数学・物理通信

10 巻 7 号　　2020 年 9 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2020 年 9 月 8 日

目次 (Contents)

積分方程式における興味ある問題 (1)
ー球状星団における星の分布密度ー

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Integral Equation(1)
ーDistribution Density of Stars in Globular Clusterー

Kenji SETO*

1　はじめに

「はじめての逆問題」(『数理科学』別冊，サイエンス社, C.W.Groetsch 著，大西和榮・田沼一実・山本昌宏訳) を読んでみた．この中から興味ある問題をいくつか取り上げて解説する．今回は，その初めとして，球状星団における星の分布密度を求める問題を扱う．と言っても，これは力学的に分布密度を求める問題ではなく，2 次元的観測値から 3 次元的な星の分布密度を再現するという幾何学の問題である．もちろん，これはこの本の中から拾っているので，私にはほとんどオリジナリティはないのであるが，できるだけ理解しやすい形で紹介することにする．

2　球状星団における星の分布密度を求める問題

2.1　方程式の導入とその解法

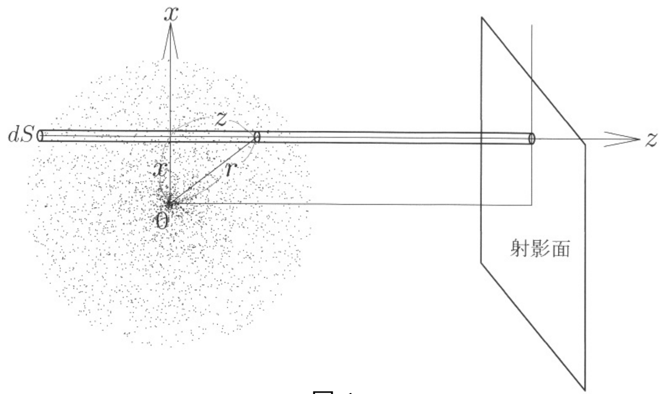

図 1

球状星団を地球から観測すると，実際には 3 次元的に星が分布しているのを，その射影された 2 次元平面で見てしまうことになる．この 2 次元的な観測結果から 3 次元的な星の分布を求めるにはどのようにするとよいかという問題である．ただし，星の分布密度は，球対称，すなわち，その中心からの距離のみの関数になっている

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ものと仮定する．

図 1 に示すように球状星団の中心 O から距離 x だけ離れたところを通る断面積 dS の細い円柱を考え，この円柱に沿った座標を z 軸とする．ただし，この z 軸は，この円柱が星団の中心に一番近いところをその原点にとることにする．いま，この円柱の座標が z のところを考え，その点の星団中心 O からの直線距離を r とする．星の分布密度 (体積密度) ρ は，先の仮定により r のみの関数 $\rho = \rho(r)$ とする．この円柱に沿って，点 z から微小長さ dz の区間に存在する星の個数は $dSdz\rho(r)$ となるので，それを射影した面で見たときの円柱内に含まれる星の総個数は，この円柱のすべてに渡る積分 $dS\int_{-\infty}^{\infty}\rho(r)dz$ となる． これから射影された面で見たときの星の分布密度 (面密度) を $k(x)$ とすると，$k(x)$ はこの積分値を断面積 dS で割ったものになるので，

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(r)dz \tag{2.1}$$

と定義される．以後，この $k(x)$ のことを射影密度と呼ぶ．また，ここで，形式的に積分範囲を無限大としてあるが，実際は星が存在する範囲であればよい．この図から明らかなように，

$$x^2 + z^2 = r^2 \tag{2.2}$$

なので，この積分の積分変数を z から r に替えると，$z > 0$ の側で，

$$dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{2.3}$$

となり，(2.1) 式の積分は

$$k(x) = 2\int_{x}^{\infty}\frac{\rho(r)rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{2.4}$$

となる．ここで，2 倍が付いたのは $z < 0$ からの寄与も同じ大きさで存在するからである．問題は，この式から，観測値である射影密度 $k(x)$ が与えられたものとして，星の分布密度 $\rho(r)$ を求めることである．

その解法は，まず，この式の両辺に $x/\sqrt{x^2 - s^2}$ を掛けてから x で s から ∞ まで積分することとし，r と x の積分順序を入れ替えると，

$$\int_{s}^{\infty}\frac{k(x)xdx}{\sqrt{x^2 - s^2}} = \int_{s}^{\infty}\frac{2xdx}{\sqrt{x^2 - s^2}}\Big[\int_{x}^{\infty}\frac{\rho(r)rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}}\Big] = \int_{s}^{\infty}\rho(r)rdr\Big[\int_{s}^{r}\frac{2xdx}{\sqrt{(x^2 - s^2)(r^2 - x^2)}}\Big] \tag{2.5}$$

となる．このうちの x 積分のところだけを取り出し，積分変数を x から t に，

$$x^2 - s^2 = (r^2 - s^2)t \tag{2.6}$$

と変換すると，

$$\int_{s}^{r}\frac{2xdx}{\sqrt{(x^2 - s^2)(r^2 - x^2)}} = \int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi \tag{2.7}$$

と r にも s にも依存しない定数となる．ここに，B はベータ関数，Γ はガンマ関数である．この結果から，(2.5) 式は

$$\int_{s}^{\infty}\frac{k(x)xdx}{\sqrt{x^2 - s^2}} = \pi\int_{s}^{\infty}\rho(r)rdr \tag{2.8}$$

と簡単化される．この両辺を s で微分してから，改めて s を r と書き直すと，

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_{r}^{\infty}\frac{k(x)xdx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{2.9}$$

と，星の分布密度 $\rho(r)$ が，観測値である射影密度 $k(x)$ の関数として求められる．実は，ここでの計算がこれほどにうまくできるのは，積分方程式 (2.4) が前に議論したことがある Abel の積分方程式と構造的に似た形になっているためである．特に，(2.4) (2.9) の形の式は Abel 変換と呼ばれるものの一種である．これらのことについては，「Abel の積分方程式」(『数学・物理通信』5 巻 8 号) を参照されたい．そこでは同じような計算がなされている．

2.2　具体例：その 1

初めに最も簡単な例として，球状星団の密度 $\rho(r)$ を，半径 r_0 の範囲で一定値 ρ_0

$$\rho(r) = \rho_0\,\theta({r_0}^2 - r^2) \tag{2.10}$$

とした場合の射影密度 $k(x)$ を求める．ここに θ は階段関数である．(2.4) 式から

$$k(x) = \rho_0 \int_x^{r_0} \frac{2rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ \theta({r_0}^2 - x^2) = 2\rho_0\sqrt{{r_0}^2 - x^2}\ \theta({r_0}^2 - x^2) \tag{2.11}$$

と求められる．

2.3　具体例：その 2

逆に射影密度の $k(x)$ を，半径 r_0 の範囲内で一定値 k_0

$$k(x) = k_0\,\theta({r_0}^2 - x^2) \tag{2.12}$$

とした場合の星の分布密度 $\rho(r)$ を求めてみよう．(2.9) 式から

$$\begin{aligned} \rho(r) &= -\frac{k_0}{\pi r}\Big(\frac{d}{dr}\int_r^{r_0}\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - r^2}}\Big)\theta({r_0}^2 - r^2) \\ &= -\frac{k_0}{\pi r}\Big(\frac{d}{dr}\sqrt{{r_0}^2 - r^2}\Big)\,\theta({r_0}^2 - r^2) = \frac{k_0}{\pi\sqrt{{r_0}^2 - r^2}}\theta({r_0}^2 - r^2) \end{aligned} \tag{2.13}$$

と求められる．ただし，この解は $r \to r_0$ で密度が発散してしまうので，現実にはあり得ない解であろう．

2.4　具体例：その 3

球状星団の星の分布密度 $\rho(r)$ を

$$\rho(r) = \rho_0\Big(\frac{{r_0}^2 - r^2}{{r_0}^2}\Big)^\alpha\,\theta({r_0}^2 - r^2) \tag{2.14}$$

としたときの射影密度 $k(x)$ を求める．ここに，ρ_0, r_0 は，それぞれ，体積密度，長さの次元を持つ正定数，α は無次元の定数とする．ただし，この分布密度が，$r \to r_0$ で発散してしまわないために，

$$\alpha \geq 0 \tag{2.15}$$

を条件として課しておく．これを (2.4) 式に代入し，積分変数を r から t に，

$${r_0}^2 - r^2 = ({r_0}^2 - x^2)(1 - t) \tag{2.16}$$

と変換すると,

$$
\begin{aligned}
k(x) =&\rho_0 \int_x^{r_0} \frac{2rdr}{\sqrt{r^2-x^2}} \Big(\frac{{r_0}^2-r^2}{{r_0}^2}\Big)^\alpha \ \theta({r_0}^2-x^2) \\
=&\rho_0 \frac{({r_0}^2-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{{r_0}^{2\alpha}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha dt\ \theta({r_0}^2-x^2) \\
=&\rho_0 \frac{({r_0}^2-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{{r_0}^{2\alpha}} B(\tfrac{1}{2},\ \alpha+1)\ \theta({r_0}^2-x^2)
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

と求められる．もちろん，この結果で $\alpha=0$ としたものは，(2.11) 式と一致する．

2.5　具体例：その 4

逆に射影密度 $k(x)$ の方を，

$$
k(x) = k_0\Big(\frac{{r_0}^2-x^2}{{r_0}^2}\Big)^\beta \ \theta({r_0}^2-x^2) \tag{2.18}
$$

とおいたときの星の分布密度 $\rho(r)$ を求める．ここに，k_0，r_0 は，それぞれ，面密度，長さの次元を持つ正定数，β は，先の例と同じく $\beta \geq 0$ を満たす無次元定数である．これを (2.9) 式に代入し，x から t への変数変換

$$
{r_0}^2-x^2 = ({r_0}^2-r^2)(1-t) \tag{2.19}
$$

を施すと，

$$
\begin{aligned}
\rho(r) =& -\frac{k_0}{\pi r}\Big[\frac{d}{dr}\int_r^{r_0} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-r^2}}\Big(\frac{{r_0}^2-x^2}{{r_0}^2}\Big)^\beta\Big]\,\theta({r_0}^2-r^2) \\
=& -\frac{k_0}{2\pi r}\Big[\frac{d}{dr}\frac{({r_0}^2-r^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{{r_0}^{2\beta}}\Big]\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\beta dt\,\theta({r_0}^2-r^2) \\
=&\frac{k_0(\beta+\frac{1}{2})}{\pi}\frac{({r_0}^2-r^2)^{\beta-\frac{1}{2}}}{{r_0}^{2\beta}} B(\tfrac{1}{2},\ \beta+1)\,\theta({r_0}^2-r^2)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

と求められる．もちろん，ここで，$\beta=0$ としたときは (2.13) 式の $\rho(r)$ と一致する．

また，この式で $\beta=\frac{1}{2}$ としたとき，$\rho(r)$ は一定値 $k_0/(2r_0)$ となるが，これを ρ_0 とおくと，この式は (2.10) 式と一致し，(2.18) 式の $k(x)$ は (2.11) 式と一致する．

3　おわりに

「はじめに」のところで引用した本は，非常に多岐にわたる話題を取り上げていて，それなりに，興味を引くものも多い．しかし，著者は数学者らしく，次元を無視した書き方が多く，物理屋の私にとっては，ついていけないところも多い．もちろん，物理屋が書いた場合でも変数を無次元化して書くことはあるが，その場合は，必ず，何を基準にして無次元化するかは明記される．計算過程は，次元を付けた変数で書いておく方が，計算ミスの発見につながる．その意味で，私の場合は，よほど数式が面倒にならないかぎり，次元付き変数を使うように心がけている．

ここでは最後のところで，具体的計算例を 4 つ述べた．このうち，初めの 2 つは，先の本に出ていたものであるが，それを拡張したオリジナルのものを 2 つ付け加えておいた．

これも原稿段階で，中西襄先生に見ていただいたところ，この種の計算は Y 超関数を用いるともっとすっきりした形で解を求めることができるとのことであった．この方法は，一旦，方程式を合成積の形にもっていき，その後，Y 超関数を用いて解くものであるが，ここでは，方程式を合成積の形にするところまでを紹介し，その後の Y 超関数を用いた解法については，次回以降の号で紹介することにする．なお，Y 超関数については，中西襄著「微分方程式」(丸善出版 2016 年) 第 1 章 10 節を参照していただきたい．

(2.4) 式をもう一度引用すると，

$$k(x) = 2\int_x^\infty \frac{\rho(r)rdr}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{3.1}$$

であるが，ここで，独立変数 r, x を

$$\frac{1}{r^2} = R, \qquad \frac{1}{x^2} = X \tag{3.2}$$

と変換し，これに伴い従属変数 $\rho(r)$, $k(x)$ の方も

$$\rho(r)R^{-3/2} = D(R), \qquad k(x)X^{-1/2} = K(X) \tag{3.3}$$

と変換する．この変換で方程式は

$$K(X) = \int_0^X \frac{D(R)dR}{\sqrt{X-R}} \tag{3.4}$$

となるが，ここで，

$$G(R) = \frac{1}{\sqrt{R}} \tag{3.5}$$

と置くことにすると，

$$K(X) = \int_0^X G(X-R)D(R)dR \equiv [G*D](X) \tag{3.6}$$

と合成積を用いた形に変換される．このあと，$K(X)$ を既知として，未知関数 $D(R)$ を求める方法として，Laplace 変換を使う方法と Y 超関数をを使う方法がある．この 2 つの方法について次回以降，これと似た問題で議論することにする．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき，「おわりに」のところに書いたように大変有意義なアドバイスをいただきました．ここに，謹んで感謝申し上げます．

危ないベッセル関数の公式 (訂正)
ー世戸論文に関連してー

中西　襄 *

Risky Formula for the Bessel Function (Errata)
- In Connection with Seto's Paper -

Noboru NAKANISHI*

この拙論文 (「数学・物理通信」8 巻 7 号 : 2018.9) に誤りが見つかったので，お詫びして訂正したい．

結果の式 (2.7) で，右辺第 1 項分母において因子 $m!$ が抜け落ちていた．正しい式は

$$J_{-n}(x)\theta(x) = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{2^{n-2m}(n-m-1)!}{m!\,(n-2m-1)!}\delta^{(n-2m-1)}(x) + (-1)^n J_n(x)\theta(x)$$

である．従ってつぎの (2.8) 式も同様である．

誤りの原因は (4.10) 式から (4.11) 式に行くとき，ケアレスミスで，$m!$ を書き落としたようである．従ってつぎの (4.12) 式も $m!$ が抜けている．しかし，(4.13) 式の例では，この影響はきかない．

なお，(4.10) 式は書き間違いがある．最後の因子 $Y_{\nu+2m}(x)$ は $x^m Y_{\nu+m+1}(x)$ としなければならない．これは入力のさいの思い違いのようだ．

(4.10) 式はまたつぎのように訂正してもよい．最後の因子を

$$\frac{\Gamma(\nu+2m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} Y_{\nu+2m+1}(x)$$

とする．$\nu \to -n$ とおいて，$m \le (n-1)/2$ に対し，上式は

$$(-1)^m \frac{(n-m-1)!}{(n-2m-1)!}\delta^{(n-2m-1)}(x)$$

となるので，レンマを使わずに，直接 (2.7) 式が得られることに気付いた．

****

筆者は眼の難病のため，視力のほとんどを失った．もはや細かい計算はできない．この訂正文も世戸憲治氏に TeX 入力をお願いした．

* 京都大学名誉教授　　E-mail: nbr-nak@trio.plala.or.jp

オイラーの公式—起承転結
Euler's Formula—A Reasoning of History

嶋 喜一郎 *
Kiichiro SHIMA†

1 はじめに

10 年ほど前（2009 年）,「Euler の公式の導出いろいろ」というタイトルの論文（2008.2.2 稿）が送られてきた．わたしはホームページ[1] に「オイラーの公式と複合論」(2005) を投稿していた．それに対する参考文献として送付されたものである．そこには次のような 7 つの導出方法がまとめられていた．

1. Taylor 展開を用いた導出
2. 微分方程式を用いた導出—その 1
3. 微分方程式を用いた導出—その 2
4. de Moivre の公式を用いた導出
5. 新関の導出
6. Euler の導出
7. Euler の発見法的な導出

知っていたのは 1 と 7 だけだった．わたしの論考は基本的に 7. Euler の発見法的な導出と同じもので,『オイラーの無限解析』[2]に依拠した志賀浩二の『無限のなかの数学』[3]を参考にしたものである．公式は『オイラーの無限解析』ではじめて導かれたものと思っていたので，それ以前の導出を示す『グレイゼルの数学史 III』の記述は意外に思われた．矢野忠先生（と呼ばしてもらう，そのときはまったく知らない人だった.）はグレイゼルが言及している論文と『オイラーの無限解析』の前後関係を気にされていた．いいかえると，オイラーの公式の発見は 6. Euler の導出が先で，7. Euler の発見法的な導出は後ではないかということだった.『グレイゼルの数学史 III』の記述は確かにそれを示唆していた．6. Euler の導出は，先生がグレイゼルの記述にもとづいてオイラーの導出を推論したものである．それは自由調和振動の微分方程式の特殊解が推論の基礎になっていて,『オイラーの無限解析』とはまったく違っていた．これについて意見を求められていたのである．

いまにして思えば，そのときは 6. Euler の導出をよく理解できていなかった.『オイラーの無限解析』の導出だけに固執していた．5 年ほど前に「オイラーの公式と弁証法」(2016）をまとめたときも，6. Euler の導出についてはまったく考慮していない．

今年（2020 年）になって,「数学・物理通信」(10 巻 2 号，2020.3.31）に「微分方程式と三角関数」が載った．オイラーの公式が喚起されて,「Euler の公式の導出いろいろ」が「数学・物理通信」[4]に掲載されているのではないかと思い探してみた．すると，4 巻 6 号（2014.9）にあった．改めて読んでみると，6. Euler の導出の意

*岐阜大学工学部卒
†kiichiro-s@cg8.so-net.ne.jp
[1]「対話とアウフヘーベン」http://www016.upp.so-net.ne.jp/shima/
[2]オイラー著/高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』(海鳴社，2001）
[3]志賀浩二『無限のなかの数学』(岩波新書，1995）
[4]http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/ tanimura/math-phys/index.html

味がわかるような気がした．オイラーはたしかに異なったアプローチをしている．6. Euler の導出と 7. Euler の発見法的な導出をつなげば，オイラーの公式の発見過程に迫れるのではないかと思われた．

2 『グレイゼルの数学史 III』より

『グレイゼルの数学史 III』[5]を読んでみよう[6]．

> すでに 1740 年にオイラーは，自由調和振動の微分方程式を考察し，その 2 つの異なった特殊解，$2\cos x$ と $e^{ix}+e^{-ix}$ を得た．それらは級数展開すると同じであることから，オイラーは次の公式を確立した．
>
> $$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{4}$$
>
> 線形 1 階常微分方程式に関する 1743 年の研究論文の 1 つにおいて，オイラーは次の公式を導入した．
>
> $$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \tag{5}$$
>
> 『無限解析入門』で，彼は公式 (1) から出発して，次の公式を確立した．
>
> $$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \end{aligned} \tag{6}$$
>
> これが，最終的に定式化され，証明された有名な《オイラーの公式》で，これからただちに，彼によって前に別の方法で確立された公式 (5)（これも彼の名で呼ばれる）を導いた（確かめてみよ！）．これらの公式の意義についてはオイラー自身が次のように述べている．「ここからわかることは，どのような形で虚数の指数量が現実の円弧のサインとコサインになるかということである」．

1740 年の (4) 式，1743 年の (5) 式，1745 年『無限解析入門』(『オイラーの無限解析』のこと，この出版は 1748 年だが，執筆は 1745 年だという）の (6) 式がある．そしてさらに (6) 式から導かれる (7) 式がある．これは (5) 式と同じものである．

(4) 式はオイラーの公式の半分を捉えたものである．ここにはじめて指数関数と三角関数の結びつきが発見された．オイラーの公式の「起」である．

(5) 式は (4) 式を補完するものである．指数関数と余弦関数の関係に，正弦関数との関係を加えて，指数関数と三角関数の関係へと拡張される．これがオイラーの公式の「承」である．(4) 式は明記してあるように，自由調和振動の微分方程式が根拠になっている．他方，(5) 式の根拠は記されていない．

(6) 式はド・モアブルの公式に極限を導入し，虚数の指数関数と関連させることによって導かれている（公式 (1) は，ド・モアブルの公式である）．(6) と (5) は違った方法で導かれたものである．これははっきりしている．グレイゼルは「彼（オイラー）によって前に別の方法で確立された公式 (5)（これも彼の名で呼ばれる）」と述べている[7]．ここがオイラーの公式の「転」である．

(6) 式から (5) 式と同じ式が導かれる．これをオイラーの公式の「結」としよう．

1740 年から 5 年ほどの間にオイラーの公式は確立された．まとめておこう．

起

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{4}$$

[5]『グレイゼルの数学史 III』(保坂秀正・ 山崎昇訳，大竹出版，2006) 5 章「代数と解析」§ 14「複素数と多項式」225-226 頁．グレイゼルは e^{xi} と表記している．公式 (1) はド・モアブルの公式 $(\cos z \pm i\sin z)^n = \cos nz \pm i\sin nz$ である．間の (2) と (3) はオリジナルのド・モアブルの公式に関連する式である．付録 3「ド・モアブルの公式の起源」で取り上げる．

[6]以下，字下げされた行は引用文である．そこに出てくる式の番号は引用書の式番号である．以下同様である．

[7]グレイゼルは 1743 年の論文を読んでいて，1745 年との違いを述べているだろう．しかし，どのような違いがあるのかは示していない．矢野忠（わたしも）はその論文を目にすることなく，グレイゼルの違いの指摘を踏まえて，その違いを推論する．ここに試みがある．

承

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{5}$$

転

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned} \tag{6}$$

結

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{7}$$

3　1740 年の公式

1740 年の公式 (4) $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ は，$\cos x$，e^{ix}，e^{-ix} をマクローリン展開することによって，導かれただろう．

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots , \\ e^{ix} &= \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\Big) + i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big), \\ e^{-ix} &= \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\Big) - i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big). \end{aligned}$$

ここから，自由調和振動[8]の微分方程式の 2 つの特殊解[9]

$$2\cos x \text{ と } e^{ix} + e^{-ix}$$

の等しい級数表示

$$2\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\Big)$$

が出てくる．このときは余弦と虚数の指数関数の関係だけに焦点が当たっていた[10]．しばらくして，正弦と虚数の指数関数の関係が想起される．$\sin x$ も自由調和振動の微分方程式の特殊解の一つだからである．また，e^{ix} や e^{-ix} の級数展開の後半は，$\sin x$ の級数を示しているからである．正弦が付け加わり，三角関数と指数関数の関係に拡張されていった[11]．

4　1743 年の公式の導出 1

オイラーの公式は『オイラーの無限解析』（1745 年，刊行 1748 年）が初めてではなく，すでに（1743 年）定式化されていた．これは 1745 年とは別の方法だった．

その方法について矢野忠は次のように推論した．オイラーは自由調和振動の微分方程式の 2 つの系統の異なる特殊解に着目することによって導いたのではないか，と．

[8]「自由」とは「外部からの作用がない」ことを意味する.「調和振動」とは「単振動」のことである．これは等速円運動の正射影である．

[9]自由調和振動の微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解は，一方で $y = A\cos x + B\sin x$，他方で $y = Ce^{ix} + De^{-ix}$ である．この特殊解は $A = 2, B = 0$ と $C = D = 1$ の場合である．

[10]この等式は虚の指数関数と三角関数（余弦）との関係というよりも，虚の指数関数であるにもかかわらず実の値（余弦）になる関係を表示していた可能性が高い．

[11]付録 1〈オイラーの公式,「起」から「承」へ.〉にくわしく述べる．

Euler は自由調和振動の微分方程式 $y''+y=0$ をまず考える．この解としては $y=\cos x$，$\sin x$ という二つの特解があることがわかる．一方，違った解の表示としてやはり二つの特解 $y=e^{ix}$，e^{-ix} がある．この二つの組の解は見かけは同じには見えない．しかし，調和振動の方程式 $y''+y=0$ は 2 階の常微分方程式なので，実際には 1 次独立な特解は二つしかないはずである．

そうだとすれば，二つの系統の解の間にはなにか関係が存在するに違いない．では，どうしたらその関係を見つけることができるのだろうか．その手がかりが Maclaurin 展開であった．

1 つの関係はすでに見つけている．1740 年の (4) 式である．それは自由調和振動の微分方程式の特殊解 $2\cos x$ と $e^{ix}+e^{-ix}$ が級数展開すると等しいことから導かれたものだった．それは余弦と虚の指数との関係を表したものである．もうひとつの特解，正弦と虚の指数との関係に着目するのは自然な流れといえるだろう．矢野忠の推論は妥当だと考えられる．あらためて余弦と正弦それぞれについて虚の指数との関係を捉えることが問題となった．

それは次の式の係数（A, B, C, D）を求めることである．

$$\cos x = Ae^{ix} + Be^{-ix}, \tag{4.1}$$

$$\sin x = Ce^{ix} + De^{-ix}. \tag{4.2}$$

矢野忠はマクローリン展開を手がかりにして 1743 年の (5) 式を導いている．しかし，これには疑問[12]がある．ここでは違う方法（微分）で求めてみよう．まず，A と B を求めよう．これは 1740 年の式にならなければならない．

(4.1) 式の両辺を x で微分すると，

$$-\sin x = iAe^{ix} - iBe^{-ix} \tag{4.3}$$

となる．(4.1) 式と (4.3) 式で $x=0$ とおくと，$A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{2}$ が求まる[13]．

すなわち，

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{4.4}$$

これで 1740 年の (4) 式が再現された．

次に C，D を求めよう．

(4.2) 式の両辺を x で微分すると，

$$\cos x = iCe^{ix} - iDe^{-ix} \tag{4.5}$$

となる．(4.2) 式と (4.5) 式で $x=0$ とおくと，$C=\dfrac{1}{2i}$，$D=-\dfrac{1}{2i}$ となる[14]．

すなわち，

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{4.6}$$

(4.6) 式を i 倍した式と (4.4) 式をたすと，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{4.7}$$

となる．これが 1743 年の (5) 式である．

[12] 矢野忠の導出は論点先取の誤謬ではないかという疑問である．矢野忠は，$\cos x = Ae^{ix}+Be^{-ix}$ の係数 A,B を求めるとき，$\cos x$，$\sin x$，e^{ix}，e^{-ix} のマクローリン展開を基礎にしている．$\cos x$ の展開を U，$\sin x$ の展開を V とおき，$e^{ix}=U+iV$，$e^{-ix}=U-iV$ として，これらを $\cos x = Ae^{ix}+Be^{-ix}$ に代入して，未定係数 A, B を求めている．$U=A(U+iV)+B(U-iV)$ より，$(A+B-1)U+i(A-B)V=0$ である．ここから，$A=1/2$，$B=1/2$ である．しかし，基礎になっている $e^{ix}=U+iV$ は目標のオイラーの公式である．これを出発点にしてよいのだろうか．

[13] $A+B=1$, $A-B=0$ を解く．

[14] $C+D=0$, $C-D=1/i$ を解く．

5 1743 年の公式の導出 2

1740 年の (4) 式は自由調和振動の微分方程式の特殊解を級数展開すると等しいことから導かれた．1743 年の (5) 式も自由調和振動の微分方程式の 2 つの系統の異なる特殊解の関係から導かれた可能性がある．しかも，(4) 式は余弦と虚の指数との関係だったから，この式に正弦と虚の指数との関係を加えて，(5) 式を導くのが，自然な流れといってよいだろう．

しかし，自由調和振動の微分方程式の 2 つの系統の異なる特殊解の関係を捉えるという観点からいえば，別の見方もできる．それは正負の虚の指数それぞれを三角関数（余弦と正弦）で表わす見方である．これも見ておこう[15]．

次のような線形結合を考えて，係数を求めるのである．

$$e^{ix} = A\cos x + B\sin x, \tag{5.1}$$
$$e^{-ix} = C\cos x + D\sin x. \tag{5.2}$$

これらの係数も導出 1 と同じように求めることができる．それは (5.1) 式，(5.2) 式と，この 2 式をそれぞれ微分した (5.3) 式と (5.4) 式

$$ie^{ix} = -A\sin x + B\cos x, \tag{5.3}$$
$$-ie^{-ix} = -C\sin x + D\cos x \tag{5.4}$$

において，それぞれ $x = 0$ とおき，それぞれ連立させると求めることができる．

$$A = 1, B = i.$$
$$C = 1, D = -i.$$

したがって，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \tag{5.5}$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \tag{5.6}$$

となる．この 2 つの式は，$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ だから，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{5.7}$$

でまとめることができる．これが 1743 年の (5) 式である．

6 1743 年の公式の導出 3

グレイゼルは 1740 年の公式には文献の指示[16]をしている．他方，1743 年の公式には文献の指示はない．しかし，グレイゼルはこの文献を読んで記述しているように思える．違う箇所でグレイゼルはオイラーがどのように公式を導入したかを提示している[17]．

> 彼は級数を関数の性質の研究や代数や数論の問題にも広く応用した．有理関数の展開についてはオイラーは，ニュートンと同じように，分子を分母で割ったり，未定係数法を用いた．無理関数や三角関数やその他の関数を無限級数で表わすために，ニュートンの二項式とテイラーの級数を広く利

[15] これは「Euler の公式の導出いろいろ」で取り上げられている示野信一氏の導出と同じである．
[16]『積分法』第 1 巻 p51 とある．
[17]『グレイゼルの数学史 III』5 章§ 18「級数」271 頁．グレイゼルは e^{yi} と表記している．e^{ix} に替えて引用する．

用した．オイラーはまた複素数の級数も研究した．ベキ級数 (20) から出発して，虚数指数 ix をもつベキを導入して，彼は次の式を得た．

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right).$$

この級数と級数 (23) と (24) とを比較して，オイラーは，彼の名で呼ばれる有名な公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

へと至った．

ここで (20)，(23)，(24) はそれぞれ次のようである．

(20)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

(23)

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$

(24)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots.$$

この導入は現在の教科書と同じテイラー展開の比較である[18]．グレイゼルが文献に忠実に紹介しているのか，推論が加わっているのかはわからない．確実なのは，グレイゼルは 1743 年の公式が自由調和振動の微分方程式の特殊解ではなく，テイラー展開の比較から導かれたと考えていることである[19]．

オイラーはグレイゼルが提示しているように公式を導出したのではないだろうか．そのように考えるのは，グレイゼルはこの公式を過渡的なものと見ていて，1740 年の公式と同じ形式の公式を導いているからである[20]．

グレイゼルは先の引用の後に次のように続けている．

ここで x を $-x$ に置きかえると，次の同様な式が得られる．

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

これら 2 つの式を辺々加え，また減ずることによって，次の式が得られる．

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

この形式は 1740 年の公式を引き継ぎ拡張したものである．そして，この形式は『無限解析入門』（『オイラーの無限解析』）のド・モアブルの公式による導出に繋がるものだった．

[18]極限や収束についての厳密な展開の違いはある．

[19]矢野忠は 1. Taylor 展開を用いた導出が 1743 年のオイラーの導出とは考えていないだろう．考えていないからこそ，自由調和振動の微分方程式の特殊解による導出を想定したのである．また，志賀浩二も「完成した数学の形式」としてテイラー展開の比較を取り上げているが，オイラー自身の導出とは考えていない．わたしもテイラー展開の比較による導出は，後から（1748 年以降に）整理されたものと考えていた．

[20]他の理由もある．付録 1〈オイラーの公式,「起」から「承」へ.〉に述べる．

7　1745 年，2 つの基本公式

1745 年に，オイラーは指数関数と三角関数の関係をあらためて原理的に把握しようと試みた[21]．オイラーが「はじまり」に見立てたのは，
冪を用いて表示される指数関数の基本公式[22]

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

と
三角関数の基本公式

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

だった．オイラーはこの 2 つをド・モアブルの公式（n 倍角の公式）のなかで繋ぎあわせた．

8　ド・モアブルの公式の導出

『オイラーの無限解析』の 8 章「円から生じる超越量」でオイラーの公式が提示される．この章ではじめて虚数単位 i が出てくるのは，

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

が因数分解されたときである．

$$(\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = 1.$$

オイラーは 2 つの虚因子 $\cos z + i\sin z$，$\cos z - i\sin z$ に「注目すべき役割」を見ている．$F(z) = \cos z + i\sin z$ とおき，$F(z)F(y)$，$F^2(z)$ などを計算し，$F(z)$ の積が変数の和として現れること，いいかえれば $F(z)$ に指数関数の性質を確認している．

$$\begin{aligned}
F(z)F(y) =&(\cos z + i\sin z)(\cos y + i\sin y)\\
=&(\cos z\cos y - \sin z\sin y) + i(\sin z\cos y + \cos z\sin y)\\
=&\cos(z+y) + i\sin(z+y)\\
=&F(z+y).
\end{aligned}$$

$z = y$ とおけば $F^2(z) = F(2z)$，同じように，$F^3(z) = F(3z)$ である．（これらは $G(z) = \cos z - i\sin z$ でも同じである．）そして，これらを一般化している．

$$\begin{aligned}
F^n(z) &= F(nz),\\
G^n(z) &= G(nz).
\end{aligned}$$

これよりド・モアブルの公式（n 倍角の公式）は次のようになる．

$$\begin{aligned}
(\cos z + i\sin z)^n &= \cos nz + i\sin nz,\\
(\cos z - i\sin z)^n &= \cos nz - i\sin nz.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

[21] 志賀浩二は『無限のなかの数学』の中で次のように述べている．「オイラーが『無限解析入門』でしめした思想は，無限級数や巾級数のなかにも積極的に代数的手法をとりいれていこうということでした．関数はすべて巾級数として表わされると認識されていましたから，整式や方程式をあつかう代数的な考えを，巾級数にまで適用すれば，それはきっと関数相互の間に成り立つさまざまな関係を導き，明らかにしていくにちがいありません．」129 頁．また，オイラーは「緒言」で次のように述べている．「私は無限解析が絶対的に要請する事柄を，通常なされるよりもはるかに細密に，しかもはるかに明瞭に説明するよう努めた」v 頁．

[22] 『オイラーの無限解析』7 章「虚指数量と対数の級数表示」107 頁．オイラーは極限の式ではなく，i を無限大数として，$e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ と表示している．

これはなじんだ形のド・モアブルの公式（n 倍角の公式）である．しかし，この形はオイラーがここではじめて導いたもので，オリジナルのド・モアブルの公式は，次のような形のものである[23]．

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB + \sqrt{\cos^2 nB - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB + \sqrt{\cos^2 nB - 1}}}.$$

ド・モアブルの関心は $\cos B$ を $\cos nB$ で表わすことにあったという．オイラーはこの式から 2 つの共役な複素数（虚因子）を洞察した[24]．$\sqrt{\cos^2 nB - 1}$ は $i \sin nB$ であり，虚因子 $\cos nB + i \sin nB$ がある．また，$1/(\cos nB + i \sin nB) = \cos nB - i \sin nB$ だから，虚因子 $\cos nB - i \sin nB$ が出てくる．虚因子の指数の形 $(\cos z \pm i \sin z)^n$ はオイラーが導いたものであり，1743 年の公式を引き継ぐときの基礎になったものである．

(8.1) を $\cos nz$ と $\sin nz$ について解くと，

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}, \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i} \end{aligned} \tag{8.2}$$

となる．

ここから，ド・モアブルの公式は新しい意味を持ち始める．

9 「実の弧」と「消失する弧」，$nz = x$ の仮定

1743 年のオイラーの公式と 1745 年のド・モアブルの公式を並記してみよう．ド・モアブルの公式は 1743 年の公式を継承し説明するために導かれたものであることがよくわかる．

1743 年のオイラーの公式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

1745 年のド・モアブルの公式

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}.$$

1743 年の公式は，実の弧の余弦と正弦が虚の指数量[25]によって表示されていた．ド・モアブルの公式からオイラーの公式を導いていくときに，跳躍点になっているのは $nz = x$ の仮定である．

nz はド・モアブルの公式の弧 z の n 倍角である．x の方は，オイラーが「有限の大きさ」あるいは「有限値」と想定しているものである．対応を強調していえば，x は 1743 年に導いたオイラーの公式のなかの弧 x である．この仮定によって，もともと小さい弧 z は無限に小さい弧となる可能性をもつようになる．導いたド・モアブルの公式の右辺が変容していくのである．

$nz = x$ より，$z = x/n$ である．z は弧 x を n 等分してできる小さな円弧である．$n \to \infty$ のとき，nz は一定の値 x を保つ．他方，z は $z \to 0$ となる．オイラーは nz を「実の弧」,「任意の弧」と呼んでいる．他方，z を「きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧」,「消失する弧」と呼んでいる．

[23]『グレイゼル数学史 III』5 章 225 頁．これはグレイゼルが (2) としている式に余弦を代入して見やすく表示したものである．
[24]付録 3 「ド・モアブルの公式の起源」にくわしく述べる．
[25]e^{ix} や e^{-ix} のように，冪が虚数の指数関数のこと．

$nz=x$ の仮定によって，$n\to\infty$ のときに，nz を一定の値に保ちながら $z\to 0$ が可能となる．このとき余弦と正弦に着目すれば，$\cos z\to 1$，$\sin z\to z=x/n$ となる．超越的な量（三角関数）が代数に変わるのである．

$nz=x(n\to\infty, z\to 0)$ の仮定[26]は有効なのだろうか．これを検証する方法があった．それは一般に，マクローリン展開で求められる余弦と正弦の無限級数表示をこの仮定から導くことであった[27]．

10　余弦と正弦の級数表示，$nz=x$ の検証

オイラーはまずド・モアブルの公式の右辺の分子を二項展開して整理している．$\cos nz$ では二項係数の右下の添字が偶数の項が残る．$\sin nz$ では奇数の項が残る．

$$\begin{aligned}\cos nz &= {}_n\mathrm{C}_0\cos^n z - {}_n\mathrm{C}_2\cos^{n-2} z\sin^2 z + {}_n\mathrm{C}_4\cos^{n-4} z\sin^4 z - {}_n\mathrm{C}_6\cos^{n-6} z\sin^6 z + \cdots\\ &= \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4} z\sin^4 z\\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}\cos^{n-6} z\sin^6 z + \cdots,\end{aligned}\tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}\sin nz &= {}_n\mathrm{C}_1\cos^{n-1} z\sin z - {}_n\mathrm{C}_3\cos^{n-3} z\sin^3 z + {}_n\mathrm{C}_5\cos^{n-5} z\sin^5 z - \cdots\\ &= \frac{n}{1}\cos^{n-1} z\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\sin^3 z\\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5} z\sin^5 z - \cdots.\end{aligned}\tag{10.2}$$

ここでオイラーは次のように $nz=x$ に注意している．

> 弧 z は無限に小さいとしよう．そのとき，$\sin z=z$ および $\cos z=1$．ところで，n は無限大数で，しかも $nz=x$ は有限の大きさの弧に留まるという性質を備えているとしよう．$\sin z=z=\dfrac{x}{n}$ であるから，

(10.1) と (10.2) 式で，$n\to\infty$ とする．このとき左辺は，$\cos nz=\cos x$，$\sin nz=\sin x$ で一定の値をとる．これに対して，右辺は無限に続いていく．$\cos z=1$，$\sin z=z=\dfrac{x}{n}$ を代入すると，(10.1) と (10.2) はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}\cos x &= \left(1\right)^n - \frac{n(n-1)}{2!}\left(1\right)^{n-2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(1\right)^{n-4}\left(\frac{x}{n}\right)^4\\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}\left(1\right)^{n-6}\left(\frac{x}{n}\right)^6 + \cdots,\end{aligned}\tag{10.3}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{n}{1}\left(1\right)^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(1\right)^{n-3}\left(\frac{x}{n}\right)^3\\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\left(1\right)^{n-5}\left(\frac{x}{n}\right)^5 - \cdots.\end{aligned}\tag{10.4}$$

ここで $n\to\infty$ のとき，

$$\frac{n(n-1)}{n^2}=1,\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=1,\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}=1,\quad \cdots$$

だから，(10.3) と (10.4) 式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots,\\ \sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots.\end{aligned}$$

[26]「有限の大きさ」を，2 つの数（量）の積（一方は無限大に他方は無限小に変化する）とみる視点は『オイラーの無限解析』の「代数的手法」の基礎にある考え方である．指数関数を冪から導くときの方法もこれである．

[27]「緒言」に次のようにある．「私は通常のレベルの代数の諸規則に基づいて，普通なら無限解析で取り扱われることになっている多くの問題を解決した．」v 頁．

たしかに余弦と正弦の無限級数表示が得られる．

11　ド・モアブルの公式，洞察と展開

ド・モアブルの公式の導出，二項展開，無限級数表示を『オイラーの無限解析』の「本文」（8 章）にしたがって見てきたが，この展開をオイラーは「緒言」で次のように述べている[28]．

> 私はある任意の弧の正弦と余弦を用いて，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を表示した．その表示式からさらに歩みを進めて無限級数へと導かれた．そうして消失する弧はその正弦に等しいし，消失する弧の余弦は〔単位円周の〕半径に等しいことに留意して，私は任意の弧と，その正弦と余弦とを，無限級数を用いて表示した．

ここは 3 つの文から成り立っている．

1. 私はある任意の弧の正弦と余弦を用いて，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を表示した．
2. その表示式からさらに歩みを進めて無限級数へと導かれた．
3. そうして消失する弧はその正弦に等しいし，消失する弧の余弦は〔単位円周の〕半径に等しいことに留意して，私は任意の弧と，その正弦と余弦とを，無限級数を用いて表示した．

2. の「表示式」はオイラーが導いたド・モアブルの公式で，1. はオイラー自身が意図したド・モアブルの公式の意味，2. は二項展開による余弦と正弦の無限級数表示，そして，3. はマクローリン展開ではなく $nz = x(n \to \infty, z \to 0)$ の仮定による余弦と正弦の無限級数表示に対応するとみてよいだろう．

ここには方向の違う見方が示されている．

1.

> 私はある任意の弧の正弦と余弦を用いて，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を表示した．

2. と 3.

> 私はある任意の弧の正弦と余弦を，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を用いて表示した[29]．

これを公式の洞察と展開[30]の違いと捉えることにしよう．1. は公式を左辺（任意の弧）から右辺（消失する弧）へと見ている．他方，2. と 3. は公式を右辺（消失する弧）から左辺（任意の弧）へと向かう見方である．1. はアブダクション[31]としての洞察，2. と 3. はディダクションとしての展開として把握できると思う．

オイラーはド・モアブルの公式を導出した．左辺に任意の弧 nz，右辺に消失する弧 z がある．nz の n と z は，z は消失する弧の虚因子 $(\cos z \pm i \sin z)$ の弧として，n はその指数の形 $(\cos z \pm i \sin z)^n$ として繋がっている．1. は左辺の任意の弧 $nz = x$ を説明するために，右辺の消失する弧 $(\cos z \pm i \sin z)^n$ を洞察したことを表現している．出発点は「任意の弧」である．到達点は「消失する弧」である．オイラーは「任意の弧」から「消失する弧」に遡行[32]したのである．

---

[28]『オイラーの無限解析』緒言 vii 頁．

[29] 3. の「私は任意の弧と，その正弦と余弦とを，無限級数を用いて表示した」の部分に着目し，1. の方向と対照して表示している．

[30] 発見と検証といってもよい．

[31] パースが提起した推論方法．仮説設定，仮説提起，発想法などと訳されている．演繹（ディダクション）とも帰納（リダクション）とも違う第 3 の推論方法である．

[32]「リトロダクション」（retroduction），結果から原因へと遡る推論．「アブダクション」の別名である．

この過程では,「任意の弧」が独立していて,「消失する弧」は従の関係にある.「 私はある任意の弧の正弦と余弦を用いて，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を表示した」.「消失する弧」は「仮説」である.

そして，洞察した「消失する弧」からこんどは逆に「任意の弧」にもどってくる.「仮説」を証明するのである．出発点は「消失する弧」で，到達点は任意の弧である．オイラーは洞察した「消失する弧」を展開する.「虚因子の指数の形」$(\cos z \pm i \sin z)^n$ を二項展開して無限級数を導く．次に，$nz = x(n \to \infty, z \to 0)$ の仮定にしたがって，任意の弧の余弦と正弦を無限級数を用いて表示する.「私はある任意の弧の正弦と余弦を，きわめて小さくて，ほとんど消失するとみてよいほどの弧の正弦と余弦を用いて表示した」ということになる.

任意の弧の余弦と正弦の級数表示ではド・モアブルの公式の右辺を二項展開したため，指数の形は崩れたが，そのままの形で $nz = x$ の仮説を適用すれば，指数関数[33]との関係が明らかになる．1743 年の公式が原理的に説明できるようになる.

12　虚指数量と実の弧の正弦と余弦

オイラーの公式は『オイラーの無限解析』においてはじめて提起されたのではなかった．前史があり，グレイゼルの記述にしたがって，1740 年，1743 年，1745 年とたどってきた．自由調和振動の微分方程式の特殊解，テイラー展開の比較からド・モアブルの公式

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}, \qquad \sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i} \tag{12.1}$$

へと見方は「転」じている.

オイラーは級数表示で検証した仮定を，こんどは指数の形のままのド・モアブルの公式に適用する．すなわち，$nz = x$ ，$z = \dfrac{x}{n}$ を (12.1) 式に代入する.

$$\cos x = \frac{\left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)^n + \left(\cos\frac{x}{n} - i \sin\frac{x}{n}\right)^n}{2}, \qquad \sin x = \frac{\left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)^n - \left(\cos\frac{x}{n} - i \sin\frac{x}{n}\right)^n}{2i}. \tag{12.2}$$

次にオイラーは極限をとる[34].

$n \to \infty$ のとき，$\cos\dfrac{x}{n} = 1$，$\sin\dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{n}$ だから，(12.2) 式は次のようになる.

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2}, \qquad \sin x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2i}. \tag{12.3}$$

[33]オイラーは $y = a^z$ において,「y は z のある種の関数である」(『オイラーの無限解析』6 章 84 頁.）と述べているが，指数関数とは明言していない．指数量と表現している．e^{ix} や e^{-ix} のように，冪が虚数の指数関数を虚指数量と表現している.

[34]オイラーは虚数単位に i ではなく $\sqrt{-1}$ を使っている．i は無限大数（infinite number）の表示に使っている．i は $\lim\limits_{n\to\infty} n$ に対応する．オイラーは極限ではなく無限大数を使って表わしている.

余弦 $\cos x = \dfrac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{i})^i + (1+\frac{-x\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$，　正弦 $\sin x = \dfrac{(1+\frac{x\sqrt{-1}}{i})^i - (1+\frac{-x\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$, 指数関数 $e^x = \left(1+\dfrac{x}{i}\right)^i$.

これを次のように表示すると，

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n+\left(1+\dfrac{-ix}{n}\right)^n}{2},$$
$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n-\left(1+\dfrac{-ix}{n}\right)^n}{2i} \tag{12.4}$$

となり，右辺の分子 $\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n$，$\left(1+\dfrac{-ix}{n}\right)^n$ に指数関数の形が見えてくる．

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{12.5}$$

は実数 x について成立（e は自然対数の底，ネイピア数）したものだが，虚数についても成り立つと拡張する．すなわち，

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n \tag{12.6}$$

とする．同じように，

$$e^{-ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-ix}{n}\right)^n \tag{12.7}$$

である．これを (12.4) 式に入れると次のようになる．

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{12.8}$$

ここに 1743 年の式が示された．オイラーは「虚因子の指数の形」$(\cos z \pm i\sin z)^n$ から虚の指数関数 $e^{\pm ix}$ を導くことによって，1743 年の式を原理的に再現したのである．

13　円から生じる同位の超越的な虚量

オイラーはド・モアブルの公式から (12.8) 式を導いた後，次のように続けている[35]．

> これらの公式により，虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式が理解される．すなわち，
>
> $$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
>
> および
>
> $$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$
>
> というふうになるのである．

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の公式の方も，「虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」として考えられている．グレイゼルも (12.8) 式について，「最終的に定式化され，証明された有名な≪オイラーの公式≫」と評価した後，$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ も含めて「どのような形で虚数の指数量が現実のサインとコサインになるか」と捉えていた．しかし，ここは区別した方がいいのではないかと思う．

(12.8) 式では「虚指数量（e^{ix}，e^{-ix}）」は右辺にあり，これが原因となって，左辺の「実の弧の正弦と余弦」（$\sin x$ と $\cos x$）を規定している．「虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」という評価は自然に受け入れられる．

[35]『オイラーの無限解析』8 章 120 頁．

ところが，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{13.1}$$

では[36]，左辺は「虚指数量（e^{ix}）」，右辺は「余弦と正弦の虚因子（$\cos x + i\sin x$）」である．(12.8) 式と同じ評価はなじまないように思える[37]．

(12.8) 式の形は虚数単位が指数関数（右辺）に偏っているのに対して，(13.1) 式では指数関数にも三角関数にも配位している．虚数単位は両辺に分散している．三角関数と指数関数が虚数単位を介して相互に移行する様式である．これはオイラーが「緒言」で述べている「一方の量が虚量となると見れば，即座にもう一方の量へと移っていく」関係[38]を表現している．

1740 年「起」，1743 年「承」，1745 年「転」は,「虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」を軸に展開されてきた．しかし，(12.8) から最終的に導かれた (13.1) 式は「虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」というよりは,「円から生じる超越量」（『オイラーの無限解析』8 章のタイトル）と同じように,「円から生じる同位の超越的な虚量」として捉えた方がいいのではないかと思うのである．

これをオイラーの公式の「結」とする．オイラーはド･モアブルの公式を三角関数の基本公式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ から導いた．到達した「円から生じる同位の超越的な虚量」（$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$）を基礎の上に確認して，考察を閉じることにしよう．

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x \\
&= (\cos x + i\sin x)(\cos x - i \sin x) \\
&= e^{ix} e^{-ix} \\
&= e^{ix-ix} \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

14　付録 1　オイラーの公式,「起」から「承」へ．

『オイラーの無限解析』8 章で，最終的な公式[39]が導かれた箇所に，次のような脚註が付いている[40]．

> オイラーの公式．ド・モアブルの公式から，無限に移行することによって導出された．1741 年 12 月 9 日付のオイラーの友人ゴールドバッハ（1690〜1746 年）宛書簡に，
>
> $$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \mathrm{Cos.Arc.}l2$$
>
> という公式が出ている．また，1742 年 5 月 8 日付の手紙には，
>
> $$a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2\mathrm{Cos.Arc.}pl2$$
>
> という公式が出ている．ここで $l2$ は $\log 2$ を表わす．

これは以前から目にしていたが，謎であった．いまは立ち入ることができる．これはオイラーの公式の「起」と関連する箇所である．

---

[36] $\cos x + i \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = e^{ix}$

[37] 1743 年の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ は，虚の指数量と実の弧の余弦の関係から，虚の指数量と実の弧の正弦の関係を展望するときに可視化され，級数の比較によって定式化された．それは「指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」を導き背後で支えたのである．しかし，1745 年の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ は，逆に「指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式」から導かれ支えられている．

[38] 『オイラーの無限解析』緒言 vii 頁．オイラーはこの表現を直接には「対数」と円弧の関係として述べている．ここでは「指数」と円弧の関係に転用して取り上げている．

[39] $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$

[40] 『オイラーの無限解析』8 章 124 頁．

最初に 1742 年の公式を見ておく．まず，まちがいを指摘しておこう．最後の $pl2$ は pla が正しい．

$$a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2\mathrm{Cos.Arc.}pla$$

である．右辺の読み方は，Cos. の後の Arc.pla が「弧」を表わすとみてよいだろう．

Cos. $\to$ cos，$\sqrt{-1} \to i$，$l \to \log$，$p \to x$ に置き換えると，

$$a^{ix} + a^{-ix} = 2\cos(x \log a)$$

となる．ここで $a = e$ とおくと，$\log e = 1$ より，式は次のようになる．

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x.$$

1742 年の式はグレイゼルが指摘する 1740 年の式と同じ内容であることがわかる．この式は 1741 年の式を一般化したものである．逆にいえば，p（変数）$\to 1$，a（指数の底）$\to 2$ に置き換えると，

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \mathrm{Cos.Arc.}l2$$

になる．なじみの表記にすると，

$$\frac{2^i + 2^{-i}}{2} = \cos(\log 2)$$

となる．ここで $\log 2 = x$ とおくと $e^x = 2$ だから, 式は次のようになる．

$$\frac{(e^x)^i + (e^x)^{-i}}{2} = \cos x,$$
$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

これもグレイゼルが指摘する 1740 年の式と同じ内容である．

こんどは 1741 年の式から見ていこう．グレイゼルは，オイラーが 1740 年に得た自由調和振動の微分方程式の特殊解は「$2\cos x$ と $e^{ix}+e^{-ix}$」と述べた．しかし，これは整理した形であって，実際にオイラーが 1740 年に得た 2 つの特殊解は，

$$\frac{2^i + 2^{-i}}{2} \quad と \quad \cos(\log 2)$$

であったことを 1741 年の式は強く示唆している．

この 2 つは等しい級数展開

$$1 - \frac{1}{2!}(\log 2)^2 + \frac{1}{4!}(\log 2)^4 - \frac{1}{6!}(\log 2)^6 + \cdots$$

を示し[41]，等号で結ばれた．ここが発端ということになる．グレイゼルが指摘する構造

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

は背後にあるが，このときはまだ明確になっていない．1742 年でも同じである．

$$a^{ix} + a^{-ix} = 2\cos(x \log a).$$

自由調和振動の微分方程式の 2 つの異なる特殊解は，1 から x へ，$\log 2$ から $\log a$ へと拡張されたが，関係式はいまだに「対数」(log) の形を引きずっている．また，1742 年でも指数との関係は余弦（cos) に限定されて正弦との関係には触れられていない[42]．

---

[41] $\cos(\log 2)$ は，$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ に $x = \log 2$ を代入する．$\frac{2^i+2^{-i}}{2}$ は，$\frac{2^i+2^{-i}}{2} = \frac{e^{i\log 2}+e^{-i\log 2}}{2}$ なので，$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ に $x = \log 2$ を代入する．

[42] オイラーの関心は，虚の指数関数と三角関数（余弦）との関係というよりも，虚の指数関数にもかかわらず実の値（余弦）になることにあったと考えられる．

正弦と虚の指数関数との関係を把握するには，さらに $\log a$ から $\log e$ へ変わる必要があった．指数の底が a から e（ネイピア数，自然対数の底）に変わることによって，対数の形が消える．この指数の底の転換が跳躍点だった．指数の底 e に着目するきっかけは，自由調和振動の微分方程式だったと思われる．

自由調和振動の微分方程式が成立する条件 $y'' + y = 0$ を，$\cos(x \log a)$ と $a^{ix} + a^{-ix}$ について見ておこう．まず，$\cos(x \log a)$ について．

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(x \log a), \\ y_1' &= -\sin(x \log a) \log a, \\ y_1'' &= -\cos(x \log a)(\log a)^2. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= (1 - (\log a)^2) \cos(x \log a) \\ &= (1 - \log a)(1 + \log a) \cos(x \log a). \end{aligned}$$

次に $a^{ix} + a^{-ix}$ について．

$$\begin{aligned} y_2 &= a^{ix} + a^{-ix} \\ &= e^{ix \log a} + e^{-ix \log a}, \\ y_2' &= (i \log a) e^{ix \log a} - (i \log a) e^{-ix \log a}, \\ y_2'' &= (i \log a)^2 e^{ix \log a} + (i \log a)^2 e^{-ix \log a} \\ &= -(\log a)^2 a^{ix} - (\log a)^2 a^{-ix}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} y_2'' + y_2 &= (1 - (\log a)^2) a^{ix} + (1 - (\log a)^2) a^{-ix} \\ &= (1 - (\log a)^2)(a^{ix} + a^{-ix}) \\ &= (1 - \log a)(1 + \log a)(a^{ix} + a^{-ix}). \end{aligned}$$

どちらの場合も，因子 $(1 - \log a)(1 + \log a)$ がある．それゆえ，自由調和振動の微分方程式が成立する条件（$y'' + y = 0$）は 2 通りあることになる．1 つは $\log a = 1$，もう 1 つは $\log a = -1$ である．$\log a = 1$ の方は新しい指数の底 e を指示するものである．それに対して，$\log a = -1$ の方は，1740 年以降，指数関数と余弦に限定されたオイラーの公式を可能にしてきたものである．$\dfrac{a^{ix} + a^{-ix}}{2} = \cos(x \log a)$ の場合，等しい級数表示は

$$1 - \frac{1}{2!}(x \log a)^2 + \frac{1}{4!}(x \log a)^4 - \frac{1}{6!}(x \log a)^6 + \cdots \tag{14.1}$$

となる[43]．余弦の級数表示の項は偶数乗なので，$\log a = -1$ でも $\log a = 1$ の場合と同じ結果になる．しかし，$\log a = -1$ では指数と正弦との関係は結べない．正弦の級数表示は奇数乗なので $\log a = 1$ とは違った（正負の符号が違う）結果になるからである．

$$(x \log a) - \frac{1}{3!}(x \log a)^3 + \frac{1}{5!}(x \log a)^5 - \frac{1}{7!}(x \log a)^7 + \cdots . \tag{14.2}$$

1741 年から 1742 年へ一般化したとき，余弦と対数の形を一般化しているだけである．

$$a^{ix} + a^{-ix} = 2 \cos(x \log a). \tag{14.3}$$

この式の成立は余弦が偶関数であることに依存していた．オイラーは自由調和振動の微分方程式の成立条件を見直し，余弦でも正弦でも成立する正しい条件 $\log a = 1$ に気づく．

$\log a = 1$ とすれば，(14.1) 式は

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

[43] 1741 年の式（$\log 2$）と同じように $(x \log a)$ を代入する．また，原則的に $f(x) = \dfrac{a^{ix} + a^{-ix}}{2}$，$g(x) = \cos(x \log a)$ とおいて，マクローリン展開して求めることもできる．

また，(14.2) 式は，

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

となり，それぞれ余弦 $\cos x$ と正弦 $\sin x$ の級数表示となる．

また，(14.3) 式は，

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$

となる．

$\log a=-1$ から $\log a=1$ へと転換することによって，いいかえれば，指数の底を $1/e$ から e へと転換することによって，対数の形は消える（$\log e=1$）．そして，その転換は余弦と虚の指数関数の関係を維持するだけでなく，正弦と虚の指数関数との関係も可能にしたのである[44]．

ここに余弦と指数関数だけでなく，正弦を加えた公式を定式化する基礎が形成されたのである．

$\log 2$ による定式が 1741 年，$\log a$ が 1742 年である．$\log e$ は 1743 年とするのが妥当だろう．この年に 3 つの式が過不足なく定式化されているからである[45]．

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

指数の底の転換に重要な役割を果たしたのは，自由調和振動の微分方程式の成立条件だった．それは余弦だけでなく正弦でも成立する正しい条件 $\log a=1$，いいかえれば指数の底 e を指示したのである．

1743 年の公式は，自由調和振動の微分方程式の特殊解によって直接導かれたのではない．自由調和振動の微分方程式は，その成立条件を通して，余弦に正弦を加えた公式を定式化する基礎を形成しただけである．1743 年の公式を直接導いたのは，テイラー展開の比較だったのである．

15　付録 2　ベルヌーイの等式とオイラーの公式

『グレイゼル数学史 III』の 1740 年を起点に 1743 年のオイラーの公式の導出の可能性を考えた．そこでは虚の指数関数と余弦関数の関係を前提としていた．オイラーはこれ以前にベルヌーイの等式に関心を寄せている[46]．ベルヌーイの等式から，オイラーの公式を導出してみよう[47]．これはオイラーの文献に依拠するものではない．あくまで論理的な可能性として導出する．これは三角関数との関係を前提としない導出である．

ベルヌーイの等式（初出 1702 年）は次のようなものである．

$$i\frac{\pi}{2}=\log i. \tag{15.1}$$

これを指数表示すると，

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i \tag{15.2}$$

[44] この過程は止揚（Aufheben）と特徴づけられるかもしれない．〈「余弦と対数」と「指数」の形〉を止めて，〈「余弦と正弦」と「指数」の形〉に揚げたとみえるからである．

[45] 虚の指数関数と実の値としての正弦との関係は，$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の発見の後で，問われることのないまま，すでに解決された等式として自動的に現れてきたものと思われる．

[46] 『無限解析のはじまり』（高瀬正仁著，ちくま学芸文庫，2009 年）参照．高瀬正仁によれば，オイラーの課題は「負数と虚数の対数とは何か」だったという．(15.1) 式は「虚数の対数が虚数になる」ことを示している．(15.3) 式は「負数の対数が虚数になる」ことを示している．

[47] 高瀬正仁はオイラーの公式よりもベルヌーイの等式を高く評価している．オイラーの公式は「対数の無限多価性の確認の途中で出会う一等式にすぎず，ベルヌーイの等式のように複素対数というものの本性に触れる等式とは一線を画している」といっている．しかし，これはオイラーの公式を「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」（1745 年執筆）のなかの取り扱いに限定したもので，偏った見方であると思う．「オイラーの公式の根源に位置するのはベルヌーイの発見である」（高瀬正仁）を踏まえて，ベルヌーイの等式をオイラーの公式の「起」と捉えて展開する．

である．(15.1) 式を 2 倍すると，

$$\begin{aligned} i\pi &= 2\log i \\ &= \log i^2 \\ &= \log(-1) \end{aligned} \tag{15.3}$$

となる．これを指数で表現すると，

$$e^{i\pi} = -1 \tag{15.4}$$

である．(15.2) 式と (15.4) 式をまとめてかけば，

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= i, \\ e^{i\pi} &= -1 \end{aligned}$$

である．この 2 つを「オイラーの公式」の「起」と捉えてみよう．左辺の $\pi/2$ や π を変数 x に置き換え，右辺は複素数の形 $f(x) + ig(x)$ とおいてみる．つまり，

$$e^{ix} = f(x) + ig(x) \tag{15.5}$$

とおき，$f(x)$ と $g(x)$ を求める[48]．

まず，手がかりとして，(15.5) 式を x で微分してみると，

$$ie^{ix} = f'(x) + ig'(x)$$

となる．ここで両辺に $-i$ をかけると，

$$e^{ix} = -if'(x) + g'(x) \tag{15.6}$$

となる．したがって，(15.5) 式と (15.6) 式より次の連立微分方程式が成り立つ．

$$f'(x) = -g(x), \tag{15.7}$$

$$g'(x) = f(x). \tag{15.8}$$

(15.7) 式を x で微分すると，

$$f''(x) = -g'(x). \tag{15.9}$$

これと (15.8) 式より，

$$f''(x) = -f(x) \tag{15.10}$$

が成り立つ．同じように（(15.8) 式の微分と (15.7) 式より），

$$g''(x) = -g(x) \tag{15.11}$$

が成り立つ[49]．

(15.7) 式と (15.8) 式の一般解は，

$$f(x) = A\cos x + B\sin x, \tag{15.12}$$

$$g(x) = C\cos x + D\sin x \tag{15.13}$$

[48] 矢野忠「Euler の公式の導出いろいろ」の「微分方程式を用いた導出—その 2」をベースにする．

[49] $f(x), g(x)$ は自由調和振動の微分方程式 $y'' + y = 0$ の解である．その一般解は余弦と正弦の 1 次結合で表わせる．ここで「自由調和振動」が出てくるのは偶然ではない．オイラーの公式の背後に「自由調和振動」があるのである．グレイゼルが指摘していたように,「自由調和振動の微分方程式」の考察が 1740 年の公式を導いたのである．

である．ここで A, B, C, D は 4 つの任意定数だが，(15.7) 式,(15.8) 式の関係があるから，2 つに減る．

$$f(x) = A\cos x + B\sin x,$$
$$g'(x) = -C\sin x + D\cos x$$

だから，$A = D$,$B = -C$ である[50]．したがって，$f(x)$,$g(x)$ は次のようになる．

$$f(x) = A\cos x + B\sin x, \tag{15.14}$$
$$g(x) = -B\cos x + A\sin x. \tag{15.15}$$

ここで，初期条件として，$e^{i\pi} = -1$ をとろう[51]．このとき，(15.5) 式より

$$e^{i\pi} = f(\pi) + ig(\pi) = -1$$

だから，$f(\pi) = -1$,$g(\pi) = 0$ である．(15.14) 式と (15.15) 式に代入すると，

$$f(\pi) = A\cos\pi + B\sin\pi = -A = -1,$$
$$g(\pi) = -B\cos\pi + A\sin\pi = B = 0$$

となる．したがって，A=1,B=0 である．これを (15.14) 式と (15.15) 式に代入すると，

$$f(x) = \cos x,$$
$$g(x) = \sin x$$

となる．したがって，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

となる．

ベルヌーイの等式の指数表示 (15.2),(15.3）から，オイラーの公式を導出した．こんどはオイラーの公式[52]を対数表示して，ベルヌーイの等式を一般化しておこう．

$$ix = \log(\cos x + i\sin x).$$

ベルヌーイの等式 (15.1) は $x = \pi/2$ のときの表示だったことがわかる．

16 付録 3 ド・モアブルの公式の起源

オリジナルのド・モアブルの公式（初出，1707 年）は，次のような形のものである[53]．

---

[50](15.8) 式で求めたが，(15.7) 式からでも同じ結果である．

[51]矢野忠は $e^0 = 1$ で求めている（$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ より）．ベルヌーイの等式のもう一つの条件 $e^{i\frac{\pi}{2}} = -1$ からも（$f(\pi/2) = 0$，$g(\pi/2) = 1$ より）求められ，すべて同じ結果（$A = 1, B = 0$）になる．

[52]オイラーは「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」（『無限解析のはじまり』所収）に，級数表示の比較によるオイラーの公式 $(1 + ix/n)^n = \cos x + i\sin x$ の証明を提示している．1743 年にオイラーは $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を定式化した．この後，一方で『無限解析入門』(『オイラーの無限解析』）の考察があり，他方で「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」の考察があったと想定できる．どちらも 1745 年に執筆されている．オイラーの公式は「対数の無限多価性の確認の途中で出会う一等式」ではなく「対数の無限多価性の確認に向かわせた一等式」ではないだろうか．

[53]『グレイゼル数学史 III』5 章 225 頁．本論の冒頭で，グレイゼルが素描するオイラーの公式の経緯を引用したが，オリジナルのド・モアブルの公式への言及は，その直前にある．この l の式にグレイゼルは (2) を付している．

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}.$$

ここで $x=\cos B$，$l=\cos A=\cos nB$ である．これを式に入れてみると，次のようになる．

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB+\sqrt{\cos^2 nB-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB+\sqrt{\cos^2 nB-1}}}.$$

これが見やすくしたオリジナルのド・モアブルの公式である．ド・モアブルの関心は $\cos B$ を $\cos nB$ で表わすことにあったという．たしかに見かけ上，$\sin B$ や $\sin nB$ は現れていない．オイラーはこの式から 2 つの共役な複素数（虚因子）$\cos nB + i\sin nB$ と $\cos nB - i\sin nB$ を洞察した．$\sqrt{\cos^2 nB-1}$ は $i\sin nB$ であり[54]，虚因子 $\cos nB + i\sin nB$ がある．また，$1/(\cos nB + i\sin nB) = \cos nB - i\sin nB$ だから[55]，虚因子 $\cos nB - i\sin nB$ がある．

ド・モアブルの公式を構成する 2 つの虚因子は，

$$(\cos nB + i\sin nB)(\cos nB - i\sin nB) = \cos^2 nB + \sin^2 nB = 1$$

を満たしている．これは三角関数の基本公式（$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$）にド・モアブルの公式が折りたたまれていることを意味するだろう．ここにオイラーが三角関数の基本公式の因数分解からはじめた起源がある．

オイラーは次のようにはじめている．

> さて，
>
> $$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$
>
> であるから，適切に因子を選ぶと，
>
> $$(\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = 1$$
>
> と分解される．これらの因子は虚因子ではあるが，いくつかの弧を組み合わせたり，弧と弧を乗じたりする際に注目すべき役割を果たす．

オイラーは「注目すべき役割」を確認して，ド・モアブルの公式を導いた．

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz,$$
$$(\cos z - i\sin z)^n = \cos nz - i\sin nz.$$

オイラーのド・モアブルの公式から，オリジナルのド・モアブルの公式を再現しておこう．それぞれ両辺の n 乗根をとると次のようになる．

$$\cos z + i\sin z = (\cos nz + i\sin nz)^{\frac{1}{n}},$$
$$\cos z - i\sin z = (\cos nz - i\sin nz)^{\frac{1}{n}}.$$

2 つの式をたすと，

$$2\cos z = (\cos nz + i\sin nz)^{\frac{1}{n}} + (\cos nz - i\sin nz)^{\frac{1}{n}}$$

である．したがって，

$$\cos z = \frac{1}{2}(\cos nz + i\sin nz)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos nz - i\sin nz)^{\frac{1}{n}}$$

[54] $\sqrt{\cos^2 nB-1} = \sqrt{-(1-\cos^2 nB)} = \sqrt{-\sin^2 nB} = i\sin nB$

[55] $\dfrac{1}{\cos nB + i\sin nB} = \dfrac{\cos nB - i\sin nB}{(\cos nB + i\sin nB)(\cos nB - i\sin nB)} = \dfrac{\cos nB - i\sin nB}{1} = \cos nB - i\sin nB$

となる．

ここで後半の $(\cos nz - i\sin nz)^{\frac{1}{n}}$ は $(\cos nz + i\sin nz)^{-\frac{1}{n}}$ だから[56]，

$$\cos z = \frac{1}{2}(\cos nz + i\sin nz)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos nz + i\sin nz)^{-\frac{1}{n}}$$

となる．ここで z を B に替え，また根の表示を指数から根号に替えると，次のようになる[57]．

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB + i\sin nB} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB + i\sin nB}}.$$

$i\sin nB$ を $\cos nB$ で表わすと，オリジナルのド・モアブルの公式が再現される．

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB + \sqrt{\cos^2 nB - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB + \sqrt{\cos^2 nB - 1}}}.$$

17　あとがき

「Euler の公式の導出いろいろ」で引用されていた「グレイゼルの数学史 III」の孫引きで済まそうと思っていたが,『グライゼルの数学史 III』を手に取ってみてよかったと思う．オリジナルのド・モアブルの公式が紹介してあり，オイラーとの違いがわかった．また，グレイゼルが 1743 年の公式をどのように把握していたのかもわかった．それは自由調和振動の微分方程式の特殊解ではなく，テイラー展開の比較による導出であった．以前なら受け入れられなかったと思うが，いまは納得できる．

こんど，2005 年以来誤解してきたあることに気づいた．それは虚数べきのテイラー展開は『オイラーの無限解析』（1745 年執筆，1748 年刊行）の後に提起されたものであるという思い込みである．これは 1740 年の級数表示を再考しているとき気づいた．この時点で虚数べきの展開は不可欠であった．そしてその思い込みの原因は『無限のなかの数学』の誤読にあったことがわかった．あらためて『無限のなかの数学』を読むと,『オイラーの無限解析』での公式の提出は微積分とは別の次元で（「代数的手法」）行なわれていたことが強調されていた．この点がこれまで読みとれていなかった．オイラーの公式は『オイラーの無限解析』において初めて導出されたのではなかった．オイラーはすでに導出した公式を見直したのである.『オイラーの無限解析』はオイラーの公式の「転」なのである．

オイラーの公式の「転」と「結」は『オイラーの無限解析』の 8 章にあるが,「起」に関する具体的な式は見ることができないと思っていた．ところが,「起」から「承」への過程は 8 章で付けられている脚註にあることに気づいた．オイラーが 1741 年と 1742 年に手紙で示した 2 つの式である．これを読み解けば,「起承」と「転結」は具体的に繋がるように思えた．

オイラーは，1742 年までは虚の指数関数と余弦の関係しか捉えていない．余弦との関係に正弦が付け加わるには，指数の底の転換が必要だった．そのとき，自由調和振動の微分方程式の成立条件が契機となったのではないかという視点を提示した．底の転換によって，テイラー展開の比較による導出が可能になったと思う．

1743 年の公式は，導出 1 や導出 2（自由調和振動の微分方程式正弦の特殊解）ではなく導出 3（テイラー展開の比較）によるものである.「Euler の公式の導出いろいろ」を最初にみたとき知ってでいた 2 つの導出法，1. Taylor 展開を用いた導出と 7. Euler の発見法的な導出は，2 つともオイラーの導出だったことになる．1. は 1743 年，7. は 1745 年である．思いがけない結果になったと思う．

[56] $(\cos nz - i\sin nz)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{\cos nz + i\sin nz}\right)^{\frac{1}{n}} = (\cos nz + i\sin nz)^{-1\cdot\frac{1}{n}} = (\cos nz + i\sin nz)^{-\frac{1}{n}}$

[57] この式はグレイゼルがオリジナルのド・モアブルの公式を「現在の記号」で表示しているものである.『グレイゼル数学史 III』5 章 225 頁．この式に (3) が付されている．

本論と付録 1 を書いた後,『無限解析のはじまり』（高瀬正仁著，ちくま学芸文庫，2009）を手にした．高瀬正仁は『オイラーの無限解析』の訳者だが,「オイラーの公式」に対する低い評価が気になり，付録 2 で異論を展開した．

投稿したあと，矢野忠先生からあいまいな箇所をいくつか指摘された．その 1 つにオリジナルのド・モワブルの公式とオイラーのド・モワブルの公式との関係があった．付録 3 でその関係を補完した．

また，タイトルの英訳 Euler's Formula — A Reasoing of History は先生の提案である．わたしは— introduction, development, turn and conclusion としていた．これは起承転結の直訳だった．

ふりかえってみると，わたし自身にも起承転結があったように思う．6. Euler の導出と 7. Euler の発見法的な導出を繋ごうと思った．これが「起」である．6. を追体験する（「承」）．グレイゼルの 1743 年の捉え方を知る（「転」）．1. Taylor 展開を用いた導出と 7. Euler の発見法的な導出を繋ぐ．これが「結」である．

最後に 1740 年から 1745 年までのオイラーの公式の経緯をまとめておこう．それは次のような「起承転結」で特徴づけられる．

起

$$\cos(x\log a) = \frac{a^{ix} + a^{-ix}}{2}.$$

承

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

転

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2},$$
$$\sin nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

結

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

編集後記

残暑お見舞い申し上げます．と型どうりの挨拶を言ってしまいましたが，今年は本当に暑いですね．私が住む北海道・札幌は 9 月に入ったにもかかわらず，30 度を超す日が何日も続いています．私は暑さに弱く，気温が 25 度を超すともうぐったりとしてしまいます．これは，子どものときに，寒流の親潮が流れる太平洋に面した室蘭で育ったことが大いに関係しています．室蘭では気温が 25 度以上になることはめったになく，夏でも暑いと思うことはまずなかったせいです．中学生になってから札幌に住むようになり，札幌は北海道のなかでも暑いほうで，夏の暑さを初めて知りました．

私が子どものときに知っていた日本の最高気温は 1933 年に山形県山形市で記録した 40.8 度でした．この記録は長い間破られることはなかったのですが，1990 年代に入ると日本で 40 度を超えることは珍しくはなくなりました．さらに 2000 年代に入ってからは 40 度を超えた記録は 20 回もあります．今年はコロナ騒ぎのせいで，航空機や列車の運休が増えたので，二酸化炭素の排出が減り，地球温暖化にブレーキがかかったはずと思ったのですが．にもかかわらず，今年だけで 5 回も 40 度を超えています．この調子でいくと，世界的にも気温は加速度的に，いや，指数関数的に，上がっていき，100 年後には世界の平均気温が 100 度を超え，人間を含め，すべての生物が絶滅するだろうと予測する人さえでてきました．我々が 100 年後まで生きている訳はないのですが，100 年という期間は，人類の歴史からするとほんの短い期間です．本当にどうなってしまうのでしょうか．また話がずれてきました．

最後に，今後とも『数学・物理通信』が長く続くことを願っています．

（世戸憲治）