数学・物理通信

11巻1号　　2021年3月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2021年3月12日

目次 (Contents)

錘付き弦振動の問題 (1)

世戸 憲治 *

Oscillation Problem of String with Weight(1)

Kenji SETO*

1　はじめに

通常の弦の振動問題で，弦の真ん中に錘を付けるとどうなるかを考えてみた．錘を 1 個付けただけであるが，振動の様子，解析の仕方がまったく変わってしまう．

2　方程式の導入とその解法

2.1　方程式の導入

長さ 2ℓ, 線密度 ρ の弦の真ん中に質量 $2m$ の錘を付けたものを用意する．この弦の両端を固定し，弦に張力 T を与えたときの弦に垂直方向の振動を解析する．この弦の錘が付いたところを原点とし，弦に沿って x 軸をとる．したがって，x の範囲は $[-\ell,\ \ell]$ となる．座標 x, 時刻 t における弦の変位を $U(x,t)$ とする．ここでは，簡単化のため，方程式，境界条件，初期条件をすべて，原点に関し左右対称な形で与えることにする．結果として，その解として得られる変位 $U(x,t)$ も，原点に関し左右対称な形になるはずで，

$$U(x,t) = U(-x,t) \tag{2.1}$$

と変数 x に関し偶関数になる．

錘は，数学的な取り扱い易さから，大きさを持たない点として扱うことにする．初め錘と弦は一体化したものと考え，弦と錘を含めた全体の線密度を $\rho(x)$ とし，これを

$$\rho(x) = 2m\delta(x) + \rho \tag{2.2}$$

とおくことにする．δ は Dirac のデルタ関数である．この線密度を用いて，錘と弦を含めた全体の波動方程式は

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

となる．この錘のすぐ正の側の座標を $+0$，負の側の座標を -0 とし，この式を -0 から $+0$ まで積分すると，錘部分の運動方程式

$$2m\frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial t^2} = 2T\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=+0} \tag{2.4}$$

* 北海学園大学名誉教授　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

が導かれる．ここで，$\partial U/\partial x$ が奇関数となることを用いた．また，錘部分を除いた純粋に弦部分の方程式は，

$$\rho\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \qquad |x|>+0 \tag{2.5}$$

と，通常の波動方程式となる．

2.2　方程式の解法

この方程式を解くにあたって，変位 $U(x,t)$ は変数分離形であるとし，その時間部分は，適当な角振動数 ω を用いて $\cos(\omega t)$, あるいは，$\sin(\omega t)$ で書けるものとする．すなわち，

$$U(x,t)=X(x)\big[\cos(\omega t) \quad \text{or} \quad \sin(\omega t)\big] \tag{2.6}$$

を仮定する．これを，方程式 (2.4) (2.5) に代入すると，

$$-m\omega^2 X(0)=T\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=+0}, \qquad -\rho\,\omega^2 X(x)=T\frac{d^2X(x)}{dx^2}, \quad |x|>+0 \tag{2.7}$$

となる．この第 2 式から X は三角関数で書けることがわかるので，定数 $A,\ B$ を用いて，

$$X(x)=A\cos(kx/\ell)+B\sin(k|x|/\ell) \tag{2.8}$$

とおくことにする．ここに，k は無次元化した波数である．また，sine の中の x には絶対値が付いていることに注意する．これを (2.7) 式に代入すると，

$$-m\omega^2 A=TB\frac{k}{\ell}, \qquad \rho\,\omega^2=T\frac{k^2}{\ell^2} \tag{2.9}$$

となる．この第 2 式から，$k,\ \omega$ を正のものだけを採用することにして，

$$\omega=\frac{c}{\ell}k, \qquad c=\sqrt{T/\rho} \tag{2.10}$$

となる．ここに，c は波動伝播速度で，この第 2 式で定義される．

一方，$x=\pm\ell$ で弦は固定されているので，

$$X(\pm\ell)=A\cos(k)+B\sin(k)=0 \tag{2.11}$$

である．(2.9) の 2 つの式から ω^2 を消去すると，

$$kA+\frac{\rho\,\ell}{m}B=0 \tag{2.12}$$

となるので，この式と (2.11) 式から定数 $A,\ B$ が共にゼロとならないために k は

$$k\tan(k)=\frac{1}{\mu}, \qquad \mu=\frac{m}{\rho\,\ell} \tag{2.13}$$

を満たすものでなければならない．ここに，μ は錘の弦に対する質量比で，この第 2 式で定義する．これから波数 k が決まる．これは超越方程式なので，厳密解は求まらず，数値的に求めることになるが，正の k は区間

$\bigl(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi\bigr)$，$(n=0,1,2,\cdots)$ の間に 1 個ずつ決まる．これらを小さい方から，k_i，$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．k が決まると，(2.10) 式から，角振動数 ω も，

$$\omega_i = \frac{c}{\ell}k_i, \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{2.14}$$

と決まる．これら k_i, ω_i を固有値とする．また，このときの関数 $X(x)$ は，(2.11) 式が成り立つように，

$$A = -\sin(k_i), \qquad B = \cos(k_i) \tag{2.15}$$

と選ぶことにし，(2.8) 式の $X(x)$ を

$$X(x,k_i) = -\sin(k_i)\cos(k_i x/\ell) + \cos(k_i)\sin(k_i|x|/\ell) = \sin\left(\frac{k_i}{\ell}(|x|-\ell)\right) \tag{2.16}$$

と k_i 依存性を明示して，これを固有関数とする．

2.3 固有関数の正規化

ここで，固有関数の直交性の式を導く．(2.2) 式のところで説明したように，弦に錘を付けるということは，線密度が錘のところで不連続に変化することである．したがって，ここでの直交性の積分式もこの (2.2) 式を重みとした積分になる．具体的には，

$$\int_{-\ell}^{\ell} \rho(x)X(x,k_i)X(x,k_j)dx \tag{2.17}$$

を計算することになる．この X に (2.16) 式を代入し，積分区間を $[-0,+0]$ の部分と残りの部分に分け，残りの部分は X が偶関数としているので，$+0$ から ℓ までの積分の 2 倍とする．積分した結果に，k_i, k_j が (2.13) 式を満たすことを使うとうまくまとめることができる．途中の計算は長くなるので省くが，結果は，

$$\int_{-\ell}^{\ell} \rho(x)X(x,k_i)X(x,k_j)dx = {N_i}^2\delta_{i,j} \tag{2.18}$$

となる．ここに，正規化定数 ${N_i}^2$ は，

$${N_i}^2 = \rho\,\ell\bigl(1+\mu\sin^2(k_i)\bigr) \tag{2.19}$$

となる．これから，$X(x,k_i)/N_i$ が正規化された固有関数となる．

2.4 初期値問題

これまでの結果から，変位 $U(x,t)$ の一般解は，x 依存部分の固有関数 $X(x,k_i)$ と，時間依存部分 $\sin(\omega_i t)$，または，$\cos(\omega_i t)$ との積の重ね合わせで表される．ここでは，初期変位をすべての点でゼロとし，弦に付けた錘部分だけにある一定の衝撃を与えた場合の解を求めることにする．このときの変位は，C_i を任意定数として，

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x,k_i)\sin(\omega_i t) \tag{2.20}$$

と書ける．これに初期条件を付加するわけだが，ここでは，錘に衝撃を与えることで，一定の力積が加わり，その結果運動量の変化が起こるものとして，

$$U(x,0) = 0, \qquad \rho(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2mv_0\delta(x) \tag{2.21}$$

とする．v_0 は初速度である．この (2.20) 式で，初期条件の第 1 式はすでに満たしているので，あとは第 2 式を満たすように係数 C_i を決めるとよい．この条件式は，

$$\rho(x)\sum_{i=1}^{\infty} C_i\omega_i X(x,k_i) = 2mv_0\delta(x) \tag{2.22}$$

となる．この式の両辺に $X(x,k_j)$ を掛け積分し，固有関数の直交式 (2.18) (2.19) を用いると，係数 C_i が求まり，さらに，(2.13) の第 2 式，および，(2.14) (2.16) 式を用いて変形すると，

$$C_i = -\frac{2mv_0\sin(k_i)}{\omega_i {N_i}^2} = -\frac{2\ell\mu v_0\sin(k_i)}{c\,k_i\bigl(1+\mu\sin^2(k_i)\bigr)} \tag{2.23}$$

と決まる．これを (2.20) 式に戻して，最終的に変位 $U(x,t)$ が，

$$U(x,t) = -\frac{2\ell\mu v_0}{c}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(k_i)}{k_i\bigl(1+\mu\sin^2(k_i)\bigr)}\sin\Bigl(\frac{k_i}{\ell}(|x|-\ell)\Bigr)\sin\Bigl(\frac{ck_i}{\ell}t\Bigr) \tag{2.24}$$

と求められる．これから，その速度は，

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -2\mu v_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(k_i)}{1+\mu\sin^2(k_i)}\sin\Bigl(\frac{k_i}{\ell}(|x|-\ell)\Bigr)\cos\Bigl(\frac{ck_i}{\ell}t\Bigr) \tag{2.25}$$

で与えられる．

特に，$x=0$ としたときの錘の変位，および，その速度は，

$$\begin{aligned} U(0,t) &= \frac{2\ell\mu v_0}{c}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k_i)}{k_i\bigl(1+\mu\sin^2(k_i)\bigr)}\sin\Bigl(\frac{ck_i}{\ell}t\Bigr),\\ \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} &= 2\mu v_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k_i)}{1+\mu\sin^2(k_i)}\cos\Bigl(\frac{ck_i}{\ell}t\Bigr) \end{aligned} \tag{2.26}$$

となる．この特別な場合として，$t=0$ での錘の速度は v_0 としているので，μ の値に関係なく，

$$2\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k_i)}{1+\mu\sin^2(k_i)} = 1 \tag{2.27}$$

が成り立つ．

固有値 k_i を求めるための方程式 (2.13) は，先にも述べたように超越方程式なので，固有値の厳密解を求めることは不可能である．しかしそれにもかかわらず，(2.24) 式以降に表れる和をとることが可能である．これは，中西襄先生と共著の形で書かれた論文「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析」(「数学・物理通信」2 巻 3 号，2012 年 7 月) の中でなされた[*1]．これは弾性棒に弾丸を衝突させたとき弾性棒と弾丸が一体化したときの振動を扱ったものである．この中の固定端モデルで，(2.25) 式と同じ形の和をとる計算をし，結果は Laguerre 多項式で書かれることを証明した．ここでは，その要点だけを簡単に紹介することにする．

まず，(2.25) 式の和の部分は k_i について偶関数になっているので，この i 番号について $i=0$, および，負の番号にも拡張することにして，

$$k_0 = 0, \qquad k_{-i} = -k_i \tag{2.28}$$

[*1] Noboru Nakanishi and Kenji Seto, “Exact expressions for the sums of the non-Fourier trigonometric series arising from time-dependent eigenvalue problems” Prog.Theor.Exp.Phys. 2013, 023A02, Feb.4.2013

とし，i 番号の和を $-\infty$ から ∞ としてから，さらに三角関数の積和公式を用いると，

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{\mu v_0}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k_i)}{1+\mu\sin^2(k_i)}\Big[\sin\Big(\frac{k_i}{\ell}(|x|-\ell+c\,t)\Big)+\sin\Big(\frac{k_i}{\ell}(|x|-\ell-c\,t)\Big)\Big] \tag{2.29}$$

と書直される．ここで，

$$\hat{S}(y) = \frac{\mu}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k_i)}{1+\mu\sin^2(k_i)}\sin(k_i y) \tag{2.30}$$

と定義しておくと，この (2.29) 式は

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -v_0\Big[\hat{S}\Big(\frac{|x|-\ell+c\,t}{\ell}\Big)+\hat{S}\Big(\frac{|x|-\ell-c\,t}{\ell}\Big)\Big] \tag{2.31}$$

と $\hat{S}$ を用いて表わすことができる．先に紹介した論文で，この $\hat{S}$ が，$y>-1$ に対し，

$$\hat{S}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}L_n\Big(\frac{2(y-2n-1)}{\mu}\Big)e^{-(y-2n-1)/\mu}\,\theta(y-2n-1) \tag{2.32}$$

となることを証明した．ここに L_n は n 次の Laguerre 多項式である．この式は形式上無限和になっているが，実際は，シータ関数が付いているので，n の和はゼロから，[ ] を Gauss 記号として，$[(y+1)/2]-1$ までの有限和になる．また，負の y に対しては，(2.30) の定義から

$$\hat{S}(y) = -\hat{S}(-y) \tag{2.33}$$

である．特に，$|y|<1$ に対しては，$\hat{S}(y)=0$ であり，$1<y<3$ に対しては $\hat{S}(y)=e^{-(y-1)/\mu}$ となる．$y=1$ の点では不連続になるが，このときは左右からの極限値の相加平均となるので，$\hat{S}(-1)=-\hat{S}(1)=-1/2$ である．これらのことから，(2.31) 式で $x=0,\ t=0$ としたとき，この右辺の値は確かに v_0 となり，これは (2.27) 式が正しいことを保証している．

3　数値計算例

ここでは，ピアノの弦に錘を付けたときの振動を数値的に解析してみる．ピアノの弦はすべて鋼鉄製の金属弦である．中央「ラ」の音の弦の長さは，39 cm, したがってその半分の ℓ は $\ell = 19.5\,\mathrm{cm} = 0.195\,\mathrm{m}$, 弦の断面の半径は $r = 0.6\,\mathrm{mm} = 0.6\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ である．インターネットで調べた体積密度は $7.87\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ なので線密度は $\rho = \pi r^2\times7.87\times10^3\,\mathrm{kg/m^3} = 8.9007\times10^{-3}\mathrm{kg/m}$ である．これから，弦半分の長さ分の質量は，

$$\rho\,\ell = 1.7356\,\mathrm{g} = 1.7356\times10^{-3}\,\mathrm{kg} \tag{3.1}$$

となる．この弦の音の基本振動数を $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$ とすると，そのときの波長は $\lambda = 4\ell$ となるので，$\lambda\nu = c$ から，波動伝播速度は $c = 343.2\mathrm{m/s}$ となり，$c=\sqrt{T/\rho}$ から，張力 T を逆算すると，およそ，$T = 1048\mathrm{N}$ となる．

この弦の真ん中に質量 $2m$ が 1 g の錘，したがって，$m = 0.5\,\mathrm{g} = 0.5\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$ の錘を付けたときの振動を解析してみる．このときの (2.13) 式は，

$$k\tan(k) = \frac{1}{\mu}, \qquad \mu = 0.2880 \tag{3.2}$$

となる．ここでは，この方程式から 100 個の k の値を求めるが，その初めの 10 個を挙げると，

$$k_i = 1.2302,\quad 3.8724,\quad 6.7577,\quad 9.7662,\quad 12.8305,\quad 15.9226,\quad 19.0299,\quad 22.1466,\quad 25.2692,\quad 28.3959 \tag{3.3}$$

と，ほぼ，円周率 π の間隔で並ぶ．このときの錘の振動を (2.26) 第 1 式に従って数値的に求めたものを図 1 に示す．ここで，初速度は $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ とした．

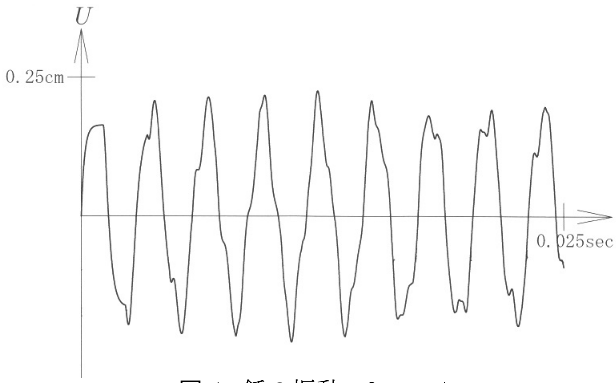

図 1　錘の振動；$2m = 1\mathrm{g}$

もう一つ，錘の質量 $2m$ を先の例の 1/10 として $2m = 0.1\,\mathrm{g}$ とした場合も例示する．このときは，$m = 0.05\,\mathrm{g}$ で，$\mu = 0.0288$ である．また，(2.13) 式を解いた結果は，

$$k_i = 1.5268,\quad 4.5811,\quad 7.6374,\quad 10.6966,\quad 13.7597,\quad 16.8273,\quad 19.8998,\quad 22.9772,\quad 26.0595,\quad 29.1466 \tag{3.4}$$

となって，前のものよりかなり大きくなり，$(n+\frac{1}{2})\pi$,　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の値に近くなっている．このときの錘の振動を図 2 に示す．

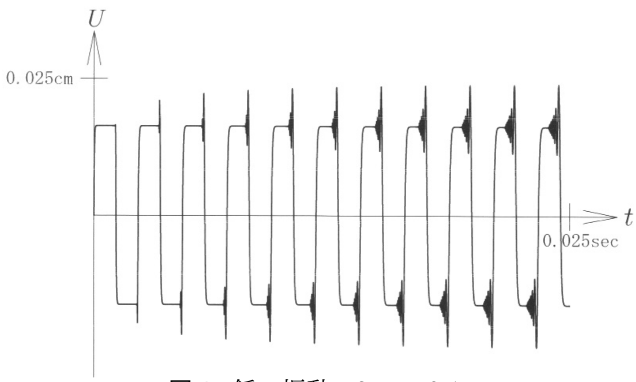

図 2　錘の振動；$2m = 0.1\mathrm{g}$

図 1 の $2m = 1\,\mathrm{g}$ のときは，全体として単振動に，ところどころで，さざ波 (ripple) が入った形になっている．それに対し，錘の質量を小さくして，$2m = 0.1\,\mathrm{g}$ とした図 2 では，全体として矩形波になっており，それにさざ波が入った形になっている．しかも，そのさざ波は時間が経過するほど激しい振動になっている．このさざ波が形成されるのは，(2.32) 式の Laguerre 多項式のためと考えられる．

なお，(2.13) 式で k の値を 100 個求め，(2.27) 式における左辺の和を計算した結果は，図 1 に相当する $\mu = 0.2880$ の場合で，この和の値は 0.9929 となり，図 2 の $\mu = 0.0288$ の場合で，0.9296 と，ほぼ，誤差の範

囲で 1 と認められるものである．

4　おわりに

ここで取り挙げた「錘付き弦振動の問題」というのは，すでにどなたかによってなされているような気がして，インターネットで調べてみたが，意外にも，これと同じものは見つからなかった．ただし，弦の質量を無視した，すなわち，弦ではなく糸のようなものに複数個の錘を付けたいわゆる格子振動の例は，もちろん，たくさんの人によって研究されている．したがって，ここで扱ったような質量を考慮した弦の錘付き振動問題というのは，ここで行われたのが初めてと思われる．

ここで紹介した (2.30) 式から (2.32) 式を求める計算は，ほとんどが中西先生の主導のもとに行われたものであり，非常に長い根気強い計算力が要求されるものである．この Laguerre 多項式で表された結果は非常に綺麗にまとまっていて，いま読み返してみてもよくこれだけの計算ができたものと感心してしまう．ただし，速度 $\partial U/\partial t$ ではなく変位 U を求めるときはこの結果を時間で積分しなければならないという不便さがある．そのためここでは，この Laguerre 多項式で表された結果を用いずに，直接，(2.26) 第 1 式の和の形のまま数値計算することにした．

今回は，簡単化のため，弦の真ん中に錘を付けたことで，この問題と弾性棒に弾丸が衝突する問題とが数学的に等価な問題になってしまった．錘を付ける位置を真ん中ではなく端に寄せたり，複数個の錘を付けた問題も考えられるが，錘を 1 個付けただけでこの難しさである．さらなる一般化はかなり面倒なことになるであろう．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，特に，錘の大きさに関する極限のとり方に対し，ご助言をいただきました．先生に心から感謝いたします．

積分方程式演習

—”積分方程式における興味ある問題 (1)”に寄せて—

秋葉 敏男

Exercise of An Integral Equation

—Based on ”Interesting Problems in Integral Equation (1)”—

Toshio AKIBA[1]

1 はじめに

「数学・物理通信」10 巻 7 号に掲載された論文「積分方程式における興味ある問題 (1)」[2]において, 球状星団の星の空間分布密度 $\rho(r)$ と観測面密度 $k(x)$ との関係が論じられており,

$$k(x) = 2\int_x^\infty \frac{r\rho(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}r \tag{1}$$

という関係式が示されています.

天文観測から $k(x)$ が測定できますから, 空間分布 $\rho(r)$ を求めるには (1) を積分方程式として解くことになります. その解法については, 著者は 2 つの方法を紹介しています.

(1) 二重積分を利用する

結果は

$$\rho(r) = \frac{-1}{\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{xk(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}\mathrm{d}x \tag{2}$$

(2) ラプラス変換を利用する

変数変換

$$R := \frac{1}{r^2} \qquad X := \frac{1}{x^2}$$

により式 (1) は

$$K(X) = \int_0^X \frac{D(R)}{\sqrt{X - R}}\mathrm{d}R \tag{3}$$

と変形されます. ただし,

$$K(X) := xk(x) = X^{-1/2}k(X^{-1/2}) \qquad D(R) := r^3\rho(r) = R^{-3/2}\rho(R^{-1/2})$$

論文では積分方程式 (3) の導出で終わっていますが, 合成積のラプラス変換の公式を用いて容易に解けて

$$D(R) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial R}\int_0^R \frac{K(X)}{\sqrt{R - X}}\mathrm{d}X \tag{4}$$

が導かれます. そして変数を元にもどせば

$$\rho(r) = \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{rk(x)}{x\sqrt{x^2 - r^2}}\mathrm{d}x \tag{5}$$

式 (2) と (5) は表式が異なりますが, 同一の空間密度を与えるはずですから, 2 節で具体例で確認してみます.

[1]tawarp@mug.biglobe.ne.jp

[2]以下では単に論文という.

2 具体例の計算

星の空間分布として, 次のようなものを仮定してみます.

(1) $\rho(r) = \rho_0 \mathrm{e}^{-br^2}$ (ガウス分布)

(2) $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2+1}$ (岩波『数学公式 I』 p.271 の図 6.17 を変形したもの)

2.1 $\rho(r) = \rho_0 \mathrm{e}^{-br^2}$ の場合

式 (1) より

$$k(x) = \int_x^\infty \frac{2r\rho(r)\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \rho_0 \int_x^\infty \frac{2r\mathrm{e}^{-br^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$r^2 - x^2 := t^2$ により変数 t を導入すれば

$$k(x) = 2\rho_0 \mathrm{e}^{-bx^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-bt^2}\mathrm{d}t = \rho_0 \sqrt{\frac{\pi}{b}} \mathrm{e}^{-bx^2} \tag{6}$$

逆に $k(x)$ を既知量として, $\rho(r)$ を求めてみます. まず 式 (2) により

$$-\pi r\rho(r) = \frac{\partial}{\partial r} \int_r^\infty \frac{xk(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - r^2}} := \frac{\partial}{\partial r} I(r)$$

積分 $I(r)$ は $k(x)$ の場合と同様にして計算できて, $I(r) = \frac{\rho_0 \pi}{2b} \mathrm{e}^{-br^2}$ となりますから, $\rho(r) = \rho_0 \mathrm{e}^{-br^2}$ となり元の分布に一致します.

次に式 (5) を使って計算します.

$$-\pi\rho(r) = \frac{\partial}{\partial r} \int_r^\infty \frac{rk(x)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - r^2}} := \frac{\partial}{\partial r} rJ(r)$$

$x^2 - r^2 := t^2$ によって変数変換すれば

$$\begin{aligned}
J(r) &= \int_r^\infty \frac{xk(x)\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 - r^2}} \\
&= k_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{br}^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-bt^2}\mathrm{d}t}{t^2 + r^2} \\
&= k_0 \mathrm{e}^{-br^2} \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{br^2}}{r} \mathrm{Erfc}(r\sqrt{b}) \\
&= k_0 \frac{\sqrt{\pi}}{r} \mathrm{Erfc}(r\sqrt{b})
\end{aligned}$$

(Erfc(x) については, 付録の公式 (13) を参照してください.)

よって

$$\begin{aligned}
-\pi\rho(r) &= \frac{\partial}{\partial r} k_0 \sqrt{\pi} \mathrm{Erfc}(r\sqrt{b}) \\
&= \rho_0 \frac{\pi}{\sqrt{b}} \frac{\partial}{\partial r} \int_{r\sqrt{b}}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= -\rho_0 \pi \mathrm{e}^{-br^2}
\end{aligned}$$

したがって $\rho(r) = \rho_0 \mathrm{e}^{-br^2}$ となり, 式 (5) からも同じ分布が得られます.

2.2 $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2+1}$ の場合

まず (1) 式より, $k(x)$ を求めます. 計算の要領は前節と同様で,

$$k(x) = 2\rho_0 \int_x^\infty \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{r^2+1}$$

$r^2 - x^2 := t^2$ により変数変換すれば

$$\begin{aligned} k(x) &= 2\rho_0 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2+1} \\ &= 2\rho_0 \frac{\pi}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\pi\rho_0}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \tag{7}$$

定積分の計算には, 付録の公式 (10) を使っています.
次に逆問題を解くために, 式 (2) を使って

$$\begin{aligned} -\pi r\rho(r) &= \frac{\partial}{\partial r} I(r) \\ I(r) &:= \pi\rho_0 \int_r^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-r^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$x^2 - r^2 := t^2$ により変数 t を導入すれば

$$\begin{aligned} I(r) &= \pi\rho_0 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+r^2+1}} \\ \frac{\partial}{\partial r} I(r) &= -\pi\rho_0 r \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2+1)^{3/2}} \\ &= -\pi\rho_0 \frac{r}{r^2+1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} \qquad (t := \xi\sqrt{r^2+1}) \\ &= -\pi\rho_0 \frac{r}{r^2+1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(3/2)} \qquad (\text{付録の公式 (12) 参照}) \\ &= -\pi\rho_0 \frac{r}{r^2+1} \end{aligned}$$

以上より $\rho(r) = \rho_0/(r^2+1)$ となり, 元の分布が確かめられます.
次に表式 (5) を用いてみます.

$$\begin{aligned} -\pi\rho(r) &= \frac{\partial}{\partial r} rJ(r) \\ J(r) &:= \pi\rho_0 \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-r^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \pi\rho_0 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)\sqrt{t^2+r^2+1}} \qquad (x^2-r^2 := t^2) \\ &= \pi\rho_0 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{r^2(\xi^2+1)\sqrt{\xi^2+1+1/r^2}} \qquad (t := r\xi) \end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
-\pi\rho(r) &= \frac{\partial}{\partial r} rJ(r) = \pi\rho_0 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi^2+1+1/r^2}} \\
-\frac{\rho(r)}{\rho_0} &= \frac{-1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi^2+1+1/r^2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi^2+1+1/r^2}} \\
&= \frac{-1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi^2+1+1/r^2}} + \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{r^3(\xi^2+1)(\xi^2+1+1/r^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{r^4}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)(\xi^2+1+1/r^2)^{3/2}}(1-r^2(\xi^2+1+1/r^2)) \\
&= -\frac{1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1+1/r^2)^{3/2}} \\
&= -r\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(r^2(\xi^2+1)+1)^{3/2}} \\
&= -r\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(r^2\xi^2+r^2+1)^{3/2}} \\
&= \frac{-r}{(r^2+1)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\frac{r^2\xi^2}{r^2+1})^{3/2}}
\end{aligned}
$$

ここで $y^2 := r^2\xi^2/(r^2+1)$ によって変数 y を定義すると

$$
\begin{aligned}
-\frac{\rho(r)}{\rho_0} &= \frac{-r}{(r^2+1)^{3/2}}\frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{r^2+1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{r^2+1}\frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(3/2)} = -\frac{1}{r^2+1}
\end{aligned}
$$

これより $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2+1}$ が得られ, やはり元の分布が確認できます.

3 解の公式の解析

前節の計算では 2 つの例題において, 二通りの解の公式は当然ながら同じ答を示しました.
このことは一般に成り立つことが示されます.
[証明] 解の公式はつぎのようなものでした.

$$
\rho(r) = \frac{-1}{\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{xk(x)}{\sqrt{x^2-r^2}}\mathrm{d}x \tag{2}
$$

$$
\rho(r) = \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{rk(x)}{x\sqrt{x^2-r^2}}\mathrm{d}x \tag{5}
$$

まず (2) 式を変形します.

$$
\rho(r) = \frac{-1}{\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{xk(x)}{\sqrt{x^2-r^2}}\mathrm{d}x := \frac{-1}{\pi r}\frac{\partial}{\partial r}I(r)
$$

$x^2 - r^2 := t^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
I(r) &= \int_0^\infty k(\sqrt{t^2+r^2})\mathrm{d}t \\
\rho(r) &= \frac{-1}{\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty k(\sqrt{t^2+r^2})\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{k'}{\sqrt{t^2+r^2}} \qquad \left(k' := \frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{k'}{\sqrt{\xi^2+1}} \qquad (t := \xi r)
\end{aligned} \tag{8}$$

つぎに式 (5) についても同様に変形します.

$$\rho(r) = \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{rk(x)}{x\sqrt{x^2-r^2}}\mathrm{d}x := \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}J(r)$$

$x^2 - r^2 := t^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
J(r) &= \int_0^\infty \frac{rk(\sqrt{t^2+r^2})\mathrm{d}t}{t^2+r^2} \\
\rho(r) &= \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{rk(\sqrt{t^2+r^2})\mathrm{d}t}{t^2+r^2} \\
&= \frac{-1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{k(r\sqrt{\xi^2+1})\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} \qquad (t := \xi r) \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k'\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}
\end{aligned} \tag{9}$$

これは (8) と一致しています. [証明終]

4 おわりに

積分演算は微分の逆演算です. 式 (2), (5) が示すように解答式は積分値を微分する形になっており, そしてこの 2 つの解答式を解析的な一つの数式で表した (8) では, 微分値を積分した形になっています. 和から引き算によって元の値を求め, また積から割算によって元の値を求めるように, 互いの逆演算を作用させて微分（または積分）値から元の値として求めたものが, 方程式の解答であると言えます.

星の分布の問題では $\rho(r) > 0$ ですから, 式 (8) より $k' < 0$ となる領域 ($k(x)$ の減少領域) が必要です. 具体例で仮定した星の分布は, いずれもガウス分布に似た形状のもので, 全域で減少関数となっています. しかし, 単なる数学の問題としては任意の関数に適用できて, 物理量としては解釈し難い結果もあり得ると考えられます.

参照させて頂いた論文は積分方程式に関する一連の論文の最初のもので, これらの論文で著者，世戸憲治氏の多才な計算力を学ぶことができます. ラプラス変換の利用などの定型的な解法以外に, 問題の数式に対応したあらゆる解析技法が必要とされそうです.

おかげさまで積分変換論や積分方程式論の入口に立つことができました. 世戸憲治氏にその議論とご指導に感謝します.

付録

文献 [2] から参照した計算式をまとめておきます. $(a, b, \beta, \nu > 0 : \beta\nu > 1)$

222 頁から

$$\int_0^\infty \frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(ax^2+b)^n}\mathrm{d}x = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2b^n}\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{11}$$

223 頁から

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^\nu+1)^\beta}\mathrm{d}x = \Gamma(\beta-1/\nu)\Gamma(1/\nu)/\nu\Gamma(\beta) \tag{12}$$

232 頁から

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}}{x^2+b^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{a^2b^2}\mathrm{Erfc}(ab) = \frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{a^2b^2}\int_{ab}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{13}$$

参考文献

[1] 世戸 憲治,「積分方程式における興味ある問題 (1)」，数学・物理通信 10 巻 7 号 (2020.9)

[2] 森口・宇田川・一松,『数学公式 I』　（岩波書店，1956)

分数方程式を解く

矢野　忠[*1]

Solving Fractional Equations

Tadashi Yano[*2]

1　はじめに

先日，結城浩さんの『数学ガール秘密のノート・複素数の広がり』 [1] を読んでいたら $z^5 = 1$ という方程式が解かれていた．

この方程式には $z = 1$ という解があることはすぐにわかるから，あと $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を解くことになる．これを上手に解いておられるのだが，この方程式を見て，これは高校生のときにその解法を学んだ覚えがある，相反方程式だと思った．それで高校 2 年生のころ使っていた学習参考書 [2] を探しに行った．その本の中に相反方程式の記述があるのを見つけたが，そこよりも×印を 2 つもつけた分数方程式があるのに気づいた．これは高校生のころに解けなかった問題に私のつけた印である．その問題の前後にも他に解けなかったらしい，2 つの分数方程式を見つけた．

この 2 つには×印はついていなかったが，なにか他のページを参照するようなメモを自分でつけていた．それでそれらを改めて解いてみようかという気になった．高校 2 年生のときに学校での数学の授業がわからなくなったので，1956 年にこの学習参考書を自習していたのだった．

印のついた方程式は無理方程式や連立方程式等のその他の方程式のところにはなかったので，この 3 つの分数方程式だけを解いてみた．

2　比較的やさしい問題

（問題 1）　つぎの分数方程式を解け．

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{2.1}$$

（解）

$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ とおく．方程式は定数 a と b とに対して対称であるから，解も定数 a と b に対して対称である．

通分すれば

$$\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} = A \tag{2.2}$$

*1 元愛媛大学

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

分母をはらって

$$
\begin{aligned}
2x-(a+b) &= A(x-a)(x-b) \quad (2.3)\\
A[x^2-(a+b)x+ab] &= 2x-(a+b)\\
Ax^2-[A(a+b)+2]x+Aab+(a+b) &= 0, \quad (Aab=a+b)\\
Ax^2-[A(a+b)+2]x+2(a+b) &= 0 \quad (2.4)\\
(Ax-2)[x-(a+b)] &= 0 \quad (2.5)\\
Ax-2=0 \text{ または } x-(a+b) &= 0\\
x=a+b \text{ または } x=\frac{2}{A} &= \frac{2ab}{a+b} \quad (2.6)
\end{aligned}
$$

これらの解はもとの分数方程式の分母を 0 とはしないから，この 2 つは分数方程式の解となる．

この分数方程式は高校 2 年生のときにも解けていたのではないかと思う．

3　解けなかった問題

つぎに昔には解けなかった問題を解いてみよう．

(問題 2) つぎの分数方程式を解け．

$$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0 \quad (3.1)$$

(解)

3 つの分数の分母はどれも因数分解できそうにない．ただいずれの分数式の分母も定数項は -8 である．この特徴を用いて解いてみよう．

いま

$$
\begin{aligned}
A &= x^2+11x=x(x+11) \quad (3.2)\\
B &= x^2+2x=x(x+2) \quad (3.3)\\
C &= x^2-13x=x(x-13) \quad (3.4)
\end{aligned}
$$

とおく．したがって，与えられた方程式は

$$\frac{1}{A-8}+\frac{1}{B-8}+\frac{1}{C-8}=0 \quad (3.5)$$

と表される．この方程式を通分すれば，

$$\frac{1}{(A-8)(B-8)(C-8)}[(B-8)(C-8)+(A-8)(C-8)+(A-8)(B-8)]=0 \quad (3.6)$$

分母をはらって，整理すれば

$$
\begin{aligned}
BC+CA+AB-8(B+C)-8(C+A)-8(A+B)+3\cdot 8^2 &= 0\\
BC+CA+AB-8\cdot 2(A+B+C)+3\cdot 8^2 &= 0 \quad (3.7)
\end{aligned}
$$

ここで $A+B+C$ と $AB+BC+CA$ とを計算しよう．

$$
\begin{aligned}
A+B+C &= x(x+11+x+2+x-13)=x\cdot 3x=3x^2 \quad (3.8)\\
AB+BC+CA &= x^2(x+11)(x+2)+x^2(x+2)(x-13)+x^2(x-13)(x+11)\\
&= x^2[x^2+13x+2\cdot 11+x^2-11x-2\cdot 13+x^2-2x-11\cdot 13]\\
&= x^2[3x^2+(13-11-2)x+2(11-13)-11\cdot 13]\\
&= x^2(3x^2-147) \quad (3.9)
\end{aligned}
$$

したがって，(3.7) は

$$\begin{aligned} x^2(3x^2-147)-2\cdot 8\cdot 3x^2+3\cdot 8^2&=0\\ 3x^4-3(49+2\cdot 8)x^2+3\cdot 8^2&=0\\ x^4-65x^2+64&=0\\ (x^2-1)(x^2-64)&=0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

となり，解は

$$x=\pm 1 \text{ または } x=\pm 8 \tag{3.11}$$

が求められる．

これらの解はいずれも，もとの分数方程式の分母を 0 とはしないから，解である．

(別解)

上に述べた解はあまりにも方程式の特徴をつかんだ解法であったかもしれない．しかし，この解は私には当然のように思われた解であって他に別解がありうるとは始め考えなかった．しかし，もっと泥臭い方法でも解けるのがよい．そう思って別解をあえて考えた．方程式の特徴にはじめから気がつかなくても，解く途中で方程式の特徴に気づくか，または，その特徴によって方程式が自然に簡単化されるのがよい．

$$A=x^2+11x-8 \tag{3.12}$$

$$B=x^2+2x-8 \tag{3.13}$$

$$C=x^2-13x-8 \tag{3.14}$$

とおく．そうすると解くべき分数方程式は

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=0 \tag{3.15}$$

となる．この分数方程式を通分すると

$$\frac{1}{ABC}(BC+CA+AB)=0 \tag{3.16}$$

となる．分母をはらうと

$$BC+CA+AB=0 \tag{3.17}$$

となる．

ここで A,B,C を詳しく見ると定数項が -8 と同じだから

$$A=P-8,\quad P=x^2+11x \tag{3.18}$$

$$B=Q-8,\quad Q=x^2+2x \tag{3.19}$$

$$C=R-8,\quad R=x^2-13x \tag{3.20}$$

A,B,C の中の x の係数 $11,2,-13$ は $11+2-13=0$ となるような性質をもっていることにも注意をしておきたいが，方程式を解いていく途中でこの性質がうまく働くかもしれないが，ここまでではその見通しはつかない．

それはともかくとして，上のおきかえをすれば，

$$AB=(P-8)(Q-8)=PQ-8(P+Q)+8^2 \tag{3.21}$$

$$BC=(Q-8)(R-8)=QR-8(Q+R)+8^2 \tag{3.22}$$

$$CA=(R-8)(P-8)=RP-8(R+P)+8^2 \tag{3.23}$$

と表せるので，

$$AB+BC+CA=(PQ+QR+RP)-8\cdot 2(P+Q+R)+3\cdot 8^2 \tag{3.24}$$

となるので，

$$AB + BC + CA = 0 \tag{3.17}$$

は

$$(PQ + QR + RP) - 8 \cdot 2(P + Q + R) + 3 \cdot 8^2 = 0 \tag{3.25}$$

であった．

実は別解で P, Q, R とおいたものは前の解の A, B, C であった．すなわち，(3.25) は (3.7) と同じである．だが，ここでは前の解法を知らないとして再度計算をする．まず

$$\begin{aligned} PQ + QR + RP &= (x^2 + 11x)(x^2 + 2x) + (x^2 + 2x)(x^2 - 13x) + (x^2 - 13x)(x^2 + 11x) \\ &= x^2(x + 11)(x + 2) + x^2(x + 2)(x - 13) + x^2(x - 13)(x + 11) \\ &= x^2[x^2 + 13x + 11 \cdot 2 + x^2 - 11x - 2 \cdot 13 + x^2 - 2x - 13 \cdot 11] \\ &= x^2[3x^2 + (13 - 11 - 2)x + 2(11 - 13) + (-13) \cdot 11] \\ &= x^2[3x^2 - (2 \cdot 2 + 11 \cdot 13)] \\ &= x^2[3x^2 - 3 \cdot 49] \\ &= 3x^2(x^2 - 49) \end{aligned} \tag{3.26}$$

であり，また

$$\begin{aligned} P + Q + R &= x^2 + 11x + x^2 + 2x + x^2 - 13x \\ &= 3x^2 + (11 + 2 - 13)x \\ &= 3x^2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.26) と (3.27) を (3.25) に代入すれば，

$$3x^2(x^2 - 49) - 8 \cdot 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 8^2 = 0 \tag{3.28}$$

$$x^2(x^2 - 49) - 2 \cdot 8x^2 + 8^2 = 0$$

$$x^4 - (49 + 16)x^2 + 8^2 = 0$$

$$x^4 - 65x^2 + 64 = 0 \tag{3.29}$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 64) = 0 \tag{3.30}$$

これから

$$x = \pm 1 \quad \text{または} \quad x = \pm 8 \tag{3.31}$$

が解となる．

4 もう一つの問題

これは×印がついていなかったが，たぶん解けなかった問題である．しかし，これは 2 番目の問題ほどは面倒ではなさそうである．

（問題３） 次の分数方程式を解け．

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 + 6x + 10} = \frac{(x - 2)^2}{(x + 3)^2} \tag{4.1}$$

（解）

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

であるから

$$A = x^2 - 4x \tag{4.2}$$
$$B = x^2 + 6x \tag{4.3}$$

とおけば，(4.1) は

$$\frac{A+6}{B+10} = \frac{A+4}{B+9} \tag{4.4}$$

と表される．

　分母をはらうと

$$
\begin{aligned}
(A+6)(B+9) &= (A+4)(B+10) && (4.5)\\
AB + 9A + 6B + 6\cdot 9 &= AB + 10A + 4B + 4\cdot 10\\
A - 2B - 14 &= 0 && (4.6)\\
(x^2 - 4x) - 2(x^2 + 6x) - 14 &= 0 && (4.7)\\
x^2 + 16x + 14 &= 0 && (4.8)\\
(x+8)^2 - 64 + 14 &= 0\\
(x+8)^2 &= 50\\
x + 8 &= \pm 5\sqrt{2} && (4.9)
\end{aligned}
$$

したがって，解は

$$x = -8 \pm 5\sqrt{2} \tag{4.10}$$

と求められる．これらの解はもとの分数方程式の分母を 0 とはしないから，分数方程式の解である．

　解いて見ると，これはそれほど面倒な分数方程式ではなかった．しかし，この問題 3 は別解も考えられる．

(別解 1)

　(4.1) をつぎのように書き換えることもできる．

$$\frac{(x-2)^2 + 2}{(x+3)^2 + 1} = \frac{(x-2)^2}{(x+3)^2} \tag{4.11}$$

このとき

$$(x-2)^2 = A \tag{4.12}$$
$$(x+3)^2 = B \tag{4.13}$$

とおく．こうすれば解くべき分数方程式 (4.1) は

$$\frac{A+2}{B+1} = \frac{A}{B} \tag{4.14}$$

となる．分母をはらうと

$$
\begin{aligned}
B(A+2) &= A(B+1) && (4.15)\\
AB + 2B &= AB + A\\
A &= 2B && (4.16)
\end{aligned}
$$

これをもとの x の式にもどすと

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 &= 2(x+3)^2 && (4.17)\\
x-2 &= \pm\sqrt{2}(x+3) && (4.18)\\
(1\mp\sqrt{2})x &= 2\pm 3\sqrt{2}, \text{（複号同順）}\\
x &= \frac{2\pm 3\sqrt{2}}{1\mp\sqrt{2}}, \text{（複号同順）}\\
x &= -8\mp 5\sqrt{2} && (4.19)
\end{aligned}
$$

途中の分母の有理化の計算を省略したから，それほど複雑には見えないが，けっこう分母の有理化の計算は複雑である．これを回避する方法を別解 2 とする．

（別解 2）

(4.17) から出発する．この式を展開すれば，

$$
\begin{aligned}
2(x^2+6x+9) &= x^2-4x+4 && (4.20)\\
x^2+16x+14 &= 0 && (4.21)\\
(x+8)^2 &= 50\\
x+8 &= \pm 5\sqrt{2}\\
x &= -8\pm 5\sqrt{2} && (4.22)
\end{aligned}
$$

5　おわりに

高校生のころに私が 2 番目の問題の分数方程式が解けなかったのはいまではよく理解できる．いまなら，少し老練になっているので，何か別の文字でおきかえることなどなんでもないが，高校生のころにはなかなかそんな便法は思いつかなかったであろう．それでまともに計算しようとして煩雑な数式になり途方にくれたのかもしれない．

分数方程式を解くきっかけとなった相反方程式だが，いまのところ解く気が起こらない．同じ方程式を解くのだから解き方が全く違うということはないのだが，解き方がまったく同じでもなさそうなので，その解法を比較してみたいと思っている．そういう機会がくればいいのだが，どうだろうか．

(2020. 12. 19)

参考文献

[1] 結城浩，『数学ガール秘密のノート・複素数の広がり』（SB クリエィティブ，2020）158-180
[2] 藤森良夫，『解析の基礎』前編（考え方研究社，1953）148-149

三角形の面積 1

矢野　忠[*1]

Area of Triangles 1

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

ピタゴラスの定理の三角形の面積の等積移動をつかった証明を中学生に説明しようとしたが，この等積移動のことをあまりよく理解してもらえなかった．

要するに，三角形の等積移動は底辺と高さが等しい普通の三角形と鈍角の三角形の面積が，見かけの形が変わるにもかかわらず，等しいということをどう理解してもらうかの問題である．

ところが，こんなことは小学校ですでに学んだことがらであろうが，中学校とか高校の数学ではテクストにあまりはっきりとは書かれていないようである．

あらためて，このことを考えてみようというのが，このエッセイの目的である．そんな小学生のようなというお叱りはあろうと思うが，しばしお許しください．

2　長方形の面積

三角形の面積を求める基礎になる知識として長方形の面積の求め方は知っているとする．

すなわち，長方形の横の長さが a，縦の長さを b とするとき，この長方形の面積 S は

$$S = ab \tag{2.1}$$

で与えられる．このことも面積を基本的に考えるときには問題となる可能性があるが，これは証明を要しない前提としよう．

3　三角形の面積の求め方

こんなことはすでに皆さんがご存知のことである．

すなわち，三角形の底辺の長さ a と高さ h がわかれば，その三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{3.1}$$

である．この理由を考えてみたい [1] [2][*3]．

鋭角（直角）三角形の面積はほとんど問題がないだろうが，これについても改めて考え直してみる．しかし重点は鈍角三角形の面積も鋭角三角形と同じ $S = \frac{1}{2}ah$ の形に表されることを調べることである．

まず，鋭角（直角）三角形から考えてみよう．

---

*1 元愛媛大学工学部

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

*3 この二つの書籍ともに図が描いてあるだけで，具体的な文章による説明はされていない．これは以下に述べることは，自明のことと考えておられたのであろう．

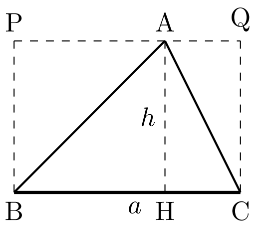

図 1　鋭角（直角）三角形の面積

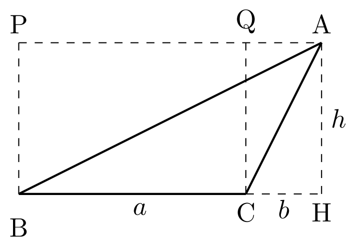

図 2　鈍角三角形の面積

図 1 で三角形 ABC の面積は長方形 PBCQ の 1/2 になっているから，三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{3.2}$$

であることがわかる．これは図 1 を見れば，一目瞭然であろう．

つぎに，図 2 の鈍角三角形の面積を考えてみよう．図 2 を見てみると鈍角三角形 ABC の面積 S に三角形 ACH の面積 S' を足した直角三角形 ABH の面積は長方形の面積の 1/2 となっている．

すなわち，

$$S + S' = \frac{1}{2}(a+b)h \tag{3.3}$$

である．求める鈍角三角形 ABC の面積 S を求めればよい．ところで直角三角形 ACH の面積 $S' = \frac{1}{2}bh$ であるから

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{3.4}$$

となる．

これでこの鈍角三角形の面積も鋭角三角形のときとまったく同じ式で表されることがわかった．

4　おわりに

実はピタゴラスの定理の応用問題のエッセイを書くことからはじめて，ピタゴラスの定理の三角形の面積の等積移動をつかった証明を説明しようとして，この三角形の面積の等積移動について不審に思うようになった．

それで，鈍角三角形の面積が底辺と高さの積の 1/2 で表されることの確証までさかのぼってしまった．これまでまったく不思議議とは思わなかったが，他にも異なった説明があるのかどうかは調べていない．

もっとも三角形の面積を求める公式としてヘロンの定理というのは有名である．今回はそこまでは述べることができなかった．いつかそれらについても述べてみたいと思っている．

(2020.4.18)

参考文献

[1] 田島一郎，中村幸四郎，中村勝彦，高等学校 『数学 I』　幾何編 （好学社，1957）49
[2] 田島一郎，『幾何の基礎』（旺文社，1956）148

編集後記

2021 年 3 月となりました．早いところでは桜の開花宣言が東京都のようになされたところもありますが，日本全体でみれば，桜の開花はまだまだこれからでしょう．しかし，私の家では知人から頂いた桜の花をすでに食卓に飾っており，満開です．

こんなことを書くと昔からのことわざを知らないのかとお叱りを受けそうですが，ご心配なく．頂いた桜の木は枝を切ってもいい種類の桜であることを昨年いただいたときに，この知人に確かめてあります．

昔から「桜切るバカ，梅切らぬバカ」とことわざでは申しており，桜は枝を切るとそこから木が腐るので切ってはいけないとの言い伝えとして，このことわざができたのだと思います．しかし，世の中は進んで枝を切っても枯れない種類の桜が新種としてできているのでしょう．

11 巻 1 号は通巻 100 号への到達には欠かせない 1 号であります．また今月中には 11 巻 2 号も発行予定です．世戸憲治さんの新しいシリーズの論文がはじまりました．腕と頭に自信のある方は読んでみてください．

社会ではコロナ禍の終息はまだまだだと存じますが，前を向いて生きたいものです．

（矢野　忠）