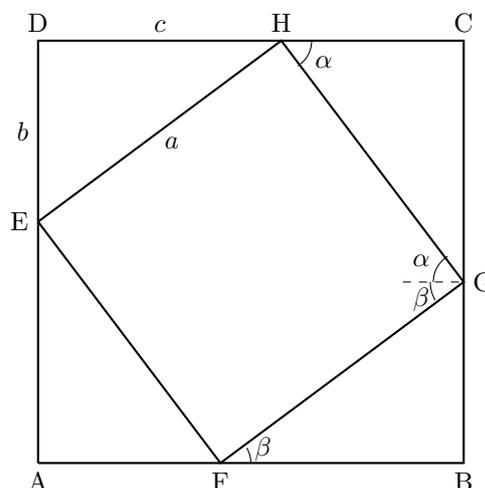


図2 ピタゴラスの定理の証明

まず三角形の角の一つが直角である直角三角形を考えよう（図1を参照）。直角三角形ABCの各辺の上にその辺の長さと同じ辺の正方形を描く。三角形の辺は3つあるから、正方形も3つできる。このとき辺の長さがもっ

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

とも長い斜辺の長さを 1 辺にもつ正方形の面積は他の辺の長さを一辺にもつ 2 つの正方形の面積の和に等しい。

図 1 では斜辺の長さを a とし、直角をはさむ他の辺の長さをそれぞれ b, c とする。それぞれの辺の上に描かれた正方形の面積は a^2, b^2, c^2 となる。このとき

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2.1)$$

が成り立つことを「ピタゴラスの定理」という。

この幾何学的な解釈は上に述べた正方形の面積の関係である。もっとも一度この定理を認めると、 a^2, b^2, c^2 をいつでも直角三角形の各辺上に描いた正方形の面積であるとは思わなくてもいい。

単に直角三角形の辺の長さに関する数値的な関係だと思ってもいい。いまではそういうふうを考えるのが普通かもしれない。ただ、この幾何学的なイメージはわかりやすい。しかし、それにとらわれないことも必要かもしれない。

単に直角三角形の 3 つの辺の長さを表す数の間に $a^2 = b^2 + c^2$ が成り立つと考えてよい。もっともその 3 つの数が直角三角形の 3 つの辺の長さであること、また a が斜辺の長さであることを忘れてはならない。

よく知られた直角三角形の辺の長さで 3, 4, 5 とか 5, 12, 13 とかはこのピタゴラスの定理をみたしている（単位は適当なものをとる）。斜辺の長さが 5 であれば、その 2 乗は $5^2 = 25$ 、一方 3 と 4 の 2 乗は $3^2 = 9, 4^2 = 16$ であるから、 $9 + 16 = 25$ となっているので、確かにピタゴラスの定理をみたしている。斜辺を 13 ととれば、その 2 乗は $13^2 = 169$ である。一方、5, 12 のそれぞれ 2 乗は $5^2 = 25, 12^2 = 144$ であるので、 $25 + 144 = 169$ が成り立っている。こういう 3 つ組の数をピタゴラス数という。

3 ピタゴラスの定理の証明

このピタゴラスの定理が本当に成り立っているかどうかを確認することをいままでしなかった。これはまずピタゴラスの定理の意味をわかることがまず大切だと思ったからである。しかし、そうはいつでもピタゴラスの定理が成り立つことを示しておかないと、とうてい納得できないであろう。

図 2 には大きな正方形 ABCD の中に合同な 4 つの直角三角形三角形 AFE, BGF, CHG, DEH があり、それらに囲まれた小さい正方形 EFGH がある。

外側の大きな正方形の辺の長さは $b + c$ であるから、その正方形の面積 S は

$$S = (b + c)^2 \quad (3.1)$$

である。大きな正方形の中のある小さな正方形の面積 S_1 は一辺の長さが a であるから、

$$S_1 = a^2 \quad (3.2)$$

である。

また、その小さな正方形を囲む直角三角形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}bc \quad (3.3)$$

である。この直角三角形が 4 つあるから

$$S = S_1 + 4S_2 \quad (3.4)$$

が成り立つ。

したがって

$$\begin{aligned} (b + c)^2 &= a^2 + 2bc \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

が成り立つ。これがピタゴラスの証明の一つになっている。

ここで、四角形の EFGH の一つの角が確かに $\alpha + \beta = \angle(\pi/2)$ であるから、正方形であることが確かめれる (図 2 参照)。

4 ピタゴラス数

2 節の終わりでピタゴラス数の例について簡単に述べた。ピタゴラス数とはなにか。あらためて述べれば、 $a^2 = b^2 + c^2$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数という。もっともこのピタゴラス数はピタゴラスが生まれる 1400 年も前に知られていたというから、ピタゴラス数というべきではないという意見もある [3]。

ピタゴラス数を与える一般的な公式はつぎのようなものである。 m, n を自然数として、 $m > n$ とし、 m, n の一方は偶数で、他方は奇数で m と n とは互いに素であるとするとき、

$$a = m^2 + n^2 \quad (4.1)$$

$$b = m^2 - n^2 \quad (4.2)$$

$$c = 2mn \quad (4.3)$$

が成り立つ。どうしてこういう解が得られるのかは知らない [4]。

ただ、これらがピタゴラスの定理をみたしていることは簡単に示すことができる。

$$a^2 = (m^2 + n^2)^2 \quad (4.4)$$

$$b^2 = (m^2 - n^2)^2 \quad (4.5)$$

$$c^2 = (2mn)^2 \quad (4.6)$$

であるから、

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2 \quad (4.7)$$

となるので、確かにピタゴラスの定理が成立している。

5 おわりに

このエッセイではピタゴラスの定理の証明としてはもっとも簡単と思われるものだけを示した。ピタゴラスの定理をはじめて学ぶ中学生にもわかるように説明をやさしくしたかったから。

しかし、いろいろなピタゴラスの定理の証明でも三角形の等積移動を用いた証明は有名なものであり、一度は学んでみるのもわるくはない。これと関連して、三角形の面積の求め方を復習する機会があったが、それについては別の機会に述べたい。

(2020.6.8)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 1m の高さからどこまで見渡されるか, 数学・物理通信, 10 巻 3 号 (2020.6.10) 13-16
- [2] 銀林 浩, 『わかる数学指導法事典』(明治図書, 1985) 238-244
- [3] 武藤 徹, 三浦基弘, 『算数・数学活用事典』(日本評論社, 2014) 64-66
- [4] 吉田 武, 『オイラーの贈物』(海鳴社, 1993) 304-306

編集後記

10 卷 3 号を発行します。6 月中に 4 号, 5 号も発行の予定です。

さて, 世の中は新型コロナウイルスの話題でもちきりですが, 皆様にはご健勝のことと存じます。

編集委員の世戸憲治さんが今号に掲載の私のエッセイ「1m の高さからどこまで見渡されるか」を読んでつぎのようなコメントをしてくださいました。

「長さ 4 万 km のひもを用意し, 地球にまきつけると, ちょうど地球の表面すれすれにまきつけることができる。このひもにさらにいくらかひもを足して, 地表から 1m の高さのところに張るには, ひもの長さをどのくらいたせばよいか」という問題を思い出しました。

直観的には, 地球は大きいので, 相当の長さのひもをたさないと, 地表から 1m の高さには地球を 1 周してひもを張ることなどできないだろうと思ってしまうのですが, 実はひもの長さは 6m ちよつとたすだけで, 地表 1m の高さにひもを張ることができます。

この話はいつかどこかで聞いたことがあったかもしれませんが, 思い出さなかったです。やはり人の記憶っているいろいろですね。

別にタネ明かしもいらないのですが, ちょっと考えてみれば地表上 h の高さのところにひもを張るには, $2\pi(R+h)$ の長さのひもが必要です。もちろん, R は地球の半径です。このひもの増加分は $2\pi h$ なので, この式に $h = 1\text{m}$ を代入すれば, 確かに $2\pi\text{m} = 6.28\text{m}$ だけ余分にたせばいいのですね。

しかし, こういう問題はいったい誰が考え出したのでしょうか。世の中には頭のいい人がいるものです。

この話を教えて下さった世戸さんに感謝します。

(矢野 忠)