数学・物理通信

10 巻 8 号　　2020 年 12 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2020 年 12 月 7 日

目次 (Contents)

1. 積分方程式における興味ある問題 **(2)**　ー奇跡の堰ー

世戸憲治　**2**

2. 「微分方程式における興味ある問題 **(6)**」へのコメント

秋葉 敏男　**8**

3. 直交座標系から極座標系へ **1**（改訂版）

矢野　忠　**13**

4. 素数の系列

矢野　忠　**23**

5. 編集後記

矢野　忠　**29**

1. Interesting Problems in Integral Equation (2)　ーMiracle Damー

Kenji SETO　2

2. Comments on "Interesting Problems in Differential Equation (6)"

Toshio AKIBA　8

3. From Descartes Coordinates to Polar Coordinates 1 (Revised Version)

Tadashi YANO　13

4. Expression of Prime Numbers

Tadashi YANO　23

5. Editorial Comments

Tadashi YANO　29

積分方程式における興味ある問題 (2)
ー奇跡の堰ー

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Integral Equation(2)
ーMiracle Damー

Kenji SETO*

1　はじめに

前回に引き続き，「はじめての逆問題」(『数理科学』別冊，サイエンス社) を読んだ解説をする．今回は，この中の「奇跡の堰」を取り挙げるが，これは，灌漑用の水路の堰を開けたときに水がどのように流れるかを問題にしたものである．ただし，ここでは，この本にある解答とはかなり違った解法を試みる．

2　堰の形を求める問題

2.1　方程式の導入とその解法

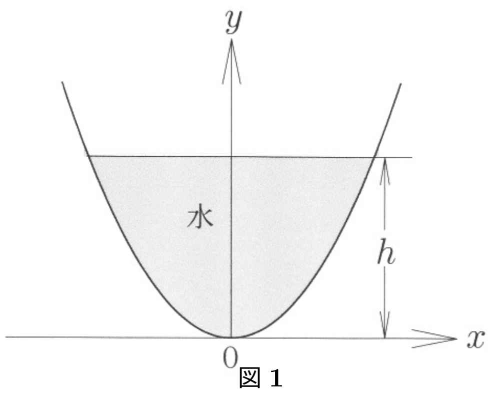


図 1

図 1 に示すように，灌漑用の水路があり，そこに堰 (ダム) が設けられている．この堰の断面は図に示すように，左右対称な U 字型になっている．この水路に高さ h まで水が入っているときに堰を全開するとどのように水が流れていくかを考える．ただし，この水路の水平部分は十分に長く，水面の高さ h は，堰を全開しても，すぐには変化しないものとする．図に示すように，水平方向に x 軸，鉛直上方向に y 軸をとる．堰の断面の形を x 正の側で $x = f(y)$ とする．高さ y の部分で水が飛び出る速度は，Torricelli の原理によると，g を重力加速度として，$\sqrt{2g(h-y)}$ で与えられる．したがって，微小厚さ dy の部分から水が単位時間に出る量は $2\sqrt{2g(h-y)}\,f(y)dy$ となる．2 が付くのは x 負の側も含めたためである．これを高さ方向 y について合計し

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

たものが，全体の単位時間当たりの流出量となるので，これを $k(h)$ と記すと，

$$k(h) = 2\sqrt{2g}\int_0^h \sqrt{h-y}\, f(y)dy \tag{2.1}$$

と表される．この $k(h)$ を，以下，流出率と呼ぶ．これは，堰の形状関数 $f(y)$ が与えられたときに，流出率 $k(h)$ を求める式であるが，逆に $k(h)$ が与えられたときに形状関数 $f(y)$ を求めるのがここでの問題である．この問題は前回の球状星団の星の分布密度を求める問題と似てはいるが，その違いは，前回は被積分関数の分母に平方根があったが，今回は平方根が分子についている．先の本にあった解法は後回しにして，ここでは，前回の Abel 変換をさらに拡張した独自の方法を展開してみる．

まず，(2.1) 式の両辺に $(s-h)^{-3/2}$ を掛けて，h について 0 から s まで積分すると，

$$\int_0^s (s-h)^{-3/2} k(h)dh = 2\sqrt{2g}\int_0^s (s-h)^{-3/2}\Big[\int_0^h \sqrt{h-y}\, f(y)dy\Big]dh \tag{2.2}$$

となるが，ここで，y と h の積分順序を入れ替えると，

$$\int_0^s (s-h)^{-3/2} k(h)dh = 2\sqrt{2g}\int_0^s f(y)\Big[\int_y^s (s-h)^{-3/2}\sqrt{h-y}\, dh\Big]dy \tag{2.3}$$

となる．ここで，h 積分のところだけを取り出して，積分変数を h から t に，

$$s-h = (s-y)t \tag{2.4}$$

と置き換えると，ベータ関数 B，ガンマ関数 $\mathit{\Gamma}$ を用いて，

$$\int_y^s (s-h)^{-3/2}\sqrt{h-y}\, dh = \int_0^1 t^{-3/2}(1-t)^{1/2}dt = B(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{\mathit{\Gamma}(-\frac{1}{2})\mathit{\Gamma}(\frac{3}{2})}{\mathit{\Gamma}(1)} = -\pi \tag{2.5}$$

と積分され[*1]，y にも s にも依存しなくなるので，(2.3) 式は

$$\int_0^s (s-h)^{-3/2} k(h)dh = -2\pi\sqrt{2g}\int_0^s f(y)dy \tag{2.6}$$

と簡単化される．この両辺を s で微分してから，改めて s を y と書き直すと，形状関数 $f(y)$ が，

$$f(y) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2g}}\frac{d}{dy}\int_0^y (y-h)^{-3/2} k(h)dh \tag{2.7}$$

と求められたことになる．

2.2　具体例：その 1

堰の形状関数 $f(y)$ を，

$$f(y) = f_0\Big(\frac{y}{r_0}\Big)^\alpha \tag{2.8}$$

と与えられたときの流出率 $k(h)$ を求める．ここに，f_0, r_0 は長さの次元を持つ定数，α は非負の無次元定数とする．これを (2.1) 式に代入すると，

$$k(h) = 2\sqrt{2g}f_0\int_0^h \sqrt{h-y}\Big(\frac{y}{r_0}\Big)^\alpha dy \tag{2.9}$$

[*1] 本来，この積分は発散積分であるが，ここでは，ベータ関数，ガンマ関数の解析接続性を用いて有限の値にしてある．

となるが，積分変数を y から t に，$y=ht$ と変換すると，

$$\begin{aligned} k(h) =& 2\sqrt{2g}\,f_0\frac{h^{\alpha+3/2}}{{r_0}^{\alpha}}\int_0^1\sqrt{1-t}\;t^{\alpha}\,dt \\ =& 2\sqrt{2g}\,f_0\frac{h^{\alpha+3/2}}{{r_0}^{\alpha}}B(\tfrac{3}{2},\ \alpha+1)=\sqrt{2\pi g}\,f_0\frac{h^{\alpha+3/2}}{{r_0}^{\alpha}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{5}{2})} \end{aligned} \tag{2.10}$$

と求められる．

2.3 具体例：その 2

逆に流出率 $k(h)$ を

$$k(h)=k_0\Big(\frac{h}{r_0}\Big)^{\beta} \tag{2.11}$$

と与えた場合の形状関数 $f(y)$ を求める．ここに，k_0, r_0 は，それぞれ，流出率 (体積/時間)，長さの次元を持つ定数である．また，β は前と同じく非負の無次元定数とする．これを (2.7) 式に代入すると，

$$f(y)=-\frac{k_0}{2\pi\sqrt{2g}}\frac{d}{dy}\int_0^y(y-h)^{-3/2}\Big(\frac{h}{r_0}\Big)^{\beta}dh \tag{2.12}$$

となるので，積分変数を h から t に，$h=yt$ と変換すると，

$$\begin{aligned} f(y)=&-\frac{k_0}{2\pi\sqrt{2g}\,{r_0}^{\beta}}\frac{d}{dy}y^{\beta-1/2}\int_0^1(1-t)^{-3/2}t^{\beta}dt \\ =&-\frac{k_0(\beta-\frac{1}{2})y^{\beta-3/2}}{2\pi\sqrt{2g}\,{r_0}^{\beta}}B(-\tfrac{1}{2},\ \beta+1)=\frac{k_0\,y^{\beta-3/2}}{\sqrt{2\pi g}\,{r_0}^{\beta}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\frac{1}{2})} \end{aligned} \tag{2.13}$$

と求められる．先に，β は非負の無次元定数と言ったが，この式から判断すると，$y=0$ で発散しないためには，$\beta\geq 3/2$ でなければならない．特に，$\beta=3/2$ のとき，堰の形は長方形となる．

3 別解法 1

前節では，Abel 変換を一般化した独自の解法を展開したが，先に挙げた本では，合成積と Laplace 変換を用いた解法が述べられている．ここで，その方法について，先の本を補足した形で，述べておく．

以下，一般論として，2 個の関数 $g_1(y)$, $g_2(y)$ があったとして，積分

$$k(h)=\int_0^h g_1(h-y)g_2(y)dy\Big(=\big[g_1*g_2\big](h)\Big) \tag{3.1}$$

を定義したとき，この積分値 $k(h)$ を g_1 と g_2 の合成積，あるいは，畳み込みといい，最後の括弧内に示した記号を用いて表わす．(2.1) 式はまさにこの形になっている．この合成積の基本的な定理として，$k(h)$ を Laplace 変換したものを $K(s)$, また，$g_1(y)$, $g_2(y)$ を Laplace 変換したものを，それぞれ，$G_1(s)$, $G_2(s)$，すなわち，

$$K(s)=\mathcal{L}\big[k\big](s)=\int_0^{\infty}k(h)e^{-sh}dh,\quad G_j(s)=\mathcal{L}\big[g_j\big](s)=\int_0^{\infty}g_j(y)e^{-sy}dy,\ \ (j=1,2) \tag{3.2}$$

とすると，

$$K(s)=G_1(s)G_2(s) \tag{3.3}$$

という式が成立する．この証明は簡単である．この合成積の式 (3.1) をデルタ関数を用いて書き直すと，

$$k(h) = \iint_0^\infty g_1(y_1)g_2(y_2)\delta(h-y_1-y_2)dy_1dy_2 \tag{3.4}$$

と積分範囲を 0 から ∞ にできる．このとき，$h<0$ に対し $k(h)=0$ となることに注意する．この上で，両辺に e^{-sh} を掛けて，h で積分すると，

$$\int_0^\infty k(h)e^{-sh}dh = \int_0^\infty dh \iint_0^\infty g_1(y_1)g_2(y_2)\delta(h-y_1-y_2)e^{-sh}dy_1dy_2 \tag{3.5}$$

となるが，ここで，右辺の h 積分を実行すると，

$$\int_0^\infty k(h)e^{-sh}dh = \int_0^\infty g_1(y_1)e^{-sy_1}dy_1 \int_0^\infty g_2(y_2)e^{-sy_2}dy_2 \tag{3.6}$$

となって，これは k, g_1, g_2 の Laplace 変換 K, G_1, G_2 が (3.3) 式を満たすことを意味する．

いま，(3.1) 式において，$k(h)$, $g_1(y)$ を既知関数，$g_2(y)$ を未知関数としよう．(3.3) 式からこの未知関数 $g_2(y)$ の Laplace 変換 $G_2(s)$ は，

$$G_2(s) = \frac{K(s)}{G_1(s)} \tag{3.7}$$

となるので，これを逆 Laplace 変換をすると，未知関数 $g_2(y)$ が

$$g_2(y) = \mathcal{L}^{-1}\big[G_2\big](y) \tag{3.8}$$

と求められる．

冪関数 h^ν の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}\big[h^\nu\big](s) = \int_0^\infty h^\nu e^{-sh}dh = \Gamma(\nu+1)s^{-\nu-1} \tag{3.9}$$

となり，この逆，s^μ の逆 Laplace 変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\big[s^\mu\big](y) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip} s^\mu e^{sy}ds = \frac{y^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}, \quad (c>0) \tag{3.10}$$

となる．この式に現れる積分は Bromwich 積分と呼ばれるが，冪関数の Laplace 変換は結果も冪関数となるので，実際は，この積分を実行する必要はなく，(3.9) 式を逆に解くだけで，この式が得られる．

以上の結果を前節の『具体例：その 2』に適用してみよう．まず，(2.1) 式において，流出率の $k(h)$ を (2.11) 式，および，$g_1(y)$ を

$$k(h) = k_0\Big(\frac{h}{r_0}\Big)^\beta, \qquad g_1(y) = 2\sqrt{2g}\sqrt{y} \tag{3.11}$$

とおくと，これらの Laplace 変換は (3.9) 式から

$$K(s) = \frac{k_0\Gamma(\beta+1)}{{r_0}^\beta}s^{-\beta-1}, \qquad G_1(s) = 2\sqrt{2g}\,\Gamma(\tfrac{3}{2})s^{-3/2} = \sqrt{2\pi g}\,s^{-3/2} \tag{3.12}$$

となる．あとは，

$$g_2(y) = f(y) \tag{3.13}$$

としたときの $g_2(y)$ の Laplace 変換 $G_2(s)$ は，(3.7) (3.12) 式から

$$G_2(s) = \frac{K(s)}{G_1(s)} = \frac{k_0\Gamma(\beta+1)}{\sqrt{2\pi g}\;{r_0}^\beta}s^{-\beta+1/2} \tag{3.14}$$

と求められる．あとは，(3.10) 式を用いて逆 Laplace 変換をすると，

$$f(y)=\mathcal{L}^{-1}\big[G_2\big](y)=\frac{k_0\ y^{\beta-3/2}}{\sqrt{2\pi g}\,{r_0}^{\beta}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\frac{1}{2})} \tag{3.15}$$

と (2.13) 式がまさしく再現される．

4　別解法 2

これを原稿の段階で，中西襄先生に見ていただいたところ，この種の計算は Y 超関数を用いるとより簡単に計算できることを教えていただいた．Y 超関数に関しては，先生が書かれた本『微分方程式』(丸善出版 2016 年) 第 1 章 10 節を参照されたい．ここに，その概略を述べる．Y 超関数 $Y_\nu(x)$ は，階段関数 $\theta(x)$ を用いて，

$$Y_\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\theta(x), & (\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots)\\ \delta^{(n)}(x), & (\nu=-n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{cases} \tag{4.1}$$

と定義される．ここに，下の段の $\delta^{(n)}(x)$ はデルタ関数 $\delta(x)$ の n 階微分である．また，この超関数は (3.1) 式のところで示した合成積に対して，

$$\big[Y_\mu * Y_\nu\big](x)=Y_{\mu+\nu}(x) \tag{4.2}$$

を満たす．この Y 超関数を用いて (2.1) 式を表すと，

$$k(h)=2\sqrt{2g}\,\Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big)\big[Y_{3/2}*f\big](h) \tag{4.3}$$

となる．一般に，3 個の関数 g_1，g_2，g_3 に対し合成積の結合則

$$g_1*\big[g_2*g_3\big]=\big[g_1*g_2\big]*g_3 \tag{4.4}$$

が成立するので，(4.3) 式の左から $Y_{-3/2}$ を掛けて合成積をとると，(4.2) 式，および，$Y_0(x)=\delta(x)$ を用いて，

$$\big[Y_{-3/2}*k\big](y)=2\sqrt{2g}\,\Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big)f(y) \tag{4.5}$$

すなわち，

$$f(y)=\frac{1}{2\sqrt{2g}\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}\big[Y_{-3/2}*k\big](y) \tag{4.6}$$

となる．ここで，$k(h)$ を (2.11) 式のようにとり，Y 超関数で表すと，

$$k(h)=k_0\Big(\frac{h}{r_0}\Big)^{\beta}=\frac{k_0\Gamma(\beta+1)}{{r_0}^{\beta}}Y_{\beta+1}(h) \tag{4.7}$$

となるので，

$$f(y)=\frac{k_0\Gamma(\beta+1)}{2\sqrt{2g}\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big){r_0}^{\beta}}\big[Y_{-3/2}*Y_{\beta+1}\big](y) \tag{4.8}$$

と表せる．ここで，再び，(4.2) 式を用いると，

$$f(y)=\frac{k_0\Gamma(\beta+1)}{2\sqrt{2g}\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big){r_0}^{\beta}}Y_{\beta-1/2}(y)=\frac{k_0\,y^{\beta-3/2}\theta(y)}{\sqrt{2\pi g}\ {r_0}^{\beta}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\frac{1}{2})} \tag{4.9}$$

となって再び (2.13) 式が再現される．確かにこの Y 超関数を用いる方法は，面倒な計算がほとんどなく，方法として一番スマートかもしれない．

5　おわりに

ここでは，灌漑用水路の堰を開いたときの水の流れ出る量に関する問題を扱った．この問題の解法として，私が考えた Abel 変換を拡張した解析方法と，先の本にでていた Laplace 変換を用いる 2 つの方法について解説した．どちらの解法も計算の面倒さは同じくらいであるが，一般性の点からすると，拡張型 Abel 変換を使った方が勝っていると思われる．ただし，この方法で一つ気になる点がある．それは，(2.5) (2.13) 式にでてくるベータ関数の変数に $-1/2$ という負の数が入ってしまうことである．本来ならこれらの式に入ってくる積分は発散積分であるが，ベータ関数，ひいてはガンマ関数がそれを正の側から複素平面上で解析接続した形にしているため発散が避けられている．間違いを 2 度犯すと，間違いが相殺されて正しい結果になってしまうことがあるが，それと同じような気がしないでもない．その点「別解法 2」で示した Y 超関数を用いる方法は，数学的に合理化されたものになっている．

話し変わって，ここでの問題は，堰を全開したときの水の流れを扱ったが，堰を中途半端に開いたときはどうなるかを考えてみた．このとき，堰の上の方を開くか，下の方を開くかで問題はまったく変わってくる．上の方を開いた場合は，ここでの解法がそのまま使える．しかし，下の方を開いて，上の方が閉じたままの場合は，ベータ関数になるところが，不完全ベータ関数になってしまい，その後，まったく手の施しようがなくなるほど問題が複雑化してしまう．やはり，きれいに解ける問題というのは限定されてしまうのかもしれない．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき，「別解法 2」のところに書いたように大変有意義なアドバイスをいただきました．ここに，謹んで感謝申し上げます．

「微分方程式における興味ある問題 (6)」へのコメント

秋葉 敏男

Comments on "Interesting Problems in Differential Equation (6)"

Toshio Akiba*1

1　はじめに

世戸・吉田両氏の論文 [1] において，万有引力が逆二乗法則にしたがわなかった場合の，惑星の運動について考察されています. そこでは，太陽と惑星との距離を r とするとき，引力が $r^{-\alpha}$ に比例すると仮定して，$\alpha = 2, 3, 4, 5$ の場合については，詳しく解析されていますが，その他の場合は概略の解説にとどめられているようです.

そこで，$\alpha \leq 1$ の場合について，やや掘り下げて考察して見たいと思います.

2　逆 1 乗法則の運動方程式の解析

[1] に示されているように，$\alpha = 1$ の場合の問題の方程式はつぎのようなものです.（[1] (3.9) 参照）

$$\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{2\log\zeta - \zeta^2 + C}} = \theta + \theta_0 \tag{1}$$

$$\zeta := \frac{1}{r}\sqrt{\frac{h^2}{GM}} := \frac{r_0}{r} \tag{2}$$

ただし，M は太陽の質量，G は万有引力定数，h は面積速度の大きさを表す定数です.(C, θ_0 は積分定数)

方程式 (1) において，$\zeta^2 := \mathrm{e}^t$ により変数 t を導入すると，

$$2\log\zeta - \zeta^2 + C = t - \mathrm{e}^t + C$$
$$2\mathrm{d}\zeta = \sqrt{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

これ等の関係式を用いて方程式 (1) を変形すれば，

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+C)\mathrm{e}^{-t} - 1}} = \theta + \theta_0 \tag{3}$$

ここで，式 (3) の被積分関数を $g(t)$ と名づけます.

$$g(t) := \frac{1}{\sqrt{(t+C)\mathrm{e}^{-t} - 1}} \tag{4}$$

関数 $g(t)$ の分母の根号内の式は正値であるべきですから，$t + C > \mathrm{e}^t$ でなければなりません. そして，このような t が存在するためには，$C > 1$ である必要があります. ($t > 0$ のとき，$\mathrm{e}^t > 1$ だからです) このとき，t は区間 $(-t_2, t_1)$ 内の点となります. (図 1 参照)

そして，関数 $g(t)$ の形状は，ほぼ図 2 のようなものです. 図 2 において，$t_1, -t_2$ は超越方程式 $t + C = \mathrm{e}^t$ の解であり，$(1 - C)$ は関数 $g(t)$ の極小値点です.

$$g(1-C) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{C-1} - 1}}$$
$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{C-1}}$$

*1 tawarp@mug.biglobe.ne.jp

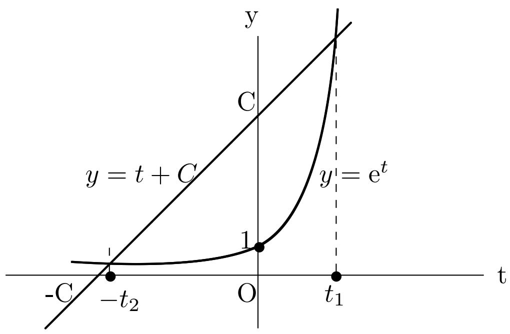


図 1

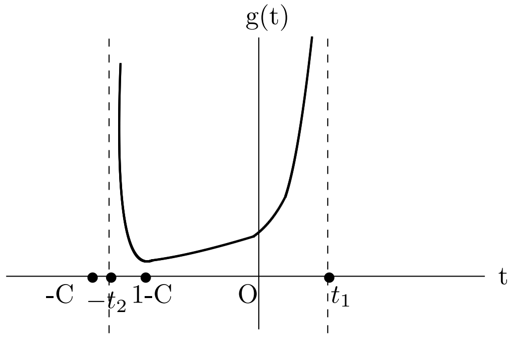


図 2

以上の考察から，区間 $[-t_2, t_1]$ が動径の運動範囲となり，これを元の変数で表せば $[r_1, r_2]$ となります.
ただし，

$$
\begin{aligned}
r_0 &= \sqrt{\frac{h^2}{GM}} && \text{(t=0 に対応する点)} \\
r_1 &= \frac{r_0}{\sqrt{t_1+C}} && \text{(近日点)} \\
r_2 &= \frac{r_0}{\sqrt{-t_2+C}} && \text{(遠日点)} \\
r_h &= r_0\sqrt{\mathrm{e}^{C-1}} && \text{(t=1-C に対応する点)} \\
r_1 &< r_0 < r_h < r_2
\end{aligned}
$$

文献 1 の 8 頁以降の「α が一般の場合」の中で，$\alpha = 1$ の場合に関連しては

(a) $0 < \alpha < 3$ のとき，安定解がある

(b) $\alpha \leq 1$ で $C > 1$ の時，被積分関数の変数 ζ の取り得る範囲は限定され，これは軌道半径が限定されて惑星運動となることを示す.

などが言及されていますが，今回の考察で動径の範囲がより詳しく示せたと思います.
最後に，軌道の概形を知るために，式 (3) の左辺の積分を近似計算してみます.
式 (3) は $g(t)$ を用いて，つぎのように変形出来ます.

$$\int g(t)\mathrm{d}t = 2(\theta+\theta_0) \tag{5}$$

（１）　$t = t_1$ の近傍（近日点の近傍）

$t = t_1 - x$ とおいて，微小値 x の 2 乗の項までの近似計算により，$g(t)$ はつぎのように変形されます.

$$
\begin{aligned}
g(t) &\approx \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{t_1}}}{\sqrt{-x^2 + x(\mathrm{e}^{t_1}-1)}} \\
&= \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{t_1}}}{\sqrt{-(x-\frac{\mathrm{e}^{t_1}-1}{2})^2 + (\frac{\mathrm{e}^{t_1}-1}{2})^2}}
\end{aligned}
$$

そこで，$x - \frac{\mathrm{e}^{t_1}-1}{2} = \xi$ と変数変換すれば，$b = \frac{\mathrm{e}^{t_1}-1}{2}$ として，

$$
\begin{aligned}
2(\theta+\theta_0) &\approx -\int \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{t_1}}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{b^2-\xi^2}} \\
&= -\sqrt{\mathrm{e}^{t_1}}\arcsin\left(\frac{\xi}{b}\right)
\end{aligned}
$$

変数を元にもどして整理すると，$r = r_1$ の近傍で

$$\sin\left(\frac{2(\theta+\theta_0)}{\sqrt{t_1+C}}\right) \approx 1 - \frac{2t_1}{t_1+C-1} + \frac{4}{t_1+C-1}\log\frac{r_0}{r} \tag{6}$$

（２）　$t=-t_2$ の近傍（遠日点の近傍）

$t=-t_2+x$ とおいて，同様の計算をすれば $r=r_2$ の近傍で

$$\sin\left(\frac{2(\theta+\theta_0)}{\sqrt{-t_2+C}}\right)\approx -1+\frac{2t_2}{t_2-C+1}+\frac{4}{t_2-C+1}\log\frac{r_0}{r} \tag{7}$$

（３）　$t=1-C$ の近傍

全く同様の計算により，$r=r_h$ の近傍で

$$\sin\left(2(\theta+\theta_0)\sqrt{\mathrm{e}^{C-1}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{1-C}}}\left(C-1+2\log\frac{r_0}{r}\right) \tag{8}$$

これらは，いずれも a,b,c をパラメータとして

$$\sin(a(\theta+\theta_0))\approx b+c\log\frac{r_0}{r}$$

の形の近似式になっています．この式から，一周回転した時，左辺の正弦関数値は元にもどりませんから，近日点が移動することになります.[*2]

3　$\alpha<1$ の場合

$\alpha<1$ の場合は，$r_0:=\left(\frac{h^2}{GM}\right)^{\frac{1}{3-\alpha}}$ として，つぎのような運動方程式が得られます.[*3]

$$\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\frac{2}{\alpha-1}\zeta^{\alpha-1}-\zeta^2+C}}=\theta+\theta_0 \qquad (\zeta:=\frac{r_0}{r}) \tag{9}$$

そして，前と同様に $\zeta^2=\mathrm{e}^t$ により，変数 t を導入すれば，方程式（9）は以下のように変形されます.

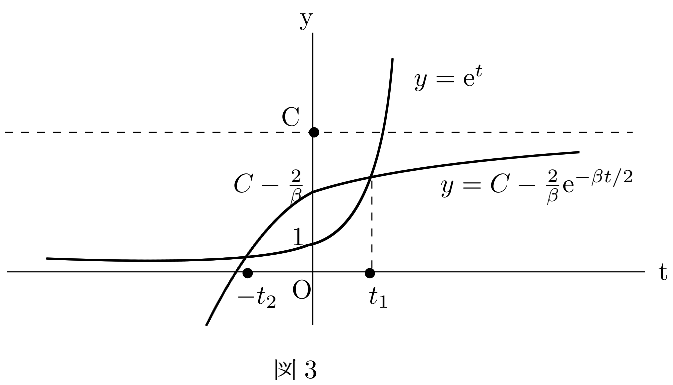
$$2(\theta+\theta_0)=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{C\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{\beta}\mathrm{e}^{\frac{-(\beta+2)t}{2}}-1}} \qquad (\beta:=(1-\alpha)>0) \tag{10}$$

方程式（10）の被積分関数を $f(t)$ と名づければ，$f(t)$ にはつぎのような性質があります.

（１）　$f(0)$ の分母は，$\sqrt{C-1-\frac{2}{\beta}}$ ですから，$C>\frac{2}{\beta}+1>3$ でなければなりません.

（２）　$\lim_{t\to\infty}f(t)=\frac{1}{\sqrt{-1}}$ ですから，$t<t_1$ でなければなりません. ただし，t_1 は下記の超越方程式の解です.

$$C-\frac{2}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}=\mathrm{e}^t \tag{11}$$



$(C-\frac{2}{\beta}>1)$

図 3

[*2] このことは，[1] の 3 節末尾 (p.9) で言及されています

[*3] [1] の定数 $C-\frac{2}{\alpha-1}$ を改めて C としています

図 3 に示すように，超越方程式 (11) は二つの解 $t_1, -t_2$ をもちます．

以上のことから，$f(t)$ が意味をもつ t の区間は $(-t_2, t_1)$ となりますから，$\alpha < 1$ の法則の下では，$\alpha = 1$ の場合と同様の惑星運動となります．

ここで注目すべき事は，$\alpha \leq 0$ の場合も含まれる事です．引力が距離に依存しない一様な場合や，距離の $|\alpha|$ 乗に比例する場合も，天体は惑星運動となる事を意味しています．これは，距離に比例する求心力場は，バネの復元力に似た作用を及ぼして，天体を束縛すると解釈されます．

4　おわりに

[1] の 3 節（8 頁以降）で，一般の α の場合の軌道形状について解説されていますが，ここでは，$\alpha > 1$ の場合を別の方法で確認しておきたいと思います.(定数 C は, 前節と同じです)

$\alpha > 1$ の場合の軌道方程式は，式 (9) において $\beta := \alpha - 1$ とおいて，

$$2(\theta + \theta_0) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{C\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{\beta}\mathrm{e}^{\frac{(\beta-2)t}{2}} - 1}} := \int g(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

まず，$g(0)$ の分母の根号内の式は正値であるべきですから，

$$C + \frac{2}{\beta} > 1 \tag{13}$$

そして，$g(t)$ の分母の零点を決める方程式は，下記のようになります．

$$C + \frac{2}{\beta}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}t} = \mathrm{e}^t \tag{14}$$

軌道方程式 (12) の解は，β の値により異なります．

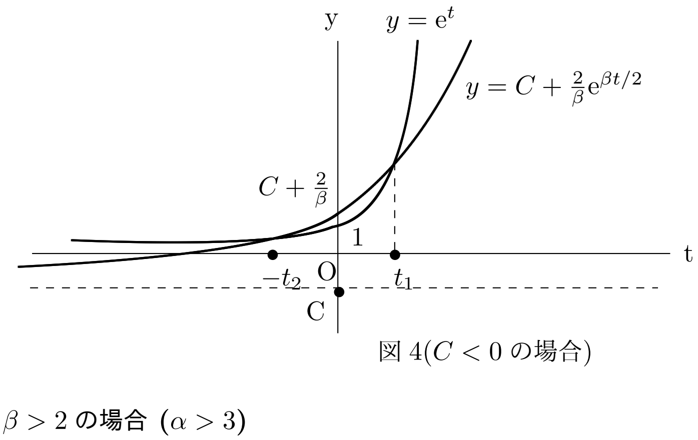
[A]　**$0 < \beta < 2$ の場合 $(1 < \alpha < 3)$**

$\frac{\beta}{2} - 1 < 0$ により，$\lim_{t\to\infty} g(t) = 1/\sqrt{-1}$ となりますから，$t < t_1$ でなければなりません.(t_1 は式 (14) の解)

ここで, 関数 $\phi(t) = C + \frac{2}{\beta}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}t} - \mathrm{e}^t$ を導入すれば, $\phi(t)$ は $t = 0$ で極大値 $C + \frac{2}{\beta} - 1 > 0$ を持ち, $\lim_{t\to\pm\infty}\phi(t) = C$ ですから，$\phi(t) > C$ です. よって，

(1) $C \geq 0$ のとき，関数 $\phi(t)$ は正値関数ですから，$t < 0$ の区間に零点はなく，動径の区間は $-\infty < t < t_1$ となります．したがって，$r > r_1 = r_0/\sqrt{\mathrm{e}^{t_1}}$ となり天体は太陽系外に飛び去ります．

(2) $C < 0$ のとき，$\phi(t)$ は横軸と交わりますから，$t < 0$ の区間に零点 $-t_2$ が存在します (図 4 参照)．よって，天体は系内の惑星となります．(逆 2 乗法則の場合も含まれています)



$(C + \frac{2}{\beta} > 1)$

図 4($C < 0$ の場合)

[B]　**$\beta > 2$ の場合 $(\alpha > 3)$**

まず, 条件 (13) から $C > 1 - \frac{2}{\beta} > 0$ である事に注意します．

そして $g(t)$ は，以下の性質をもちます.

(a) $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} g(t) = 0$

(b) $t = \frac{2}{\beta}\log(\frac{\beta C}{\beta-2})$ で，極大値 $1/\sqrt{(\frac{\beta C}{\beta-2})^{1-\frac{2}{\beta}} - 1}$ を持ちます.

上記の性質 (a) より, 動径の範囲は $(0,\infty)$ となりますから, 天体は太陽に落ち込むか系外に飛び去るかのいずれかとなります.(初期条件によります)

$\beta = 2$ の場合は，$g(t) = \sqrt{\mathrm{e}^t/C}$ ですから, $r = r_0/(\theta+\theta_0)\sqrt{C}$ となり, 天体は太陽に落下します.*4

以上の内容をまとめると, 次表のようになります.

α	C	天体の運動
$\alpha < 1$	$C > 3$	惑星運動
$\alpha = 1$	$C > 1$	惑星運動
$1 < \alpha < 3$	$C < 0$	惑星運動
$1 < \alpha < 3$	$C \geq 0$	飛去彗星運動
$\alpha = 3$	$C > 0$	太陽に落下
$\alpha > 3$	$C > 0$	落下または飛去 (*)

(*) 初期条件による

α が小さく, 引力が強い場合には, 天体は系内に束縛され易いと予想されますが, 上表からこのことが読み取れます.

参考文献

[1] 世戸憲治，吉田文夫，微分方程式における興味ある問題 (6)， 数学・物理通信 9 巻 6 号 (2019.9)

*4 $\alpha = 3$ の時の積分定数 C は，[1] では $C - \frac{2}{\alpha-1} = C - 1$ となっています

直交座標系から極座標系へ 1（改訂版）

矢野　忠[*1]

From Descartes Coordinates to Polar Coordinates 1 (Revised Version)

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

これは以前に掲載した同じタイトルのエッセイ [1] の改訂版である．前のエッセイを 2 つに分けてテーマをより深く取り扱った．一つの目的を実行するための，いくつかの方法を検討することは，無駄なことのように思われるが，それでももっとも推奨したい方法を意識的に使うことができるためには，他の方法を学んでおくのがよいと考えている．

量子力学での角運動量について Gasiorowicz の *"Quantum Physics"* [2] の第 10 章を読んでいたら，そのはじめのところに 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) と直交座標 (x, y, z) との関係

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.1}$$

が導入され，その全微分

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{1.2}$$

から，これを右辺の $dr, d\theta, d\phi$ について

$$\begin{aligned} dr &= \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz \\ d\theta &= \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz) \\ d\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi dx + \cos\phi dy) \end{aligned} \tag{1.3}$$

と解いた式が出ていた[*3]．

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] 全微分 (1.2) と (1.3) の定義はそれぞれ

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi, & dr &= \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi, & d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta}{\partial z}dz \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi, & d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \end{aligned}$$

であることを思い出しておこう．

以下，ψ を x,y,z の関数として，(1.3) を用いれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\
&= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\
&= \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

が容易に導かれる．

この (1.3),(1.4) の求め方について考えてみるのがこのエッセイの目的である．

なぜ (1.4) の求め方を問題とするのか．これは一つには 3 次元のラプラス演算子の直交座標系での表現

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.5}$$

と関係している．これを 3 次元の極座標で

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Lambda_3\\
\Lambda_3 &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

と表すときに，(1.4) を 2 度オペレートして

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.7}$$

を 3 次元極座標で求めて，それらの和

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.8}$$

を求めるのが愚直な (1.6) の求め方である．そして，その計算の詳細を逐一述べたエッセイを書いたことがあった [3]．この愚直なやり方については中西先生のご批判をうけてもっと簡便な求め方をこの『数学・物理通信』に載せた [4] [5]．したがって，このエッセイでは 3 次元のラプラス演算子の極座標表示を求めることを直接の目的とはしない．

しかし，(1.3) の求め方とか (1.4) の求め方についていろいろ考えてみるのが，このエッセイの目的である．これは，また，量子力学の軌道角運動量を考える準備となっている．

2 節では (1.3) を中学生風に加減法で求める．3 節では Cramer の公式を用いて (1.3) を求める．4 節では (1.3) を用いない (1.4) の別の導出について述べる．付録 1 では (dx,dy,dz) から $(dr,d\theta,d\phi)$ への変換とその逆変換について述べる．付録 2 では (6.9) の計算について述べる．

2　(1.3) の導出 1

(1.2) から (1.3) を求めるのは，どうしてか．これは（1.3）のように微分 $dr,d\theta,d\phi$ について解いた式があれば，(1.4) が容易に求められることはすぐにわかる．しかし，私ははじめ Gasiorowicz の意図が理解できなくて，「なぜ？」と考えた．

では，中学生の連立方程式を解く練習のようだが，どうやって (1.2) から (1.3) を求めるか考えてみよう．その説明に入る前に式 (1.2) と (1.3) の番号の拡張について述べよう．たとえば，(1.2) は 3 つの式を含んでいるが，上から順番に (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) のように番号をつける．また，これらの式から導かれた式があれば，順番に (1.2.4), (1.2.5) $\cdots$ のように番号をつける．(1.3) も同様である．

さて (1.2) をよく見てみよう．微分 dx, dy は微分 $dr, d\theta, d\phi$ を 3 つとも含んでいるが，微分 dz は $dr, d\theta$ は含んでいるが，$d\phi$ は含まない．したがって，(1.2.1), (1.2.2) から $d\phi$ を消去すれば，dx と dy の 1 次結合を $dr, d\theta$ の 1 次結合として表すことができて，この式を (1.2.3) と連立させれば，$dr, d\theta$ について解くことができる．こうして求められた $dr, d\theta$ を (1.2.1) または (1.2.2) に代入すれば，$d\phi$ が求められる[*4]．

では，これから (1.2) から (1.3) への導出をしよう．

(1.2.1),(1.2.2) から $d\phi$ を消去するために (1.2.1) に $\cos\phi$ をかけ，(1.2.2) に $\sin\phi$ をかけて辺々をくわえれば，すなわち $(1.2.1)\times\cos\phi + (1.2.2)\times\sin\phi$ をつくれば，

$$\cos\phi dx + \sin\phi dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \tag{1.2.4}$$

これと連立させて，解くべき方程式は

$$dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \tag{1.2.3}$$

である．(1.2.4) と (1.2.3) から $d\theta$ を消去すれば，すなわち，$(1.2.4)\times\sin\theta + (1.2.3)\times\cos\theta$ をつくれば

$$\sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz = dr \tag{1.2.5}$$

となる．

つぎに (1.2.3),(1.2.4) から dr を消去すれば，すなわち，$(1.2.4)\times\cos\theta - (1.2.3)\times\sin\theta$ をつくれば，

$$\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz = rd\theta \tag{1.2.6}$$

これで，(1.2.5) と (1.2.6) から dr と $d\theta$ とが求められる．

$$dr = \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz \tag{1.3.1}$$

$$d\theta = \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz) \tag{1.3.2}$$

この (1.3.1) と (1.3.2) とを (1.2.1) または (1.2.2) に代入すれば，$d\phi$ が求められる．ここでは (1.2.1) に代入すれば，

$$d\phi = \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi dx + \cos\phi dy) \tag{1.3.3}$$

が求められる．

3 (1.3) の導出 2

2 節では (1.2) の連立方程式を中学生のように解いた．しかし，大学生ともなれば，線形代数の Cramer の公式をすでに知っているであろう．この 3 節では Cramer の公式を用いて解いてみよう．この場合には，形式的には解はすぐに書き下せる．面倒なのは行列式の計算である．

[*4] (1.4) を得るためには，(1.2) から求められた $\frac{\partial\psi}{\partial r}$，$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$ すなわち，(4.1)-(4.3) を $\frac{\partial\psi}{\partial x}$，$\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ について解くことも考えられる．この求め方については 4 節で示す．しかし，(1.2) を $dr, d\theta, d\phi$ について解いて，(1.3) を求め，それから (1.4) を求めるほうが少し簡単だと思う．

さて，(1.2) の 3 つの式を未知数を $dr, d\theta, d\phi$ として解を求めれば，

$$dr = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} dx & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ dy & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ dz & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

$$d\theta = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & dx & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & dy & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & dz & 0 \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

$$d\phi = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & dx \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & dy \\ \cos\theta & -r\sin\theta & dz \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

である．これらの行列式を展開していこう．

まず分母となる D を求めよう．第 3 行について展開すると

$$\begin{aligned} D &= \cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + r\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} + r^2\ \sin^3\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned} \tag{3.5}$$

dr について第 3 行について展開すれば，

$$\begin{aligned} dr &= \frac{1}{D}\left(dz\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + r\sin\theta\begin{vmatrix} dx & -r\sin\theta\sin\phi \\ dy & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{D}\left(r^2\cos\theta\sin\theta dz\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} + r^2\sin^2\theta\begin{vmatrix} dx & -\sin\phi \\ dy & \cos\phi \end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{D}\left[r^2\cos\theta\sin\theta dz + r^2\sin^2\theta(\cos\phi dx + \sin\phi dy)\right] \\ &= \cos\theta dz + \sin\theta(\cos\phi dx + \sin\phi dy) \\ &= \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz \end{aligned} \tag{3.6}$$

$d\theta$ について第 3 行で展開すれば，

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{1}{D}\left(\cos\theta\begin{vmatrix} dx & -r\sin\theta\sin\phi \\ dy & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} - dz\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{D}\left(r\cos\theta\sin\theta\begin{vmatrix} dx & -\sin\phi \\ dy & \cos\phi \end{vmatrix} - dz(r\sin^2\theta)\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{D}\left[r\cos\theta\sin\theta(\cos\phi dx + \sin\phi dy) - r\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)dz\right] \\ &= \frac{r\sin\theta}{r^2\sin\theta}[\cos\theta(\cos\phi dx + \sin\phi dy) - \sin\theta dz] \\ &= \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz) \end{aligned} \tag{3.7}$$

$d\phi$ について，第 3 列について展開すれば，

$$\begin{aligned}
d\phi &= \frac{1}{D}\left[dx\begin{vmatrix}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix} - dy\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix} + dz\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi\end{vmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{D}\left[dxr\sin\phi\begin{vmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{vmatrix} - dyr\cos\phi\begin{vmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{vmatrix} + dzr\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{D}[r\sin\phi(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)dx - r\cos\phi(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)dy]\\
&= \frac{r}{r^2\sin\theta}(-\sin\phi dx+\cos\phi dy)\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi dx+\cos\phi dy) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

この 3 節で導いた (3.6)-(3.8) が (1.3) である．

2, 3 節では (1.3) を導くことを考えた．(1.3) が導けると (1.4）を導くことはたやすい．

4 (1.4) の別の導出

この 4 節では (1.4) の別の導出を述べる．実際にとりかかる前に導出の方針を考えよう．(1.2) から $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \phi}, \cdots$ を求めるのは簡単である．だから直ちに

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (4.1)\\
\frac{\partial\psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\\
&= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (4.2)\\
\frac{\partial\psi}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial\psi}{\partial z}\\
&= -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

を導き，これを $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ について解くという方針で (1.4) を求めることを考える [6].

(4.1)-(4.3) をながめてみると $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ を表す式 (4.1) と $\frac{\partial\psi}{\partial \theta}$ を表す (4.2) とは $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ とをすべて含んでいるが，$\frac{\partial\psi}{\partial \phi}$ を表す式 (4.3) は $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ を含んでいるが，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ を含んでいない．

それで，もし (4.1),(4.2) から $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ を含む項を消去して，$\frac{\partial\psi}{\partial r}$ と $\frac{\partial\psi}{\partial \theta}$ の 1 次結合を $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ と $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ の 1 次結合で表すことができれば，こうして得られた式を (4.4) とすれば，(4.3) と (4.4) とを $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ と $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ との連立方程式として，解くことができる．そして $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ とが求められれば，これらを (4.1) または (4.2) へ代入すれば，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ を求めることができる．

これで解法の方針が立ったので，実際の計算にとりかかろう．

(4.1) の $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ の前の係数は $\cos\theta$ であり，(4.2) の $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ の前の係数は $-r\sin\theta$ であるから，(4.1)$\times r\sin\theta+$(4.2)$\times\cos\theta$ をつくれば，

$$r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial \theta} = r\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (4.4)$$

ここで，この (4.4) と連立させる (4.3) を再度ここに書いておこう．

$$\frac{\partial\psi}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (4.3)$$

(4.3) と (4.4) とから $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ の項を消去するとすれば，(4.4) の $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ の前の係数が $r\sin\phi$ で (4.3) の $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ の前の係数が $r\sin\theta\cos\phi$ であるから，$(4.4)\times\sin\theta\cos\phi-(4.3)\times\sin\phi$ をつくれば，$\frac{\partial\psi}{\partial y}$ を消去できる．

これを計算してみれば，

$$r\sin^2\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\cos\theta\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4.5}$$

また (4.4) の $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ の前の係数が $r\cos\phi$ で，(4.3) の $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ の前の係数が $-r\sin\theta\sin\phi$ であるから，$(4.4)\times\sin\theta\sin\phi+(4.3)\times\cos\phi$ をつくれば，$\frac{\partial\psi}{\partial x}$ を消去できる．

$$r\sin^2\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\cos\theta\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{4.6}$$

したがって，(4.5),(4.6) から

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{4.8}$$

この (4.7),(4.8) を (4.1) に代入すれば

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{4.9}$$

これらの (4.7)-(4.9) は (1.4) に一致している．この計算は (1.2) から (1.3) の導出と比べれば，ちょっと複雑である．

Gasiorowicz が (1.2) から (1.3) を導いたのは，だから (4.1)-(4.3) を $\frac{\partial\psi}{\partial x}$，$\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ について解くことが，(1.2) から (1.3) を導くのよりも複雑になるということを見通していたということであろう．この点に Gasiorowicz には教える内容を少しでもわかりやすくするという彼の教育についての才能が出ていると思う．

5 おわりに

このエッセイでは，　(1.2) から (1.3) への導出とか (1.4) の導出について述べた．(1.2) から (1.3) が導かれたら，それから (1.4) を導出するのは難しくはない．

また (4.1)-(4.3) から (1.4) を導くことを試みた．いずれも

$$\begin{gathered}\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial\theta}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial r}{\partial z},\frac{\partial\theta}{\partial z},\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{gathered}$$

の偏導関数をあらわに求めないで (1.4) を求めたが，もちろんこれらを求めて (1.4) を求めることもできる．これについては続きのエッセイで述べる．

6 付録 1 (dx,dy,dz) から $(dr,d\theta,d\phi)$ への変換とその逆変換

(1.2) と (1.3) とをマトリックスの形に表す．まず (1.2) を

$$d\mathbf{r}=A(r,\theta,\phi)d\boldsymbol{\Theta} \tag{6.1}$$

と表す．ここで，

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$$d\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$A(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

は $(dr, d\theta, d\phi)$ から (dx, dy, dz) への変換を与えている．

そして (dx, dy, dz) から $(dr, d\theta, d\phi)$ への逆変換は

$$d\mathbf{\Theta} = B(r,\theta,\phi)d\mathbf{r} \tag{6.5}$$

で表される．ここで，$d\mathbf{r}, d\mathbf{\Theta}$ は (6.2),(6.3) である．また $B(r,\theta,\phi)$ は (1.3) から

$$B(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

で与えられることは 2 節で述べた．そうすれば

$$A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = 1 \tag{6.7}$$

であることが予期される．これは (6.1) に (6.5) を代入すれば

$$d\mathbf{r} = A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi)d\mathbf{r} \tag{6.8}$$

となるから，(6.8) が成り立つためには (6.7) が成立しなくてはならない．これを具体的に計算してみても

$$\begin{aligned} A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.9}$$

となる[*5]．

7　付録 2　(6.9) の計算

(6.4) のマトリックスの各要素を

$$\begin{aligned} A(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.1}$$

[*5] 詳細な計算は付録 2 に示す．

と表し，(6.6) のマトリックスの各要素を

$$
\begin{aligned}
B(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

と表せば，

$$
A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (7.3)
$$

と表せる．具体的に c_{ij} の要素を以下に計算する．

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= \cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= 1 \\
c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
&= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= \cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\
&= \cos\theta\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\
&= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= \cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\
&= \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= \sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= 1 \\
c_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\
&= \cos\theta\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\
&= \cos\theta\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi \\
&= 0 \\
c_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\
&= \cos\theta\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \\
&= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= 1
\end{aligned}
$$

これらの計算から確かに (6.7) が求められることがわかる．

ここまで計算をした後でいうのは気が引けるが，実は $A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi)=1$ を示すために上の計算をする必要はなかった．

実は (6.1) は

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

であり，また (6.5) は

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

であるから，マトリックスの積 AB をつくると，

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

であることがすぐにわかる．

たとえば，c_{11} は

$$c_{11} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \tag{7.7}$$

となり，c_{12} は

$$c_{12} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \tag{7.8}$$

となる．他の要素も同様である．

また，一般的に直交直線座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ から直交曲線座標系 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ の場合の変換と逆変換のマトリックスの積も

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \delta^i_k \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \delta^i_k \tag{7.10}$$

が成り立つ [7]．ただし，(7.9),(7.10) では上下に 2 度出てくる，添字 j については 1 から n まで和をとるという，Einstein の規約が用いられている．

(2018.4.20)(2020.12.3 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠, 直交座標系から極座標系へ，数学・物理通信 8 巻 5 号 (2018.6) 7-15

[2] S. Gasiorowicz, *“Quantum Physics”* (Wiley, 1974) 167-178

[3] 矢野　忠, ラプラス演算子の極座標表示，研究と実践（愛数協）No. 25 (1988.3) 16-29 （改訂して『数学散歩』（国土社，2005）および 『物理数学散歩』（国土社, 2011）に収録）

[4] 矢野　忠, ラプラス演算子の極座標表示，再考，数学・物理通信 7 巻 9 号 (2017.12) 10-20

[5] 矢野　忠, ラプラス演算子の極座標表示再考 2，数学・物理通信 8 巻 5 号 (2018.6) 16-27

[6] 佐々木重吉,『微分方程式概論』下（槇書店，1973）149-151
[7] 石井俊全,『一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する』（ベレ出版，2017）419

素数の系列

矢野　忠[*1]

Expression of Prime Numbers

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

小川洋子さんの『博士の愛した数式』 [1] に「2 以外のすべての素数が $4n+1$ または $4n-1$ のいずれかで表される」と書いてある[*3]．しかし，どうしてこのように表されるのかはわからなかった．そのことをブログに書いたら，メールで中西襄先生（京都大学名誉教授）よりコメントを頂いた．

それによると 2 以外の素数はすべて奇数であるから，上の命題は自明であるということだった．中西先生のコメントで「2 以外の素数はすべて奇数である」という注意がエッセンシャル（本質的）であった．

そのコメントにしたがって，すぐにその説明をブログに書いた [2]．それをここに再掲すると

> すべての自然数を 4 でわるとそのあまりは 0, 1, 2, 3 のいずれかである．「2 以外の素数はすべて奇数である」から，これを 4 でわったとき，あまりが 0 または 2 となることはない．したがって，あまりは 1 か 3 かに限られる．
>
> もしあまりが 1 であれば，このときにはその素数は $4n+1$ と表される．さらに，もしあまりが 3 であるならば，その素数は $4n+3$ と表されるが，これは $4n+3=4n+(4-1)=4(n+1)-1$ と表される．だから，この場合には，$4n-1$ と表せる．

説明はこれでいいのだが，数タイルでこれを表して考えてみよう．それに付随していくつかのことを考えてみる．

2 節では自然数を数タイルで表すこと，3 節ではこの数タイルで素数の系列を調べる．4 節では自然数を奇数と偶数に分けたとき，数式でどう表すかを考える．付録では自然数を 4 でわったときの系列の例として放射性元素の崩壊系列について述べる．

2　自然数を数タイルで表す

話は 1 節に書いた通りであり，それ以上の話はないのだが，自然数 5 から 12 までを数タイルで表してみることにしよう（図 1）．

まず 5 から 12 までを 4 でわることを考える．このとき数タイルを 4 個まで重ねることができるが，タイルは 4 個を越えては重ねることができないから，4 個積みのタイルの右横に並べていく．最後の一番右にあまりを並べよう．そのあまりはないとき（すなわち，あまりが 0) もあるが，それ以外はあまりのタイルが 1 個，2 個，3 個の場合である．これらの数タイルのおき方からつぎのような数字での表しかたが考えられるであろう．1 から 4 までの

[*1] 元愛媛大学
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp
[*3] 参考文献の [1] に該当箇所のページ数が書いてなかった．そのページを入れておこうと思って書棚にあった，本を取り出して読んで該当頁を探した．ところがこれが書かれた頁が見つからない．どうも私がどこかで仕入れた知識をでっちあげた可能性が強いなと思ってあきらめて，このエッセイの冒頭の箇所を見直したら，p. 280 と書いてあった．

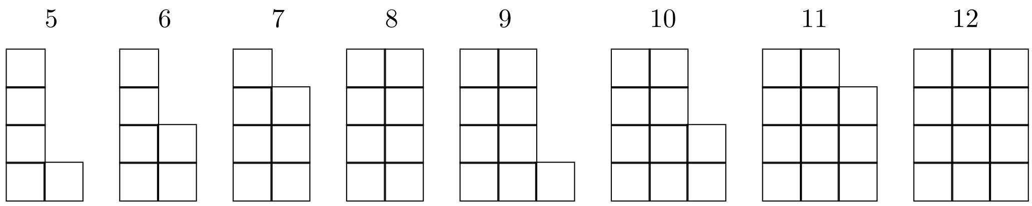


図 1　4 を法として表された数タイル

数タイルを図示していないが，0 から 12 までの数字を数タイルのおき方に合わせて数字で表せば

$$
\begin{aligned}
0 &= 4 \times 0 + 0 \\
1 &= 4 \times 0 + 1 \\
2 &= 4 \times 0 + 2 \\
3 &= 4 \times 0 + 3 \\
&-----\\
4 &= 4 \times 1 + 0 \\
5 &= 4 \times 1 + 1 \\
6 &= 4 \times 1 + 2 \\
7 &= 4 \times 1 + 3 \\
&-----\\
8 &= 4 \times 2 + 0 \\
9 &= 4 \times 2 + 1 \\
10 &= 4 \times 2 + 2 \\
11 &= 4 \times 2 + 3 \\
&-----\\
12 &= 4 \times 3 + 0 \\
\cdots
\end{aligned}
$$

以上から，自然数を 4 でわれば，そのあまりは 1 節に述べたように $0, 1, 2, 3$ であることがわかる．

上の数字の表し方を一般にパターンとして考えれば

$$\blacksquare = 4 \times \square + \lozenge \tag{2.1}$$

とでも表すことができよう．ここで，$\blacksquare = m, \square = n, \lozenge = r$ と表すことにすれば，上の式は

$$m = 4n + r, \quad r = 0, 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

と表される[*4]．ここで m を 0 または任意の自然数とし，この m を 4 でわれば，商 n が立って，あまりは $0, 1, 2, 3$ のいずれかであるので，それを r と表した．

0 または自然数を 4 でわった系列はそのあまりがいくつになるかによって 4 種類になるが，これが自然界で実現している例として放射性元素の自然崩壊の例を付録で述べよう．

[*4] この式は $m - r$ を 4 でわれば，わりきれることを示している．これを数学では 4 を法として $m = r \pmod 4$ と表す．つまり，すべての自然数 m は 4 でわったとき，そのあまりが $r = 0, 1, 2, 3$ のいずれかになる．

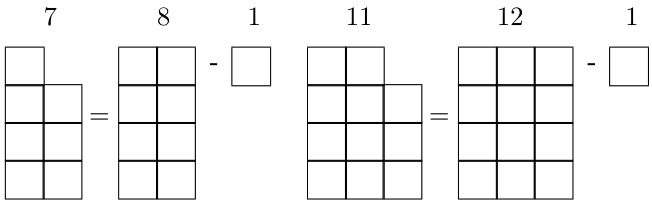


図 2　素数 7 と 11 の数タイル

3　素数の系列

さて，素数とは 1 と自分自身でしか割り切れない数のことをいう．1 は素数にいれない．すこし素数を小さい順に列挙してみると

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots \tag{3.1}$$

である．素数は無限につづいて，その上限はない．最小の素数は偶数だが，それ以外の素数は全部奇数である．もし 2 以外に偶数が素数としてあるとすれば，その偶数の素数は 2 で割り切れるから素数ではありえない．図 1 で示したように $5 = 4 + 1, 13 = 4 \times 3 + 1, 17 = 4 \times 4 + 1, \cdots$ であるから，これらは $m = 4n + 1$ の形に表せる．一方，$7 = 4 + 3, 11 = 4 \times 2 + 3, 19 = 4 \times 4 + 3, \cdots$ 等は $m = 4n + 3$ と表せる．

$m = 4n + 1$ の系列の素数は『博士の愛した数式』に述べられた素数の系列の一つであるから，全く問題がない．もう一つの $m = 4n + 3$ の系列の素数の方を考えてみよう．具体的に 7 と 11 の数タイルをもう一度描いてみれば（図 2），したがって

$$\begin{aligned} 7 &= 4 + 3 \\ &= 4 \times 2 - 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} 11 &= 4 \times 2 + 3 \\ &= 4 \times 3 - 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

等と表せる．したがって，これらの系列の素数を式では

$$m = 4n + 3 = 4(n + 1) - 1 \tag{3.4}$$

と表すことができる．

したがって，$4n + 3$ の系列の素数はすべて $4(n + 1) - 1$ と表すことができるから，2 以外のすべての素数は $4n + 1$ または $4n - 1$ と表すことができる．ここで n の値のとり方に注意すれば，つぎのようにまとめられる．

$$4n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.5}$$

$$4n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.6}$$

これはすでに 1 節で示したことであるが，数タイルで表せば，$4n + 3$ の系列の素数が $4n - 1$ と表すことができることが直観的にわかる．

整数を 4 で割ったときには $4n + 1$ と $4n - 1$ とは違った系列の数であったが，整数を偶数と奇数に分けるときは $2n + 1$ と $2n - 1$ とは同じ系列の奇数列をあたえることを次節では見よう．

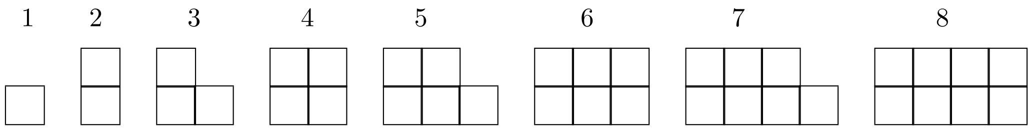


図 3　奇数と偶数の数タイル

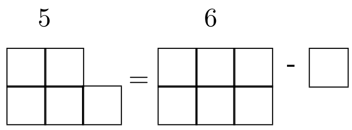


図 4　奇数 5 の数タイル

4　奇数と偶数に分ける

2 節で整数を 4 でわった整数の系列を調べた．3 節ではそれを少し制限した 2 以外の素数の系列が $4n+1$ または $4n-1$ となることをみた．この節ではすべての整数を偶数と奇数に分けることを考える．

すべての自然数を二つの種類に分けることができる．それが偶数と奇数への分類である．これは自然数を 2 でわったときのあまりによって分類する．

いま 1 から 8 までを数タイルで表して見れば，図 3 のようになる．この図から偶数の場合には

$$\blacksquare = 2\times\square \tag{4.1}$$

と表されることがわかる．したがって，$\blacksquare = m, \square = n$ と表せば，

$$m = 2n \tag{4.2}$$

と表される．この表し方は一義的で他に表し方はない．

ところが奇数の場合には二通りの表し方が考えられる．奇数の代表として 5 を例にとって考えてみよう．図 4 の左側の数タイルにしたがえば，$5 = 2\times2+1$ と表せるが，$=$ の右の数タイルの表し方にしたがえば，$5 = 2\times3-1$ とも表すことができる．すなわち，奇数 m は

$$m = 2n+1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.3}$$
$$m = 2n-1, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4.4}$$

の 2 つの表し方がある．ただし，どちらの表し方をするかによって n の値のとり方が違って来る．しかし，n の値のとり方にさえ注意すれば，どちらを選んでもよい．

しかし，2 以外の素数を式で表したとき，$4n+1$ と $4n-1$ とは同じ数の系列を表してはいないことをいま一度注意しておこう．

5　おわりに

中学生のときに代数の初歩を学んだが，それから時間が経てば，奇数の表し方が $2n+1$ であろうと $2n-1$ であろうとあまり気にはならないし，また整数を 4 でわったときの整数の系列が $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ と表そうと，または $4n, 4n+1, 4n+2, 4(n+1)-1$ と表そうとあまり違和感がなくなってくる．だが，代数を学びはじめのころはこのことがあまりよくはわからなかったように思う．

数タイルのようなもので具体的に考えていけば，直観的にわかることもただ単に数として考えているとなかなか直観が働かない．

数タイルで考えておくと，こういった整数の代数的表現に比較的はやく慣れることができるのではなかろうか．

6　付録　放射性同位元素の崩壊

整数を 4 でわった数の系列などは普通の生活では現れないかもしれない．だが，自然界にはそれと関係するものが実際にある [3].

地球上に存在する元素の大部分は安定である．しかし，原子量の大きい元素ポロニウム，ラジウム，トリウム，ウランなどは不安定原子である．すなわち，自然に原子核から粒子やガンマ線を出して放射性崩壊して他の原子核に変化していく．これらを放射性同位元素 RI(radioisotope) という．

原子核の放射性崩壊として知られているものにアルファ崩壊，ベータ崩壊，ガンマ崩壊の 3 つがある．アルファ崩壊は原子核からアルファ粒子（ヘリウムの原子核）が放出する現象であり，ベータ崩壊は原子核から電子が放出される現象である．またガンマ崩壊は原子核からガンマ線（電磁波）を放出する．*5.

原子核は質量数 A と原子番号 Z で特徴づけられるが，質量数は原子核のなかに存在する陽子と中性子の数の和であり，原子番号は原子核の中に存在する陽子の数である．アルファ崩壊によって原子核は質量数 $A=4$，原子番号は $Z=2$ だけ減少する．またベータ崩壊によって原子核の原子番号は $Z=1$ だけ増加するが，質量数は変化しない．さらにガンマ崩壊では原子核の質量数も原子番号も変化しない．

原子核はアルファ崩壊，ベータ崩壊，ガンマ崩壊によってつぎつぎに変化していくが，質量数はアルファ崩壊をすれば，いつでも 4 だけ減少する．したがって，はじめの原子核の質量数の属性を崩壊の過程で保存している．すなわち，はじめの原子核の質量数を 4 でわったあまりは崩壊の過程で変わらない．

このために天然に存在する放射性同位元素は約 60 種類あるが，その中の約 40 種類は 3 つの系列に分類できる．

3 つの系列とはウラン系列，アクチニウム系列，トリウム系列である．ウラン系列は $^{238}_{92}\mathrm{U}$ からはじまり，鉛の $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ におわる．アクチニウム系列は $^{235}_{92}\mathrm{U}$ からはじまり，鉛の $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ におわる．最後のトリウム系列は $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ からはじまり，鉛の $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ におわる．

ウラン系列では，はじめの親の原子核 U の質量数は 238 であるから，これを 4 でわれば，あまりは 2 であるから質量数は $4n+2$ と表される．つぎにアクチニウム系列は親の原子核はウラン系列と同じウランではあるが，このウランの質量数は 235 であるので，4 でわったあまりは 3 となり，質量数は $4n+3$ と表される．そして，トリウム系列は親の原子核がトリウムであるが，その質量数は 232 であるので，4 でわったあまりは $4n$ と表される．不思議なことに質量数が $4n+1$ の崩壊の系列は天然には存在していない．

しかし，人工的に放射性同位元素がつくられるようになってから，$^{241}_{94}\mathrm{Pu}$ にはじまり，$^{209}_{83}\mathrm{Bi}$ でおわるような系列が発見されて，$4n+1$ の崩壊の系列も存在することがわかった．この系列はネプツニウム系列と呼ばれている．

ではどうしてこのネプツニウム系列だけが天然に存在しなかったのであろうか．それはこの系列の放射性同位元素も地球ができた初期には存在していたのかもしれないが，崩壊の半減期が小さくて，はやくに崩壊をしてしまい，地球上ではこの崩壊の系列の放射性同位元素は存在しなくなったのであろう．

ネプツニウム系列の半減期は数百万年であることが知られており, 天然には地球上にはネプツニウム系列の放射性同位元素が存在しなかったことは地球の年齢が数百万年のオーダーではない，桁違いの年齢をもつことを示唆

*5 ベータ崩壊によって放出される電子は原子核の中に定常的に存在しているのではないかと思うかもしれないが，そうではないことがわかっている．原子核の中に定常的に存在しない電子がどうしてでてくるのか．不思議に思うかもしれない．

原子核の中に定常的に存在しているのは陽子と中性子であるが，中性子が陽子，電子と反ニュートリノに崩壊し，電子と反ニュートリノとが原子核から放出される．このとき反ニュートリノは検出できなかったので，電子だけが原子核から放出されると考えられた．ちなみにアルファ崩壊は理論的に量子力学で取り扱えるが，ベータ崩壊には粒子の生成消滅を記述する場の量子論が必要であった．

している．ちなみに現在わかっている地球の年齢は 45 億年といわれている．このことが科学的にわかってきたのは現在地球上に存在する放射性元素の割合の測定によってであった．

(2015. 10. 5)(2020.12.5 改訂)

参考文献

[1] 小川洋子,『博士の愛した数式』（新潮文庫）（新潮社，2003） 280

[2] http://blog.goo.ne.jp/kayamatetsu/

[3] 大山彰,『現代　原子力工学』第 2 版（オーム社，1985）31-51

編集後記

早いもので今年も師走を迎えてしまいました．皆様ご健勝でしょうか．今年は新型コロナ，新型コロナ (COVID-19) で明け暮れた 1 年でした．

高齢の私にとってはなかなか対処の難しい病気のようですが，皆様もワクチンが一般的になる，あと 1 年ほど気をつけてお過ごしください．

ご挨拶はこのくらいにして 10 巻 8 号を発行いたします．12 月中に 10 号まで発行して通巻 95 号を達成させたいと思います．これはもちろん来年の 6 月に通巻 100 号を目指すためです．

通巻 100 号を目指すことができるなどとは発行を始めたときにはまったく考えてもいませんでしたが，この調子でいくと来年の 6 月には 100 号の発行ができるのではないかと密かに思っております．

今号の最初の論文は世戸さんの重厚な論文からはじまり，秋葉さんの綿密なコメントを経て，私のエッセイで終わっています．どれから読まれてもけっこうですが，この編集後記だけを読まれる方も多いかもしれません．それもまたよしとします．

何といっても今年よかったことは世戸さんの編集委員の就任でした．私にとっては耳の痛い彼からの批判もありましたが，論文やエッセイの質の向上に貢献したことはまちがいがありません．

そういえば，遠くに住む私の子どもたちと zoom によって，オンラインで会うという経験を数度させてもらいました．オンラインでの会合が簡単にできるようになったのは事実でしょう．コロナの影響をすべて否定的に捉えることはないのでしょう．

（矢野　忠）