

# 数学・物理通信

10 卷 4 号      2020 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 6 月 8 日

# 目次 (Contents)

## 1. Radon 変換と CT スキャナー (2)

世戸 憲治 2

## 2. 複素数の導入

矢野 忠 8

## 4. 行列の積の定義

矢野 忠 19

## 5. 編集後記

世戸憲治 24

## 1. Radon Transform and CT Scanner (2)

Kenji SETO 2

## 2. Introduction of Complex Numbers

Tadashi YANO 8

## 3. Definition for the Product of Matrix

Tadashi YANO 19

## 4. Editorial Comments

Kenji SETO 24

# Radon 変換と CT スキャナー (2)

世戸 憲治 \*

## Radon Transform and CT Scanner(2)

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

前回の論文「Radon 変換と CT スキャナー」(「数学・物理通信」10 巻 3 号) では, CT スキャナーの数学的原理となっている 2 次元空間での Radon 変換について述べた. 今回はこの次元数を 1 つ上げた 3 次元空間での Radon 変換について述べる. このときは, CT スキャナーとは離れてしまうかもしれないが, 数学的には興味ある話題となるはずである.

### 2 Radon 変換の導入とその逆変換

#### 2.1 Radon 変換

3 次元空間  $(x, y, z)$  における関数  $f(x, y, z)$  があるものとし, この空間内のすべての面上での関数の積分値から元の関数が再現できるかという問題を考える. ただし, この関数  $f(x, y, z)$  は原点から十分に遠いところでは, すみやかにゼロになるものとする.

いま, この空間内のある平面を考え, 原点からこの平面に下ろした垂線の長さを  $s$  とし, この垂線方向の単位ベクトルを, 極座標での角度  $\theta, \phi$  を用いて,

$$\mathbf{e} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.1)$$

としておく. このとき, この平面の方程式は, 原点から平面上の任意の点までのベクトルを  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  としたとき,  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{e}$  の内積が  $s$ ,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = s, \quad \text{すなわち,} \quad x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta = s \quad (2.2)$$

と記述される. これから, この平面は 3 個のパラメータ  $s, \theta, \phi$  を用いて表わされることになる. ただし, ここでは, これらパラメータの範囲を

$$-\infty < s < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < \pi \quad (2.3)$$

としておく. 通常の極座標の場合は,  $0 \leq \phi < 2\pi$  であるが, ここでは,  $\phi$  の範囲が  $0$  から  $\pi$  になっていることに注意する. そのかわり,  $s$  の範囲が  $-\infty$  から  $\infty$  となって全空間をカバーしている. このように,  $s$  の範囲を正負にとるのは, 後で使う Fourier 変換のときに便利になるようにするためである.

---

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ここで、関数  $f(x, y, z)$  を、この平面上で積分したものを

$$g(s, \theta, \phi) = \iiint_D f(x, y, z) \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) dx dy dz \quad (2.4)$$

と定義する。この積分領域  $D$  は関数  $f(x, y, z)$  のすべてのゼロでない部分に渡る。また、 $\delta$  は Dirac のデルタ関数とする。この  $g(s, \theta, \phi)$  を関数  $f(x, y, z)$  の Radon 変換と呼ぶ。

この式を、デルタ関数を使わずに書くためには、座標  $(x, y, z)$  から  $(u, v, w)$  への座標回転をする。そのために、(2.1) 式の  $\theta, \phi$  を用いて、 $y$  軸まわりの角度  $\pi/2 - \theta$  の回転行列  $A$  と、 $z$  軸まわりの角度  $\phi$  の回転行列  $B$  を、

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A = B^T B = 1 \quad (2.5)$$

と定義し、その座標回転を、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち,} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

とする。これと、この逆変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^T A^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち,} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & -\cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

を用いて、(2.4) 式の積分変数を  $(x, y, z)$  から  $(u, v, w)$  に変換する。このとき、

$$\text{Jacobian } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1, \quad \text{および,} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta = u \quad (2.8)$$

に注意して、

$$\begin{aligned} g(s, \theta, \phi) &= \iiint_D f(u \sin \theta \cos \phi - v \sin \phi - w \cos \theta \cos \phi, \\ &\quad u \sin \theta \sin \phi + v \cos \phi - w \cos \theta \sin \phi, u \cos \theta + w \sin \theta) \delta(u - s) du dv dw \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(s \sin \theta \cos \phi - v \sin \phi - w \cos \theta \cos \phi, s \sin \theta \sin \phi + v \cos \phi - w \cos \theta \sin \phi, s \cos \theta + w \sin \theta) dv dw \end{aligned} \quad (2.9)$$

と大変長い式になってしまうが、デルタ関数を使わない形にできる。なお、この座標変換は回転させるだけなので、原点からの長さは不変に保たれ、

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (2.10)$$

となることは言うまでもない。問題は、この Radon 変換したものの  $g(s, \theta, \phi)$  から元の関数  $f(x, y, z)$  を再現することである。

## 2.2 Radon 変換の逆変換

ここでは、Fourier 変換を使った方法を展開する。 $g(s, \theta, \phi)$  を  $s$  について Fourier 変換したものを  $G(\rho, \theta, \phi)$  とすると、

$$G(\rho, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta, \phi) e^{-i\rho s} ds, \quad \text{逆は,} \quad g(s, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, \theta, \phi) e^{i\rho s} d\rho \quad (2.11)$$

となる。また、 $f(x, y, z)$  を 3 変数について Fourier 変換したものを  $F(\xi, \eta, \zeta)$  とすると、

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz,$$

$$\text{逆は, } f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta, \zeta) e^{i(x\xi + y\eta + z\zeta)} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.12)$$

となる。

(2.11) の第 1 式に、 $g(s, \theta, \phi)$  の定義式 (2.4) を代入すると、

$$G(\rho, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iiint_D f(x, y, z) e^{-i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})} dx dy dz \quad (2.13)$$

となる。ここで、(2.12) の第 1 式とこの式を比べると、この式の右辺は、 $f(x, y, z)$  の Fourier 変換で書けて、

$$G(\rho, \theta, \phi) = 2\pi F(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) \quad (2.14)$$

となることが分かる。これで、関数  $g(s, \theta, \phi)$  と関数  $f(x, y, z)$  の Fourier 変換同士が結び付いたことになる。

ここで、(2.12) の第 2 式に戻って、積分変数  $(\xi, \eta, \zeta)$  を、

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \phi, \quad \eta = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad \zeta = \rho \cos \theta, \quad -\infty < \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < \pi \quad (2.15)$$

と極表示する。ここで、(2.3) 式と同じく、これら  $\rho, \theta, \phi$  の範囲を、この式の最後の 3 式で与えるものとする。このとき (2.12) の第 2 式は、

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 d\rho F(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})} \quad (2.16)$$

となる。この式右辺の  $F$  に (2.14) 式を代入して、 $G$  で表すと、

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 d\rho G(\rho, \theta, \phi) e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})} \quad (2.17)$$

となり、さらに、(2.11) の第 1 式を代入して、 $G$  を  $g$  で表すと、

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 d\rho e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)} \quad (2.18)$$

となる。この式の  $\rho$  積分は実行可能で、この部分だけを取り出すと、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 d\rho e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)} &= 2 \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \cos [\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] = -2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^{\infty} d\rho \cos [\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] \\ &= -2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin [M(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)]}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。ここで、超関数の公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin(Mx)}{\pi x} = \delta(x) \quad (2.20)$$

を用いた。この結果を、(2.18) 式に代入し、

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s, \theta, \phi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) \quad (2.21)$$

となるが、ここで、 $s$  積分について 2 度部分積分をしてから、この  $s$  積分を実行すると、

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} g(s, \theta, \phi) \right]_{s=\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} \quad (2.22)$$

と 2 階微分と 2 重積分を用いて、Radon 変換された  $g(s, \theta, \phi)$  から元の関数  $f(x, y, z)$  が再現される。

別解法として、3 次元 Laplacian

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.23)$$

を用いると、(2.19) 式に替わって、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 d\rho e^{i\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)} &= 2 \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \cos[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] = -2\Delta \int_0^{\infty} d\rho \cos[\rho(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)] \\ &= -2\Delta \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin[M(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)]}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s} = -2\pi\Delta \delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

と変形することが可能である。これを (2.18) 式に代入し、 $s$  積分を実行すると、

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \Delta \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}, \theta, \phi) \quad (2.25)$$

という逆変換の式が成立する。これら (2.22) 式と (2.25) 式の 2 つの逆変換が得られるが、以下の具体例で示すように、どちらかという、(2.22) 式の方が、後の積分がしやすくなる。

### 3 簡単な具体例

#### 3.1 その 1

ここで、具体例として、 $f(x, y, z)$  が 3 次元の Gauss 分布

$$f(x, y, z) = f_0 e^{-a^2(x^2+y^2+z^2)} \quad (3.1)$$

という場合を考えてみる。ここで、 $f_0$  は関数  $f$  の次元を持つ定数、 $a$  は長さの逆数の次元を持つ定数である。この場合の Radon 変換を求めるため、この  $f$  を (2.4) 式に代入し、(2.6) 式の変数変換をし、(2.8) (2.10) 式を用いると、

$$g(s, \theta, \phi) = f_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(u^2+v^2+w^2)} \delta(u-s) du dv dw = f_0 e^{-a^2 s^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(v^2+w^2)} dv dw = \frac{\pi f_0}{a^2} e^{-a^2 s^2} \quad (3.2)$$

と求められる。これを前節で求めた逆変換の式 (2.22) に代入して元に戻ることを確かめてみる。そのまま代入すると、

$$f(x, y, z) = \frac{-f_0}{4\pi a^2} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} e^{-a^2 s^2} \right]_{s=\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} \quad (3.3)$$

となる。この 2 階微分のところは、

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} e^{-a^2 s^2} = -2a^2(1 - 2a^2 s^2) e^{-a^2 s^2} \quad (3.4)$$

となり、この式の  $s$  に  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta$  を代入することになる。しかし、このまま計算しようすると大変面倒なことになってしまう。ここでは、より簡便な方法をとることにする。結果の式は球

対称性があるので、原点からの距離  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  のみの関数になるはずである．そこで、点  $(x, y, z)$  を回転させ、 $z$  軸上にくるようにして点  $(0, 0, r)$  とする．この操作で、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r \cos \theta$  となるので、(3.3) 式は、

$$f(x, y, z) = \frac{f_0}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (1 - 2a^2 r^2 \cos^2 \theta) e^{-a^2 r^2 \cos^2 \theta} \quad (3.5)$$

となる．ここで、 $\phi$  積分はただちに実行され、また、 $\theta$  積分は  $\cos \theta = t$  と変数変換をすると、

$$f(x, y, z) = \frac{f_0}{2} \int_{-1}^1 dt (1 - 2a^2 r^2 t^2) e^{-a^2 r^2 t^2} = \frac{f_0}{2} \left[ t e^{-a^2 r^2 t^2} \right]_{-1}^1 = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.6)$$

となって、確かに (3.1) 式の  $f$  に戻る．

なお、この場合は (2.25) 式を用いると、その後の  $t$  積分が面倒になるが、先に、 $e^{-a^2 r^2 t^2}$  に Laplacian を作用させて、

$$\Delta e^{-a^2 r^2 t^2} = -2a^2 (3t^2 - 2a^2 r^2 t^4) e^{-a^2 r^2 t^2} \quad (3.7)$$

としてから、(2.25) 式に代入し、 $t$  積分を実行すると、

$$f(x, y, z) = \frac{f_0}{2} \int_{-1}^1 (3t^2 - 2a^2 r^2 t^4) e^{-a^2 r^2 t^2} dt = \frac{f_0}{2} \left[ t^3 e^{-a^2 r^2 t^2} \right]_{-1}^1 = f_0 e^{-a^2 r^2} \quad (3.8)$$

と同じ結果が得られる．

## 3.2 その2

似たような例ではあるが、関数  $f(x, y, z)$  が、原点を中心とする半径  $\ell$  の球の内部では、一定値  $f_0$  で、その外部ではゼロ、すなわち、

$$f(x, y, z) = f_0 H(\ell^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \quad (3.9)$$

という場合を考えてみる．ここに、 $H$  は Heaviside の階段関数とする．このときの Radon 変換は (2.4) 式より、

$$g(s, \theta, \phi) = \pi f_0 (\ell^2 - s^2) H(\ell^2 - s^2) \quad (3.10)$$

と求められる．これを (2.22) 式に代入したとき、元に戻るかを確かめる．直接代入すると、

$$f(x, y, z) = \frac{-\pi f_0}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\ell^2 - s^2) H(\ell^2 - s^2) \right]_{s=\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}} \quad (3.11)$$

となる．この被積分関数の  $s$  に関する 2 階微分のところは、

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\ell^2 - s^2) H(\ell^2 - s^2) = \frac{\partial}{\partial s} \left[ -2s H(\ell^2 - s^2) - 2s (\ell^2 - s^2) \delta(\ell^2 - s^2) \right] \quad (3.12)$$

となるが、これ以上微分するのはやめて、ここで、前例にならって、 $s = r \cos \theta$  とおき、さらに、 $\cos \theta = t$  とおくと、(3.11) 式は

$$f(x, y, z) = \frac{f_0}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-1}^1 dt \frac{\partial}{\partial t} \left[ t H(\ell^2 - r^2 t^2) + t (\ell^2 - r^2 t^2) \delta(\ell^2 - r^2 t^2) \right] \quad (3.13)$$

となる．これは容易に積分できて、

$$f(x, y, z) = f_0 H(\ell^2 - r^2), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.14)$$

となり、元の (3.9) 式が再現される。

これを (2.25) 式でも確かめてみよう。 (3.10) 式を (2.25) 式に代入し、  $s = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r \cos \theta$  とおいてから、  $\cos \theta = t$  とすると、

$$f(x, y, z) = \frac{-\pi f_0}{(2\pi)^2} \Delta \int_0^\pi d\phi \int_{-1}^1 dt (\ell^2 - r^2 t^2) H(\ell^2 - r^2 t^2) \quad (3.15)$$

となる。この  $t$  積分は  $r \leq \ell$  の場合と  $r > \ell$  の場合に分けて、

$$\int_{-1}^1 dt (\ell^2 - r^2 t^2) H(\ell^2 - r^2 t^2) = \begin{cases} \int_{-1}^1 dt (\ell^2 - r^2 t^2) = 2(\ell^2 - \frac{1}{3}r^2), & r \leq \ell \\ \int_{-\ell/r}^{\ell/r} dt (\ell^2 - r^2 t^2) = \frac{4}{3}(\ell^3/r), & r > \ell \end{cases} \quad (3.16)$$

となる。これを (3.15) 式に代入し、

$$\Delta r^2 = 6, \quad \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (3.17)$$

に注意すると、

$$f(x, y, z) = \begin{cases} f_0, & r \leq \ell \\ 0, & r > \ell \end{cases} \quad (3.18)$$

と所望の結果が得られる。

## 4 おわりに

前回の 2 次元 Radon 変換のときは、逆変換の式が、角度の  $\theta$  積分と、動径成分の  $s$  積分という 2 重積分の形で解が求まった。それに対し、今回の 3 次元 Radon 変換では、3 重積分になるかと思いきや、さにあらず、逆変換の式にデルタ関数が現れたおかげで、 $s$  積分ができてしまい、角度だけの  $\theta, \phi$  2 重積分となった。次元の違いでこんなにも違いがでるとは思ってもいなかった。この調子で、次元を上げて、一般に  $n$  次元としたときの Radon 変換は、(2.19) 式のところで、 $n$  が奇数のときは、cosine の積分になり、結果としてデルタ関数  $\delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)$  が現れ、 $n$  が偶数のときは、sine の積分になって、前回求めたような分数式  $1/(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - s)$  が現れる。この一般次元のときの Radon 変換については、いずれまたの機会に議論することにする。

今回も、インターネットでいろいろ調べてみたが、こちらが知りたいことがきちんと書かれたものがなかなか見つからない。特に、ここでも扱ったように、変数、 $s$  や  $\rho$  を負の領域まで拡張して扱うことに関し、きちんとした説明がなされておらず、例えば、変数  $\rho$  に関して、極座標で表したときは、 $\rho$  を正として扱っているはずなのに、Fourier 変換のところではいつのまにか負の方まで拡張されているというぐあいである。ここでは、この事情をできるだけ矛盾のない形で説明したつもりである。

### [ 謝辞 ]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき、有意義なアドバイスをいただきました。謹んで感謝申し上げます。

# 複素数の導入

矢野 忠<sup>\*1</sup>

## Introduction of Complex Numbers

Tadashi YANO<sup>\*2</sup>

### 目次

1. はじめに
2. 複素数の導入
  - 2.1 負数の導入
  - 2.2 虚数の導入
  - 2.3 複素数の導入
  - 2.4 複素数の極表示
3. Euler の公式
4. 虚数の認知
5. 四元数へのステップ
6. おわりに
7. 付録
  - 付録 7.1 複素数  $a + bi$  と  $-b + ai$  との直交性
  - 付録 7.2  $i$  の平方根
  - 付録 7.3 四元数における  $\alpha^2 = -1$  の解
  - 付録 7.4 文献紹介

## 1 はじめに

1ヶ月に一回毎月の第4土曜の午後に行っている雑談会で「複素数の導入」というタイトルで1時間足らずお話をした。そのときにつくったメモをもとにして、それをいくらか敷衍して複素数の導入とそれに付随したテーマについて書く。

代数で負数が導入されたときに、中学校で学ぶ、負の数を含んだ数のかけ算でその積が正になるか、負になるかの規約は負数をかけることが、数直線を原点  $O$  を中心にして 180 度回転することで説明できるということを多くの人にも知ってもらいたい。そして、虚数単位  $i$  の導入とか複素数について私たちの感じる心理的な敷居の高さもすこしでもとり除きたい。すくなくとも虚数単位  $i$  が難しくはないと感じてもらえれば、それでこのエッセイの目的は達成される。

おまけとして歴史的な虚数  $i$  の認知されたのが 2 次方程式の解法においてではなく、3 次方程式の公式においてであったこととか、虚数単位  $i$  以外のもう一つの虚数単位  $j$  の発見についても述べる。

Hamilton (ハミルトン) は新しい虚数単位  $j$  から三元数を考えたが、この追求から三元数は存在できないことがわかり、四元数が発見された。

---

<sup>\*1</sup> 元愛媛大学工学部

<sup>\*2</sup> yanotad@earth.ocn.ne.jp

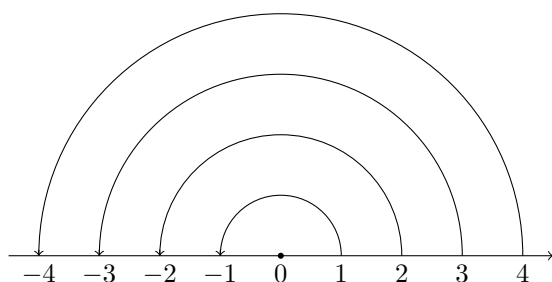


図 1 180° の原点のまわりの回転 1

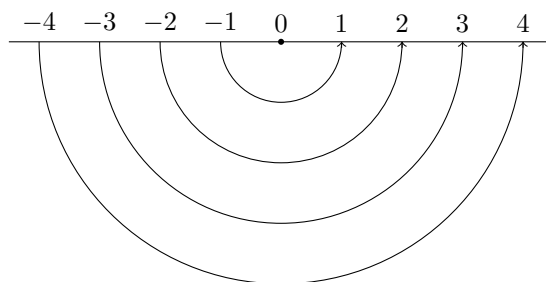


図 2 180° の原点のまわりの回転 2

このエッセイの内容は目次からおおよそわかるだろう。

## 2 複素数の導入

### 2.1 負数の導入

複素数を学ぶ前に中学校に入ると負の数を学んで、正の数だけのかけ算だけではなく、負の数をも含むかけ算を学ぶ。そのときにたとえば、

$$\begin{aligned} (+1) \times (+1) &= +1 \\ (+1) \times (-1) &= -1 \\ (-2) \times (-1) &= +1 \\ (+2) \times (+1) &= +1 \\ (+2) \times (-1) &= -2 \\ (-2) \times (-1) &= 2 \\ &\dots \end{aligned}$$

といったような負数を含む数のかけ算の法則を学ぶ。すなわち

$$\begin{aligned} \text{正数} \times \text{正数} &= \text{正数} \\ \text{正数} \times \text{負数} &= \text{負数} \\ \text{負数} \times \text{負数} &= \text{正数} \end{aligned}$$

とかである。数のかけ算は交換法則が成り立つから、これにくわえてその乗数と被乗数とが交換したものも成り立つ。これらの規則は有無を言わずに負数を含む 2 数のかけ算の規則として代数を学ぶ前に覚えさせられ、疑問をさしはさむことなど許されない。だが、これには少なからず違和感を感じる。

数  $a$  に  $-1$  をかけることは数直線を原点  $O$  のまわりに反時計まわりに  $180^\circ$  回転させることだと知れば、図 1, 2 のようなことが起こるのがわかる。

図 1 は  $a \times (-1) = -a$ , ( $a$ : 正の数) を示し、すなわち、正の数に  $-1$  をかければ、負の数となる。また、図 2 は  $-a \times (-1) = a$ , ( $a$ : 正の数) を示す。すなわち、負の数に  $-1$  をかければ、正の数を得られる。この図 2 は負の数と負の数とのかけ算が正の数を与えることを示している。

このことから前に天下りで述べた正の数と負の数とがまざった数のかけ算とかわり算で符号が正か負かを決めている規則は実は数  $a$  に  $-1$  をかけることが、数直線を原点  $O$  のまわりに  $180^\circ$  回転することあたっていると知れば、別に不思議な規則でもなく当然の規則であることが容易に納得できるだろう。この事実の深い理解には複素数の極表示が必要になるが、それはここではスキップしよう。

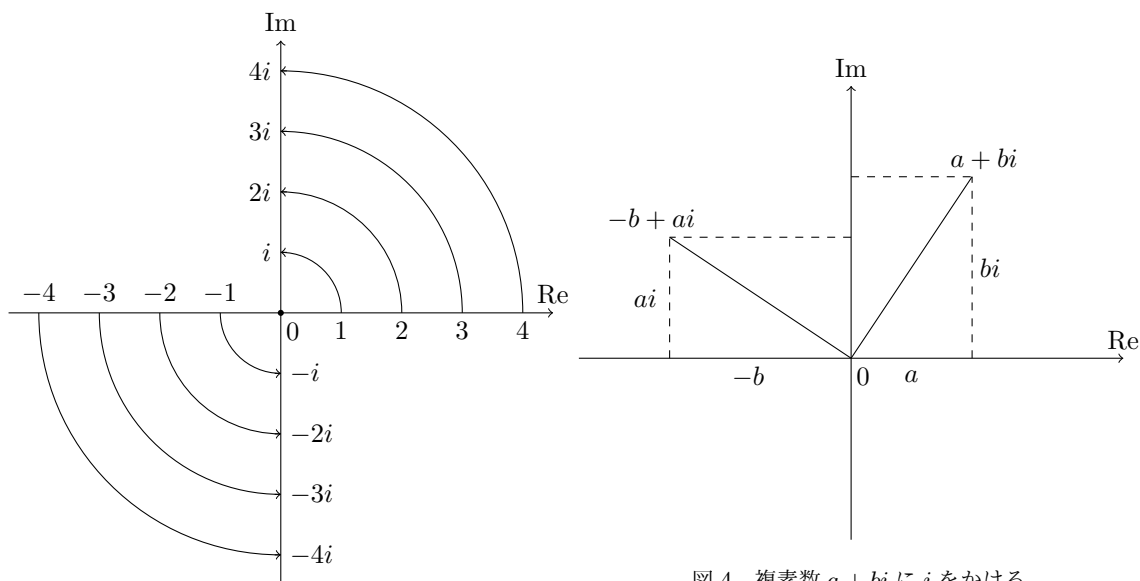


図3 90°の原点のまわりの回転

図4 複素数  $a + bi$  に  $i$  をかける

## 2.2 虚数の導入

ここで話をさらに進めて虚数のことを考えよう。虚数  $i$  は  $i^2 = -1$  であるような数と定義される。すなわち  $i = \sqrt{-1}$  である。さて  $\times(-1)$  は数直線の原点  $O$  のまわりの  $180^\circ$  であると考えた。そして、その  $\times(-1) = \times i \times i$  である。この  $\times i$  は2回かけると原点  $O$  のまわりの反時計方向の  $180^\circ$  であったから、 $\times i$  は原点  $O$  のまわりの反時計まわりの  $90^\circ$  の回転を示すことがわかる。すなわち、これを図3に示す。こうして虚数が導入される。

## 2.3 複素数の導入

実数が実軸上にあり、虚数はその実軸に垂直な虚軸上にある。一般の複素数はこの実数と虚数の二つの要素からなるいわゆる複素数となる。すなわち、実部  $a$  と虚部  $bi$  との二つの要素からなる複素数である。すなわち、1と虚数単位  $i$  でつくられる複素数を  $a + bi$  と表すことができる（図4参照）。この複素数はいわゆるガウス平面（複素平面）上の一点である。

ここで、一般の複素数  $a + bi$  に後ろから  $i$  をかけてみよう。このとき  $(a + bi)i = -b + ai$  となるが<sup>3</sup>、これを複素平面に描いてみると図4のようになる。これからやはり  $(a + bi)i$  が一般の複素数  $a + bi$  を反時計方向に原点  $O$  のまわりに  $90^\circ$  の回転させることがわかる<sup>\*3</sup>。

## 2.4 複素数の極表示

複素数の  $a + bi$  という表し方はある意味で直交座標系的な表し方である。しかし、複素数の表し方には極座標的な極表示という別の表し方もある。

これは原点  $O$  からの距離  $r$  と実軸の正の方向からの原点  $O$  のまわりの反時計まわりの回転角  $\theta$  で表すことができる。すなわち

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) := re^{i\theta} \quad (2.1)$$

<sup>\*3</sup> 付録1を見よ

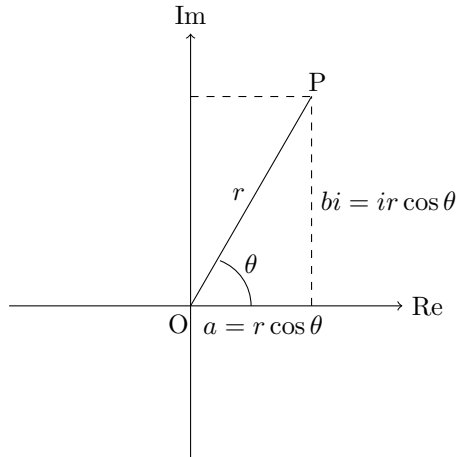


図5 複素数の極表示

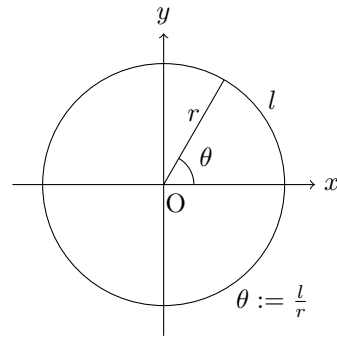


図6 弧度法での角度の定義

と表される (図5 参照). このときに回転角はもちろん度数法で表してもよいが, 数学ではあまり度数法による角度は使わず, 弧度法で角度を表すのが普通である. これは円の半径の長さの同じ円弧の長さをもつ角度を1 ラディアンと決めている (図6 参照).

$$\theta := \frac{l}{r}, \quad r = \text{円の半径}, \quad l = \text{円弧の長さ} \quad (2.2)$$

### 3 Euler の公式

Euler (オイラー) の公式  $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$  は有名な関係式であり, 微積分をちょっと学んだ人ならすぐに証明もできるのだが, 微積分をあまり使わないで証明しようとするとなんとなく難しい. ここでは極限の考え方は使うが, あまり微積分に立ち入らない方法で [1] にしたがって導こう.

これは de Moivre (ド・モワール) の公式

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz \quad (3.1)$$

$$(\cos z - i \sin z)^n = \cos nz - i \sin nz \quad (3.2)$$

から始める<sup>\*4</sup>. これらを  $\cos nz, \sin nz$  について解けば,

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2} \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i} \end{aligned}$$

が得られる. これらの式で  $nz = x$  とおけば,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n})^n + (\cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n})^n}{2} \\ \sin x &= \frac{(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n})^n - (\cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n})^n}{2i} \end{aligned}$$

となる.  $n \rightarrow \infty$  では  $\cos \frac{x}{n} = 1, \sin \frac{x}{n} = \frac{x}{n}$  であるから,

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + i \frac{x}{n})^n + (1 - i \frac{x}{n})^n}{2} \quad (3.3)$$

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + i \frac{x}{n})^n - (1 - i \frac{x}{n})^n}{2i} \quad (3.4)$$

<sup>\*4</sup> de Moivre はフランス風の名前だが, 生涯の大半をイギリスで過ごしたという.

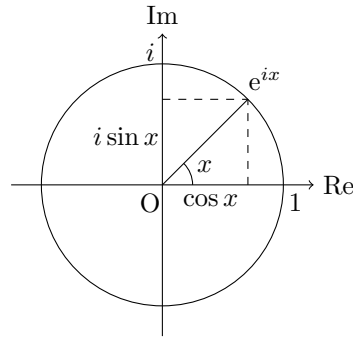


図 7  $e^{ix}$  の機能 (はたらき)

ところで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e = 2.7182818 \dots : \text{Napier 数} \quad (3.5)$$

であるから, この  $e$  を実数  $x$  乗すれば,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \quad (3.6)$$

いま  $nx = t$  とおけば,

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

となる. この式が虚数にも成り立つとすれば, (3.3), (3.4) から

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (3.7)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3.8)$$

が成り立つ. これらの式から Euler の公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  が直ちに得られる. しかし, [1] ではこの導出は数学的には厳密といえないという.

とにかく, Euler の公式は初等数学しか知らない人には難しそうに思えるが,  $e^{ix}$  は図 7 に示したように実軸上の線分  $\overline{O1}$  を原点  $O$  のまわりに角  $x$  だけ回転することだとわかれば, なんら難しいことはない.

こうやって一度 Euler の公式が導かれるとこの関係式に角度  $x = \pi$  を代入すると

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ e^{i\pi} + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

が得られる. (3.9) は数学で出てくる基本的な数  $0, 1, i, \pi, e$  の間に成り立つ美しい関係式といわれる. しかし, これは実軸上にある原点  $O$  と  $1$  とを結ぶ長さ  $1$  の線分を原点  $O$  のまわりに反時計方向に回転角  $x$  を  $180 \text{ 度} = \pi$  だけ回転させると得られる関係式であることを知れば,それほど神秘的な式ではない (図 7 参照).

## 4 虚数の認知

虚数  $i$  が世の中に認められるようになったのは実は 2 次方程式の解ではなくて, 3 次方程式の解においてであったことを簡単に見ておこう [2].

一般の 3 次方程式は

$$x^3 + px + q = 0 \quad (4.1)$$

の形にいつでも変換することができるので、この形の簡約された 3 次方程式を解の公式を使って解くことを考える。

解は Cardano (カルダノ) の公式と呼ばれる、つぎの解の公式で与えられる。  $x^3 + px + q = 0$  の解の公式は

$$r = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (4.2)$$

とおけば、

$$x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \quad (4.3)$$

$$x = -\omega \sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \omega^2 \sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \quad (4.4)$$

$$x = -\omega^2 \sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \omega \sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \quad (4.5)$$

と表される。ここで

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad (4.6)$$

であり、この  $\omega$  は  $x^3 = 1$  を満たす解の一つである。

$$x^3 - 6x + 4 = 0 \quad (4.7)$$

をこのカルダノの公式によって解いてみよう。このとき  $p = -6, q = 4$  である。したがって

$$r^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -4 \quad (4.8)$$

したがって

$$r = \pm 2i \quad (4.9)$$

となる。いま  $r = 2i$  ととれば、

$$\frac{q}{2} + r = 2 + 2i \quad (4.10)$$

$$\frac{q}{2} - r = 2 - 2i \quad (4.11)$$

したがって、

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} = \sqrt[3]{2 + 2i} = -1 + i \quad (4.12)$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} = \sqrt[3]{2 - 2i} = -1 - i \quad (4.13)$$

であるから

$$x = -(-1 + i) - (-1 - i) = 2 \quad (4.14)$$

$$x = -(-1 + i)\omega - (-1 - i)\omega^2 = -1 + \sqrt{3} \quad (4.15)$$

$$x = -(-1 + i)\omega^2 - (-1 - i)\omega = -1 - \sqrt{3} \quad (4.16)$$

となるから解は

$$2, \quad -1 + \sqrt{3}, \quad -1 - \sqrt{3} \quad (4.17)$$

これからわかるように  $x^3 - 6x + 4 = 0$  の解はすべて実数である．ところが解の公式での計算では途中で虚数  $i$  が出てきた． $i$  という数をみとめないと上に求めた実数の解は見つからないことになる．

もっとも因数定理を使って、この 3 次方程式を解くことはもちろんできる．

## 5 四元数へのステップ

この虚数  $i$  を回転であるとする考えは四元数へのステップとなった．この節では四元数への端緒となった第 2 の虚数単位  $j$  の発見について述べておこう．

複素数は 2 つの元  $1$  と  $i$  から成り立っている．元  $i$  は  $-1$  の平方根  $\sqrt{-1}$  を表している．すなわち、 $i := \sqrt{-1}$  である．この  $i$  は図 8 のように線分  $\overline{01}$ （これを以後単に元  $1$  とよぶ）を原点  $O$  を中心にして  $\pi/2 = 90^\circ$  だけ回転すれば得られる．すなわち、この  $i$  は実軸上の元  $1$  に垂直である<sup>\*5</sup>．さらに  $i$  を  $\pi/2 = 90^\circ$  だけ回転すれば  $-1$  が得られる．

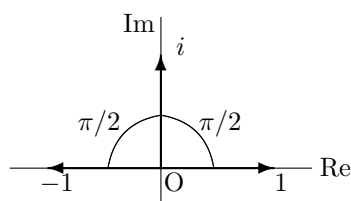


図 8  $i$  と  $i^2 = -1$  の図形表示

Hamilton はこの  $i$  以外に  $1$  および  $i$  に対して垂直な第 3 の元（すなわち、第 2 の虚数単位）があることに気がついた．これを  $j$  と表す．この  $j$  は図 9 のように表される． $i^2 = -1$  であるように図 9 から  $j^2 = -1$  であることがわかる．したがって、 $j = \sqrt{-1}$  である．また、 $j \neq i$  であることもわかる．このように  $i$  とは異なる  $j$  とい

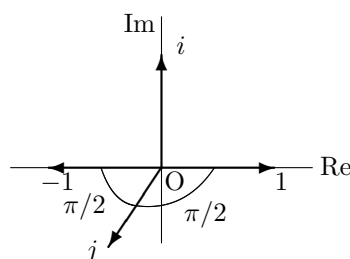


図 9  $j$  と  $j^2 = -1$  の図形表示

う第 3 の元があることが予想されたから、Hamilton は 3 つの元  $1, i, j$  をもつ数  $a + bi + cj$  を「三元数」とよんだ．ここで  $a, b, c$  はいずれも実数である．

三元数の足し算、引き算には困ることは何もない．しかし、かけ算を考えると、そこには必ず虚数単位の積  $ij$  が現れてくる．この積  $ij$  は果たして  $ij = a1 + bi + cj$  といつでも表されるのであろうか．それとも？．

結論を言ってしまうと  $ij$  は  $ij = a1 + bi + cj$  と表すことができない．これは新しい虚数単位  $k$  に等しいとしなくてはいけないことがわかった．それで「三元数」は世の中に存在せず、四元数があることが発見された．だが、この四元数の発見の経緯に関心を持たれた方は [3] を読んでいただくのがよい．

<sup>\*5</sup> 元  $1$  は始点  $O$  で終点  $1$  のベクトルと考えることもできる．同様に元  $i$  は始点  $O$  で終点  $i$  のベクトルと考えることもできる．以下同様である．

## 6 おわりに

任意の実数に  $-1$  をかけることは実数を表す数直線を原点  $O$  のまわりに  $180$  度反時計方向に回転することであるという考えは代数における正の数と負の数のかけ算の符号をきめる規則を理解する上で役に立つ。しかし、それだけではなく、実は虚数単位  $i$  の導入にも使われる。そして、実数は直線上に存在するが、複素数が平面上に存在することとなった。

そういうふう導入された虚数ではあったが、それは 3 次方程式の解においてようやく必要不可欠のものであるという認識へと導かれた。

さらに、この複素平面に垂直なもう一つの平面を考えると複素平面上の虚数単位  $i$  と全く同様なもう一つの虚数単位  $j$  の存在に Hamilton が気がついた。

それから、Hamilton は 3 元数  $a+bi+cj$  と  $p+qi+rj$  との積を考えて、この積の考察から、四元数  $a+bi+cj+dk$  が必然的に考えられることとなった。

話の筋だけを述べたので、四元数について詳しいことを知りたい方は引用した文献を見られるとよい。

## 7 付録

### 7.1 付録 7.1 複素数 $a+bi$ と $-b+ai$ との直交性

図 4 が複素平面であることを忘れて普通の平面座標だとすれば、 $a+bi$  は原点と点  $(a,b)$  を通る直線であるから、その傾きは  $\frac{b}{a}$  であり、同様に  $-b+ai$  は原点と点  $(-b,a)$  を通る直線であるから、その傾きは  $-\frac{a}{b}$  である。したがって、それらの二つの直線の傾きの積は  $\frac{b}{a} \cdot -\frac{a}{b} = -1$  となるので二つの直線はたしかに直交している。

または次のように考えてもよい。複素数  $a+bi$  を  $\mathbf{r} = (a,b)$  と 2 次元ベクトルと考え、 $-b+ai$  を  $\mathbf{R} = (-b,a)$  とやはり別の 2 次元ベクトルと考えれば、2 つのベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{R}$  とのスカラー積  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = a(-b) + ba = 0$  となり、スカラー積が 0 となる。すなわち、ベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{R}$  とは直交していることがわかる。

### 7.2 付録 7.2 $i$ の平方根

最近読んだ『ピタゴラスからオイラーまで』 [4] にあったちょっとおもしろい問題をここで述べておこう。それは  $i$  の平方根を求めるというものである。すなわち、「方程式  $x^2 = i$  の解を解けということです」と [4] に述べられており、つづけて「しかし、 $\pm\sqrt{i}$  は正解ではありません」と書かれている。中学生ならこの説明にとまどってしまうかもしれない。

説明は以下の通りである。

求める  $i$  の平方根は複素数であるから  $a+bi$  とおく。

$$(a+bi)^2 = i \tag{7.1}$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = i \tag{7.2}$$

これから

$$a^2 - b^2 = 0 \tag{7.3}$$

$$2ab = 1 \tag{7.4}$$

が成り立たなければならない。(7.3) から

$$(a+b)(a-b)=0 \quad (7.5)$$

$$b=\pm a \quad (7.6)$$

ところで (7.4) から  $ab > 0$  であるから,  $a, b$  とは同符号でなければならない. したがって,  $b = a$  である. なぜならもし,  $b = -a$  なら,  $b$  と  $a$  とは同符号ではないから.

$b = a$  を (7.4) へ代入すると

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 1 \\ a^2 &= \frac{1}{2} \\ a &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

これから

$$b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.8)$$

となり, したがって  $i$  の平方根は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad (7.9)$$

となる.

ちょっと解が意外な感じがするので, 念のためにこれらの解の 2 乗を考えてみると

$$\begin{aligned} \left[ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right]^2 &= \frac{1}{2}(1+i)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1-1+2i) \\ &= i \end{aligned} \quad (7.10)$$

となって, ちゃんとその 2 乗は  $i$  となっている.

### 7.3 付録 7.3 四元数における $\alpha^2 = -1$ の解

複素数だと  $x^2 = -1$  は  $x = \pm\sqrt{-1}$  で解は 2 つしかない. ところが, これが四元数になると事情が大いに異なってくる.

Hamilton が四元数を発見するきっかけとなったのは複素数で使われている虚数単位  $i$  以外に, 別の虚数単位  $j$  という 2 乗して  $-1$  になる数があるという発見だったとは 5 節に書いたが, 実は四元数  $\alpha$  では  $\alpha^2 = -1$  となる四元数  $\alpha$  は無限にある. これはすでに小著『四元数の発見』[3] でも書いたが, その議論をしてみよう.

四元数を  $\alpha = w + xi + yj + zk$  と表す. ここで,  $w, x, y, z$  は実数である. これから  $\alpha^2 = (w + xi + yj + zk)^2 = -1$  となる  $w, x, y, z$  を求める.

$$[w^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] + 2w(xi + yj + zk) = -1 \quad (7.11)$$

であるから

$$w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = -1 \quad (7.12)$$

$$2wx = 0 \quad (7.13)$$

$$2wy = 0 \quad (7.14)$$

$$2wz = 0 \quad (7.15)$$

が得られる．この方程式を解けば，解として

$$w = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ をみたす } x, y, z \quad (7.16)$$

が求められる．すなわち， $\alpha^2 = -1$  の解は半径 1 の球面上の点すべてである．したがって，この解の数は連続無限個数ある．

その解の中には

$$w = y = z = 0, x = \pm 1 \quad (7.17)$$

$$w = x = z = 0, y = \pm 1 \quad (7.18)$$

$$w = x = y = 0, z = \pm 1 \quad (7.19)$$

も含まれる．

なお，

$$w = x = y = z = 0$$

$$w = \text{任意の実数}, x = y = z = 0$$

の 2 つの場合は解にならない．

## 7.4 付録 7.4 文献紹介

2017 年 12 月に東京に行っていたときに，読んだ数学の本で虚数の導入のしかたのわかりやすい記述を見た．それは岡本和夫『微積分読本』の冒頭部にあった．

もちろん，こういう導入のしかたは知っていたが，なかなか簡明であった．それで，そういう導入のしかたの記述を文献上で辿ることは意味があるのではなかろうかと思い始めた．

一応，私の知っている文献をここにあげておく．

新しい順に時間的にさかのぼる．

もっとも新しいと私が思っているのは私の編纂した『電気電子工学科ミニマム』 [5] であろう．これは 2001 年の第 3 版にも再録されている．

つぎに新しいのは冒頭に与えた岡本和夫『微積分読本』 [6] であろう．さらに，長沼伸一郎の『物理数学の直観的方法』 [7] の第 2 版を開いてみたら，第 4 章に「 $e^{i\pi} = -1$  の直観的イメージ」というタイトルがついており，実軸の原点から 1 のところへの線分の 180 度回転が  $e^{i\pi} = -1$  であることを書いてある．もっとも直観的には，実軸の 1 の位置にある点 (1, 0) を原点 (0, 0) のまわりに  $\pi = 180^\circ$  反時計まわりに回転させれば， $(-1, 0)$  が得られるということなので，神秘的なことはなにもない．

これより前には遠山啓『数学入門』上 [8] にある．それより古い記述は私の使った高校の学習参考書である，藤森良夫『解析の基礎』続 [9] である．これはもっと古くほとんど同じ記述が藤森良夫『初等複素関数論初歩』にすでに載っている [10]．もっともそれよりも古い記述は E. T. Bell (田中・銀林訳)『数学をつくった人びと』 [11] であるが，これは新装版が 1976 年に出版されており，そのあとがきによれば，4 分冊で出版された訳書の第 1 分冊の発行は 1962 年だとある．私の持っているのは新々装版で 1997 年である．この訳書の原書は E. T. Bell “Men of Mathematics” [12] である．

私はこれより古い書での記述は知らない．数学史等に関心のある人なら，すでに Bell の原著を読んでいただろう\*6．

(2020.4.8)

---

\*6 2017 年の年末に高知に小旅行して，立ち寄った帯屋町の書店で数学書を立ち読みしたら，ランスロット・ホグベンの『百万人の数学』（日本評論社）下（新訳）の何ページかに虚数単位  $i$  を 90 度の回転として解釈することが触れてあるのを見かけた．（次頁に続く）

## 参考文献

- [1] 志賀浩二, 『無限の中の数学』(岩波新書, 1995) 131-137
- [2] 矢野 忠, 虚数とカルダノの公式, 数学・物理通信 5 巻 3 号 (2015.3.9) 2-13
- [3] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014)
- [4] 坂江 正, 『ピタゴラスからオイラーまで』(海鳴社, 2014) 338
- [5] 矢野 忠, 『電気電子工学科ミニマム』(愛媛大学電気電子工学科, 2000) 第 2 版 48-49
- [6] 岡本和夫, 『微積分読本』(朝倉書店, 1997) 1-2
- [7] 長沼伸一郎, 『物理数学の直観的方法』(通商産業研究社, 1987) 39-48
- [8] 遠山啓, 『数学入門』上(岩波新書, 1959) 195-196
- [9] 藤森良夫, 『解析の基礎』続(考え方研究社, 1954) 628-629
- [10] 藤森良夫, 『初等複素関数論初歩』(考え方研究社, 1941) 20 - 21
- [11] E. T. Bell (田中・銀林訳), 『数学をつくった人びと』上(東京図書, 1997) 194
- [12] E. T. Bell, “Men of Mathematics” (Whitefriars Press, 1937)

---

これ以外にもトビマス・ダンチヒの『数は科学の言葉』(ちくま学芸文庫)にも同じような記述があることを見つけた。

これだけいろいろな本に虚数単位  $i$  のことが書かれてあるのに、もっと 90 度の回転としての虚数単位  $i$  の説明がもっと普及していいのではないかと考えている。トビマス・ダンチヒの『科学の言葉=数』は昔に岩波書店から訳書が出ていたと思うが、数学ぎらいの私は一度もこの書を読んだことがない。

ホグベンの『百万人の数学』上, 下の筑摩書房版をもっているが、虚数単位の導入について見たことがなかった。この説明が新訳ではじめて入ったのかどうかはまだ調べてはいない。

# 行列の積の定義

矢野 忠<sup>\*1</sup>

Definition for the Product of Matrix

Tadashi YANO<sup>\*2</sup>

## 1 はじめに

「数学セミナー」(2020 年 4 月号)の特集「数学のつまづき方」の中の数学者、千葉逸人さんの「数学との向き合い方」を読んでいたら、Q & A の一番はじめに

Q. 行列のかけ算はどうしてあのよう定義するのでしょうか。

という問いがあって、それに千葉さんは、つぎのように答えられていた<sup>\*3</sup>。

A.  $B$  を  $n \times n$  行列,  $v$  を  $n$  次元の縦ベクトルとすると、かけ算をあのよう定義しておく

$$(AB)v = A(Bv) \quad (1.1)$$

が成り立つからです。

とあった。しかし、世の中にはこの答えで、十分納得できるような秀才ばかりではあるまいと思った。その思いがこのエッセイを書く動機である。

## 2 行列の積の定義

大学で行列のかけ算の定義を学んだときには、それにあまり疑問を感じなくて、その理由を知りたいなど思うようになったのは行列のかけ算を学んでから、おそらくは 20 年以上も経ったころであった。

私が行列のかけ算を学んだテキストは、矢野健太郎『代数学と幾何学』[2]であった。そのときに担当の光藤先生は 1 次変換を 2 つ連続して行う面倒な計算をされた。そのときなんでこんな面倒な計算をするのだろうと思ったことを覚えている。これが行列のかけ算の定義をする根拠になっているという理解はそのときにまったくなかった。まあおきはいいかげんにして、本題に入りたい。

空間に、一点  $O$  を始点とする 1 次独立なベクトル  $e_1, e_2, e_3$  があるとき、この点  $O$  を始点とする位置ベクトル  $OP = r$  は

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (2.1)$$

と表される。ここで  $(x_1, x_2, x_3)$  は点  $P$  の座標系  $(e_1, e_2, e_3)$  に関する座標である。

いま、任意のベクトル  $r$  を他のベクトル  $r'$  に移す操作を

$$r' = T(r) \quad (2.2)$$

---

<sup>\*1</sup> 元愛媛大学工学部

<sup>\*2</sup> yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>\*3</sup> 千葉逸人さんといえば、京都大学在学中に『工学部で学ぶ数学』[1]を出版された方である。そんなことができる学生がいるなんて信じられなかったが、これは事実であった。この本のまえがきにその当時京都大学に勤務されていた、谷村省吾先生への謝辞が書かれてあった。

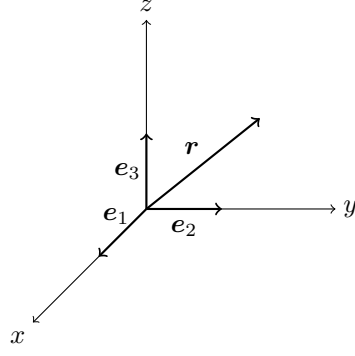


図1 1次独立なベクトル  $e_1, e_2, e_3$  と位置ベクトル  $r$

で表す.

このとき  $T$  が,  $a$  をスカラー,  $r, r'$  を任意のベクトルとして

$$T(ar) = aT(r), T(r + r') = T(r) + T(r') \quad (2.3)$$

をみたすなら,  $T$  を1次変換という.  $T$  を1次変換として

$$T(e_1) = e'_1, T(e_2) = e'_2, T(e_3) = e'_3 \quad (2.4)$$

とすれば,  $e'_1, e'_2, e'_3$  は1次独立な  $e_1, e_2, e_3$  を用いて

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \quad (2.5)$$

$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \quad (2.6)$$

$$e'_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \quad (2.7)$$

と書き表される.

ここで, 1次変換

$$r' = T(r) \quad (2.8)$$

を考える.

$$\begin{aligned} r' &= T(r) \\ &= T(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) \\ &= x_1e'_1 + x_2e'_2 + x_3e'_3 \\ &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3) \\ &\quad + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3) \\ &\quad + x_3(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるから,

$$\begin{aligned} r' &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)e_1 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)e_2 \\ &\quad + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)e_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる. 一方,  $r'$  は  $(e_1, e_2, e_3)$  で表せば

$$r' = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3 \quad (2.11)$$

であるから

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad (2.12)$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad (2.13)$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (2.14)$$

が成り立つ。(2.12), (2.13) と (2.14) を普通には

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

と表す.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

を行列 (matrix) といい,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

や

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

を縦ベクトル (column vector) という.

(2.15) は 1 次変換であるが, これは  $(x_1, x_2, x_3)$  から  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  への 1 次変換という. これは

$$\mathbf{r}' = T(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

を座標で表したものであったが, ベクトル  $\mathbf{r}'$  からさらに別のベクトル  $\mathbf{r}''$  への 1 次変換を考える. これを

$$\mathbf{r}'' = U(\mathbf{r}') \quad (2.20)$$

と表す.  $U$  は  $T$  とは一般には異なる 1 次変換である.

この  $U$  を座標  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  から  $(x''_1, x''_2, x''_3)$  への 1 次変換として

$$x''_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \quad (2.21)$$

$$x''_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \quad (2.22)$$

$$x''_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \quad (2.23)$$

と表す. この 2 つの 1 次変換をつづけて座標  $(x_1, x_2, x_3)$  から  $(x''_1, x''_2, x''_3)$  への 1 次変換を求めることを考える. この合成された 1 次変換をつくるには  $(x''_1, x''_2, x''_3)$  を  $(x_1, x_2, x_3)$  で表せばよい.

これは, たとえば,  $x''_1$  では

$$\begin{aligned} x''_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ &\quad + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &\quad + b_{13}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})x_1 \\ &\quad + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})x_2 \\ &\quad + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})x_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる.

$x_1, x_2, x_3$  の前の係数はそれぞれ

$$b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j1} \quad (2.25)$$

$$b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j2} \quad (2.26)$$

$$b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j3} \quad (2.27)$$

と表される. この最後の形を用いると

$$x_1'' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \quad (2.28)$$

で  $c_{11}, c_{12}, c_{13}$  はそれぞれ

$$c_{11} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j1}, \quad c_{12} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j2}, \quad c_{13} = \sum_{j=1}^3 b_{1j}a_{j3} \quad (2.29)$$

と表される.

これからすぐに推察されるように,  $x_2'', x_3''$  から

$$x_2'' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \quad (2.30)$$

$$x_3'' = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \quad (2.31)$$

と表されることがわかり, これから

$$c_{21} = \sum_{j=1}^3 b_{2j}a_{j1}, \quad c_{22} = \sum_{j=1}^3 b_{2j}a_{j2}, \quad c_{23} = \sum_{j=1}^3 b_{2j}a_{j3} \quad (2.32)$$

$$c_{31} = \sum_{j=1}^3 b_{3j}a_{j1}, \quad c_{32} = \sum_{j=1}^3 b_{3j}a_{j2}, \quad c_{33} = \sum_{j=1}^3 b_{3j}a_{j3} \quad (2.33)$$

(2.29), (2.32) と (2.33) をまとめて表せば,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^3 b_{ij}a_{jk}, \quad (i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

となる. 一般の行列の積の定義には  $i, j, k$  の値の取り方を変えればよい.

まとめると

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{r}'' = B\mathbf{r}' \quad (2.36)$$

とするとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= B\mathbf{r}' \\ &= B(A\mathbf{r}) \\ &= (BA)\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.37)$$

となり，これから行列  $A, B$  の積は

$$BA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

と定義される．ここで， $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{33}$  は (2.29), (2.32), (2.33) で定義されている．

上に述べたことは行列  $B$  と  $A$  との積の定義を納得してもらうための例示にしかすぎない．しかし，証明ではないが，これで多くの人が行列の積の定義を納得できるのではなかろうか．

(2.37) の最後の 2 式が成り立つことを千葉逸人さんは簡潔に (1.1) として述べられたらしい．

### 3 おわりに

最近の線形代数のテキストがどのように行列の積の定義をしているのかあまり詳しく調べたことがない．いろいろな行列の積の導入があるだろう．それらをいつか詳しく調べてみたいと思っているが，本当にそれができるかどうかはわからない．少なくとも私はこういうふうに行列の積の定義を理解しているというにすぎない．

最近ではもっと簡単に行列の積を理解できるように教え方も進んでいると思う．

(2020.4.5)

### 参考文献

- [1] 千葉逸人，『工学部で学ぶ数学』（プレアデス出版，2003）
- [2] 矢野健太郎，『代数学と幾何学』（裳華房，1958）100-102

## 編集後記

早くも、2回目の編集後記を書く順番が回ってきました。それにつけても、昨今のコロナ騒ぎは凄まじいものですね。最近はコロナのことを考えるのもイヤになってきました。ただただ、自分が感染者に選ばれないことを願うばかりです。

今号には、編集長の矢野忠さんが書かれた「複素数の導入」というエッセーがあります。この中に「四元数」のことが書かれています。私は四元数については、まったくの素人ですが、これを読んで考えたこと、というよりは瞑想、いや、迷想してしまったことを書いておきます。

四元数には3個の虚数単位  $i, j, k$  があり、 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  となっています。これらには、積の関係、 $ij = k, jk = i, ki = j$  が成立します。これは  $i$  と  $j$  の2個だけでは完結せずに、どうしてももう1個の  $k$  が必要になる関係式です。ちょうど、2本脚の机を作っても役にはたらず、立たせるためには最低3本の脚を付ける必要があるのと同じです。また、4本脚にすると確かにそれで十分ではありますが、脚の長さを正確に同じにしておかないとガタツキが生じます。

これとよく似たものに、パウリのスピン行列  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  があり、これも  $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$  という同じような関係式が成立しています。このパウリのスピン行列は3次元空間における回転群の表現に必要不可欠のもので、これなくしては電子のスピンを理解することはできません。

また、以前に、この「数学・物理通信」に「三すくみ方程式」ということで記事を書いたことがあります。これは A, B, C という3種の生き物があり、A は B を食べ、B は C を食べ、C は A を食べるというもので、これらの繁殖過程を方程式にすると

$$\frac{dA}{dt} = AB - CA, \quad \frac{dB}{dt} = BC - AB, \quad \frac{dC}{dt} = CA - BC$$

となり、この方程式は楕円関数を用いて解くことができます。具体的に、この A, B, C は、「蛇」「蛙」「ナメクジ」と言われていますが、ジャンケンの「グー」「チョキ」「パー」に例えるとすぐに納得できます。これが4種の生き物になってしまうとそれらの間の関係は6通りになってしまい3種のときのようなきれいな対称性を持った式が作れなくなってしまいます。

こう考えてくると「三」という数字には何か魔法のような力が備わっているような気がしてきます。これは、私たちの住む空間が3次元だからでしょうか。と思って、辞書で調べてみると「三」が付く諺(ことわざ)はたくさんあります。例をあげると、「三顧の礼」「三度目の正直」「三度の飯」「三人寄れば文殊の知恵」などです。本屋さんの「三省堂」はと思って、これも調べてみると、中国の古典「論語」にある「不忠、不信、不習について、日に幾度となくわが身を省みる」からとった名前だそうです。これらは「三」が良い意味で使われる例ですが、逆に悪い意味で使われる例は、「二束三文」「舌先三寸」「女三界に家なし」など、また、最近では「三密」などというもののまであります。くだらない小説を書く人を「三文文士」と言いますが、私のように、いつもくだらない数式をいじくりまわしている人は「三文学者」ということになるのでしょうか。

(世戸憲治)