

数学・物理通信

10 卷 9 号 2020 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2020 年 12 月 9 日

目次 (Contents)

1. 積分方程式における興味ある問題 (3)

—棒の重心関数—

世戸憲治 2

2. 数列への一考察

秋葉 敏男 11

3. 直交座標系から極座標系へ 2 (改訂版)

矢野 忠 19

5. 編集後記

世戸憲治 33

1. Interesting Problems in Integral Equation (2)

—Center of Gravity Function of Bar—

Kenji SETO 2

2. A Few Studies of Number Sequence

Toshio AKIBA 11

3. From Descartes Coordinates to Polar Coordinates 2 (Revised Version)

Tadashi YANO 19

4. Editorial Comments

Kenji SETO 33

積分方程式における興味ある問題 (3)

—棒の重心関数—

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Integral Equation (3)

—Center of Gravity Function of Bar—

Kenji SETO*

1 はじめに

前回に引き続き、「はじめての逆問題」(『数理科学』別冊, サイエンス社)を読んだ解説をする. 今回は, この中の「棒の重心関数」を取り上げるが, これは, 密度が一様ではない棒の重心関数を定義し, 逆に重心関数から密度を求める問題である. 次節では, この本に沿った解説をするが, 3 節では, これを 2 次元の板に拡張した場合を試みる. なお, 2 節で紹介する解法とは別の解法を試みたものを「付録」で取り上げる.

2 方程式の導入とその解法

密度が一様ではない長さ ℓ の棒を考える. この棒の一端を原点として, 棒に沿って x 軸をとり, 点 x における線密度を $\rho(x)$ とする. このとき, 区間 $[0, x]$ における棒の質量を, $m(x)$ とすると,

$$m(x) = \int_0^x \rho(u) du \quad (2.1)$$

と与えられる. また, 同じ区間 $[0, x]$ にある棒の質量が原点に作るモーメントを $p(x)$ とすると, これは,

$$p(x) = \int_0^x u \rho(u) du \quad (2.2)$$

と定義される. これら 2 つの量の比 $p(x)/m(x)$ は, 区間 $[0, x]$ における重心位置を表し,

$$c(x) = \frac{p(x)}{m(x)} = \frac{\int_0^x u \rho(u) du}{\int_0^x \rho(u) du} \quad (2.3)$$

と書くことにして, 《重心関数》と呼ばれる. 何故, この $c(x)$ が区間 $[0, x]$ の重心になるかは, この式右辺の分母, 分子の積分を, それぞれ, 区間 $[0, c(x)]$ と区間 $[c(x), x]$ に分けて, 書き直すと,

$$\int_0^{c(x)} (c(x) - u) \rho(u) du = \int_{c(x)}^x (u - c(x)) \rho(u) du \quad (2.4)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となり、これは、0 から $c(x)$ までの部分が $c(x)$ に作るモーメントと、 $c(x)$ から x までの部分が $c(x)$ に作るモーメントが等しいことを意味するからである。

密度 $\rho(x)$ が与えられれば、(2.3) 式の積分を実行することで、重心関数は求められるが、逆に、重心関数 $c(x)$ を与えて、密度 $\rho(x)$ を求めよというのがここでの問題である。これは積分方程式の一種である。そのためには、まず、(2.3) 式をそのまま x で微分した式と元の式を組み合わせると、

$$c'(x) = \frac{x\rho(x) \int_0^x \rho(u)du - \left(\int_0^x u\rho(u)du \right) \rho(x)}{\left(\int_0^x \rho(u)du \right)^2} = \frac{\rho(x)(x - c(x))}{\int_0^x \rho(u)du} \quad (2.5)$$

となるので、これを変数分離し、

$$\frac{\rho(x)}{\int_0^x \rho(u)du} = \frac{c'(x)}{x - c(x)} \quad (2.6)$$

とする。実は、この重心関数 $c(x)$ から密度関数 $\rho(x)$ を求めようとしたとき、(2.3) 式、あるいは、この式から分かるように密度 $\rho(x)$ の大きさ自体は元々不定であることに注意する。そのうえで、この両辺を不定定数 a から x まで積分すると、

$$\log \left(\frac{1}{m_a} \int_0^x \rho(u)du \right) = \int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du \quad (2.7)$$

となる。ここに、 m_a は棒の区間 $[0, a]$ における質量で、

$$m_a = \int_0^a \rho(x)dx \quad (2.8)$$

と定義する。この (2.7) 式を、指数関数を用いて書き直すと、

$$\int_0^x \rho(u)du = m_a \exp \left(\int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du \right) \quad (2.9)$$

となり、さらにこれを微分して、

$$\rho(x) = m_a \frac{c'(x)}{x - c(x)} \exp \left(\int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du \right) \quad (2.10)$$

と、重心関数 $c(x)$ から密度関数 $\rho(x)$ が求められる。先に述べたように $\rho(x)$ の大きさ自体は求められないので、 a の不定性を用いて、 $\rho(x)$ の大きさを決めることになる。

[具体例 1]

初めに簡単ではあるが、具体例として、密度 $\rho(x)$ を

$$\rho(x) = \rho_\ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^\alpha, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.11)$$

と与えた場合の重心関数を求めてみる。ここに、 α は非負の無次元定数、 ρ_ℓ は $x = \ell$ における密度である。これを (2.3) 式に代入すると重心関数は

$$c(x) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} x \quad (2.12)$$

と求められる。また、この $c(x)$ を (2.10) 式に代入すると

$$\frac{c'(x)}{x - c(x)} = \frac{\alpha + 1}{x}, \quad \text{を用いて,} \quad \rho(x) = \frac{(\alpha + 1)m_a \ell^\alpha}{a^{\alpha+1}} \left(\frac{x}{\ell} \right)^\alpha \quad (2.13)$$

となる．ここで、 a が不定だったことを用いて、

$$\frac{(\alpha+1)m_a\ell^\alpha}{a^{\alpha+1}} = \rho_\ell \quad (2.14)$$

となるように a を選ぶものとする、この式は元の (2.11) 式に戻る．

[具体例 2]

つぎに、具体例として、密度 $\rho(x)$ を

$$\rho(x) = \rho_\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^{-3} e^{1-(\ell/x)} \quad (2.15)$$

と与えた場合の重心関数を求めてみる．ここに、 ρ_ℓ は $x = \ell$ における密度であり、 $x = 0$ では $\rho(0) = 0$ となる^{*1}．これを (2.3) 式に代入し、 $1/u = v$ と変数変換して積分すると、

$$c(x) = \frac{\int_0^x u^{-2} e^{-\ell/u} du}{\int_0^x u^{-3} e^{-\ell/u} du} = \frac{\int_\infty^{1/x} e^{-\ell v} dv}{\int_\infty^{1/x} v e^{-\ell v} dv} = \frac{\ell x}{\ell + x} \quad (2.16)$$

と求められる．さらに、逆変換の (2.10) 式を用いて、この $c(x)$ から元の $\rho(x)$ が復元されるかを確かめてみよう．この式から、

$$\frac{c'(x)}{x - c(x)} = \frac{\ell^2}{x^2(\ell + x)}, \quad \int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du = \log\left(\frac{\ell + x}{x}\right) - \frac{\ell}{x} - \log\left(\frac{\ell + a}{a}\right) + \frac{\ell}{a} \quad (2.17)$$

となるので、これを (2.10) 式に適用すると、 $\rho(x)$ は、

$$\rho(x) = \frac{a m_a}{\ell(\ell + a)} \left(\frac{x}{\ell}\right)^{-3} e^{\ell/a - \ell/x} \quad (2.18)$$

となる．ここで、 a が不定だったことを用いて、

$$\frac{a m_a}{\ell(\ell + a)} e^{\ell/a - 1} = \rho_\ell \quad (2.19)$$

と見做せば、この (2.18) 式は (2.15) 式の密度関数 $\rho(x)$ に戻る．

3 2次元に拡張してみると

これまで扱ってきた1次元の棒の問題を、2次元平面の板の問題に拡張してみよう．いま、辺の長さが、それぞれ、 ℓ_1 , ℓ_2 の長方形の板を考え、この板の一つの頂点を原点として、長さ ℓ_1 方向に x 軸、長さ ℓ_2 方向に y 軸をとる．点 (x, y) における板の面密度を $\rho(x, y)$ とする．いま、 x の区間 $[0, x]$, y の区間 $[0, y]$ を考え、この2辺で作られる長方形の重心位置を、 $(c_1(x, y), c_2(x, y))$ とすると、(2.4) 式を2次元に拡張したモーメントの釣り合い式は、 x 方向について、

$$\int_0^{c_1(x, y)} du \int_0^y dv (c_1(x, y) - u) \rho(u, v) = \int_{c_1(x, y)}^x du \int_0^y dv (u - c_1(x, y)) \rho(u, v) \quad (3.1)$$

^{*1} $\lim_{x \rightarrow 0} \rho(x)$ を求めるには、 $x = \ell/y$ とおくと、 $\lim_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \rho_\ell y^3 e^{1-y} = 0$ となる．

また, y 方向について,

$$\int_0^x du \int_0^{c_2(x,y)} dv (c_2(x,y) - v) \rho(u, v) = \int_0^x du \int_{c_2(x,y)}^y dv (v - c_2(x,y)) \rho(u, v) \quad (3.2)$$

となる. これら 2 式を, それぞれ, 移行して整理すると,

$$c_1(x, y) = \frac{\int_0^x du \int_0^y dv u \rho(u, v)}{\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v)}, \quad c_2(x, y) = \frac{\int_0^x du \int_0^y dv v \rho(u, v)}{\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v)} \quad (3.3)$$

と書き直される. この式は, まさに, (2.3) 式の 2 次元への拡張版で, ここで定義される $(c_1(x, y), c_2(x, y))$ を 2 次元の重心関数と呼ぶことにする. ここで, 逆に, この重心関数から密度を求めるにはどうすればよいかを考える. (3.3) 式の c_1, c_2 を, それぞれ, x , および, y で微分し, (2.5) (2.6) 式を得たときのように元の式と組み合わせると,

$$\frac{\int_0^y dv \rho(x, v)}{\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v)} = \frac{\partial_x c_1(x, y)}{x - c_1(x, y)}, \quad \frac{\int_0^x du \rho(u, y)}{\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v)} = \frac{\partial_y c_2(x, y)}{y - c_2(x, y)} \quad (3.4)$$

を得る. この第 1 式を x で不定定数 a_1 から x まで, 同じく第 2 式を y で不定定数 a_2 から y まで積分すると,

$$\begin{aligned} \log \left(\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v) / m_{a_1} \right) &= \int_{a_1}^x \frac{\partial_u c_1(u, y)}{u - c_1(u, y)} du, \\ \log \left(\int_0^x du \int_0^y dv \rho(u, v) / m_{a_2} \right) &= \int_{a_2}^y \frac{\partial_v c_2(x, v)}{v - c_2(x, v)} dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. ただし, ここで, a_1, a_2 は不定定数と述べたが, この第 1 式を得るときには y を定数扱い, また, 第 2 式を得るときは x を定数扱いしているので, a_1 は y に依存してよく, a_2 は x に依存してよい. また, m_{a_1}, m_{a_2} はそれぞれ,

$$m_{a_1} = \int_0^{a_1} du \int_0^y dv \rho(u, v), \quad m_{a_2} = \int_0^x du \int_0^{a_2} dv \rho(u, v) \quad (3.6)$$

と定義したものである. この (3.5) 式を指数関数の形になおし, 第 1 式に関しては x で微分, 第 2 式に関しては y で微分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^y \rho(x, v) dv &= m_{a_1} \frac{\partial_x c_1(x, y)}{x - c_1(x, y)} \exp \left(\int_{a_1}^x \frac{\partial_u c_1(u, y)}{u - c_1(u, y)} du \right), \\ \int_0^x \rho(u, y) du &= m_{a_2} \frac{\partial_y c_2(x, y)}{y - c_2(x, y)} \exp \left(\int_{a_2}^y \frac{\partial_v c_2(x, v)}{v - c_2(x, v)} dv \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる. さらに, この第 1 式を y で, 第 2 式を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[m_{a_1} \frac{\partial_x c_1(x, y)}{x - c_1(x, y)} \exp \left(\int_{a_1}^x \frac{\partial_u c_1(u, y)}{u - c_1(u, y)} du \right) \right], \\ \rho(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[m_{a_2} \frac{\partial_y c_2(x, y)}{y - c_2(x, y)} \exp \left(\int_{a_2}^y \frac{\partial_v c_2(x, v)}{v - c_2(x, v)} dv \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

と 1 個の関数を求めるのに 2 個の式が求まってしまうので, この 2 本の式が両立するように, 第 1 式, 第 2 式に含まれる a_1, a_2 を, それぞれ, y, x の関数として求めることになる. その具体的方法については, 以下の「具体例 3」を参照のこと.

密度が変数分離形の場合

この 2 次元板の問題で、最も処理しやすいのは、密度 $\rho(x, y)$ が変数分離形の

$$\rho(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.9)$$

となる場合に限定したときである。このとき、(3.3) 式は

$$c_1(x) = \frac{\int_0^x uX(u)du}{\int_0^x X(u)du}, \quad c_2(y) = \frac{\int_0^y vY(v)dv}{\int_0^y Y(v)dv} \quad (3.10)$$

となって、重心関数 c_1, c_2 は、それぞれ、 x 、および、 y のみの関数となる。ここで、(2.3) 式から (2.6) 式を得たのと同様にして、

$$\frac{X(x)}{\int_0^x X(u)du} = \frac{c'_1(x)}{x - c_1(x)}, \quad \frac{Y(y)}{\int_0^y Y(v)dv} = \frac{c'_2(y)}{y - c_2(y)} \quad (3.11)$$

が導けるので、これらの式を、それぞれ、 a_1 から x まで、および、 a_2 から y まで積分すると、

$$\log \left(\int_0^x X(u)du / m_{a_1} \right) = \int_{a_1}^x \frac{c'_1(u)}{u - c_1(u)} du, \quad \log \left(\int_0^y Y(v)dv / m_{a_2} \right) = \int_{a_2}^y \frac{c'_2(v)}{v - c_2(v)} dv \quad (3.12)$$

となる。ここに、 m_{a_1}, m_{a_2} は、それぞれ、

$$m_{a_1} = \int_0^{a_1} X(u)du, \quad m_{a_2} = \int_0^{a_2} Y(v)dv \quad (3.13)$$

と定義する。この (3.12) 式を指数関数の形に直し、第 1 式、第 2 式を、それぞれ、 x 、および、 y で微分すると、

$$X(x) = m_{a_1} \frac{c'_1(x)}{x - c_1(x)} \exp \left(\int_{a_1}^x \frac{c'_1(u)}{u - c_1(u)} du \right), \quad Y(y) = m_{a_2} \frac{c'_2(y)}{y - c_2(y)} \exp \left(\int_{a_2}^y \frac{c'_2(v)}{v - c_2(v)} dv \right) \quad (3.14)$$

と求められる。これは形の上からは、1 次元のときの (2.10) 式が重なった形になっただけである。

[具体例 3]

密度関数 $\rho(x, y)$ が x, y について変数分離形にならない簡単なものとして、

$$\rho(x, y) = \frac{\rho_\ell}{2} \left(\frac{x}{\ell_1} + \frac{y}{\ell_2} \right) \quad (3.15)$$

という場合を考える。ここに、 ρ_ℓ は $(x, y) = (\ell_1, \ell_2)$ における密度とする。この密度関数を用いて (3.3) 式から重心関数 $c_1(x, y), c_2(x, y)$ は、

$$c_1(x, y) = \frac{2x[(x/3\ell_1) + (y/4\ell_2)]}{(x/\ell_1) + (y/\ell_2)}, \quad c_2(x, y) = \frac{2y[(x/4\ell_1) + (y/3\ell_2)]}{(x/\ell_1) + (y/\ell_2)} \quad (3.16)$$

と求められる。さらに、これから

$$\frac{\partial_x c_1(x, y)}{x - c_1(x, y)} = \frac{(2x/\ell_1) + (y/\ell_2)}{x[(x/\ell_1) + (y/\ell_2)]}, \quad \frac{\partial_y c_2(x, y)}{y - c_2(x, y)} = \frac{(x/\ell_1) + (2y/\ell_2)}{y[(x/\ell_1) + (y/\ell_2)]} \quad (3.17)$$

を得る。これを (3.7) 式に代入すると、

$$\int_0^y \rho(x, v)dv = m_{a_1} \frac{(2x/\ell_1) + (y/\ell_2)}{a_1[(a_1/\ell_1) + (y/\ell_2)]}, \quad \int_0^x \rho(u, y)du = m_{a_2} \frac{(x/\ell_1) + (2y/\ell_2)}{a_2[(x/\ell_1) + (a_2/\ell_2)]} \quad (3.18)$$

となるが、この第1式の右辺は x の1次式、第2式の右辺は y の1次式になっている。このことから $\rho(x, y)$ は x, y の1次式になるはずで、

$$\rho(x, y) = p_1 x + p_2 y \quad (3.19)$$

とおいてこの式の左辺に代入すると、

$$\frac{y}{2}(2p_1 x + p_2 y) = m_{a_1} \frac{(2x/\ell_1) + (y/\ell_2)}{a_1[(a_1/\ell_1) + (y/\ell_2)]}, \quad \frac{x}{2}(p_1 x + 2p_2 y) = m_{a_2} \frac{(x/\ell_1) + (2y/\ell_2)}{a_2[(x/\ell_1) + (a_2/\ell_2)]} \quad (3.20)$$

となる。これらの式が両立するためには、

$$p_1 = \frac{\rho \ell}{2\ell_1}, \quad p_2 = \frac{\rho \ell}{2\ell_2} \quad (3.21)$$

とおき、さらに、

$$\frac{\rho \ell}{4} y = \frac{m_{a_1}}{a_1[(a_1/\ell_1) + (y/\ell_2)]}, \quad \frac{\rho \ell}{4} x = \frac{m_{a_2}}{a_2[(x/\ell_1) + (a_2/\ell_2)]} \quad (3.22)$$

となるように、 y の関数 a_1 、 x の関数 a_2 を決めるとよい。このとき、(3.19) 式の $\rho(x, y)$ は、元の (3.15) 式の $\rho(x, y)$ に戻る。

[具体例 4]

2次元の密度関数を変数分離形の

$$\rho(x, y) = \rho_0 X(x)Y(y), \quad X(x) = \sin(\pi x/\ell_1), \quad Y(y) = \sin(\pi y/\ell_2) \quad (3.23)$$

と与えた場合を考える。これを (3.10) 式に代入して、 $c_1(x)$ 、 $c_2(y)$ を求めると、

$$c_1(x) = \frac{-x \cos(\pi x/\ell_1) + (\ell_1/\pi) \sin(\pi x/\ell_1)}{1 - \cos(\pi x/\ell_1)}, \quad c_2(y) = \frac{-y \cos(\pi y/\ell_2) + (\ell_2/\pi) \sin(\pi y/\ell_2)}{1 - \cos(\pi y/\ell_2)} \quad (3.24)$$

となる。逆に、この $c_1(x)$ 、 $c_2(y)$ から $X(x)$ 、 $Y(y)$ を求めるには、(3.14) 式を用いるが、このとき、

$$\frac{c'_1(x)}{x - c_1(x)} = \frac{\pi \sin(\pi x/\ell_1)}{\ell_1 [1 - \cos(\pi x/\ell_1)]}, \quad \frac{c'_2(y)}{y - c_2(y)} = \frac{\pi \sin(\pi y/\ell_2)}{\ell_2 [1 - \cos(\pi y/\ell_2)]} \quad (3.25)$$

となることを用いて、

$$X(x) = \frac{\pi m_{a_1} \sin(\pi x/\ell_1)}{\ell_1 [1 - \cos(\pi a_1/\ell_1)]}, \quad Y(y) = \frac{\pi m_{a_2} \sin(\pi y/\ell_2)}{\ell_2 [1 - \cos(\pi a_2/\ell_2)]} \quad (3.26)$$

と求められる。ここで、不定定数 a_1 、 a_2 を

$$\frac{\pi m_{a_1}}{\ell_1 [1 - \cos(\pi a_1/\ell_1)]} = 1, \quad \frac{\pi m_{a_2}}{\ell_2 [1 - \cos(\pi a_2/\ell_2)]} = 1 \quad (3.27)$$

となるように選べば、この (3.26) 式は元の (3.23) 式に戻る。

4 おわりに

「はじめに」のところで述べたように、今回は、「はじめての逆問題」という本から、密度関数と重心関数の関係について議論してきた。しかし、私はこの議論が物理の話としてどういう場面で使われるのかを知らない。何か、計算のための計算に思えてしまうが、微積分の練習問題と思えば、それなりに納得がいく。

このうち、第2節は、この本に沿って書いたものであるが、第3節の2次元に拡張したものは、オリジナルにやってみたものである。また、ここで述べた具体例のうち、「具体例2」はこの本にあったものであるが、その他の「具体例1, 3, 4」は新しくここでやってみたものである。なお、第2節で述べた解法について、私がこの問題を初めに見たときの解法はまったく違ったものだったので、以下の「付録A」で述べておく。

もう一つ、この「数学・物理通信」の編集者である矢野忠さんが、毎日書かれているブログを読んでいたら、「丸太の重さの測り方」というのがあった。計算は簡単であるが、面白い問題なので、この「付録B」で紹介しておく。

5 付録 A

その解法は、積分をできるだけなくし、微分方程式にもっていくことである。(2.3) 式を

$$c(x) \int_0^x \rho(u) du = \int_0^x u \rho(u) du \quad (\text{A.1})$$

と書いておき、この式の1階微分、2階微分を作ると、

$$c'(x) \int_0^x \rho(u) du + c(x) \rho(x) = x \rho(x), \quad c''(x) \int_0^x \rho(u) du + 2c'(x) \rho(x) + c(x) \rho'(x) = \rho(x) + x \rho'(x) \quad (\text{A.2})$$

となる。これら2式から $\int_0^x \rho(u) du$ を消去すると、

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{(x - c(x))c''(x) + 2c'(x)^2 - c'(x)}{(x - c(x))c'(x)} \quad (\text{A.3})$$

となるので、これを、不定定数 a から x まで積分すると、

$$\log(\rho(x)/\rho(a)) = \int_a^x \frac{(u - c(u))c''(u) + 2c'(u)^2 - c'(u)}{(u - c(u))c'(u)} du \quad (\text{A.4})$$

となる。これから $\rho(x)$ が、

$$\rho(x) = \rho(a) \exp \left[\int_a^x \frac{(u - c(u))c''(u) + 2c'(u)^2 - c'(u)}{(u - c(u))c'(u)} du \right] \quad (\text{A.5})$$

と求められる。これは、一見したところ、(2.10) 式の解とまったく異なる解が求まってしまったように見える。しかし、右辺の指数関数の中に入っている積分は、

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(u - c(u))c''(u) + 2c'(u)^2 - c'(u)}{(u - c(u))c'(u)} du &= \int_a^x \left[\frac{c''(u)}{c'(u)} - \frac{1 - c'(u)}{u - c(u)} + \frac{c'(u)}{u - c(u)} \right] du \\ &= \log \left[\frac{c'(x)}{c'(a)} \right] - \log \left[\frac{x - c(x)}{a - c(a)} \right] + \int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

と一部が積分されてしまうので、(A.5) 式の $\rho(x)$ は、

$$\rho(x) = \frac{(a - c(a))\rho(a)}{c'(a)} \frac{c'(x)}{x - c(x)} \exp \left[\int_a^x \frac{c'(u)}{u - c(u)} du \right] \quad (\text{A.7})$$

と変形される。これは、右辺の最初に付く係数を m_a とすれば、(2.10) 式とまったく同じものになる。

6 付録 B

「おわりに」のところで紹介したように、「丸太の重さの測り方」について述べる．一本の丸太がありこの重さを測定したいのだが、あいにく、この重さを一度で測定できる秤がない．そこで、図 1 に示すように、丸太の右端は地面につけたまま左端だけ秤に載せて測った重さと、今度は逆に、図 2 のように、左端は地面につけたまま右端を秤に載せて測った重さを足すと丸太全体の重さになるという．丸太の重心が、ちょうど、丸太の真ん中にあるときはこれで良いような気がするが、はたして、どうだろうか．

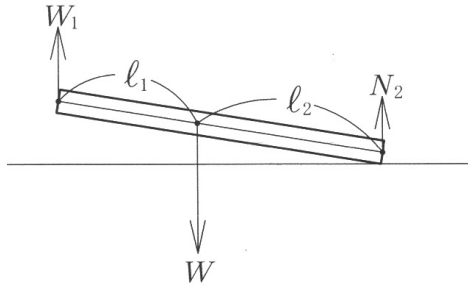


図 1

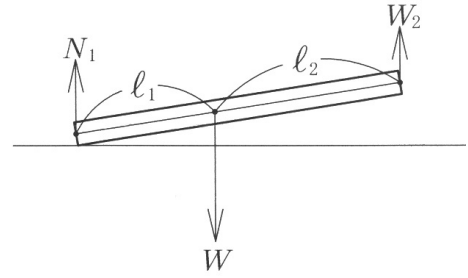


図 2

図 1 で、丸太の左端で秤が測った重さを W_1 とし、丸太の右端が地面から受ける垂直抗力を N_2 とすると、この和は、丸太の重さ W になるので、

$$W_1 + N_2 = W \quad (\text{B.1})$$

となる．同様に、図 2 で、丸太の右端で測った重さを W_2 、丸太の左端が地面から受ける垂直抗力を N_1 とすると

$$N_1 + W_2 = W \quad (\text{B.2})$$

となる．これだけでは、 N_1 , N_2 が未知なので W は求まらない．ここで、丸太の重心が、左から l_1 の距離、右から l_2 の距離にあるものとする、重心まわりに作用する力のモーメントは左右同じにならなければならないので、図 1、および、図 2 で、それぞれ、

$$l_1 W_1 = l_2 N_2, \quad l_1 N_1 = l_2 W_2 \quad (\text{B.3})$$

となる．この 2 式から N_1 , N_2 を求め、(B.1) (B.2) 式に代入すると、

$$W_1 + \frac{l_1}{l_2} W_1 = W, \quad \frac{l_2}{l_1} W_2 + W_2 = W \quad (\text{B.4})$$

を得る．あとは、この第 1 式に l_2 を掛け、第 2 式に l_1 を掛けてから辺々を加え、その後、両辺を $(l_1 + l_2)$ で割ると、全体の重さ W は

$$W = W_1 + W_2 \quad (\text{B.5})$$

と求められる．これから、重心の位置は必ずしも中心になくても、2 度の秤の測定結果を足すだけで、全体の重さがでることになる．

ついでながら、この結果を (B.1) (B.2) 式に戻すと、垂直抗力 N_1 , N_2 が

$$N_1 = W_1, \quad N_2 = W_2 \quad (\text{B.6})$$

と求まり，さらに，この結果を (B.3) 式のどちらかに代入すると， ℓ_1 と ℓ_2 の比が

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{W_1}{W_2} \quad (\text{B.7})$$

と決まるので，全体の長さ $\ell = \ell_1 + \ell_2$ が分かっているならば， ℓ_1 , ℓ_2 も

$$\ell_1 = \frac{W_2}{W_1 + W_2} \ell, \quad \ell_2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} \ell \quad (\text{B.8})$$

と決まる．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき，(2.6) 式は，(A.2) の第 1 式から出す方がより簡単であることを，注意された．他には，特に，コメントすることはないとのことで，安心しました．ここに，謹んで感謝いたします．

また，「数学・物理通信」の編集者である矢野忠氏には，この「付録 B」で取りあげた「丸太の重さの測り方」という問題を提供していただいた．このことに関し，心から感謝いたします．

数列への一考察

秋葉 敏男

A Few Studies of Number Sequence

Toshio AKIBA¹

1 はじめに

自然哲学としての数学や物理学は、リベラル アーツの中の主要科目といえるでしょう。人類の知的欲求は、古くから人間精神・人間社会・自然界の夫々を律する仕組みを探求し、得られた知識が伝承記録されて、リベラル アーツとして構成されました。このリベラル アーツの一面を評して、「すぐには役に立たない学問」と一刀両断することも出来るでしょう。しかし、リベラル アーツは役に立つ諸知識から抽象された普遍的な諸法則・命題により構成されたものです。そして、古来からのリベラル アーツの諸科目が集大成され、修正・深化・応用を繰り返して今日の学問体系に至り、文明社会の礎となってきました。

本通信には、リベラルアーツ的な諸テーマが多数寄稿されて、その名「数学・物理通信」が体现されており、読者の知的好奇心を満たしてきました。そこへ、屋上屋を重ねるようなテーマと思われる「数列」について、すぐには役に立たない一考を加えてみたいと思います。

自然数の並びは、公差 1 の等差数列となっていて、古代の人々が数列の着想を得る上で、一つのヒントになったであろうと思われます。

そもそも、列とは「自然数の集合を変域とする関数である」と定義されます。[1] そして関数値が数のとき数列と呼ばれ、自然数 n に対する数列の値 $X(n)$ を第 n 項と呼びます。($X(n)$ は X_n と表します)

一般に、数列は次のようにして構成されます。

(1) 関数数列

関数 $f(x)$ から $f(n)$ のみを並べたもので、等差数列や等比数列が含まれます。(n は自然数)

(2) 導関数数列

関数 $f(x)$ から $a_n \times f^{(n)}(0)$ を並べたもので、 $f(x)$ はこの数列の母関数とよばれます。

(3) その他の数列

発生させた乱数を並べたものや、関数 $f(x)$ のフーリエ展開係数を並べたものなどが考えられます。ところで、数列の中には、その第 n 項が第 $(n-1)$ 項までの代数式で表されるものがあります。これは

$$F(x) = \sum_{k=1}^{[x]} a(x-k)F(x-k) \quad ([x] \text{ は } x \text{ を超えない最大の整数})$$

から構成される関数数列 $\{F(n)\}$ で、フィボナッチ数列はこの例です。

以下で取り上げる数列もこの型のもので、その母関数・各項の符号・他の数列との関係などについて考えてみます。

2 数列 $\{B_n\}$

数列 $\{B_n\}$ を、次式によって定義します。

$$\begin{aligned} B_0 &:= 1 \\ B_n &:= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{1}$$

¹tawarp@mug.biglobe.ne.jp

定義式 (1) を使って, $n = 6$ までを計算すると

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

これは, ベルヌーイ数列として良く知られたもので, 次のような性質があります.

$$(1) B_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 1)$$

これについては, $\{B_n\}$ の母関数の偶奇性から容易に導かれます

母関数表示; $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l$ より, $f(x) := \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l$ が得られますが,
 $f(x)$ は偶関数ですから, $B_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 1)$ でなければなりません.

$$(2) \text{ 隣接項の符号は反対です.}$$

定義式 (1) より, 同符号の項が連続した場合は, やがて反符号に変わらざるを得ないことが分かります.

そして, 数値計算を続ける限り 符号の交互反転が確認できますから, 任意の n について, この規則の成立が予想されます.

そこで, $b_n := B_n/n!$ と定義して, 隣接項の比 $r_{2k} := b_{2k}/b_{2k+2}$ を数値計算してみると,

k	r_{2k}	k	r_{2k}	k	r_{2k}	k	r_{2k}
1	-60.00000000	7	-39.48023224	13	-39.47841805	19	-39.47841760
2	-42.00000000	8	-39.47887022	14	-39.47841772	20	-39.47841760
3	-40.00000000	9	-39.47853064	15	-39.47841763	21	-39.47841760
4	-39.60000000	10	-39.47844585	16	-39.47841761	22	-39.47841760
5	-39.50795948	11	-39.47842466	17	-39.47841761	23	-39.47841760
6	-39.48571429	12	-39.47841937	18	-39.47841760	24	-39.47841760

これより, $k \geq 18$ では r_{2k} は一定値 $\rho := -39.47841760$ であると予想されます.

一方, 数列 $\{B_{2n}\}$ を展開係数の因子として含む母関数としては, 良く知られた

$$G(x) := \frac{x}{e^x - 1}$$

の他に

$$g(x) := \frac{x}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{B_{2l}}{(2l)!} x^{2l} \quad (2)$$

もあり [2], $g(x)$ は $\pm 2n\pi$ で発散しますから, 右辺の級数の収束半径は Cauchy-Hadamard の公式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{B_{2n+2}} \right| = (2\pi)^2$$

これは, $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_{2n}/b_{2n+2}| = 4\pi^2 \approx 39.4784176$ を意味します. ($g(x)$ の右辺は x^2 の級数であることに注意) 従って, $\rho = -4\pi^2$ と考えられます.

しかし, これだけでは全ての k に対して, $r_{2k} < 0$ であると断言はできず, 各項の符号が交互に反転するとはいえません. これを示すには, 次のような方法があります.

[a] 下記の近似式を用いる.²

$$(-1)^{n-1} B_{2n} \approx 4\sqrt{n\pi} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \quad (3)$$

式 (3) は, B_{2n} の符号の交互反転を示しています.

[b] 正接数列 $\{T_n\}$ との関係式を利用する. (付録 1 式 (11) 参照)

付録 1 に示すように, 両数列は次の関係にあります.

$$T_{2l-1} = \frac{(-1)^{l-1} (4^{2l} - 2^{2l}) B_{2l}}{2l} \quad (l \geq 1)$$

² 「岩波数学公式 II」 p.137 参照

$T_{2l-1} > 0$ ですから, $(-1)^{l-1} B_{2l} > 0$ となります. これは B_{2n} の符号の交互反転を示します.

ところで, 数列 $\{B_{2n}\}$ の母関数として $G(x)$, $g(x)$ という 2 つの関数が出てきました. 実際, 母関数は一意的では無く, $\{B_{2n}\}$ の母関数としてはこの他に

$$x \tan(x), x \tanh(x), x \coth(x), x \operatorname{cosech}(x), \log \frac{\sinh(x)}{x}, \log \cos(x)$$

などの偶関数があります.³この様に, 展開級数の係数に共通の B_n が含まれているのは, これらの母関数間の代数的・解析的関係の現れであるといえます. ただし, 一般に関数とそれから生成される整級数 (マクローリン級数) は, 解析的に一致するとは限らず, その収束半径に注意が必要です. (上記 $G(x)$ の特異点は $-\infty$ のみであり, また, $g(x)$ は $\pm 2n\pi$ で発散しますが, 生成級数の収束半径は共に 2π です.)

3 数列 $\{K_n\}$

数列 $\{K_n\}$ を, 次式によって定義します. [3]

$$\begin{aligned} K_0 &:= 1 \\ K_n &:= -\sum_{l=0}^{n-1} \frac{K_l}{(2n-2l+1)!} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) を使って, $n = 6$ までを計算すると

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{-1}{3!} = -0.16666 & K_2 &= \frac{7}{3 \times 5!} = 0.019444 & K_3 &= \frac{-31}{3 \times 7!} = -2.0502 \times 10^{-3} \\ K_4 &= \frac{381}{5 \times 9!} = 2.0998 \times 10^{-4} & K_5 &= \frac{-2555}{3 \times 11!} = -2.1336 \times 10^{-5} & K_6 &= \frac{1414477}{105 \times 13!} = 2.1633 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

そして, 隣接項の比 $r_k := K_k/K_{k+1}$ を計算してみると

k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k
1	-5.99999999	7	-9.86781310	13	-9.86960395	19	-9.86960440
2	-8.57142857	8	-9.86915440	14	-9.86960429	20	-9.86960440
3	-9.48387096	9	-9.86949165	15	-9.86960437	21	-9.86960440
4	-9.76377952	10	-9.86957618	16	-9.86960439	22	-9.86960440
5	-9.84187866	11	-9.86959734	17	-9.86960440	23	-9.86960440
6	-9.86251455	12	-9.86960263	18	-9.86960440	24	-9.86960440

これより, $k \geq 17$ では r_k は一定値 $\rho_1 := -9.86960440 \approx -\pi^2$ とみなせます. 従って,

$$h(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l K_l x^{2l} \quad \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{c_l}{c_{l+1}} \right| = 1 \right)$$

の形に級数展開出来る関数で, $\pm n\pi$ で発散するものが存在すると予想されます. ちなみに, $\{K_l\}$ の母関数の一つは, $\{B_l\}$ の場合と同様の計算で求めることができて,

$$H(x) := 2x/(e^x - e^{-x}) = x/\sinh(x)$$

となります. [3] これは特異点を持たず, 偶関数です. (当然, $h(x)$ も偶関数でなければなりません.)

次に, 数列 $\{K_n\}$ の各項の符号が交互に反転することを示します. 証明法としては, 次のようなものがあります.

³岩波数学公式 II p.137~p.151 参照

[a] 数列 $\{B_n\}$ との関係式を使う. (付録 2 式 (19) 参照)

関係式 $K_p = -\frac{(4^p-2)B_{2p}}{(2p)!}$ より, $K_p = (-1)^p |B_{2p}| \frac{(4^p-2)}{(2p)!}$ が得られ, K_p の符号の交互反転がわかります.

[b] 隣接項の符号を直接比較する.

[証明]

各項を数値計算してみると

$$K_k = a_k \times (-1)^k 10^{-k+\epsilon(k)} \quad (1 \leq a_k < 10) \quad (5)$$

k	項数	$\epsilon(k)$	k	項数	$\epsilon(k)$
$0 \leq k \leq 122$	123	0	$649 \leq k \leq 824$	176	4
$123 \leq k \leq 298$	176	1	$825 \leq k \leq 999$	175	5
$299 \leq k \leq 473$	175	2	$1000 \leq k \leq 1175$	176	6
$447 \leq k \leq 648$	175	3	...	...	...

の様に表せて, a_k は同一の $\epsilon(k)$ を持つ k の範囲内で 1 から 10 まで増加します.

同一の $\epsilon(k)$ に含まれる項数は $k \geq 123$ の時約 176 とみて, $a_{k+1} = a_k(1+r)$ と置くと, $a_{k+176}/a_k = (1+r)^{176} = 10$ より, $r \approx 0.013168825$ となります. ちなみに, $k < 123$ の時は, $r \approx 0.018896525$ です.

そこで, 数学的帰納法により, 式 (5) が一般に成り立つことを示します.

$k(\geq 123)$ までの自然数について, 式 (5) が成り立つと仮定して, 式 (4) で k を $k+1$ で置き換えてみると

$$\begin{aligned}
K_{k+1} &= -\sum_{l=0}^k \frac{K_l}{(2k-2l+3)!} \\
&= \sum_{l=0}^k \frac{a_l (-1)^{l+1} 10^{-l+\epsilon(l)}}{(2k-2l+3)!} \\
&= \frac{a_k (-1)^{k+1} 10^{-k+\epsilon(k)}}{3!} \times S_k \\
S_k &:= 1 + \frac{-3!a_{k-1}}{5!a_k} 10^{1+\epsilon(k-1)-\epsilon(k)} + \frac{3!a_{k-2}}{7!a_k} 10^{2+\epsilon(k-2)-\epsilon(k)} \\
&\quad - \frac{3!a_{k-3}}{9!a_k} 10^{3+\epsilon(k-3)-\epsilon(k)} + \dots + \frac{a_0 (-1) 10^{\epsilon(0)}}{(2k+3)!}
\end{aligned}$$

$\frac{a_{k-l}}{a_k} \approx (1+r)^{-l}$ そして, 175 以下の l に対して $\epsilon(k-l) = \epsilon(k)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}
S_k &\approx 1 - 0.4935011690 + 0.1159730494 - 0.01589800985 + 0.001426488445 - 9.02530404 \times 10^{-5} \\
&\quad + 4.241902946 \times 10^{-6} - 1.539252988 \times 10^{-7} + O(10^{-9}) = 0.6079141983
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
K_{k+1} &\approx \frac{a_k (-1)^{k+1} 10^{-k+\epsilon(k)}}{3!} \times 0.6079141983 \\
&= 0.101319031 \times a_k (-1)^{k+1} 10^{-k+\epsilon(k)} \\
&:= a_{k+1} (-1)^{k+1} 10^{-k-1+\epsilon(k)} \quad (a_{k+1} := 1.01319031 \times a_k \approx (1+r)a_k) \quad (6)
\end{aligned}$$

すなわち, $k+1$ の時も式 (5) が成り立つことになります. ($k \geq 123$)

従って, a_k の k -依存性の違い (増加率 r の違い) はあっても, 常に式 (5) が成り立ち, 符号の交互反転を確認できます. [証明終]

最後に, K_n と B_n のもう一つの関係に触れて置きます. 付録 2 の式 (18) に示すように, 両者は次式で結ばれています.

$$(2n)!K_n = 1 - \sum_{l=1}^n \binom{2n}{2l-1} 4^l B_{2l}$$

4 おわりに

数列 $\{B_n\}, \{K_n\}$ の定義式は, 似た形式を持っていて, 第 n 項は, $(n-1)$ 項までの代数和に負号を掛けたものとなっています.

同型の定義式を持つ数列として, 下記の数列 $\{P_n\}$ があります.⁴

$$\begin{aligned} P_0 &:= 1 \\ P_n &:= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P_k \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

この数列でも, 各項の符号が同一のままであることは不可能ですが, 交互反転にはなりません. $n = 18$ までの数値計算結果は, 以下のとおりです.

n	P_n	n	P_n	n	P_n
1	-1	7	-9	13	-50533
2	0	8	50	14	110176
3	1	9	267	15	1966797
4	1	10	413	16	9938669
5	-2	11	-2180	17	8638718
6	-9	12	-17731	18	-278475061

同一符号の項数は徐々に増えてゆきます. これは, 定義式 (7) の右辺の和の各項に, 二項係数が掛かっているため, $(n-1)$ 項までの和の絶対値が増大するからです.

この項数の増大に, 何らかの規則があるか否か興味のあるところです.

付録 1 数列 $\{B_n\}$ と正接数列 $\{T_n\}$

正接数列 $\{T_n\}$ の各項は, 正接関数 $\tan x$ の級数展開係数として定義されます.

$$\begin{aligned} f(x) = \tan x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!} x^k \\ T_k &= f^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (8)$$

$\tan x$ の導関数を計算してみると

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ f^{(2)}(x) &= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \\ f^{(3)}(x) &= 2(1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 x) + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \\ &= 2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x \end{aligned}$$

⁴ この数列は, $\exp(1 - e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{k!} x^k$ として導入されたものです

これらの計算結果を参考にして, 数学的帰納法により次式が示されます.

$$f^{(2p+1)}(x) = \sum_{l=0}^{p+1} a_{2l}(p)(\tan x)^{2l} \quad (a_{2l}(p) > 0)$$

$$f^{(2p)}(x) = \tan x \sum_{l=0}^p b_{2l}(p)(\tan x)^{2l} \quad (b_{2l}(p) > 0)$$

これにより, $T_{2p} = f^{(2p)}(0) = 0$, $T_{2p+1} = f^{(2p+1)}(0) = a_0(p) > 0$ となりますから, 定義式 (8) より

$$\tan x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T_{2l-1}}{(2l-1)!} x^{2l-1} \quad (9)$$

ここで, 三角関数についての次の 2 つの関係式に着目します.⁵

$$\begin{aligned} x \cot x &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{2^{2l} B_{2l}}{(2l)!} x^{2l} \\ \tan x &= \cot x - 2 \cot 2x \end{aligned}$$

これらの関係式から,

$$\begin{aligned} x \tan x &= x \cot x - 2x \cot 2x \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{2^{2l} B_{2l}}{(2l)!} x^{2l} - \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{2^{2l} B_{2l}}{(2l)!} (2x)^{2l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2^{2l} - 4^{2l}) B_{2l}}{(2l)!} x^{2l} \\ \therefore \tan x &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2^{2l} - 4^{2l}) B_{2l}}{(2l)!} x^{2l-1} \end{aligned} \quad (10)$$

式 (9), (10) を比較して

$$T_{2l-1} = \frac{(-1)^{l-1} (4^{2l} - 2^{2l}) B_{2l}}{2l} \quad (l \geq 1) \quad (11)$$

$T_{2l-1} > 0$ ですから, $(-1)^{l-1} B_{2l} > 0$ となり, これは B_{2l} の符号の交互反転を意味します.

付録 2 数列 $\{K_n\}$ と $\{B_n\}$ の関係

両数列の母関数表示は以下のとおりです.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1 = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \quad (12)$$

$$H(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} K_k x^{2k} \quad (13)$$

$H(x)$ を変形すると

$$H(x) = e^x \frac{2x}{e^{2x} - 1} = e^x (f(2x) + 1 - x)$$

⁵ $x \cot x$ の級数展開式については「岩波数学公式 II」 p.145 参照

この関係式に、式 (12)、(13) を代入すると

$$e^x(1-x) + e^x \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{l!} (2x)^l = \sum_{k=0}^{\infty} K_k x^{2k} \quad (14)$$

$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ を使って式 (14) を変形整理すると

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-m}{(m+1)!} x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} K_k x^{2k} \quad (15)$$

$$C_k := \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} 2^l B_l$$

$B_{2k+1} = 0$ に注意して、式 (15) の両辺の係数を比較すれば、 $p \geq 1$ として

$$2p = C_{2p+1} = \sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{2k} 4^k B_{2k} \quad (16)$$

$$(2p)!K_p = (1-2p) + C_{2p} = (1-2p) + \sum_{k=1}^p \binom{2p}{2k} 4^k B_{2k} \quad (17)$$

式 (17) が求める関係式です。

なお、式 (16) は $\{B_n\}$ に関する漸化式の一つで、この (16) と二項係数の関係式

$$\binom{2p+1}{2k} = \binom{2p}{2k-1} + \binom{2p}{2k}$$

を使えば、式 (17) は次の様に変形されます。

$$(2p)!K_p = 1 - \sum_{k=1}^p \binom{2p}{2k-1} 4^k B_{2k} \quad (18)$$

一方、 $\{K_n\}$ と $\{B_n\}$ との間には、次式 (19) に示す様なより簡潔な関係があります。

$$K_p = -\frac{(4^p - 2)B_{2p}}{(2p)!} \quad (19)$$

これを示すには、次の展開式を用います。⁶

$$x \times \operatorname{cosech}(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k - 2)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \quad (20)$$

式 (20) と式 (13) との比較から、式 (19) が導かれます。

そして、 $B_{2p} = (-1)^{p-1}|B_{2p}|$ ですから、 $K_p = (-1)^p|K_p|$ となり、 $\{K_n\}$ の符号の交互反転が確認できます。

参考文献

- [1] 日本数学会 編 「数学辞典」 岩波書店 1966 (p.236)
 - [2] 森口・宇田川・一松 著 「岩波数学公式 II」 岩波書店 1999 (p.137~p.151)
- (注) 公式集のベルヌーイ数 $B_n (n \geq 1)$ は、§ 2 で定義した B_{2n} とは $B_n = (-1)^{n-1}B_{2n}$ の関係にあります。

⁶ 「岩波数学公式 II p.142」 参照

[3] 数学・物理通信 9 巻 5 号 「自然数の累乗和-補遺 2-」 2019

(注) 本稿の § 3 の数列 $\{K_k\}$ は, 文献 [3] の偶数累乗和の公式で用いた有限数列 $\{\kappa_{p-k}\}$ を元としています. $\kappa_{p-k} := \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \gamma_k$ により導入された γ_k を使って $K_k := \gamma_k$ と定義しています. そして, 文献 [3] の付録に示すように, $g_{2k} := (2k)!K_k$ の母関数が, $x/\sinh(x) = x \operatorname{cosech}(x)$ です.

直交座標系から極座標系へ 2 (改訂版)

矢野 忠^{*1}

From Descartes Coordinates to Polar Coordinates 2 (Revised Version)

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

これは以前に掲載した同じタイトルのエッセイ [1] の改訂版のその 2 である。その 1 では [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

の偏導関数をあらわに求めないで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &= \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

を求めたが、もちろん (1.1) の偏導関数を求めて、(1.2) を求めることもできる。そういう方法で (1.2) を求める、いろいろな方法を示すのがこのエッセイの目的である。

2 (1.2) の導出 1

(1.2) を求める場合には、どうやって (1.1) の偏導関数を求めるかがテーマとなる。その出発点は 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) と直交座標 (x, y, z) との関係

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

この式を r, θ, ϕ について解いて,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.2)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad (2.3)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.4)$$

を求め, これから (1.1) の 9 つの偏導関数を求めるのがもっとも愚直な正攻法である*³. そうして, 求めた偏導関数を (1.2) の $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ のそれぞれの 1 行目の式に代入して, それらの 2 行目の式を求める. この方法で (1.2) を求めることができる [3].

工夫の仕方はどうやって面倒な偏導関数の計算をできるだけ簡単にすることにある. しかし, まずはそういうことを考えないで愚直に計算する方法を示したい*⁴.

この計算では $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ という微分公式をくりかえして使う.

(2.2)-(2.4) から求められた結果をまとめておけば,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

である.

詳しい計算はかなり面倒だが, 以下に示す. 3 節以下に示したのはこの計算の面倒さを回避するためにちょっとした工夫がなされており, それを示すことがこのエッセイの主たる目的である.

まずはじめに (2.5) の計算をしよう. これはそれほど難しくはない. 最初に $\frac{\partial r}{\partial x}$ である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{x}{r} \\ &= \sin \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

これが計算できると, あと 2 つの $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ は直ちに

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi \quad (2.9)$$

と

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta \quad (2.10)$$

と求められる.

*³ $\arctan x$ は $\tan^{-1} x$ とも表される.

*⁴ ちょっとだけ工夫した計算は, 3 節以降で示す.

つぎに (2.6) の計算をしよう.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan u, \left(u := \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\
&= \frac{1}{1 + u^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{z\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
&= \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \frac{x}{z\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \frac{x}{r^2 \tan \theta}, \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan \theta \right) \\
&= \frac{x \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \\
&= \frac{r(\sin \theta) \cos \phi \cos \theta}{r^2(\sin \theta)} \\
&= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

この計算はかなり面倒である．ここで，分子と分母の共通因子をわかりやすいように $(\sin \theta)$ とかっこでくくっている．以下でもできるところでは同じような取り扱いをする．

$\frac{\partial \theta}{\partial x}$ が計算できると，(2.6) の $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ はちょっと計算の途中が省略できて，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan u, \left(u := \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\
&= \frac{1}{1 + u^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{z\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
&= \frac{y}{r^2 \tan \theta} \\
&= \frac{y \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \\
&= \frac{r(\sin \theta) \sin \phi \cos \theta}{r^2(\sin \theta)} \\
&= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$ は前の 2 つの計算と同じではない.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \arctan u, \left(u := \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\
&= \frac{1}{1 + u^2} \frac{\partial u}{\partial z}, \left(\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \right) \\
&= \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \left(\frac{-1}{z^2} \right) \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= -\frac{z \tan \theta}{r^2}, \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan \theta \right) \\
&= -\frac{r \cos \theta \tan \theta}{r^2} \\
&= -\frac{\sin \theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

つづけて (2.7) を計算しよう.

まず (2.7) の $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan v, \left(v := \frac{y}{x} \right) \\
&= \frac{1}{1 + v^2} \frac{\partial v}{\partial x}, \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \right) \\
&= \frac{y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\
&= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
&= -\frac{r \sin \theta \sin \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \\
&= -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

と計算できる.

つぎに (2.7) の $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan v, \left(v := \frac{y}{x} \right) \\
&= \frac{1}{1 + v^2} \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{r \sin \theta \cos \phi}{r^2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

最後の (2.7) の $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ は簡単に

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) = 0 \tag{2.16}$$

となる.

馬鹿正直に計算すると結構面倒な計算となる.

3 (1.2) の導出 2

2 節では (2.2)-(2.4) を使って (1.2) を求めた. この 3 節では本質的には同じだが, ちょっと変えた次式を出発点としよう*5.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.1)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (3.2)$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \quad (3.3)$$

(3.1) から出発すると $\frac{\partial r}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned} 2r \frac{\partial r}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \frac{r \sin \theta \cos \phi}{r} = \sin \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

同様に $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ は

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta \quad (3.6)$$

とすぐに求められる.

$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ はつぎのように求められる. (3.2) の両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \tan \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

であるから, この (3.7) から $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \cos^2 \theta \frac{x}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \cos^2 \theta \frac{(r \sin \theta) \cos \phi}{r \cos \theta (r \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる.

*5 私の持っている書籍の中で調べた限りでは (3.1)-(3.3) を出発点とした書籍はなかった. もっともこれは (2.2)-(2.4) と本質的には同じだが, 計算のプロセスは同じではない.

$\frac{\partial \theta}{\partial y}$ は (3.8) の分子の x を y で置き換えればいいから,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \cos^2 \theta \frac{y}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \cos^2 \theta \frac{(r \sin \theta) \sin \phi}{r \cos \theta (r \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}\end{aligned}\tag{3.9}$$

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$ は (3.2) の両辺を z で微分すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \tan \theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\cos^2 \theta \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \\ &= -(\cos^2 \theta) \frac{r \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta)} \\ &= -\frac{\sin \theta}{r}\end{aligned}\tag{3.10}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$ も計算しておこう.

まず, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ を求めるために, (3.3) の両辺を x で微分すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \tan \phi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\cos^2 \phi \frac{y}{x^2} \\ &= -(\cos^2 \phi) \frac{r \sin \theta \sin \phi}{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi)} \\ &= -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}\end{aligned}\tag{3.11}$$

同様にして, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ も

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \tan \phi &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \cos^2 \phi \frac{1}{x} \\ &= \frac{\cos^2 \phi}{r \sin \theta \cos \phi} \\ &= \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}\end{aligned}\tag{3.12}$$

また $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \tan \phi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

4 (1.2) の導出 3

この 5 節では (1.2) を求める場合の (1.1) の偏導関数を求める, 出発点としての 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) と直交座標 (x, y, z) との関係として

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\tag{4.1}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{z}{r} \right)\tag{4.2}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)\tag{4.3}$$

をとる [4]. これを (2.2)-(2.4) と比べれば, (4.2) がちがっているだけである.

4 節ではこの式を中心にして話を進めたい. このときに必要になる微分公式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial x}\tag{4.4}$$

である.

いま $u := \frac{z}{r}$ とおき, まず $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ を求めよう.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arccos u, \left(u := \frac{z}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(-\frac{xz}{r^3} \right) \\ &= \frac{xz}{r^3 \sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{xz}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}} \\ &= \frac{(r \sin \theta) \cos \phi \cdot r \cos \theta}{r^2 (r \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}\end{aligned}\tag{4.5}$$

ここで, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3}$ の導出は付録 7.3 に示す.

$\frac{\partial \theta}{\partial x}$ が求められると, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ の計算は $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ とほとんど同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}} \\ &= \frac{(r \sin \theta) \sin \phi \cdot r \cos \theta}{r^2 (r \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}\end{aligned}\tag{4.6}$$

と求まる.

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$ は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \arccos u, \left(u := \frac{z}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial z}, \left(\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin^2 \theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\sin^2 \theta}{r} \\
 &= -\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{r^2 - z^2}} \\
 &= -\frac{\sin^2 \theta}{r \sin \theta} \\
 &= -\frac{\sin \theta}{r}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

と得られる. $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin^2 \theta}{r}$ の導出は付録 7.4 で示す.

5 (1.2) の導出 4

(4.1)-(4.3) の代わりに

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{5.1}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \tag{5.2}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \tag{5.3}$$

を偏導関数を求める出発点にすることもできる. この式から出発して, $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ を求める文献は多い [5] [6] [7]*6.

このとき (5.1) と (5.3) は (3.1) と (3.3) と同じであるから, (5.2) を用いた θ の偏導関数だけを求めよう.

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \left(u := \frac{z}{r} \right) \tag{5.4}$$

であるから,

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} = -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3} \tag{5.6}$$

を用いれば*7,

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3} \tag{5.7}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{xz}{r^3} \\
 &= \frac{1}{(\sin \theta)} \frac{r(\sin \theta) \cos \phi \cdot r \cos \theta}{r^3} \\
 &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

*6 [7] では (5.1)-(5.3) から出発するのが正攻法だと脚注に書いてあるが, 実際には [2] の 4 節の導出と同じ求め方である.

*7 (5.6) の導出は付録 7.3 に示してある.

同様に

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \left(u := \frac{z}{r}\right) \quad (5.9)$$

を用いれば,

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{yz}{r^3} \quad (5.10)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{yz}{r^3} \\ &= \frac{1}{(\sin \theta)} \frac{r(\sin \theta) \sin \phi \cdot r \cos \theta}{r^3} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \end{aligned} \quad (5.11)$$

が求められる.

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$ を求めるためには

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \left(u := \frac{z}{r}\right) \quad (5.12)$$

を用い, かつ付録 7.4 で求められた $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin^2 \theta}{r}$ を用いれば,

$$\begin{aligned} -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\sin^2 \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \quad (5.13)$$

と求められる.

6 おわりに

このエッセイでは 2 節では (2.2)-(2.4) からはじめて偏導関数 (1.1) を, また 3 節では (3.1)-(3.3) から偏導関数 (1.1) を導いた. また 4 節では関係 (4.2) から, 最後に 5 節では (5.2) から $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ を導いた. 7 節は付録で 7.1 と 7.2 では少々いくつかの偏導関数の導出の細かな工夫を示した. 7.3 節では (5.6) の導出を, 7.4 節では (4.7) で示した $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin^2 \theta}{r}$ の導出し, 7.5 節では $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{z^2}{r^2})$ と $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z^2}{r^2})$ を導出している. 最後の 7.6 節では $y = \arctan x$ と $y = \arccos x$ の導関数を導出した.

7 付録

7.1 (1.2) の導出 2 (補遺)

(3.1)-(3.3) で (3.2) は平方根号を含んでいるので, 計算が面倒になると考えるのは [8] である.

そのために (3.2) を 2 乗した式

$$\tan^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \quad (7.1)$$

を考えれば, 平方根がでて来ないので少しか計算が簡単になる.

$$\frac{\partial}{\partial x} \tan^2 \theta = 2 \tan \theta \frac{\partial}{\partial x} \tan \theta = \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (7.2)$$

であり, また

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) = \frac{2x}{z^2} \quad (7.3)$$

(7.2) と (7.3) とを等しいとおけば, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x}{z^2} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta} \frac{x}{z^2} \\
 &= \frac{x}{r^2 \tan \theta} \\
 &= \frac{r \sin \theta \cos \phi}{r^2 \tan \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

となり, また $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ は (7.2), (7.3) と (7.4) を参照すれば, 直ちに

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{y}{z^2} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta} \frac{y}{z^2} \\
 &= \frac{y}{r^2 \tan \theta} \\
 &= \frac{r \sin \theta \sin \phi}{r^2 \tan \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

となる. 手順はあまり変わらないかもしれないが, 心理的に簡単になったと感じられる.

最後の $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ は

$$\frac{\partial}{\partial z} \tan^2 \theta = \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) = -\frac{2(x^2 + y^2)}{z^3} \tag{7.7}$$

であるから, これらを等しいとおけば,

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{x^2 + y^2}{z^3} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta} \left(-\frac{x^2 + y^2}{z^3} \right) \\
 &= -\frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3 \cos^3 \theta} \\
 &= -\frac{\sin^2 \theta}{r \sin \theta} \\
 &= -\frac{\sin \theta}{r}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

他の偏導関数は 3 節の結果と同じである.

7.2 (1.2) の導出 4 (補遺)

(5.2) の両辺を 2 乗した

$$\cos^2 \theta = \frac{z^2}{r^2} \tag{7.9}$$

を考えよう.

この両辺を x で微分すれば, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \cos^2 \theta &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \left(u := \frac{z^2}{r^2} \right) \\
2 \cos \theta (-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -2 \frac{xz^2}{r^4} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \frac{xz^2}{r^4} \\
&= \frac{1}{\cos \theta (\sin \theta)} \frac{r(\sin \theta) \cos \phi \cdot r^2 \cos^2 \theta}{r^4} \\
&= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

と求まる*8.

同様にして, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \frac{yz^2}{r^4} \\
&= \frac{1}{\cos \theta (\sin \theta)} \frac{r(\sin \theta) \sin \phi \cdot r^2 \cos^2 \theta}{r^4} \\
&= \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

また $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ は,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{r^2} \right) = \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{r} \tag{7.12}$$

を用いれば*9,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \cos^2 \theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{r^2} \right) \\
(2 \cos \theta)(-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{(2 \cos \theta) \sin^2 \theta}{r} \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r}
\end{aligned} \tag{7.13}$$

いずれの計算も簡単になったとまでいうことはできないが, 平方根号を含む計算はいつも心理的に面倒に感じる
ので, その心理的な重さを軽減してくれるかもしれない.

*8 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z^2}{r^2} \right)$ の導出は付録 7.5 に示す.

*9 (7.12) の導出は付録 7.5 に示す.

7.3 (5.6) の導出

$u := \frac{z}{r}$ であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} \right) &= z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &= -\frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \\
 &= -\frac{z}{r^2} \frac{x}{r} \\
 &= -\frac{xz}{r^3} \\
 &= -\frac{r \sin \theta \cos \phi \cdot r \cos \theta}{r^3} \\
 &= -\frac{\cos \theta \sin \theta \cos \phi}{r}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

となる.

7.4 $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right)$ の導出

$u = \frac{z}{r}$ のときの $\frac{\partial u}{\partial z}$ の導出を述べよう.

いま, $u = \frac{f}{g}, f = z, g = r$ とおく. 商の関数の微分公式から

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} g - f \frac{\partial g}{\partial z} \right) \tag{7.15}$$

であるから,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \tag{7.17}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{r^2} \left(1 \cdot r - z \cdot \frac{z}{r} \right) \\
 &= \frac{1}{r^3} (r^2 - z^2) \\
 &= \frac{x^2 + y^2}{r^3} \\
 &= \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{r}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

が求まる.

7.5 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z^2}{r^2}\right)$ と $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2}{r^2}\right)$ の導出

まず $u := \frac{z^2}{r^2}$ において, $\frac{\partial u}{\partial x}$ を求める.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= z^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ &= -\frac{2z^2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{2z^2}{r^3} \frac{x}{r} \\ &= -\frac{2xz^2}{r^4}\end{aligned}\tag{7.19}$$

つぎに $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求めよう. $u = \frac{f}{g}, f = z^2, g = r^2$ とおけば,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\tag{7.20}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2r \frac{\partial r}{\partial z} = 2r \frac{z}{r} = 2z\tag{7.21}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} g - f \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= \frac{2z}{r^4} (r^2 - z^2) \\ &= \frac{2z}{r^4} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{2r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta}{r^4} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{r}\end{aligned}\tag{7.22}$$

7.6 $y = \arctan x$ と $y = \arccos x$ の導関数の導出

まず $y = \arctan x$ の導関数から求めよう. ただし, $-\pi/2 < y < \pi/2$ の主値をとる. このとき

$$\begin{aligned}x &= \tan y \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2\end{aligned}\tag{7.23}$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}\tag{7.24}$$

と $y = \arctan x$ の導関数が求められる.

つぎに $y = \arccos x$ の導関数を求める. ただし, $0 < y < \pi/2$ の主値をとる. このとき

$$\begin{aligned}x &= \cos y \\ \frac{dx}{dy} &= -\sin y\end{aligned}\tag{7.25}$$

$0 < y < \pi/2$ では $\sin y > 0$ であるから

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \quad (7.26)$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (7.27)$$

と $y = \arccos x$ の導関数が求められる.

(2018.4.20)(2020.12.3 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 直交座標系から極座標系へ, 数学・物理通信, 8 巻 5 号 (2018.6) 7-15
- [2] 矢野 忠, 直交座標系から極座標系へ 1 (改訂版), 数学・物理通信, 10 巻 8 号 (2020.12) 13-22
- [3] 原島 鮮, 『初等量子力学』(裳華房, 1986) 171-173
- [4] 石井俊全, 『一般相対性理論を一步一步数式で理解する』(ベレ出版, 2017) 416-418
- [5] D. ボーム, 『量子論』(みすず書房, 1964) 361-362
- [6] 村上雅人, 『なるほど量子力学 II』(海鳴社, 2006) 151-165
- [7] 江沢 洋, 『微分積分の基礎と応用』(サイエンス社, 2000) 243-244
- [8] 小出昭一郎, 『量子力学 II (改訂版)』(裳華房, 1990) 89-93

編集後記

『数学・物理通信』読者の皆様こんにちは。早くもあと一か月足らずで今年も終わりですね。今年はコロナに始まりコロナで終わるという変な年ですね。私の長い人生のなかでも、これほどおかしな年を経験するのは初めてです。早く、良いワクチンができて、こんな騒ぎが収束することを願っています。

今回は、3編の論文が載っていますが、私(世戸)が書いた『積分方程式の興味ある問題(3)一棒の重心関数一』を改めて読んでみて、こんなものは何の役に立つのだろうとつくづく考えてしまいました。「おわりに」のところでも、これは単に、「計算のための計算にすぎないのではと」書いてしまいました。これはだんだんに書く種が尽きてきて惰性で書いているせいと分かってはいるが、いまの時点ではどうにも逃げようがないままです。ただし、最後の「付録B」に書いた「丸太の重さの測り方」だけはその部分だけ読んでも、すぐに理解できる面白いものですのでぜひ読んでいただきたいと思います。

そんな目で次の論文、秋葉敏男さんが書かれた『数列への一考察』を見るとこれは何と格調高い書き方だろうと思ってしまう。ただし、ここに書かれているいくつかの数列は何の役に立つのかなと思ってしまうのは私だけではないでしょう。つぎの矢野忠さんが書かれた『直交座標系から極座標系へ2』を見るとこれは変換の仕方が何通りも書かれており、こんなにもたくさんあったのかと感心してしまう。私などは直交座標から極座標への変換式などというものは、若いときに一度やったきりで、その後必要になったときは公式集から丸写しするだけでした。しかし、難を言えば矢野さんが書かれたものも、長い数式が延々と続き、読むのが大変です。

こう見てくると、私のも含めて、ここに書かれた論文は何の役に立つのだろうかと思ってしまいます。しかし、その答えは秋葉さんが書かれた初めの部分に書いてありました。つまり、これらはすべて「リベラル・アーツ」すなわち、「すぐには役に立たない学問」なのです。この続きは、秋葉さんが書かれたところを見てください。

最後に、今後とも『数学・物理通信』が長く続くことを願っています。

(世戸憲治)

世戸さんの論文の付録Bの「丸太の重さの測り方」ですが、力のモーメントを丸太の重心の周りにとっておられます。丸太の地面に接する点の周りの力のモーメントをとったほうがすこし簡単のように思います。またこれの出典ですが、金原寿郎『物理の研究』上巻(旺文社)p. 47の問題[10]にあります。ちなみに私がこの本を読んで勉強したことは事実ですが、高校生のころにこの問題を解いたことはなく、大学1年生だったころにこの問題があることを知りました。まったく不勉強な私です。

(矢野 忠)