

# 数学・物理通信

11 卷 3 号      2021 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2021 年 6 月 9 日

# 目次 (Contents)

1. 錘付き弦振動の問題 (3)	世戸 憲治	2
2. 測量と誤差	秋葉敏男	9
3. 自然数のべき和の関係	植田洋平	19
4. 五捨五入	矢野 忠	22
5. 編集後記	矢野 忠	24
1. Oscillation Problem of String with Weight (3)	Kenji SETO	2
2. Error in Surveying	Tosio AKIBA	9
3. Some Relations for Sum of Powers	Yohei UEDA	19
4. Round off	Tadashi YANO	22
5. Editorial Comments	Tadashi YANO	24

# 錘付き弦振動の問題 (3)

世戸 憲治\*

## Oscillation Problem of String with Weight (3)

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

前回の「錘付き弦振動の問題 (2)」(「数学・物理通信」11 巻 2 号) では、弦に対し左右対称の位置に 2 個の錘を付けたときの振動を解析した。今回は、錘の個数を増やし、有限任意個数の錘を等間隔に付けたときの振動を解析する。

### 2 方程式の導入とその解法

#### 2.1 方程式の導入

線密度  $\rho$  の弦を想定し、この弦に張力  $T$  を与えておく。これに質量  $m$  の錘を等間隔  $\ell$  で、有限任意個数取り付けたときの振動を考察する。ただし、錘は大きさを持たない点として扱うことにする。弦の左端を原点  $O$  とし、これに沿って  $x$  軸をとったとき、錘は、位置  $x = n\ell$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ) に存在するものとする。この錘番号はゼロから始まるので、錘の個数は  $N + 1$  である。ただし、 $x = 0$  に存在する錘は、 $x$  軸に垂直に立てた棒に沿って摩擦無しに、自由に動き得るようにしておく。この意味で、原点は錘付き自由端である。また、弦全体の長さは、 $(N + 1)\ell$  とするが、この  $x = (N + 1)\ell$  の端は固定端とする。ここで、錘と弦を含めた密度関数  $\rho(x)$  を

$$\rho(x) = m \sum_{n=0}^N \delta(x - n\ell) + \rho \quad (2.1)$$

で定義する。ここに、 $\delta$  は Dirac のデルタ関数である。座標  $x$ , 時刻  $t$ , における弦の長さに対し垂直方向の変位を  $U(x, t)$  としたとき、その波動方程式は、

$$\rho(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

与えられる。ここで、 $x = n\ell$  に存在する錘のすぐ右側の座標を  $n\ell + 0$ , また、すぐ左側の座標を  $n\ell - 0$  とし、この式を  $n\ell - 0$  から、 $n\ell + 0$  まで積分すると、

$$m \frac{\partial^2 U(n\ell, t)}{\partial t^2} = T \left[ \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=n\ell+0} - (1 - \delta_{n,0}) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=n\ell-0} \right] \quad (2.3)$$

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる。これが  $n$  番目の錘の方程式である。この式右辺の大括弧中の 2 項目に  $1 - \delta_{n,0}$  を付けたのは、0 番目の錘にはそれ以上左には弦が存在しないため、この項がなくなることを意味する。

錘がない純粋に弦部分の方程式は、

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{T/\rho} \quad (2.4)$$

である。ここに、 $c$  は波動伝播速度で、この第 2 式で定義する。

ここで、以下で扱う数式簡素化のため、 $\ell$  を長さの単位、 $\ell/c$  を時間の単位として、変数  $x, t$ , および、変位  $U$  を無次元化し、

$$x/\ell \rightarrow x, \quad ct/\ell \rightarrow t, \quad U/\ell \rightarrow U \quad (2.5)$$

と、改めて、置き直すことにする。この変換で、方程式 (2.3), (2.4) は

$$\mu \frac{\partial^2 U(n,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=n+0} - (1 - \delta_{n,0}) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=n-0} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

となる。ここに、 $\mu$  は錘の弦に対する質量比で、

$$\mu = m/(\rho \ell) \quad (2.8)$$

と定義する。

## 2.2 方程式の解法

この方程式を解くために、変位  $U(x,t)$  は変数分離形であるとし、 $x$  依存部分  $X(x)$  と時間依存部分に分離できるものとする。ただし、時間部分は、適当な角振動数  $k$  を用いた三角関数で書けるものとし、

$$U(x,t) = X(x) [\sin(kt), \quad \text{or} \quad \cos(kt)] \quad (2.9)$$

と置く。これで、方程式 (2.6), (2.7) は、それぞれ、

$$-\mu k^2 X(n) = \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=n+0} - (1 - \delta_{n,0}) \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=n-0} \quad (2.10)$$

$$-k^2 X(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \quad (2.11)$$

となる。この (2.11) 式から  $X$  は三角関数となるので、区間  $(n, n+1)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ) に対し、

$$X_n(x) = A_n \sin(k(x-n)) + B_n \cos(k(x-n)) \quad (2.12)$$

と置くことにする\*1。この式から、 $k$  は無次元化した波数でもある。この  $X_n$  が解となるためには、0 番を除く錘の位置  $x = n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) で連続でなければならないので、 $X_{n-1}(n-0) = X_n(n+0)$ , すなわち、

$$A_{n-1} \sin(k) + B_{n-1} \cos(k) = B_n \quad (2.13)$$

\*1 関数  $X$  を 1 つの区間内で表すときは、ここで用いたように添え字  $n$  を付けて  $X_n$  のように表すが、 $x$  の全範囲で表すときは添え字無しで書くことにする。

となり, また, (2.12) 式を鍾の方程式 (2.10) に代入すると,

$$-\mu k B_n = A_n - (1 - \delta_{n,0})[\cos(k)A_{n-1} - \sin(k)B_{n-1}] \quad (2.14)$$

となる. これら 2 式をまとめて書くと,  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対する係数  $A_n, B_n$  の漸化式

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

を得る. ここに,  $\Lambda$  は  $2 \times 2$  行列で,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos(k) - \mu k \sin(k) & -[\sin(k) + \mu k \cos(k)] \\ \sin(k) & \cos(k) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

と定義する. なお, この行列  $\Lambda$  について,  $\det(\Lambda) = 1$  である. この漸化式をくり返すと,

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \Lambda^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

と  $A_n, B_n$  は  $A_0, B_0$  で表される. また, (2.14) 式で  $n = 0$  のときは,  $-\mu k B_0 = A_0$  となるが, ここでは,  $B_0 = 1$  と選ぶことにし,

$$A_0 = -\mu k, \quad B_0 = 1 \quad (2.18)$$

としておく. 関数  $X(x)$  の規格化については次節で述べる.

### 2.3 固有値, 固有関数とその規格化

弦の右端  $x = N + 1$  は固定端であるとして, 境界条件

$$X_N(N + 1) = A_N \sin(k) + B_N \cos(k) = 0 \quad (2.19)$$

を要請する. この式は,  $A_N, B_N$  に対し (2.17) 式, および, (2.18) 式を用いると,

$$(\sin(k) \quad \cos(k)) \Lambda^N \begin{pmatrix} -\mu k \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

となる. これが固有値方程式で, この式から, 波数  $k$  の値が固有値として決まる. これは飛び飛びに決まるであろう. これを正の小さい方から  $k_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) とする. また, このときの関数  $X$  を  $X_n(x, k_i)$  と  $k_i$  依存性を明示して固有関数とする.

特に, この式で  $N = 0$  とすると,

$$k \tan(k) = \frac{1}{\mu} \quad (2.21)$$

となって, これは前々回の弦に鍾を 1 個付けたときの固有値方程式を再現する.

つぎに, 固有関数の規格化について議論するが, その準備として, (2.5) 式による  $x, t$  の無次元化したがつて, (2.1) 式で定義した密度関数の無次元化を

$$\rho(x)/\rho = \mu \sum_{n=0}^N \delta(x - n) + 1 \rightarrow \rho(x) \quad (2.22)$$

と、改めて定義し直しておく。また、固有値とは限らない2個の  $k$  を考え、これを  $k, k'$  とし、このときの関数  $X$  を  $X(x, k), X(x, k')$  とする。ここで、無次元化した密度関数  $\rho(x)$  を重みとした積分

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k) X(x, k') dx \quad (2.23)$$

を考える。この積分は  $\rho(x)$  に含まれるデルタ関数の部分と残りの部分に分けると、

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k) X(x, k') dx = \mu \sum_{n=0}^N X_n(n, k) X_n(n, k') + \sum_{n=0}^N \int_{n+0}^{n+1-0} X_n(x, k) X_n(x, k') dx \quad (2.24)$$

となる。この式の右辺の積分に関しては、 $X_n(x, k), X_n(x, k')$  が (2.11) 式を満たしているので、

$$-k^2 X_n(x, k) = \frac{d^2 X_n(x, k)}{dx^2}, \quad -k'^2 X_n(x, k') = \frac{d^2 X_n(x, k')}{dx^2} \quad (2.25)$$

が成り立つ。この第1式に  $X_n(x, k')$  を掛け、第2式に  $X_n(x, k)$  を掛けて、辺々を引き算すると、

$$-(k^2 - k'^2) X_n(x, k) X_n(x, k') = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dX_n(x, k)}{dx} X_n(x, k') - \frac{dX_n(x, k')}{dx} X_n(x, k) \right] \quad (2.26)$$

となり、これを  $n+0$  から、 $n+1-0$  まで積分すると、

$$\int_{n+0}^{n+1-0} X_n(x, k) X_n(x, k') dx = -\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[ \frac{dX_n(x, k)}{dx} X_n(x, k') - \frac{dX_n(x, k')}{dx} X_n(x, k) \right]_{n+0}^{n+1-0} \quad (2.27)$$

となる。これから、(2.24) 式は

$$\begin{aligned} \int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k) X(x, k') dx &= \mu \sum_{n=0}^N X_n(n, k) X_n(n, k') \\ &\quad - \frac{1}{k^2 - k'^2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{dX_n(x, k)}{dx} X_n(x, k') - \frac{dX_n(x, k')}{dx} X_n(x, k) \right]_{n+0}^{n+1-0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

と積分される。ここで、関数  $X(x, k)$  は錘の位置でも連続であること、および、その微係数は不連続となるが、その不連続性を表す (2.10) 式を用いて、右辺2項目の和を求めていくと、途中での値はすべて右辺1項目と相殺され、残るのは  $n = N$  のときの  $x = N + 1$  からの寄与のみとなる。したがってこの積分式は、

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k) X(x, k') dx = -\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[ \frac{dX_N(x, k)}{dx} X_N(x, k') - \frac{dX_N(x, k')}{dx} X_N(x, k) \right]_{x=N+1} \quad (2.29)$$

となる。ここで、 $k, k'$  が固有値  $k_i, k_j$  となるときは、境界条件 (2.19) 式が満たされるので、この式の大括弧の部分はゼロとなる。したがって、もし、 $k_i \neq k_j$  のときは、異なる固有値に属する固有関数同士の直交性

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k_i) X(x, k_j) dx = 0, \quad k_i \neq k_j \quad (2.30)$$

が導かれる。同じ固有値になるときは、先に、 $k' = k_i$  とおき、その後、 $k \rightarrow k_i$  の極限をとる。結果は、

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x) X(x, k_i) X(x, k_j) dx = N_i^2 \delta_{i,j} \quad (2.31)$$

となる。ここに、規格化定数  $N_i^2$  は

$$N_i^2 = \frac{1}{2k_i} \left[ \frac{dX_N(x, k_i)}{dx} \right]_{x=N+1} \left[ \frac{\partial X_N(N+1, k)}{\partial k} \right]_{k=k_i} \quad (2.32)$$

と定義される。これから、 $X(x, k_i)/N_i$  が規格化された固有関数となる。

## 2.4 初期値問題

変位  $U(x, t)$  の一般解は、固有関数  $X(x, k_i)$  と時間部分の  $\sin(k_i t)$  or  $\cos(k_i t)$  の積の重ね合わせとなる。ここでは、0 番目の錘のみに衝撃を与えたときの初期値問題を解いてみる。衝撃を与えることで、錘には力積が発生し、この力積は運動量の変化となって現われる。ここでは初期条件を、(2.22) 式から、

$$U(x, 0) = 0, \quad \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \mu v \delta(x) \quad (2.33)$$

とおく。ここに、 $v$  は 0 番目の錘の初速度であるが、これは波動伝播速度  $c$  を単位として無次元化したものである。ここで、変位  $U(x, t)$  を、定数  $C_i$  を用いて、

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x, k_i) \sin(k_i t) \quad (2.34)$$

と展開しておく。これで、初期条件の第 1 式はすでに満たしているので、第 2 式を適用すると、

$$\rho(x) \sum_{i=1}^{\infty} C_i k_i X(x, k_i) = \mu v \delta(x) \quad (2.35)$$

となり、この両辺に  $X(x, k_j)$  を掛けてから積分すると、固有関数の直交式 (2.31) が使え、係数  $C_i$  が

$$C_i = \frac{\mu v X(0, k_i)}{k_i N_i^2} = \frac{\mu v}{k_i N_i^2}, \quad (X(0, k_i) = B_0 = 1) \quad (2.36)$$

と決まる。これを (2.34) 式に戻して、変位  $U(x, t)$  が

$$U(x, t) = \mu v \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i N_i^2} X(x, k_i) \sin(k_i t) \quad (2.37)$$

と求められる。逆に、この式を時間で微分し、 $x = 0$ ,  $t = 0$  とおくと 0 番の錘の初速度  $v$  になるはずであるが、これは

$$\mu \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} = 1 \quad (2.38)$$

という恒等式になる。この式は数値計算をしたときの精度のチェックに使える。

## 3 数値計算例

今回は、変数  $x, t$  を無次元化したことで、数値計算に必要なパラメータは 2 個しかない。一つは、錘の個数と関係する  $N$  で、もう一つは、錘の弦に対する質量比  $\mu$  である。ここでは、 $N = 5$ ,  $\mu = 1$  とした場合を扱ってみる。錘は 0 番から始まるのでその個数は 6 個で、 $x$  の範囲は  $(0, 6)$  となる。この設定で固有値方程式 (2.20) を解き、200 個の固有値  $k_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, 200$ ) を求めてみたが、その初めの 10 個は、

$$k_i = 0.1775, \quad 0.5293, \quad 0.8698, \quad 1.1870, \quad 1.4595, \quad 1.6512, \quad 3.1598, \quad 3.2893, \quad 3.4880, \quad 3.6997 \quad (3.1)$$

となる。これら数値で 6 番目から 7 番目にいくと急激に、倍近くに、大きくなっている。このように、値が大きくなるのは、以下、12 番目と 13 番目、18 番目と 19 番目、24 番目と 25 番目、以下同様と続き、およそ、6 番目ごとに起こる現象でかなり際立った特徴と言える。これには何かの理由があるのであろう。

これら固有値に対する規格化された固有関数  $X(x, k_i)/N_i$  を、初めの 5 個分だけを、図 1 のグラフに示す。

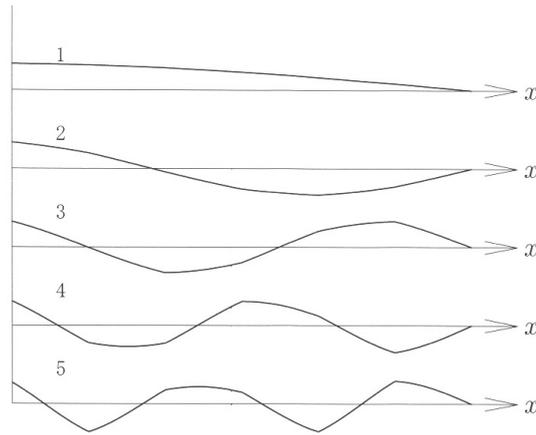


図 1 固有関数

図中の数字はモード番号である。これら固有関数はモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ。また、このモード番号が大きくなるにつれ、錘の位置で、折れ曲がりが発生し、その微係数が不連続になっているのが分かる。

つぎに、(2.37) 式で求めた変位  $U(x, t)$  を図 2, 図 3 に示す。これらグラフは、横方向に  $x$  軸、斜め上方向に時間  $t$ 、上方向に変位  $U$  をとって 3 次元的に表したものである。このうち、図 2 は時間  $t$  が  $0 \leq t \leq 10$  までのもの、図 3 は、 $10 \leq t \leq 20$  のものである。ただし、0 番の錘の初速度を  $v = 1$  とし、変位  $U$  に関しては任意スケールで表した。

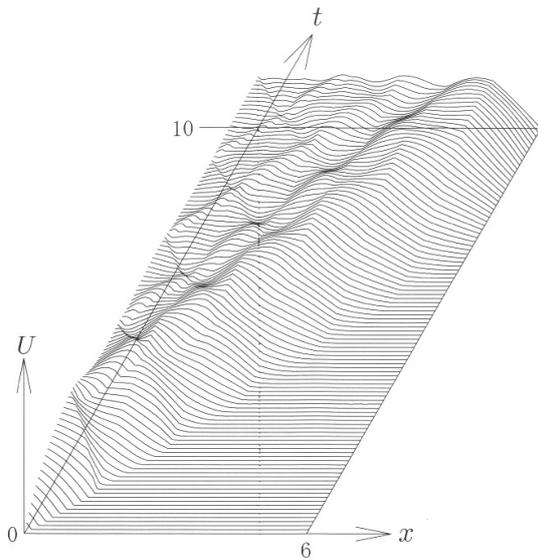


図 2 変位  $U(x, t)$ ,  $0 \leq t \leq 10$

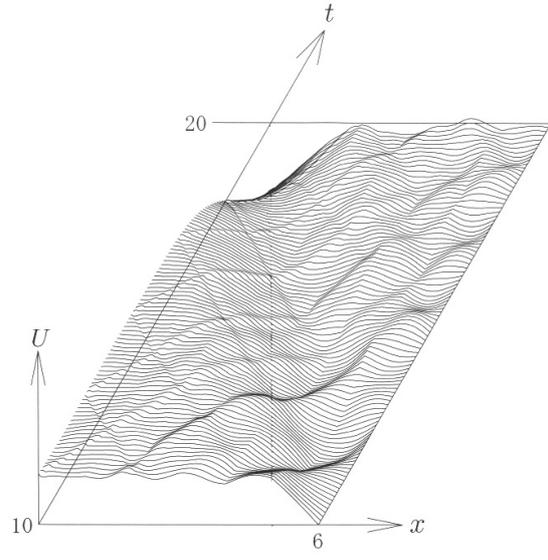


図 3 変位  $U(x, t)$ ,  $10 \leq t \leq 20$

図 2 からは、0 番の錘に与えられた衝撃が順次右方向に伝播していき、 $t = 6$  付近で最右端に達し、そこから反射していくのが分かる。また、図 3 からは反射した後の波動の様子が見える。

数値計算の精度のチェックとして出した (2.38) 式であるが、前述のように、ここでは 200 個の固有値を求めた。その結果、左辺の和は、 $0.993778 \dots$  となって極めて 1 に近い値となり、数値計算として、満足できるものである。

## 4 おわりに

数値計算によって固有値を求めた (3.1) 式のところで述べたことであるが、この場合の固有値は、6 番目毎に大きくなりその後あまり大きくはならず、また、6 番目がくると急激に大きくなるということをくり返す。例によって、この原稿を中西襄先生に見てもらったところ、その理由が判明した。先生が言われるには、完全な証明ではないが、と断ったうえで、固有値方程式 (2.20) を  $\sin^{N+1}(k)$  で割ると、 $k$  と  $\cot k$  だけで書かれた方程式となる。このとき、この  $\cot k$  の次数は  $N+1$  次となり、しかも、 $\cot(k)$  は区間  $(n\pi, (n+1)\pi)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 毎に、すべての実数値をとるので、この各区間ごとに  $N+1$  個、すなわち、錘の個数と同じ個数の固有値が出るということであった。そう思ってこの固有値の数値を眺めると、初めは  $\pi$  より小さい値が 6 個並び、つぎは  $\pi$  より大きく  $2\pi$  より小さい値が 6 個並び、というぐあいに続いていく。錘の個数を変えて試してみたが、この区間  $(n\pi, (n+1)\pi)$  毎に錘の個数だけの固有値が存在することが確かめられた。

今回のものを書いているうちに、量子力学の周期ポテンシャル問題を思いだしてしまった。私は、これまでに、「量子力学における周期ポテンシャル問題」というタイトルで、「数学・物理通信」に 5 編 (6 巻 3 号, 6 巻 4 号, 6 巻 9 号, 7 巻 1 号, 7 巻 3 号) のものを載せていただいた。これらはいずれも Floquet の定理を用いて、量子力学におけるエネルギーバンドを求めるものであるが、この計算は今回のものとよく似ている。もし、弦の長さを無限大にし、錘の個数もそれに見合うように無限個にしてしまうと、量子力学の周期ポテンシャル問題で、ポテンシャルをデルタ関数で表したときの問題とほとんど同じものになってしまう。古典力学の問題が量子力学のテクニックと結び付くなどは夢にも思わなかったが、それが現実のものとなりそうである。次回はこのことについて考察することにしよう。

### [ 謝辞 ]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、「おわりに」のところで書いたように大変貴重なご助言をいただきました。先生に心から感謝いたします。

# 測量と誤差

秋葉 敏男

## Error in Surveying

Toshio AKIBA<sup>1</sup>

### 1 はじめに

古代エジプトにおけるナイル川の洪水後に耕地の境界復元確定のために編み出された測定技法が、測量術の起源と言われています。これはいわば地表面上の図形を確定する作業であり、幾何学の起源にも連なるわけです。

測量作業の基本となるのは、点の位置を決定することです。そして点を結べば線が生まれ、線で囲まれた部分が所有地（農地・宅地・領地など）として確定され、この作業を広範囲に実施して地形図も作成されます。

ところで、点の位置の決定には測距・測角・測高作業を要しますが、いずれも誤差を伴います。測量技法は測定に伴う誤差を極力小さくし、その誤差を観測データに合理的に配布して、いかにして精度の良い成果を得るかを追及するものです。

以下において、測定に伴う誤差論を中心に測量論の一端を考察します。

### 2 観測値の確からしさ

ある量の観測値を  $M$ 、その真の値（真値）を  $M_0$  とするとき、両者は一般には一致せず

$$M_0 - M := e \quad (1)$$

だけの差異 (difference) が生じます。この差異  $e$  として次のようなものが考えられます。

#### (1) 過誤 (mistake)

数値が極端に過大 (小) であることなどから判明する差異。

野帳への記載ミス・簡単な計算ミスなど

#### (2) 系統的差異 (systematic difference)

測定機器に固有なものや気象条件によるものなどで、あらかじめ予測できる差異。

(2a) 光波測距儀の距離に比例する器械定数や気象補正定数, (2b) 鋼巻尺の温度・張力・たるみに起因する特性値, (2c) 鉛直角を使った高低計算における気差や球差など<sup>2</sup>

#### (3) 偶然誤差 (accidental error)

原因不明で予測できない差異

以後の議論では偶然誤差のみを考察します。

一般に測量作業での観測は同一条件下で複数回行われるものです。たとえば、二回の観測で測定値  $\{M_1, M_2\}$  が得られたとすれば、これらの値に優劣は無く同程度の確からしさと真値  $M_0$  の近似値 ( $M_a$ ) として、 $M_0$  の近傍 ( $M_0 - \epsilon, M_0 + \epsilon$ ) に含まれます。そこで、 $M_0$  と観測値  $\{M_i\}$  とを関連づける関数を  $f(M_1, M_2)$  とすると、二回の観測の測定値が  $\{M_2, M_1\}$  であることも同様に確からしいですから、 $M_0 = f(M_2, M_1)$  と表現することもできます。つまり  $f(M_1, M_2)$  は対称関数と考えるべきです。

一方、各観測値  $M_i$  の誤差を  $e_i$  ( $|e_i| \leq \epsilon$ ) とすれば  $M_0 = M_i + e_i$  ですから、 $M_0 = (M_1 + M_2)/2 + (e_1 + e_2)/2$  と表され、 $|e_1 + e_2|/2 \leq \max\{|e_1|, |e_2|\} \leq \epsilon$  と評価されます。つまり、相加平均値  $M_m := (M_1 + M_2)/2$  も上

<sup>1</sup>tawarp@mug.biglobe.ne.jp

<sup>2</sup>気差は大気中の光の屈折に起因し、球差は地表面の湾曲に由来します

記の近傍に含まれますから、同等の確からしさをもつ近似値の一つということになります。ちなみに、 $M_m$  は  $M_1, M_2$  の対称関数です。そして、ここまでの議論は、 $n$  回観測の場合に一般化できて相加平均値は次式で表されます。 ( $n \geq 2$ )

$$M_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \quad (2)$$

ところで、相加平均値  $M_m$  の確からしさ (真値への近似性) が他の観測値と同程度では、観測を繰り返す意味はありません。<sup>3</sup>

そこで、近似値  $M_a$  の確からしさをより詳しく知るために各観測値  $M_i$  との差として、残差  $v_i$  を定義します。<sup>4</sup>

$$M_a - M_i := v_i \quad (3)$$

$M_a$  として、観測値の中の最頻値や中央値を採れば、残差により観測値のばらつきを概観できます。しかし、 $M_a = M_m$  の場合は次の命題 1, 命題 2 に示す特性が明らかになります。

[命題 1] 相加平均値の残差の和は零である

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad (4)$$

命題 1 は、定義式 (2) よりほぼ自明です。 ( $\sum_{i=1}^n v_i = nM_m - \sum_{i=1}^n M_i = 0$ )

(4) 式は、相加平均値  $M_m$  より大なる観測値と小なる観測値の分布に、大きな偏りが無いことを反映しているとみられます。この傾向は 3 節で考察する誤差発生確率の経験法則と合致します。ちなみに対称関数として  $f(M_1^2 + M_2^2)$  や  $g(M_1 \times M_2)$  のようなものを仮定した場合は、(4) 式は成り立ちません。

[命題 2] 相加平均値の残差の二乗和は、近似値の残差の二乗和の中で最小である

[証明] 相加平均値  $M_m$  とは異なる近似値  $y$  を仮定し、対応する残差を  $\{u_i\}$  とすれば、観測値を  $\{M_i\}$  として

$$y - M_i = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$M_m - M_i = v_i \quad (6)$$

(5) より

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n M_i^2 - 2y \sum_{i=1}^n M_i + ny^2 \quad (7)$$

(6) より  $M_i^2 = (M_m - v_i)^2$  ですから、(4) を考慮して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + nM_m^2 \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n M_i \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(7), (8) から  $\sum_{i=1}^n M_i^2$  を消去すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n M_i \right)^2 - 2y \sum_{i=1}^n M_i + ny^2 \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n M_i - ny \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n v_i^2 \end{aligned}$$

つまり相加平均値に対応する残差の二乗和は最小です。 [証明終]

<sup>3</sup> $M_m$  の確からしさは 4 節の式 (16) で明らかになります

<sup>4</sup>残差 (residual) は近似値を求めるための、観測値への補正値 (correction) とも解釈できます

### 3 誤差の発生確率関数

観測に伴う偶然誤差については、次のような経験法則が知られています。

観測データのばらつきから真値に近いものを推定して、この推定値 (最頻値や平均値など) との残差を誤差とみなして整理してみると

- (1) 絶対値の等しい正誤差と負誤差とは、ほぼ均等に発生する。
- (2) 誤差の絶対値には上限がある。
- (3) 各誤差の発生頻度は一様ではなく、絶対値が増大するにつれて頻度は減少する。

これより誤差  $\Delta$  の発生頻度 (確率) は誤差の関数と考えられますから、これを  $\phi(\Delta)$  とすれば上記の経験法則により

$$\phi(-\Delta) \approx \phi(+\Delta)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \phi(\pm\Delta) = 0$$

次に未知量  $x$  を同一条件下で独立に  $n$  回観測した場合に、 $i$  回目の観測値を  $M_i$  とし 対応する誤差を  $e_i$  とすれば

$$M_i = x - e_i \quad (9)$$

そして誤差  $e_i$  の発生確率は  $\phi(e_i)$  ですから、 $n$  回観測という複合事象で誤差の集合  $\{e_i\}$  が発生する確率  $p(x)$  は

$$p(x) = \prod_{i=1}^n \phi(e_i) \quad (10)$$

この複合事象の確率  $p(x)$  を最大にするような未知量  $x$  は、真値に最も近い近似値と考えられますから「最確値」と名づけます。

$p(x)$  が最大であることと  $\log p(x)$  が最大であることは同値ですから、最確値となる必要条件是  $\partial \log p(x) / \partial x = 0$  となります。 (10) を使って変形すると

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log \phi(e_i)}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial x} = 0$$

(9) より  $\partial e_i / \partial x = 1$  ですから

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log \phi(e_i)}{\partial e_i} = 0 \quad (11)$$

ここで  $\{v_i\}$  を相加平均値に対応する残差として、(11) の左辺の各項に  $v_i/v_i = 1$  を掛けると

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log \phi(e_i)}{v_i \partial e_i} v_i = 0 \quad (12)$$

一方 (4) に示すように残差の和は 0 ですから、(4) と (12) を独立変数  $\{v_i\}$  の連立方程式とみれば (12) の左辺の各項の係数  $\frac{\partial \log \phi(e_i)}{v_i \partial e_i}$  はすべて等しくなければなりません。これを示すため (12) を  $\sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$  と表せば

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$$

両式から  $v_n$  を消去すると

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i = b_n \sum_{i=1}^{n-1} v_i$$

特に  $v_i$  以外の値が 0 の場合を考えれば  $b_i = b_n$  となり、結局すべての  $b_i$  は等しくなければなりません。

この共通の値を  $k$  とすれば

$$\frac{\partial \log \phi(e_i)}{\partial e_i} = v_i k$$

ここで残差を誤差で近似して

$$\frac{\partial \log \phi(e_i)}{\partial e_i} = e_i k \quad (13)$$

両辺を積分すれば

$$\log \phi(e_i) = \frac{ke_i^2}{2} + \log C$$

ここで誤差を一般に  $\Delta$  と表せば

$$\phi(\Delta) = C \exp\left(\frac{k\Delta^2}{2}\right)$$

本節の冒頭で述べた誤差に関する第二の経験法則より, 任意の  $C$  について  $\lim_{\Delta \rightarrow \pm\infty} \phi(\Delta) = 0$  となるべきですから  $k < 0$  でなければなりません. そこで  $-a^2 := k/2$  とおけば

$$\phi(\Delta) = C \exp(-a^2 \Delta^2) \quad (14)$$

また積分定数  $C$  は全確率が 1 であること ( $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta = 1$ ) から  $C = a/\sqrt{\pi}$  と決定されます. そして, 付録 [1] に示すように  $a$  は観測精度の指標を表します.

## 4 最小自乗法

第 2 節で相加平均値に対応する残差の二乗和が最小となることを知りました.

そして, 前節では最確値を「誤差の二乗和が最小になる値」と定義しました. 最確値も近似値の一つですが, 誤差は不可知ですから最確値も真値と同様に知ることはできません.

ところが「誤差の二乗和」と「相加平均値の残差の二乗和」とには

$$[ee] = \frac{n}{n-1}[vv] \quad (15)$$

の関係があります. (ただし,  $[xx] := \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $[y] := \sum_{i=1}^n y_i$  と表現しています.)

式 (15) より  $n$  が十分大きければ  $[vv] \approx [ee]$  となり,  $[ee]$  が最小である (最確値である) ことと  $[vv]$  が最小である (相加平均値である) こととはほぼ同値とみなせますから, 次の命題 3 が成り立ちます.

**[命題 3] 相加平均値は最確値の最も良い近似値である**

2 節では相加平均値は 真値の近似値の一つと推定されただけでしたが, この命題 3 により相加平均値を用いて残差を算出して補正すれば, 最高精度の結果が得られこととなります. この誤差処理法を最小自乗法と呼びます. なお, 式 (15) は次のように証明されます.

[証明] 観測値を  $M_i$ , 真値を  $M_0$ , 相加平均値を  $M_m$  とし, 誤差を  $e_i$  残差を  $v_i$  と表せば

$$v_i = M_m - M_i \quad , \quad e_i = M_0 - M_i$$

両式から  $M_i$  を消去すると

$$e_i = v_i + (M_0 - M_m)$$

となりますから,  $[v] = 0$  に注意して両辺の和をとると

$$[e] = n(M_0 - M_m)$$

この 2 つの関係式から  $(M_0 - M_m)$  を消去して

$$nv_i = ne_i - [e]$$

両辺の二乗和をとると

$$n[vv] = n[ee] + [e]^2 - 2[e][e] = n[ee] - [e]^2$$

$[e]^2 = [ee] + 2\sum_{i \neq j} e_i e_j$  と表されますが、右辺第 2 項は  $n$  が十分大きければ誤差の正負分布対称性により 0 とみなせますから  $n[vv] = (n-1)[ee]$  となり

$$[ee] = \frac{n}{n-1}[vv]$$

が得られます。[証明終]

最後に、 $\epsilon^2 := [ee]/n$  で定義される  $\epsilon$  は、各回の観測値  $M_i$  の「平均二乗誤差」とよばれ、観測の精度管理に用いられます。 $[vv]$  を使えば

$$\epsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

この  $\epsilon$  に対して、相加平均値  $M_m$  の平均二乗誤差を  $\epsilon_m$  とすると  $M_m = \sum_{i=1}^n M_i/n$  ですから、各回の観測条件は同一として、付録 [2] の誤差伝搬の定理により

$$\epsilon_m^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n^2} = \frac{\epsilon^2}{n}$$

$$\therefore \epsilon_m = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (16)$$

$\epsilon_m = \epsilon/\sqrt{n} < \epsilon$  ですから、相加平均値は各観測値よりも真値（または最確値）により近い（つまりより確からしい）近似値ということになります。

## 5 間接観測の誤差

前節までは直接観測した量の誤差に関して議論を進めましたが、本節では間接観測について考察します。

間接観測の例としては、距離と角度の観測値から測点の座標を求める場合などがあります。

一般に、直接観測できない  $k$  個の量  $\{x_j\}$  の関数

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = l_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (17)$$

で表される量  $l_i$  を観測する場合において、 $l_i$  の観測値を  $l_i^b$ 、最確値を  $l_i^m$ 、観測値への補正值（残差）を  $v_i$  とすれば  $l_i^b + v_i = l_i^m$  となり、これらの観測値毎の関係を  $n$  次列ベクトルにまとめて表すと

$$L_b + V = L_m \quad (18)$$

観測値  $L_b$  を (17) に代入して得られる  $X := (x_1, x_2, \dots, x_k)^t := (x_j)^t$  の近似値を  $X_a := (x_j^a)^t$  とし、 $X$  の最確値を  $X_m$  とします（右肩の添字  $t$  は転置行列の意味です）。このとき  $X_a$  に対する補正值を  $X$  で表すと

$$X_a + X = X_m \quad (19)$$

$$F(X_m) = L_m \quad (20)$$

(20) は最確値  $X_m, L_m$  を (17) に代入してベクトル表示したものです。

(18), (20) より

$$L_b + V = F(X_m) = F(X_a + X)$$

補正值  $X$  は微小量ですから、その一次の項まで近似して

$$\begin{aligned}
 L_b + V = F(X_a + X) &= F(X_a) + AX \quad (A = (a_{ij}) := (\partial l_i^a / \partial x_j^a)) \\
 &= AX + L_a \quad (L_a := F(X_a)) \\
 \therefore V &= AX + L_a - L_b := AX + L
 \end{aligned} \tag{21}$$

(21) が間接観測の場合の補正值です。この補正值に最小自乗法を適用します。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n v_i^2 &= V^t V \\
 &= (AX + L)^t (AX + L) \\
 &= X^t A^t A X + X^t A^t L + L^t A X + L^t L \\
 &= X^t A^t A X + 2X^t A^t L + L^t L
 \end{aligned}$$

ここで  $N := A^t A$ ,  $U := A^t L$  により行列  $N, U$  を導入すれば

$$V^t V = X^t N X + 2X^t U + L^t L \tag{22}$$

$V^t V$  が最小なるべきことから  $X$  で微分した係数を 0 とおきます

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial V^t V}{\partial X} &= \frac{\partial X^t N X}{\partial X} + 2 \frac{\partial X^t U}{\partial X} \\
 &= 2N X + 2U
 \end{aligned}$$

したがって、補正值を決める方程式は

$$N X + U = 0 \tag{23}$$

この連立一次方程式は、 $k$  次正方行列  $N$  が正則行列 ( $|N| \neq 0$ ) であれば直ちに解くことができます ( $X = -N^{-1}U$ )。  $N$  が非正則行列の場合は一般逆行列を使って解くことになります。

方程式 (23) の導出では、最小自乗法が適用されていますから  $V = AX + L$  のノルム ( $V^t V$ ) が最小なるべき条件が課されています。つまり、 $A$  の一般逆行列  $A^-$  は最小誤差型でなければなりません。しかし、これだけでは  $A^-$  は確定しませんから、さらに  $X$  のノルムが最小なるべき条件 ( $A^-$  が最小ノルム型であるという条件) を課します。そしてこれらに加えて、 $A^-$  が反射型である (つまり  $(A^-)^- = A$  である) こと<sup>5</sup> を要請します。これらの 3 条件を満たすものは、「ムーア・ペンローズ型一般逆行列」と呼ばれ実数行列としては一意に決まることが知られています。この一般逆行列  $A^-$  を使えば、 $X = -A^-(A^t)^-U$  と表されます。<sup>6</sup>

## 6 おわりに

### (1) 誤差論の要約

誤差論の基本事項は以下の 5 項目に要約されます。

- [1] 観測誤差  $e$  の発生確率関数  $\phi(e)$  は、確率に関する経験法則から導出される。 ( $\phi(e) \propto \exp(-ke^2)$ )
- [2]  $n$  回観測という複合事象の誤差発生確率  $\Phi$  は、各回の誤差を  $e_i$  とすれば  $\Phi \propto \exp(-k[ee])$
- [3]  $[ee]$  を最小にする近似値を最確値と定義する。(最小自乗法の考え方)
- [4]  $n$  回観測で、各回の観測残差を  $v_i$  とすれば、 $[ee] = [vv]n/(n-1)$ 。
- [5] 相加平均値  $M_m$  の  $[vv]$  は最小ですから、 $[ee]$  も最小値に近似し、 $M_m$  は最確値に最も近似する。

<sup>5</sup> 「 $AA^-A = A$ 」が一般逆行列の定義式で、「 $(A^-)^- = A$ 」は「 $A^-AA^- = A^-$ 」を意味します

<sup>6</sup> 一般逆行列については文献 [2] や文献 [3] の解説がわかり易いと思われる。

誤差論およびそこで用いられている数理技法は、ほかの多くの分野でも応用されています。ここでは、一般逆行列と統計学の用語について簡単にふれておきます。

(2) 一般逆行列

5節の最後でふれた一般逆行列による問題の解法は、経済・社会の各分野でも利用されています。そこでは、最確値に相当する最適解を追及します。たとえば、さまざまな関連要素のモデル分析から線形連立方程式が得られたとき、表現行列が長方形であったり非正則行列であったりします。このとき、解は不定（条件不足）であったり不能（条件過多）であったりしますが、ある極値条件（利益最大化など）を一般逆行列という形で導入して最適解を求めているわけです。

(3) 統計学の用語との比較

誤差や最確値という概念は誤差論特有のものと思われま。統計調査での取得データはマクロな現状をそのまま把握したものであり、(相加) 平均値との差は「偏差」と呼ばれます。そして「偏差の二乗の平均値」を分散と名付け、「分散の平方根」を標準偏差といいます。誤差論の残差は観測回数が多いほど誤差に近似します。これと同じように統計調査においては、標本集団が大きいほど母集団の実態に迫ることができます。

両論の用語の対応表は以下のようになります。

誤差論	統計調査論
観測値 $M$	調査値 $M$
最確値 $M_p$	-----
平均値 $M_m$	平均値 $M_m$
真値 $M_0$	調査値 $M$
誤差 $e = M_0 - M$	-----
残差 (補正值) $v = M_m - M$	偏差 $D = M - M_m$
$e^2 = \langle e^2 \rangle = n \langle v^2 \rangle / (n - 1)$	分散 $V = \langle D^2 \rangle$
平均二乗誤差 $\epsilon$	標準偏差 $\sigma = \sqrt{V}$

(注)  $\langle x \rangle$  は  $\{x_i\}$  の平均値

最後に測量成果について記しておきたいと思います

明治への改元以降の近代測地測量では、基準となる測点の公共座標を決めるため、苦勞して測定設置した基線と基線とを結ぶ三角鎖を構成する各三角形の内角を観測する三角測量が用いられました。そしてほぼ100年後の20世紀半ば過ぎには光波測距儀が普及して測距が容易になり、公共測量でも多角測量が主流となります。私が測量実務初心者のころ、見慣れない測距手簿に疑問をもったとき、大先輩から鋼巻尺主体だった頃の測距作業の困難さを聞かされたものです。

これらの測量成果を利用する上では、成果には誤差が内在していることに留意すべきであると思います。一等三角点間の平均距離は約45kmですから、経緯儀の測角性能を0.2"とすれば水平位置の誤差は単純計算では43cm程度となります。実際には、複数回観測して平均値を採用しその精度を吟味するわけですが、4節でふれているように  $n$  回観測すれば相加平均値の平均二乗誤差は  $1/\sqrt{n}$  となりますから、所要誤差に収まるように観測の「対回数」を決め、<sup>7</sup>さらに補助の観測点（一等三角補点）を設けて精度の向上に努めたと推察されます。<sup>8</sup> いずれにしても、一等三角点のもつ誤差は四等三角点成果にまで伝搬しているわけです（付録 [2] 具体例 3 参照）。

測量区域の規模・目的に応じて既存測量成果を参照すべきでしょう。<sup>9</sup>

<sup>7</sup> 測角器望遠鏡の正位と反位の水平角観測を一回観測と呼びます。一等三角測量では12対回と規定されたようです（文献 [4] p.148）

<sup>8</sup> 当時は誤差10cm以内と規定したようです（「フリーネットワーク解法による都市基準点測量」測量'1982年1月号）

<sup>9</sup> 三角点成果は、1980年代の「一次網・二次網基準点測量」により改正されました。時を同じくしてGPS測量機器が普及し始めており、国の電子基準点の整備が進みます。そして2008年には公共測量にもGPS測量の規定が盛り込まれました。（「測量'2008年6月号）

## 付録 観測の精度

### [1] 誤差確率関数と平均二乗誤差との関係

4節で定義した平均二乗誤差  $\epsilon$  は次のようなものでした.

$$\epsilon^2 := \frac{[ee]}{n} = \frac{[vv]}{n-1} \quad (24)$$

この  $\epsilon$  と 3節で導いた誤差確率関数  $\phi(e)$  のパラメータ  $a$  との関係を示します.

ある誤差  $e$  と  $e + de$  の間の誤差が生起する確率  $p(e)$  は, 3節の誤差確率関数  $\phi(e)$  を使って  $\phi(e)de$  となります. そこで, この誤差区間  $de$  に含まれる誤差の個数を  $n(e)$  とすれば, 誤差の総数が  $n$  ですから  $p(e)$  は  $n(e)/n$  で近似できます.

$$\begin{aligned} \phi(e)de &\approx \frac{n(e)}{n} \\ \therefore n(e) &\approx n\phi(e)de \end{aligned}$$

誤差区間  $de$  内には  $n(e)$  個の誤差  $e$  がありますから, それらの二乗和は  $n(e) \times e^2 \approx e^2 n\phi(e)de$  となります. よって誤差区間  $(-b, b)$  に含まれる誤差の二乗和は

$$n \int_{-b}^b e^2 \phi(e) de$$

したがって, 冒頭で定義した  $\epsilon^2$  は

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \int_{-b}^b e^2 \phi(e) de \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^2 \phi(e) de \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^2 \exp(-a^2 e^2) de \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3} = \frac{1}{2a^2} \\ \therefore \frac{1}{\epsilon} &= \sqrt{2}a \end{aligned}$$

$1/\epsilon$  は精度の目安でしたから, これを  $a$  で見定めることができます.

そして誤差分布関数は次のように表されます.

$$\phi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp(-\Delta^2/2\epsilon^2)$$

### [2] 平均二乗誤差の伝搬定理

いくつかの観測量  $\{M_i\}$  の関数  $f(M_1, M_2, \dots, M_k) := f(\mathbf{M})$  で表される量を  $M$  として, その平均二乗誤差を  $E$  とします. そして  $M_i$  の平均二乗誤差を  $\epsilon_i$  とし,  $m_i$  を相加平均値とすると, つぎの関係が成り立ちます.

$$E^2 = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right)^2 \epsilon_j^2 \quad (25)$$

[証明]

観測量  $M_i$  の  $l$  回目の観測値を  $m_i(l)$ , 誤差を  $e_i(l)$ , 真値を  $m_i(0)$  とすれば, 量  $M$  の  $l$  回目の計算値は

$$M(l) = f(\mathbf{m}(l)) = f(\mathbf{m}(0) + \mathbf{e}(l))$$

$e_i(l)$  は微小ですからその一次の項まで展開して

$$M(l) = f(\mathbf{m}(0)) - \sum_{i=1}^k a_i e_i(l) \quad \text{ただし } a_i := \frac{\partial f(\mathbf{m}(0))}{\partial m_i(0)}$$

$f(\mathbf{m}(0)) - M(l) := E(l)$  は  $l$  回目の計算値の誤差ですから

$$E(l)^2 = \left( \sum_{i=1}^k a_i e_i(l) \right)^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2 e_i(l)^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j e_i(l) e_j(l)$$

最右辺の第 2 項は誤差の正負対称性により 0 とみなせますから

$$\begin{aligned} n \times E^2 &= \sum_{l=1}^n E(l)^2 = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^k a_i^2 e_i(l)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^n a_i^2 e_i(l)^2 \\ &= n \sum_{i=1}^k a_i^2 \epsilon_i^2 \end{aligned}$$

$a_i = \partial f(\mathbf{m}(0)) / \partial m_i(0) \approx \partial f(\mathbf{m}) / \partial m_i$  ですから,

$$E^2 = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right)^2 \epsilon_j^2$$

[証明終]

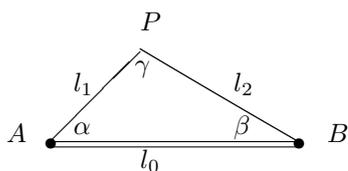
具体例 1:  $M = a_1 M_1 + a_2 M_2$

$$\partial M / \partial M_i = a_i \text{ ですから, } E^2 = a_1^2 \epsilon_1^2 + a_2^2 \epsilon_2^2$$

具体例 2:  $M = M_1 \times M_2$  ( $M_i$  の相加平均値を  $m_i$  とします)

$$\partial M / \partial M_1 = M_2, \partial M / \partial M_2 = M_1 \text{ ですから, } E^2 = m_2^2 \epsilon_1^2 + m_1^2 \epsilon_2^2$$

具体例 3:



既知点  $A, B$  を使って新点  $P$  の位置を決めるため内角  $\alpha, \beta, \gamma$  を観測します。  $AB$  間の距離  $l_0$  は既知で, 求める距離  $l_1$  は

$$l_1 = l_0 \sin \beta / \sin \gamma$$

$l_1$  の平均二乗誤差を  $\epsilon_1$ , 測角の誤差を  $\epsilon$  とすれば

$$\epsilon_1^2 = (\partial l_1 / \partial \beta)^2 \epsilon^2 + (\partial l_1 / \partial \gamma)^2 \epsilon^2$$

$$= (l_0 \epsilon)^2 ((\cos \beta / \sin \gamma)^2 + (\sin \beta \cos \gamma / \sin^2 \gamma)^2) := (l_0 \epsilon)^2 r^2$$

$\alpha = \beta = 30$  度のときは  $\epsilon_1 = (l_0 \epsilon) \times \sqrt{10}/3$  ですから, 位置誤差  $l_0 \epsilon \approx 10\text{cm}$  の場合は  $\epsilon_1 \approx 10.54\text{cm}$  となります。

$\alpha = \beta = 45$  度とすれば  $\epsilon_1 = 10 \times \sqrt{2}/2$  ですから,  $\epsilon_1 \approx 7.07\text{cm}$  となります。 ちなみに  $P$  が下位の三角点ならば  $l_1 \approx l_0/2$  ですから,  $\alpha, \beta < 45$  度と制限されます。そこで, 同様の三角網を組んで四等三角点まで測設できたとして,  $r = (\sqrt{10}/3 + \sqrt{2}/2)/2 \approx 0.88$  と仮定するとその誤差は  $\epsilon_1 = (l_0 \epsilon) r^3 \approx 10 \times (0.88)^3 = 6.19\text{cm}$  となります。

内角が不均等で視準距離に差があると観測精度がばらつき, 補正值が大きくなって成果の精度も低下します。

## 参考文献

- [1] 山田 陽清 著「最小自乗法」 三晃社 (1946 年) 1 章~2 章
- [2] 坪川ほか 著「現代測量学 1-測量の数学的基礎-」 日本測量協会 (1981 年) 6 章~7 章

[3] 伊理 正夫 著「岩波講座 応用数学 11-線形代数 II-」 岩波書店 (1994) 6 章

[4] 吉沢 孝和 著「測量実務必携」 オーム社 (1976) 三角測量については 148 頁および 178 頁参照

# 自然数のべき和の関係

植田洋平\*1

## Some Relations for Sum of Powers

Yohei UEDA \*2

### 1 はじめに

知人の高校生君の数学の宿題を手伝っているときの自然数の冪和の問題があった。これは公式を当てはめるだけの問題であった。下記は、高校数学では既知の公式である。

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (1)$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (2)$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2. \quad (3)$$

そういう経緯から、これらの公式を初等的に帰納法を使わず導出するのはどうするのだろうかということに興味をもった。その導出の方法はよく知られており、文献\*3の p. 42 に方法が5つ紹介されており、その一つの摂動法を用いると、簡単に求まる。文献では  $\sum_{k=1}^n k^2$  まで求めているので、ここでは  $\sum_{k=1}^n k^3$  を求めてみたい。

まず、最初に  $\sum_{k=1}^{n+1} k^4$  に関する方程式を導いておく。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^4 &= \sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4 \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)^4 \\ &= \sum_{k=0}^n (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^n k^4 + 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1. \end{aligned} \quad (4)$$

これから、 $\sum_{k=1}^n k^3$  は、つぎのようにして求められる。

---

\*1 千葉県柏市

\*2 ueda.yohei.0715@gmail.com

\*3 Graham, Knuth, Patashnik (有澤誠, 安村通晃, 萩野達也, 石畑清訳), 『コンピュータの数学』, (共立出版)

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\
&= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n + 1 \\
&= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1 \\
&= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 1 + 4n + 5n^2 + 2n^3, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} (n^2 + 2n^3 + n^4) = \left( \frac{1}{2} n(n+1) \right)^2. \tag{6}$$

この方法を「自然数の冪和に関する関係式」の中で奇数べき和の場合\*4に適用してみることを思いついた。

## 2 奇数冪和の場合の別解

中西先生は、「自然数の冪和に関する関係式」の中で奇数べき和の関係式を次式で与えている。これを帰納法を用いずに導出することを試みた。

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(m+1)!}{(2r+1)!(m-2r)!} S_{2m-2r+1}(n) = \frac{1}{2} n^{m+1} (n+1)^{m+1}. \tag{7}$$

最初につぎの総和を考える。二項定理を用いると、

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{k=1}^n k^M (k-1)^M \\
&= (-1)^M \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^M \binom{M}{r} (-k)^{M-r} k^M. \tag{8}
\end{aligned}$$

これに撰動法を適用する。

$$\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n) + (n+1)^M n^M \\
&= 0 + \sum_{k=1}^n (k+1)^M k^M \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^M \binom{M}{r} k^{M-r} k^M. \tag{9}
\end{aligned}$$

ここで、場合分けして  $M$  が偶数の場合を考察する。この場合  $(-1)^M = 1$  であるから、 $r = 2s + 1, (s = 0, 1, 2, \dots)$  のとき  $(-1)^{M-r} = -1$  より

$$\begin{aligned}
k^{M-r} - (-k)^{M-r} &= k^{M-r} - (-1)^{M-r} k^{M-r} \\
&= 2k^{M-2s-1} \tag{10}
\end{aligned}$$

\*4 中西 襄, 自然数の冪和に関する関係式, 数学・物理通信, 1 巻 4 号, p. 8-10

となる。この場合、上式及び式 (8), (9) を用いると

$$\begin{aligned}
(n+1)^M n^M &= T(n+1) - T(n) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^M \binom{M}{r} \left( k^{M-r} - (-k)^{M-r} \right) k^M \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \binom{M}{2s+1} k^{2M-2s-1} \\
&= 2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \binom{M}{2s+1} \sum_{k=1}^n k^{2M-2s-1} \\
&= 2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \binom{M}{2s+1} S_{2M-2s-1}(n) \\
&= 2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \frac{M!}{(2s+1)!(M-2s-1)!} S_{2M-2s-1}(n) \tag{11}
\end{aligned}$$

また、 $M$  が奇数の場合を考察する。この場合  $(-1)^M = -1$  であるから、 $r = 2s + 1, (s = 0, 1, 2, \dots)$  のとき  $(-1)^{M-r} = 1$  より

$$\begin{aligned}
k^{M-r} + (-k)^{M-r} &= k^{M-r} + (-1)^{M-r} k^{M-r} \\
&= 2k^{M-2s-1} \tag{12}
\end{aligned}$$

となる。この場合、上式及び式 (8), (9) を用いると

$$\begin{aligned}
(n+1)^M n^M &= T(n+1) - T(n) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^M \binom{M}{r} \left( k^{M-r} + (-k)^{M-r} \right) k^M \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \binom{M}{2s+1} k^{2M-2s-1} \\
&= 2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} \frac{M!}{(2s+1)!(M-2s-1)!} S_{2M-2s-1}(n) \tag{13}
\end{aligned}$$

式 (11) と式 (13) より、 $M$  が奇数でも偶数でも同じ結果になる。ここで、 $M = m + 1$  とおくと

$$\frac{1}{2} (n+1)^{m+1} n^{m+1} = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(m+1)!}{(2s+1)!(m-2s)!} S_{2m-2s+1}(n). \tag{14}$$

したがって、奇数べき和の関係式については、初等的な方法で帰納法を用いないで解くことができた。

### 3 おわりに

数学的帰納法よりもすこし直観的かと思われる摂動法を用いて中西先生が以前に導いた、奇数べきの和の関係式をここで再度導いた。「数学・物理通信」の記事にもならないレベルかとも思いましたが、参考までに述べてみました。

## 五捨五入

矢野 忠\*<sup>1</sup>

Round Off

Tadashi YANO\*<sup>2</sup>

### 五捨五入

これはすでに「研究と実践」（愛数協）[1] に発表されたものである。その後、小著『数学散歩』に掲載された [2]。また柿本君のメールは [3] の一部として掲載された。柿本君のメールにもあるように五捨五入の考え方は日本ではまだ珍しいので、ここに再掲載する。

2月の定例学習会の案内（「研究と実践」（愛数協）第29号に再録）に新川先生（愛媛県内子町立大瀬小，愛数協前事務局長：当時）が書かれている「概数の導入」を読んでちょっと思い出したことを一つ。

昔、占部実先生（元広島大学，元九州大学教授）の応用数学の講義を聞いたときのことです。普通世間では「四捨五入」といいます。しかし、数値計算をやるときには、望ましいのは「五捨五入」だと言うのです。それは4.575とあれば4.58といつでも切り上げるのではなく、二回目には4.57と切り捨てるというように切り捨てと切り上げを交互に行う方が計算結果の丸め誤差（round-off-error）が小さくなるというのです。

これは特に計算が連続して行われるようなとき、たとえば、微分方程式を数値的に解くときなどには、まったく正しいと思います。

こんな話は他の人から聞いたことはありませんので、占部先生の独自の見解であったのか、それとも数値解析の専門家にとっては常識であったかは存じません。

またコンピュータでの計算では実際にどう処理しているのか、たぶんいつも切捨てではないかと思いますが今ははっきりと覚えておりません。それで850を概数として900とするのは世間ではそうすることにはしていますが、唯一の見解ではないような気がします。銀行等で預金に利息がついたときに、一円未満については、四捨五入でなくいつも切り捨てにしているのではないのでしょうか。新川先生いかがですか。

### 柿本宏章君からのメール

卒業生の柿本宏章君（新明和）からつぎのようなメールをもらった（2005.6.13）。

昨日、先生から『数学散歩』の本をもらったので、読んでみると数値計算をするときは「五捨五入がよい」と書いてあって、計算の誤差を小さくするためだったのかと、初めて知りました。

というのは、先日、会社で顧客（アメリカ人）から結果の計算方法が違うと言われることがあって調べたのですが、アメリカの（数の）丸め方は、五捨五入でした。（ASTM E29 \*<sup>3</sup>によると）丸める前の数値が偶数の場合は切捨て、丸める前の数値が奇数の場合は切り上げでした。

作業者に教育する立場に今なっていて、「何で四捨五入でダメなのか？、アメリカの方がおかしい」というように反論されて、顧客の要求だから（仕方がない）と言い聞かせていましたが、（五捨五入の）理由を言って聞かせてあげるともっと（納得して）実践してくれると思います。

---

\*<sup>1</sup> 元愛媛大学工学部

\*<sup>2</sup> yanotad@earth.ocn.ne.jp

\*<sup>3</sup> ASTM International は旧称が American Society for Testing and Materials（アメリカ材料試験協会）という名称であったが、いまでは ASTM が国際規格となって 2001 年に改名した。ASTM E29 は ASTM の分類記号 E（金属の試験方法等）で番号が 29 である。普通の場合にはこの番号の後に策定年が来るらしいが、ここではついていない。

(測量士，秋葉敏男さんからのコメント)

ここで取り上げられた「五捨五入」ですが，測量計算（特に水準測量計算）では「五捨五入」が慣例となっていました。

## 感想

柿本君の上のメールは私が占部先生の応用数学の講義で昔に聞いた「五捨五入」が，アメリカの企業では普通に使われていることを教えてくれました。さすが合理的な考えが徹底しているアメリカではこれがスタンダードになっているらしい\*4。なんだか単なるアカデミックな話と思っていた「五捨五入」も急に身近に感じられます。

柿本君のコメントにある「(ASTM E29 によると) 丸める箇所の一つ上の桁の数値が偶数の場合は切捨て，奇数の場合は切り上げでした\*5」というふうな話を占部先生の講義で聞いた覚えがある。そうだとすれば，占部先生はアメリカでの数値計算での誤差の処理の実情をよくご存じであったのだろう。

秋葉敏男さんのコメントも私たちの「四捨五入」が標準手法との思い込みは，いたるところで破綻しているということを知らせてくれた。秋葉さん，ありがとうございます。

(1989.2.20) (2021.6.4 改訂)

## 参考文献

- [1] 矢野 忠，五捨五入，研究と実践（愛数協），No. 30 (1986.6) 14
- [2] 矢野 忠，『数学散歩』（国土社，2005）16
- [3] 矢野 忠，『数学散歩』への便り，研究と実践（愛数協），No. 88 (2005.9) 1-6

---

\*4 アメリカだけの基準ではなく，いまでは全世界の基準になっている。

\*5 上の柿本君の記述と少し変えてある。どういう場合に切り捨てで，どういう場合に切り上げかを占部先生が話していたと思われる表現に変えてある。実際に ASTM E29 を見ていないので，間違った解釈かもしれないが。

## 編集後記

ついさきほど 2021 年が来たと思ったのに、もう 2021 年 6 月となりました。昨年と今年とはコロナ禍中であることと梅雨入りが 5 月になったことがおなじです。

もっとも気象庁は毎年の梅雨入りの時期を 9 月に見直して、梅雨入りの時点をそこで修正をすることもあるようです。

今号は通巻の 98 号です。今月もう 1 号を発行の予定なので、9 月には通巻 100 号を達成できる予定です。通巻で 100 号などということは編集者の私としては夢のまた夢のような感じがしていました。それが 100 号を目前にして、その到達が現実に近づいています。

100 号は皆さんからのお便りを頂く、特別号にしたいと思っています。さて、どんな号になるのか。私自身もワクワクです。

今号の秋葉さんの「測量と誤差」は私たちのような測量の専門家でない者にとってなかなか理解しにくいですが、だから興味深かった。どこの大学の物理学科でも誤差論といった講義があると思うが、それでも測量に特有なトピックもあるようだし、誤差論と統計学との間にある種の平行的な関係が存在するようだという事も知った。誤差論では最近では線形代数的な取り扱いをするらしいということも関心と呼びそう。一般逆行列というあまりなじみのない概念もあった。ということで、けっこう測量という分野はおもしろそうだと初めて知ったのが、私はこの歳になってではおそすぎるが、それでも知らないよりはいいだろう。

ただ、いつも思うのだが、秋葉さんの論文にはその表現でちょっといただきかねるところもある。今回は p. 17 の下から 10 行目の式が枠からはみ出していることである。これを修正しようとしたのだが、この式の横にある図と連動した構造になっていた。このようなサーキュラーとしての体裁に見劣りをする部分があるときどきあるので、今後はこのようなことがないように注意していただきたい。

(矢野 忠)