数学・物理通信

11 巻 4 号　　2021 年 6 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2021 年 6 月 14 日

目次 (Contents)

錘付き弦振動の問題 (4)

世戸 憲治 *

Oscillation Problem of String with Weight(4)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「錘付き弦振動の問題 (3)」(「数学・物理通信」11 巻 3 号) では，有限長の弦に，錘を等間隔に付けたときの振動を扱った．今回は弦の長さを半無限とし，これに等間隔に無限個の錘をつけた場合の振動を扱う．前回の論文の「おわりに」のところで，この問題は「量子力学における周期ポテンシャル問題」と類似していると書いたが，実際にやってみると方法論としてかなり異なる面もあり，似て非なるものと言った方がよいのかもしれない．

2 方程式の導入とその解法

2.1 前回のまとめ

前回は，錘の個数を $N+1$ とした場合の振動を解析した．今回は，この N の値をそのまま無限大とすることで，半無限長の弦に無限個の錘を付けたときの振動を解析する．扱う方程式は前回と同じなので，前回のものをそのまま引用する．無次元化された密度関数を

$$\rho(x) = \mu \sum_{n=0}^{N} \delta(x-n) + 1 \tag{2.1}$$

と定義したとき，無次元化された座標 x, 時刻 t における弦の変位を $U(x,t)$ として，その波動方程式は

$$\rho(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

となる．μ は錘の弦に対する質量比である．この方程式を，錘が存在する $n-0$ から $n+0$ まで x で積分すると，錘の方程式

$$\mu \frac{\partial^2 U(n,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=n+0} - (1-\delta_{n,0}) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=n-0} \tag{2.3}$$

を得る．右辺の 2 項目に $1-\delta_{n,0}$ が付いたのは，0 番の錘にはそれより左に弦が存在しないためこの項がなくなることを意味する．また，錘が存在しない純粋に弦部分の方程式は

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる．

ここで，変位 $U(x,t)$ が x 依存部分と時間依存部分に変数分離されるものとし，しかも，時間部分は適当な角振動数 k を用いて三角関数で書けるものとし，

$$U(x,t) = X(x)\big[\sin(kt) \qquad \text{or} \qquad \cos(kt)\big] \tag{2.5}$$

とおくことにする．この変数分離で，方程式 (2.3) (2.4) は

$$-\mu k^2 X(n) = \frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=n+0} - (1-\delta_{n,0})\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=n-0} \tag{2.6}$$

$$-k^2 X(x) = \frac{d^2X(x)}{dx^2} \tag{2.7}$$

となる．この (2.7) 式から，X は k を波数とする三角関数で書けることがわかるので，x の区間 $(n,\ n+1)$ に対し，

$$X_n(x) = A_n \sin\big(k(x-n)\big) + B_n \cos\big(k(x-n)\big) \tag{2.8}$$

とおく．これが解となるためには，錘の位置 $x=n$ で連続でなければならないので，$X_{n-1}(n-0) = X_n(n+0)$，すなわち，

$$A_{n-1}\sin(k) + B_{n-1}\cos(k) = B_n \tag{2.9}$$

であり，また，(2.8) 式を錘の方程式 (2.6) に適用すると，

$$-\mu k B_n = A_n - (1-\delta_{n,0})\big[A_{n-1}\cos(k) - B_{n-1}\sin(k)\big] \tag{2.10}$$

となる．これら 2 式から，1 以上の n に対する係数 A_n，B_n の漸化式

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

を得る．ここに，Λ は 2×2 の行列で，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos(k) - \mu k \sin(k) & -\big[\sin(k) + \mu k \cos(k)\big] \\ \sin(k) & \cos(k) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

で定義される．この漸化式をくり返すと，

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \Lambda^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

と，A_n，B_n は A_0，B_0 で表される．また，(2.10) 式で $n=0$ のときは，$-\mu k B_0 = A_0$ となるが，ここでは，$B_0 = 1$ ととることにし

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu k \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

とする．これが $x=0$ の端が錘付き自由端となっているための境界条件である．

弦のもう一方の端 $x=N+1$ は固定端とし，$X_N(N+1)=0$ を要請する．これは，(2.8) (2.13) (2.14) 式から，

$$X_N(N+1) = \big(\sin(k) \quad \cos(k)\big)\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \big(\sin(k) \quad \cos(k)\big)\,\Lambda^N \begin{pmatrix} -\mu k \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.15}$$

となる．ここまでが前回の復習である．

2.2 $N \to \infty$ としたとき

ここでは，前節の結果を $N \to \infty$ の場合に拡張してみる．そのためには，(2.12) 式の行列 $\mathit{\Lambda}$ を対角化してしまうのが良い．この行列の固有値を λ，固有ベクトルを ${}^t(\alpha, \beta)$ として，$\mathit{\Lambda}$ の固有値方程式

$$\mathit{\Lambda}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

を考える．このときの決定方程式は

$$\begin{vmatrix}\cos(k) - \mu k\sin(k) - \lambda & -\bigl[\sin(k) + \mu k\cos(k)\bigr] \\ \sin(k) & \cos(k) - \lambda\end{vmatrix} = 0, \tag{2.17}$$

となり，$\det(\mathit{\Lambda}) = 1$ なることに注意して，

$$\lambda^2 - 2C\lambda + 1 = 0, \qquad C = \cos(k) - \frac{\mu}{2}k\sin(k) \tag{2.18}$$

となる．ここに定数 C をこの第 2 式で定義する．これから 2 個の固有値 λ_1，λ_2 が，

$$\lambda_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1} \tag{2.19}$$

と決まる．この固有値は，C の大きさによって，つぎのように分類される．

$$\begin{cases} |C| > 1 \ \text{ のときは}, |\lambda_1| > 1, \ \ |\lambda_2| < 1, \\ |C| = 1 \ \text{ のときは}, \lambda_1 = \lambda_2 = C \ \text{ となって重解}, \\ |C| < 1 \ \text{ のときは}, \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ は絶対値 1 の複素数で互いに複素共役}. \end{cases} \tag{2.20}$$

このときの固有ベクトルは，(2.16) 式の第 2 成分から，$\sin(k)\alpha + \cos(k)\beta = \lambda\beta$ となるので，この式が成立するように，

$$\alpha = \lambda - \cos(k), \qquad \beta = \sin(k) \tag{2.21}$$

と選ぶことにし，これから，2 個の λ の値に対応して 2 個の固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix}f_1(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}f_2(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix}, \qquad f_i(k) = \lambda_i - \cos(k), \qquad i = 1, 2 \tag{2.22}$$

とする．$f_i(k)$ は以下の数式の簡素化のためである．

ここで，(2.14) 式の ${}^t(A_0,\ B_0)$ をこの固有ベクトルで展開すると，

$$\begin{pmatrix}-\mu k \\ 1\end{pmatrix} = P_1(k)\begin{pmatrix}f_1(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix} + P_2(k)\begin{pmatrix}f_2(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix} \tag{2.23}$$

となる．ここに，$P_1(k)$, $P_2(k)$ を

$$P_1(k) = -\frac{\mu k\sin(k) + f_2(k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(k)}, \qquad P_2(k) = \frac{\mu k\sin(k) + f_1(k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(k)} \tag{2.24}$$

と定義する．ただし，重解 $\lambda_1 = \lambda_2$ となるとき，この式は定義されないが，この場合は例外として扱はないことにする．この表式を用いると，固有値方程式 (2.15) は

$$X_N(N+1) = \bigl(\sin(k) \quad \cos(k)\bigr)\left[P_1(k){\lambda_1}^N\begin{pmatrix}f_1(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix} + P_2(k){\lambda_2}^N\begin{pmatrix}f_2(k) \\ \sin(k)\end{pmatrix}\right] = 0 \tag{2.25}$$

と書き直される．ここで，λ_1，λ_2 の大きさは (2.20) 式で述べたように (2.18) 式で定義される C の値で決まる．$|C|>1$ のときは $|\lambda_1|>1$ なので，この式左辺は $N\to\infty$ で発散してしまう．$|C|=1$ の場合は重解となるのでこれを除くとすると，残るのは，$|C|<1$ の場合である．このときは λ_1，λ_2 は絶対値 1 の複素数となり，互いに複素共役となるので，

$$\lambda_1 = e^{i\phi}, \qquad \lambda_2 = e^{-i\phi}, \qquad \phi = \mathrm{Tan}^{-1}\Big(\frac{\sqrt{1-C^2}}{C}\Big) \tag{2.26}$$

とおく．ただし，ここで，Tan^{-1} の主値は，通常，$-\pi/2<\phi<\pi/2$ の範囲にとられるが，ここでは，$C<0$ のときは ϕ に π を加えたものとし，ϕ の範囲を $0\le\phi<\pi$ とする．これには，2 つの理由がある．一つは，$C=0$ で ϕ が不連続になるのを避けるため，もう一つは，$\sin(\phi)$ が正になるようにしておかないと，以下の固有関数の規格化のところで，規格化定数が正定値にならないためである．これを用いて，(2.25) 式の左辺をさらに計算すると，

$$X_N(N+1) = -\frac{1}{\sin(\phi)}\Big[\big(\mu k\sin(k)-\cos(k)\big)\sin\big((N+1)\phi\big)+\sin(N\phi)\Big] \tag{2.27}$$

となり，ここで，$0\le\phi<\pi$ に対する超関数公式

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\sin(M\phi)}{\pi\sin(\phi)} = \delta(\phi) \tag{2.28}$$

を使うと，

$$\lim_{N\to\infty} X_N(N+1) = -\pi\big[\mu k\sin(k)+1-\cos(k)\big]\delta(\phi) \tag{2.29}$$

となる．ここで，$\phi=0$ となるのは，$|C|=1$ の場合で，これは重解の場合として初めから除いているので，この式の右辺は，$\phi\ne0$ に対し，超関数的にはゼロとみなされる．ゆえに，μ の値が与えられたとき，$|C|<1$ となるときの k の値がこの振動系の固有値となる．詳しくは，つぎの 3 節で述べるが，固有値 k は連続した領域がとびとびに表れ，いわゆるバンド構造となる．各バンドは，$C=\pm1$ となる $k=\ell\pi$, $(\ell=0,1,2,\cdots)$ から始まり，ℓ の値が大きくなるにつれ，バンドの幅 δ_ℓ は小さくなる．しかし，これを k の値として解析的に求めることは不可能である．ここでは，これを数値的に計算したものを次節の図 1 に示す．

k の値が，ある特定のバンド内にあるときの (2.8) 式を $X_n(x,k)$ と k 依存性を明示して，これを固有関数とする．この関数は，これまでの議論から，(2.23) 式の固有ベクトル展開を用いて，

$$X_n(x,k) = \big(\sin\big(k(x-n)\big) \quad \cos\big(k(x-n)\big)\big)\left[P_1(k)e^{in\phi}\begin{pmatrix} f_1(k)\\ \sin(k)\end{pmatrix} + P_2(k)e^{-in\phi}\begin{pmatrix} f_2(k)\\ \sin(k)\end{pmatrix}\right] \tag{2.30}$$

と書かれる．なお，この関数には複素数が入り混じっているが，実際は，実関数であり，さらに変形していくと，ちょっと長い式になるが，

$$\begin{aligned} X_n(x,k) = -\frac{\sin(n\phi)}{\sin(\phi)\sin(k)}\Big[&\Big(1-2\cos(\phi)\cos(k)+\cos^2(k)-\mu k\sin(k)\cos(k)\Big)\sin\big(k(x-n)\big) \\ &+\sin(k)\Big(\mu k\sin(k)-\cos(k)\Big)\cos\big(k(x-n)\big)\Big] \\ &-\frac{\mu k\sin\big((n+1)\phi\big)}{\sin(\phi)}\sin\big(k(x-n)\big)-\frac{\sin\big((n-1)\phi\big)}{\sin(\phi)}\cos\big(k(x-n)\big) \end{aligned} \tag{2.31}$$

となる．

2.3 固有関数の規格化

ここでは，固有関数の規格化をするため，固有値としての 2 個の波数を k, k'，対応する関数を $X(x,k)$, $X(x,k')$ としたとき，密度関数 $\rho(x)$ を重みとする積分

$$\int_{-0}^{\infty} \rho(x)X(x,k)X(x,k')dx \tag{2.32}$$

を考える．ここでは，この積分を，前回との関係から，積分範囲を -0 から $N+1$ までの積分とし，その後，$N\to\infty$ の極限として求めることにする．この積分を，密度関数 $\rho(x)$ に含まれるデルタ関数の部分と残りの部分とに分けて実行した前回の結果を引用すると，

$$\int_{-0}^{N+1} \rho(x)X(x,k)X(x,k')dx = -\frac{1}{k^2-k'^2}\Big[\frac{dX_N(x,k)}{dx}X_N(x,k') - \frac{dX_N(x,k')}{dx}X_N(x,k)\Big]_{x=N+1} \tag{2.33}$$

となる．ここで，(2.26) および (2.30) 式から，

$$\begin{aligned} X_N(N+1,k) &= \sin(k)\Big[P_1(k)e^{i(N+1)\phi} + P_2(k)e^{-i(N+1)\phi}\Big] \\ \frac{X_N(x,k)}{dx}\Big|_{x=N+1} &= k\Big[P_1(k)\big(\cos(k)e^{i\phi}-1\big)e^{iN\phi} + P_2(k)\big(\cos(k)e^{-i\phi}-1\big)e^{-iN\phi}\Big] \end{aligned} \tag{2.34}$$

となるので，これを (2.33) 式右辺に代入し，超関数の式

$$\lim_{N\to\infty}\frac{e^{\pm iN(\phi-\phi')}}{k-k'} = \pm i\pi\,\mathrm{sgn}\Big(\frac{d\phi}{dk}\Big)\delta(k-k'), \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{e^{\pm iN(\phi+\phi')}}{k-k'} = 0 \tag{2.35}$$

を用いる．ここに，sgn は符号関数である．これを用いると，(2.33) 式の $N\to\infty$ の極限は

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-0}^{N+1} \rho(x)X(x,k)X(x,k')dx = N^2(k)\delta(k-k') \tag{2.36}$$

となる．ここに，規格化定数 $N^2(k)$ は

$$N^2(k) = 2\pi|\sin(k)|\sin(\phi)P_1(k)P_2(k) \tag{2.37}$$

と定義する．ここで，$\sin(k)$ に絶対値が付いたのは，$d\phi/dk$ の符号と $\sin(k)$ の符号が一致するためである．また，$P_1(k)P_2(k)$ は，(2.24) の定義式から，

$$P_1(k)P_2(k) = \frac{\big[\mu k\sin(k) - \cos(k) + \cos(\phi)\big]^2 + \sin^2(\phi)}{4\sin^2(k)\sin^2(\phi)} \tag{2.38}$$

となる．これは明らかに正定値であり，(2.26) 式のところで説明したとおり，$\sin(\phi)$ は正になるように ϕ のとり方を決めたので，(2.37) 式の規格化定数 $N^2(k)$ は正定値となる．

2.4 初期値問題

変位 $U(x,t)$ の一般解は，固有関数に時間部分の $\sin(kt)$, or $\cos(kt)$ を掛けたものの重ね合わせで書ける．ここでは，$t=0$ の瞬間にゼロ番の錘に衝撃を加えた場合の解析をする．衝撃を与えることで，錘には力積が生じ，この力積は運動量の変化となって現われる．ここでは，初期条件を前回と同じく，

$$U(x,0)=0, \qquad \rho(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mu v_0\delta(x) \tag{2.39}$$

とおく．ここに，v_0 はゼロ番の錘の初速度である．

ここで，ℓ 番目のバンドに属する k の固有値の範囲を $(\ell\pi,\ \ell\pi+\delta_\ell)$，$(\ell=0,1,2,\cdots)$ としたとき，変位 $U(x,t)$ を

$$U(x,t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\ell\pi+0}^{\ell\pi+\delta_\ell}C(k)X(x,k)\sin(kt)dk \tag{2.40}$$

と展開しておく．これで，初期条件の第 1 式は満たしているので，第 2 式を適用すると，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\ell\pi+0}^{\ell\pi+\delta_\ell}kC(k)\rho(x)X(x,k)dk=\mu v_0\delta(x) \tag{2.41}$$

となる．この両辺に $X(x,k')$ を掛けて x で積分すると，固有関数の直交性 (2.36) 式が使え，$C(k)$ の値が，

$$C(k)=\frac{\mu v_0 X(0,k)}{kN^2(k)}=\frac{\mu v_0}{kN^2(k)},\qquad X(0,k)=B_0=1 \tag{2.42}$$

と求まり，これを (2.40) 式に戻して，変位 $U(x,t)$ が

$$U(x,t)=\mu v_0\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\ell\pi+0}^{\ell\pi+\delta_\ell}\frac{1}{kN^2(k)}X(x,k)\sin(kt)dk \tag{2.43}$$

と求められる．逆にこの式を時間で微分し，$x=0,\ t=0$ とするとゼロ番の錘の初速度 v_0 になるはずであるが，これは，

$$\mu\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\ell\pi+0}^{\ell\pi+\delta_\ell}\frac{1}{N^2(k)}dk=1 \tag{2.44}$$

という恒等式となる．これは，数値計算をしたときの精度のチェックに使える．

3　数値計算例

初めに，(2.18) 式で定義される C が $|C|<1$ を満たす領域がどのような形になるかを示すものを図 1 に掲げる．

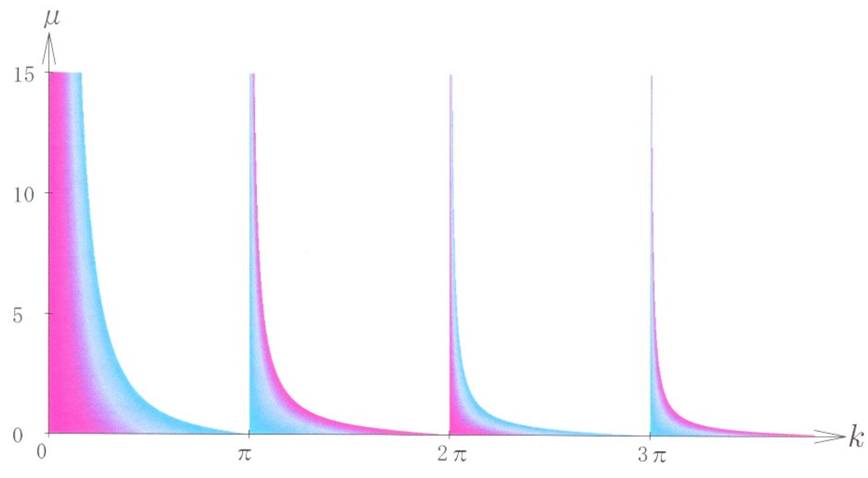

図 1　$|C|<1$ となる領域

この図は，2 次元平面 $0 \le k \le 12$, $0 \le \mu \le 15$ の範囲内を細かな点に分割し，それらの点を走査させながら，各点ごとに C の値を計算し，その絶対値が 1 を超えるときは何も描かず，1 になるときは赤点で，また，その値が小さくなるにつれ，色を連続的に変化させ，-1 になるときを青点で描くようにした．この図から，μ を一定値に固定したとき，波数 k はある幅を持って連続した領域が離散的に現れるという，いわゆるバンド構造になっていることが見て取れる．どのバンドにも C の値は -1 から 1 までの値が存在することに注意する．また，このグラフで，不連続に立ち上がるところは，$k = \ell\pi$, $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ に相当し，これが ℓ 番目のバンドの始まり点となる．各バンドの幅は，(2.40) 式のところで用いたように δ_ℓ とする．

つぎに，(2.18) で定義される C, および，(2.26) 式で定義される ϕ を k の関数としてグラフ化したものを，図 2 に示す．ただし，ここでは，μ の値は $\mu = 1$ とした．この図中で，青線が C, 赤線が ϕ である．また，ついでながら，(2.37) (2.38) 式で定義される規格化定数 $N^2(k)$ も緑線で表わしておいた．ただし，この規格化定数はあまり大きくなりすぎるので，$N^2(k)$ を 2π で割ったものである．

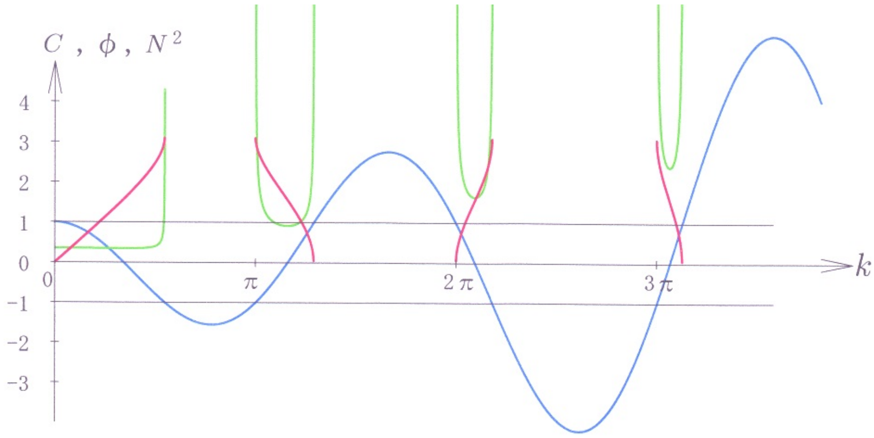

図 2 C : 青，ϕ : 赤，および $N^2/(2\pi)$: 緑 の各グラフ，$\mu = 1$

つぎに，$\mu = 1$ としたときの各バンドの幅 δ_ℓ を 200 個求めてみたが，その初めの 10 個を挙げると，

$$\delta_\ell = 1.72066, \quad 0.91592, \quad 0.56805, \quad 0.40158, \quad 0.30822, \quad 0.24936, \quad 0.20911, \quad 0.17992, \quad 0.15783, \quad 0.14053 \tag{3.1}$$

と，ℓ 番号が上がるごとに，漸次その幅は小さくなる．この 200 個求めた δ_ℓ を用いて (2.44) 式をチェックした結果は，左辺の値が 0.999002 となり，かなり高精度であることが分かる．

ここではさらに，この精度の良さを使って，(2.43) 式の変位 $U(x,t)$ を求めてみる．このときは，固有関数 $X_n(x,k)$ として (2.31) 式を用いる．結果のグラフを次ページの図 3，図 4 に示す．これらの図では，x の範囲を前回と同じ $0 \le x \le 6$ とし，時間については，図 3 で $0 \le t \le 10$, 図 4 で $10 \le t \le 20$ とした．前回は有限長の弦だったので途中で反射波が発生し，進行波と反射波が重なりあうことがあったが，今回は無限長の弦を用いているので，反射波が発生しないということが，前回との大きな違いである．そのかわり，今回の場合は，《永久変位》とでも言うべきものが残ってしまう．これは，(2.43) 式において，時間 t が十分に大きくなったとき，

$$\sin(kt)/k \xrightarrow{t\to\infty} \pi\delta(k) \tag{3.2}$$

とデルタ関数的になってしまうことが原因と考えられる．これを考慮して，k が十分ゼロに近いところでの

ϕ, $N^2(k)$, $X_n(k)$ の漸近形を見積もると，それぞれ，

$$\phi \approx \sqrt{1+\mu}\,k, \qquad N^2(k) \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\mu}, \qquad X_n(x,k) \approx 1 \tag{3.3}$$

となるので，(2.43) 式の変位 $U(x,t)$ は，t が x に比べ十分に大きいところで，一定値，

$$U(x,t) \approx \frac{\mu v_0}{\sqrt{1+\mu}} \tag{3.4}$$

になると考えられる．ここで，(2.43) 式における k 積分は正の側だけなので，$\delta(k)$ からの寄与は半分とした．実際，グラフから見られる値はこの値とよく一致している．これが永久変位というものであろう．

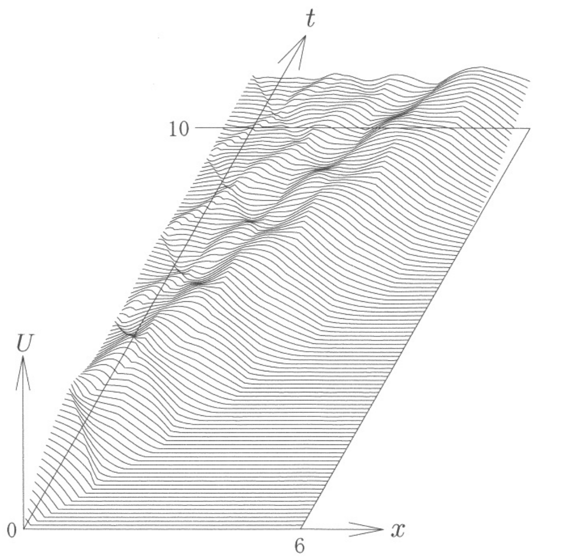

図 3　変位 $U(x,t)$,　$0 \le t \le 10$

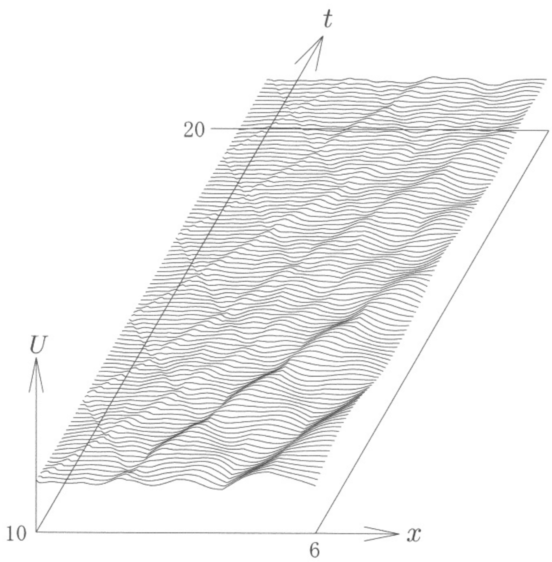

図 4　変位 $U(x,t)$,　$10 \le t \le 20$

4　おわりに

今回のものは，前回の有限個で解析した錘の個数を無限個に拡張するだけであるから，簡単にすぐできるはずと思っていた．ところが，いざ始めてみるとそうはいかなかった．固有関数の規格化積分のところで，つまづいてしまった．出るはずの $\delta(k-k')$ がなかなか出てこない．ここで諦めかと何度も思ったが，2 週間くらいしてようやく何故できないのかが分かってきた．この原因は (2.28) 式のデルタ関数に固執してしまったことである．これを一旦忘れて，もう一度眺めてみると，この場合は $\sin(N\phi)/\sin(\phi)$ が $N \to \infty$ でデルタ関数になるのではなく，$e^{iN(\phi-\phi')}/(k-k')$ がデルタ関数になることに気が付いた．これは間違えた計算をしていたわけではなく，計算順序が違っていただけである．このようなことは，初めて経験することで，不思議としか言いようがない．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんの大変貴重なご助言をいただきました．先生に心から感謝いたします．

ガロア理論以前

飯島光治[*1]・矢野　忠[*2]

Before the Galois Theory

Kouji IIJIMA[*3]　and　Tadashi YANO[*4]

1　はじめに

5 次方程式以上の代数方程式に対して四則演算（加減乗除）とべき根によって表される解の公式がないことはよく知られている．ところがこのことを証明したという，ガロア理論を数学者でないものには理解することがなかなか難しい．

このエッセイでは，ガロア理論を理解する前の段階として，解の公式と解の互換に重点をおいて，2 節と 3 節は『数学の言葉で世界を見たら』 [1] を読んで 2 次と 3 次方程式についてまとめた．また 4 節は 4 次方程式についての『群の発見』 [2] に従ったアプローチである．5 節は 5 次方程式の解の公式についての著者の理解の現状を簡潔に述べた[*5]．

2　２次方程式の解

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解を x_1, x_2 と表す．このときつぎの解と係数の関係がある．

$$x_1 + x_2 = -a$$
$$x_1 x_2 = b$$

このとき係数 a, b は解 x_1, x_2 の対称式である[*6]．

ここで

$$\beta_+ = x_1 + x_2 \tag{2.1}$$
$$\beta_- = x_1 - x_2 \tag{2.2}$$

おくと

$$x_1 = \frac{1}{2}(\beta_+ + \beta_-) \tag{2.3}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-) \tag{2.4}$$

と表せる[*7]．ここで (2.1) の右辺は対称式だが，(2.2) の右辺は対称式ではない．それは $x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1)$ であり，これは交代式だからである．しかし，この交代式はそれを 2 乗すると対称式になる[*8]．

[*1] 春日部市（埼玉）
[*2] 元愛媛大学
[*3] 数学教育協議会々員
[*4] yanotad@earth.ocn.ne.jp
[*5] このエッセイは飯島が書いた初稿を十分に理解できなかった，矢野が大幅に書き加えてできた．そのために初稿の意図を十分に生かせていないかもしれない．
[*6] 対称式とは解についた添字 1, 2 を交換しても変わらない式のことである．
[*7] 解 x_1, x_2 が (2.5),(2.6) で示されるように方程式の係数で表せる．
[*8] 対称式は基本対称式で表されるという定理があり，また交代式は差積と対称式とで表される．差積は 2 乗すると対称式となる．

すなわち，

$$
\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\
&= a^2 - 4b \\
x_1 - x_2 &= \pm\sqrt{a^2 - 4b}
\end{aligned}
$$

ここで，平方根が現れている．

したがって

$$x_1 + x_2 = -a \tag{2.5}$$

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b} \tag{2.6}$$

この式を辺々加えたり，引いたりすれば，解の公式が求まる．

もともと方程式を解くことは係数から解を計算で導くことであるが，逆に解から係数を求めることに逆転させた．これはラグランジュの功績である[*9]．

対称式かどうかを調べるのに解の添字 1 と 2 を交換させるという操作を考えたが，これを記号で

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

で表す．また解の添字を交換しない操作を

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

と表す．

この二つの操作 I と Γ は群をなす[*10]． 2 つのものを入れかえる群を **2 次の対称群**といい，S_2 で表す．

表 1　S_2 の積表

	I	Γ
I	I	Γ
Γ	Γ	I

3　3 次方程式の解

3 次方程式について考えるとき，2 次方程式との関連からは I, Γ にあたるものは何か．これは解の添字の入れ替えで対称かどうかを示す操作をどのように表すかということである．

3 次方程式の解の置換を表す一つの方法はつぎの 6 通りの置換である．記号で表すと

$$
\begin{matrix}
I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \Omega^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \Omega\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \Omega^2\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{matrix} \tag{3.1}
$$

である．すなわち，この 3 次方程式の解の 6 つの置換は置換 Ω, Λ の組み合わせで表すことができる．

これを **3 次の対称群**といい，S_3 で表す．

[*9] ラグランジュ (1736-1813)

[*10] 表 1 参照

または，図形的には正三角形を中心（重心）のまわりに反時計方向に $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転させる操作および頂点 1 より垂線をおろし，それを軸として π 回転させる操作で，正三角形を自分自身に重ねる群である[*11].

さて，2 節と同じような議論を 3 次方程式に対してしよう．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解を x_1, x_2, x_3 とする．解と係数の関係から

$$a = -(x_1+x_2+x_3) \tag{3.2}$$
$$b = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \tag{3.3}$$
$$c = -x_1x_2x_3 \tag{3.4}$$

であるから，この 3 次方程式の係数 a, b, c は 3 つの解 x_1, x_2, x_3 の対称式である．

それで 3 次方程式の解の公式を見つけるには 3 つの解 x_1, x_2, x_3 の組み合わせで表せる対称群 S_3 で不変なものを見つければよい．すなわち，3 つの解 x_1, x_2, x_3 の入れ替えで対称式となるものを求めればよい[*12].

ただし，つぎのことが参考になるであろう．2 次方程式の解を求めるときに使った補助式 β_+, β_- は解 x_1, x_2 の 1 次結合であった．3 次方程式の場合にもそれと同じような解 x_1, x_2, x_3 の 1 次結合である補助式 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ をつくれないだろうか.

2 次方程式のときに使った補助式 β_- は解の入れ替えに対して対称ではなく，解を入れ替えると β_- は $-\beta_-$ となり，(-1) がかかる．同様に解の入れ替えに対して完全に不変でなくとも $\beta \to z\beta$ という組み合わせはないだろうか[*13].

というのも，2 次方程式のときは，β_- を 2 乗することによって，解の入れ替えに対して対称な式を求めることができた．それと類似なことができればよい．

$\Omega^3 = I$ なので 3 回 Ω を演算すると元に戻るという性質がある．すなわち，解 x_1, x_2, x_3 にかかる係数 z として $z^3=1$ となる z を許容することができる．$z^3=1$ を解くと，解として

$$z = 1,\ \omega,\ \omega^2,\quad \left(\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \tag{3.5}$$

が得られる．

まずは 3 つの解 x_1, x_2, x_3 の入れ替えで対称な式を見つけていきたい．ただし，上に述べたように始めから対称群 S_3 で不変の式だけではなく，解の係数に $1, \omega, \omega^2$ のいずれかがかかった解の 1 次結合を求めるという風に方針をゆるめておく．

そして，そういう 3 つの 1 次結合が求まったならば，それらをべき乗した式から対称群 S_3 をみたす対称式を求めればよい．その対称式のべき乗根を求めれば，解を係数で表すことができる．

さて，対称群 S_3 は操作 Ω, Λ の二つの組み合わせからできているので，まずは Ω で不変になっている式を探す．これは簡単に見つかって

$$\beta_0 = x_1+x_2+x_3 \tag{3.6}$$

である．この β_0 は操作 Ω によって，不変である．特に解に係数をかけなかったが，もともと解 $z=1$ がかかっていることに対応する．

これは

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

で不変になっている．

[*11] これは普通には C_{3v} という記号で知られた群である．どの群のテクストにも出てくるという有名な群の例である．付録 0 に簡単な説明をした．ここで，回転角は弧度法で表してある．

[*12] 2 次方程式では解 x_1, x_2 の入れ替えの対称性を考えた．

[*13] この大栗先生の説明がとてもわかりやすい．

つぎに，Ω による解の入れ替えで解にかかる係数 z として ω や ω^2 がかかる解の 1 次結合は求められないだろうか．

ラグランジュは大変な計算の結果として，β_0 の他に

$$\beta_1 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \tag{3.7}$$
$$\beta_2 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{3.8}$$

を見出した[*14]．

ここで，この β_1，β_2 が操作 Ω でどのように変化するか見ておこう[*15]．

$$\Omega\beta_1 = x_2 + \omega^2 x_3 + \omega x_1 = \omega\beta_1 \tag{3.9}$$
$$\Omega\beta_2 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2\beta_2 \tag{3.10}$$

となる．

すなわち，操作 Ω で

$$\beta_0 \to \beta_0 \tag{3.11}$$
$$\beta_1 \to \omega\beta_1 \tag{3.12}$$
$$\beta_2 \to \omega^2\beta_2 \tag{3.13}$$

に変換する．

つぎに，操作 Λ によって，β_0，β_1，β_2 はどのように変換するだろうか[*16]．

それらは

$$\Lambda\beta_0 = \beta_0 \tag{3.14}$$
$$\Lambda\beta_1 = x_1 + \omega^2 x_3 + \omega x_2 = \beta_2 \tag{3.15}$$
$$\Lambda\beta_2 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = \beta_1 \tag{3.16}$$

であるから，操作 Λ によって

$$\beta_0 \to \beta_0 \tag{3.17}$$
$$\beta_1 \to \beta_2 \tag{3.18}$$
$$\beta_2 \to \beta_1 \tag{3.19}$$

に変換する．

まず Ω で β_0 は不変である．β_1, β_2 は変換して，それぞれ $\omega\beta_1$ と $\omega^2\beta_2$ となるが， $\omega^3 = 1$ が成り立つので，

$$\omega^3\beta_1^3 = \beta_1^3 \tag{3.20}$$
$$\omega^6\beta_2^3 = \beta_2^3 \tag{3.21}$$

となる．

[*14] これをラグランジュの分解式という．２次方程式の β_+，β_- に対応した式である．

[*15] Ω は

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

であった．

[*16] Λ は

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

であった．

したがって，Ω によって，$\beta_0, \beta_1^3, \beta_2^3$ は不変である．

つぎに，Λ によって不変の式はどうなるか考えてみよう．

Λ によって β_0 は不変であることはすぐにわかる．しかし，β_1 と β_2 はお互いに入れ替わる．だから β_1 と β_2 は不変ではない．しかし，

$$\Lambda(\beta_1^3 + \beta_2^3) = \beta_1^3 + \beta_2^3 \tag{3.22}$$
$$\Omega(\beta_1^3 + \beta_2^3) = \beta_1^3 + \beta_2^3 \tag{3.23}$$

すなわち $\beta_1^3 + \beta_2^3$ は Λ によっても Ω によっても不変である．

つぎに，$\beta_1^3 - \beta_2^3$ について考えると，これは Ω では不変だが，Λ では符号が変わる．それで $(\beta_1^3 - \beta_2^3)^2$ を考えると，これは Ω でも Λ でも不変である．

以上で操作 Ω と Λ で不変な式は β_0，$\beta_1^3 + \beta_2^3$，$(\beta_1^3 - \beta_2^3)^2$ であることがわかった．これらは対称式であるから３次方程式の係数で表すことができる．

それらの式は

$$\beta_0 = -a \tag{3.24}$$
$$\beta_1^3 + \beta_2^3 = -2a^3 + 9ab - 27c := A \tag{3.25}$$
$$(\beta_1^3 - \beta_2^3)^2 = (2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3 := B \tag{3.26}$$

となる．A, B の導出は付録 1 を参照せよ．

$$\beta_1^3 + \beta_2^3 = A \tag{3.27}$$
$$\beta_1^3 - \beta_2^3 = \pm\sqrt{B} \tag{3.28}$$

であるから，また β_1^3, β_2^3 は

$$\beta_1^3 = \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{B}) \tag{3.29}$$
$$\beta_2^3 = \frac{1}{2}(A \mp \sqrt{B}) \tag{3.30}$$

と求まり，さらにこれらの 3 乗根をとると β_1, β_2 が求まる．

ところで $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ は

$$\beta_0 = x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.6}$$
$$\beta_1 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \tag{3.7}$$
$$\beta_2 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{3.8}$$

であるから，これから $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いて，x_1，x_2，x_3 について

$$x_1 = \frac{1}{3}(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \tag{3.31}$$
$$x_2 = \frac{1}{3}(\beta_0 + \omega\beta_1 + \omega^2\beta_2) \tag{3.32}$$
$$x_3 = \frac{1}{3}(\beta_0 + \omega^2\beta_1 + \omega\beta_2) \tag{3.33}$$

と解くことができる[*17]．

今まで述べて来たことから，この x_1，x_2，x_3 は β_0，β_1，β_2 で表され，さらに β_0，β_1，β_2 を係数 a, b, c で表すことができるので，解の公式を導くことができる．

以上は計算の手間はかかるが，著者には抽象的な説明よりも納得がいくものである．

[*17] 解法は付録 2 を参照せよ．

4　4 次方程式の解

4 次方程式について 3 次方程式と同様の取り扱いをしようとしたら，壁にぶつかってしまった．

それでこの節では，『群の発見』 [5] のアプローチを紹介する．

4 次方程式[*18]

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{4.1}$$

の解を x_1, x_2, x_3, x_4 として

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4 \tag{4.2}$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \tag{4.3}$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 \tag{4.4}$$

とおく[*19]．

4 次方程式の解と係数の関係は

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{4.5}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = p \tag{4.6}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -q \tag{4.7}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = r \tag{4.8}$$

である．

このとき

$$y_1 + y_2 + y_3 = p \tag{4.9}$$
$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -4r \tag{4.10}$$
$$y_1y_2y_3 = q^2 - 4pr \tag{4.11}$$

が成り立つ．このとき

$$y^3 - py^2 - 4ry - (q^2 - 4pr) = 0 \tag{4.12}$$

となり, y_1, y_2, y_3 は分解 3 次方程式 (4.12) の解である．3 次方程式はかならず解くことができる[*20]．

そして (4.2)-(4.4) のとき y_1, y_2, y_3 を既知として，4 次方程式は $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ の解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めるにはどうしたらよいか．

ちょっと考えたら，y_1, y_2, y_3 と x_1, x_2, x_3, x_4 との間には (4.2)-(4.4) の 3 つの関係があり，また付録 3 に示したように 4 次方程式の判別式と分解 3 次方程式の解 y_1, y_2, y_3 との間には

$$\begin{aligned} D &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2 \\ &= (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

がある．見かけ上は未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対して方程式は (4.2)-(4.4) と (4.13) の 4 つの方程式があるので，未知数と方程式の数は一致している．しかし，これらの 4 つの方程式から x_1, x_2, x_3, x_4 を簡単に求められそうにない．

---

*18 (4.1) には 3 次の項が欠けている．3 次の項がある $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ から出発しても，$x \to x - \frac{a}{4}$ と変換すれば，x^3 の項を消去できる．

*19 こう唐突におかれて反感をもたない人はよほどの秀才だけだろう．実は y_1, y_2, y_3 は元の 4 次方程式の 3 次分解方程式の解となっているという歴史的知見にもとづいている．これについては付録 3 を参照せよ．

*20 (4.12）はもちろん $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$ から得られた方程式である．付録 3 を参照せよ．

そこでちょっとした工夫がいる．y_1, y_2, y_3 は x_1, x_2, x_3, x_4 の中から 2 つを選んだ積の 1 次結合であるが，これでは x_1, x_2, x_3, x_4 を求めるのは面倒そうである．それでできたら，x_1, x_2, x_3, x_4 の一次式の 1 次結合を解とする方程式を求められないか．このときに (4.2)-(4.4) を用いられるようにしたい．ちょっと考えてみよう．$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ であるから，x_1x_2 の積を和に置き換えた $x_1 + x_2$ と x_3x_4 の積を和に置き換えた $x_3 + x_4$ を解とする 2 次方程式を考える．

いま

$$[x - (x_1 + x_2)][x - (x_3 + x_4)] = 0 \tag{4.14}$$

を考えてみよう．この方程式を展開してみれば，

$$\begin{aligned} x^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) &= 0 \\ x^2 + (p - y_1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

が得られる．ここで，(4.5) と (4.6) とを用いている．

同様に $y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$ を考える．このときも x_1x_3 の積に対して和 $x_1 + x_3$ を考え，x_2x_4 の積に対して和 $x_2 + x_4$ を考える．

この $x_1 + x_3$，$x_2 + x_4$ の二つを解とする 2 次方程式を考えれば，

$$\begin{aligned} x^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) &= 0 \\ x^2 + (p - y_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

が得られる．ここで，(4.5) と (4.6) とを用いている．

同様に考えると $y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ を考えることになるのだが，これはもう新たには考えなくてもよい．なぜなら，y_1, y_2 を独立に考えると解と係数の関係 (4.11)，$y_1y_2y_3 = q^2 - 4pr$ から y_3 は一義的に決まってしまうからである．

それで $y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ は考えなくてもよい．原田はその代わりに

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) = -8q \tag{4.17}$$

を考える[*21]．

なぜ，このような左辺を考えたかの説明は原田の本 [5] には書かれていない．この左辺は 4 次方程式のラグランジュの解法で得られた知見に由来するのではないかと思われる．ここではその由来については述べない．ラグランジュの解法については [6] またはその解説 [7] を参照せよ．

それはともかくとして，(4.17）から $(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)$ が求められる．いまその値をここでは

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = C \tag{4.18}$$

とおくことにしよう．

さらに，この (4.18) と，いままでわかっている $x_1 + x_2, x_3 + x_4$, $x_1 + x_3, x_2 + x_4$ から求められる $(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4), (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)$ とをあわせて

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{4.19}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = A \tag{4.20}$$
$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = B \tag{4.21}$$
$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = C \tag{4.22}$$

[*21] なぜ急に (4.17) を考えたかがわかり難いので，前の考えのつづきとして，素朴に $x_1 + x_4$ と $x_2 + x_4$ を解とする 2 次方程式を考えたほうが簡単ではないかとする考えもある．このやりかたについては付録 4 に述べる．ここでは述べなかったが，(4.15) と (4.16) の解としてどのように符号をとるかかが問題である．この点についても付録 4 で検討する． [6] の記号を用いれば，(4.17) は $u_1u_2u_3 = -8q$ となる．

としよう．ここで，A, B, C はすでに求められている定数である．

(4.19)-(4.22) から

$$x_1 = \frac{1}{4}(A + B + C) \tag{4.23}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(A - B - C) \tag{4.24}$$
$$x_3 = -\frac{1}{4}(A - B + C) \tag{4.25}$$
$$x_4 = -\frac{1}{4}(A + B - C) \tag{4.26}$$

が求められる．

5　5 次方程式にむけて

5 次の対称群を考える．3 次のとき，図形は正三角形であったが，なんと 5 次の場合は**正 20 面体**だという．正 20 面体には 120(=5!) 通りの対称となる操作があるのだろうか．このレポートはガロア理論以前であり，計算が大変だが，それをクリアすれば，手ごたえを少し感じている．

（追記）

3 次の方程式のとき

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$
$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$$

の式がでてきたが，これはラグランジュが大変な計算をして偶然見つけたものである．

なお，『ガロアの群論』 [8] には $\tau = a + \omega b + \omega^2 c$ の右辺の各項目の意味づけが述べられている．

また，ガロアが考えたような説明があり[*22]，正規部分群の重要性が指摘されている [9].

（2021.5）

6　付録

6.1　付録 0　正三角形の合同操作群

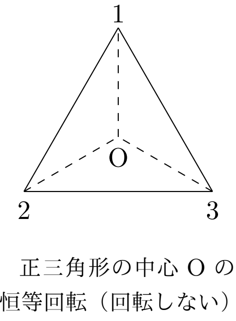

図 1　正三角形の中心 O のまわりの恒等回転（回転しない）I

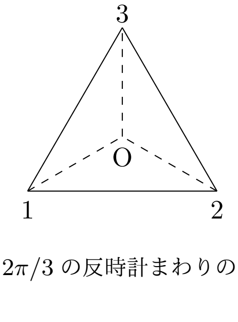

図 2　$2\pi/3$ の反時計まわりの回転 Ω

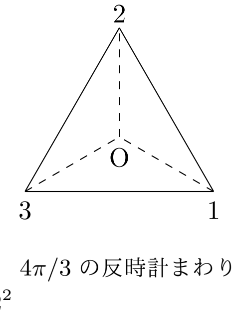

図 3　$4\pi/3$ の反時計まわりの回転 Ω^2

図 1 は三角形の中心 O のまわりに回転させない恒等操作 I の場合を示している．図 2 は中心 O のまわりの角度 $2\pi/3$ の反時計回りの回転 Ω を示している [*23]．図 3 は同様に角度 $4\pi/3$ の回転 Ω^2 である．図 4 は頂点 1 から

[*22] これが難しい．

[*23] 角度はすべて弧度法で表している．

下ろした垂線 01 を軸とする回転角 π の鏡映操作 Λ である．図 5 は図 4 を反時計方向に $2\pi/3$ だけ回転して得られる．すなわち，$\Omega\Lambda$ である．最後の図 6 は図 4 を $4\pi/3$ だけ回転して得られる．すなわち，$\Omega^2\Lambda$ である．

図 5 は, 図 1 の頂点 3 からそれの対辺に下ろした垂線を軸とした鏡映である．図 6 は図 1 の頂点 2 からその対辺に下ろした垂線を軸とする鏡映である．多くの群のテクストの説明は図 4, 5, 6 はそのように説明がされている．

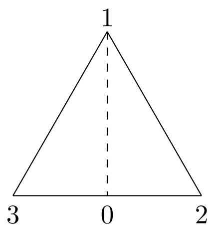

図 4　正三角形の線分 10 を軸とした回転角 π の鏡映変換 Λ

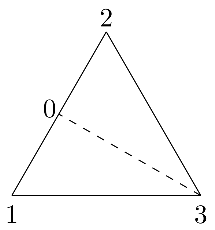

図 5　30 を軸とした π の鏡映変換 $\Omega\Lambda$

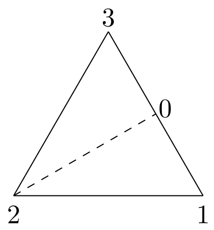

図 6　20 を軸とした π の鏡映変換 $\Omega^2\Lambda$

6.2　付録 1　A, B の導出

A, B の導出では A の導出が面倒である．

A の導出には $\beta_1^3 + \beta_2^3$ を計算すればよい．そのために $\beta_1^3 + \beta_2^3 = (\beta_1 + \beta_2)^3 - 3\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)$ を用いる．

さて，まず $\beta_1 + \beta_2$ と $\beta_1\beta_2$ を求めよう．β_1, β_2 は (3.7),(3.8) で与えられている．

$$
\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 &= 3x_1 - (x_1 + x_2 + x_3) \\
&= 3x_1 + a \qquad (6.1) \\
\beta_1\beta_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\
&= a^2 - 3b \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

であるから

$$(\beta_1 + \beta_2)^3 = (3x_1 + a)^3 \qquad (6.3)$$

$$3\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2) = 3(a^2 - 3b)(3x_1 + a) \qquad (6.4)$$

となる．これらを $\beta_1^3 + \beta_2^3$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
A &:= \beta_1^3 + \beta_2^3 \\
&= (\beta_1 + \beta_2)^3 - 3\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2) \\
&= (3x_1 + a)^3 - 3(a^2 - 3b)(3x_1 + a) \\
&= -2a^3 + 9ab - 27c \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

ここで x_1 は $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解であることを用いた．

いま，$\beta_1^3 + \beta_2^3$ が求められると

$$
\begin{aligned}
B &:= (\beta_1^3 - \beta_2^3)^2 \\
&= (\beta_1^3 + \beta_2^3)^2 - 4\beta_1^3\beta_2^3 \\
&= (2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 4(a^2 - 3b)^3 \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

6.3　付録 2　x_1, x_2, x_3 の計算

この計算は難しくない．

$$\beta_0 = x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.6}$$
$$\beta_1 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \tag{3.7}$$
$$\beta_2 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{3.8}$$

であるから，$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を用いることを考えれば，

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 3x_1 \tag{6.7}$$
$$\begin{aligned}\beta_0 + \omega\beta_1 + \omega^2\beta_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &\quad + \omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3 \\ &\quad + \omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3 \\ &= (1 + \omega + \omega^2)x_1 + 3x_2 + (1 + \omega + \omega^2)x_3 \\ &= 3x_2\end{aligned} \tag{6.8}$$
$$\begin{aligned}\beta_0 + \omega^2\beta_1 + \omega\beta_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &\quad + \omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3 \\ &\quad + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3 \\ &= (1 + \omega + \omega^2)x_1 + (1 + \omega + \omega^2)x_2 + 3x_3 \\ &= 3x_3\end{aligned} \tag{6.9}$$

6.4　付録 3　4 次方程式の解と分解 3 次方程式の解との関係

この付録 3 では元の 4 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 と分解 3 次方程式の解 y_1, y_2, y_3 の関係を導く [3][*24]．
まず元の 4 次方程式は (4.1) によれば，$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ である．これを

$$x^4 = -px^2 - qx - r \tag{6.10}$$

として，この両辺に $yx^2 + \frac{y^2}{4}$ を加えれば，

$$x^4 + yx^2 + \frac{y^2}{4} = (y - p)x^2 - qx + \left(\frac{y^2}{4} - r\right) \tag{6.11}$$

となるが，これは

$$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y - p)x^2 - qx + \left(\frac{y^2}{4} - r\right) \tag{6.12}$$

となる．この式で左辺は完全平方式であるが，右辺も完全平方式となるためには，右辺の 2 次式の判別式が 0 であればよい．

すなわち，

$$q^2 - 4(y - p)\left(\frac{y^2}{4} - r\right) = 0 \tag{6.13}$$

であればよい．この判別式は

$$y^3 - py^2 - 4ry + (4pr - q^2) = 0 \tag{6.14}$$

[*24] [5] にもほとんど同じ説明がある．ところが著者の読み方がわるいのかもしれないが，どうも x_1, x_2, x_3, x_4 と y_1, y_2, y_3 の関係の導出はあまり明らかではない．それで [3] によって説明する．

という未知数 y についての 3 次方程式で，前に与えた (4.12) であった．これを元の 4 次方程式の分解 3 次方程式という．

では，この分解 3 次方程式の解 y_1, y_2, y_3 と元の 4 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 との間にどういう関係が存在するのだろうか．それには判別式 (6.14) が成り立つときには (6.12) の右辺も完全平方式であるから，この右辺を $(\alpha x+\beta)^2$ とおけば，

$$x^2+\frac{y}{2}=\pm(\alpha x+\beta) \tag{6.15}$$

と表すことができる．いま (6.14) の 3 次方程式の一つの解を y_1 とすると二つの 2 次方程式

$$x^2+\alpha x+\left(\frac{y_1}{2}+\beta\right)=0 \tag{6.16}$$

と

$$x^2-\alpha x+\left(\frac{y_1}{2}-\beta\right)=0 \tag{6.17}$$

とが得られる．

いま (6.16) の解を x_1, x_2 とし，(6.17) の解を x_3, x_4 とすると解と係数の関係から

$$x_1x_2=\frac{y_1}{2}+\beta \tag{6.18}$$

$$x_3x_4=\frac{y_1}{2}-\beta \tag{6.19}$$

が得られるから，この式を辺々加えれば，

$$y_1=x_1x_2+x_3x_4 \tag{6.20}$$

が求められる．元の解の組み合わせは，いま用いた x_1, x_2 と x_3, x_4 のほかに x_1, x_3 と x_2, x_4 や x_1, x_4 と x_2, x_3 とがある．これらを使うと

$$y_2=x_1x_3+x_2x_4 \tag{6.21}$$

$$y_3=x_1x_4+x_2x_3 \tag{6.22}$$

が同様に求められる．

判別式の定義から 4 次方程式の判別式は

$$\begin{aligned} D&=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2\\ &=(y_1-y_2)^2(y_1-y_3)^2(y_2-y_3)^2 \end{aligned} \tag{6.23}$$

が成り立つ．そして方程式が重解をもつ条件はこの判別式に対して $D=0$ が成り立つことである [4].

6.5 付録 4　x_1+x_4 と x_2+x_3 を解とする 2 次方程式

出所のあまりよくわからない (4.17) を考える代わりに，(4.14) と (4.16) を導出した考え方に沿って x_1+x_4 と x_2+x_3 を解とする 2 次方程式を考えたらどうかという考えもある．そのほうが (4.17) を解いて x_1+x_4 と x_2+x_3 を求めるより簡単ではないか．それは確かにそうである．

しかし，(4.15) と (4.16) を導いたときにはっきりとはいわなかったことがあった．それは $x^2+(p-y_1)=0$ を解いたときに，これから解 x_1+x_2 と x_3+x_4 とが求められるのだが，二つの解 $x=\pm\sqrt{y_1-p}$ のどちらが x_1+x_2 で，どちらが x_3+x_4 かということを述べなかったことである．どちらをどちらにとってもいいのであるが，$(x_1+x_2)-(x_3+x_4)$ の平方根号の前の符号が正となるように解をとることにしよう．

すなわち，

$$x_1 + x_2 = \sqrt{y_1 - p} \tag{6.24}$$
$$x_3 + x_4 = -\sqrt{y_1 - p} \tag{6.25}$$

ととる．このように解をとれば，$(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ の平方根号の前の符号が正となる．

(4.16) も同様に考えて

$$x_1 + x_3 = \sqrt{y_2 - p} \tag{6.26}$$
$$x_2 + x_4 = -\sqrt{y_2 - p} \tag{6.27}$$

ととる．このように解をとれば，$(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)$ の平方根号の前の符号が正となる．

こうやって (4.17) の前の二つの因数 $(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ と $(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)$ の平方根号の前の符号をそれぞれ正にとると，(4.17) から $(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)$ の値と符号は右辺が $-8q$ と決まっているから，決められる[*25]．

上に述べた (4.15) と (4.16) の解の決め方は，一つの解の平方根号の符号の決め方の単に一つであって他の方法を選んでもよい．ただ二つの解の取り方を決めると $(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)$ の値は決まってくる．もちろん，それは (4.15) と (4.16) の解の決め方に依存する．

こういう事情は (4.15) と (4.16) を延長して

$$[x - (x_1 + x_4)][x - (x_2 + x_3)] = 0 \tag{6.28}$$

を考えるときに

$$x^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = 0$$
$$x^2 + (p - y_3) = 0 \tag{6.29}$$

であるが，(4.17) の右辺の $-8q$ にしたがって, 解として

$$x_1 + x_4 = \sqrt{y_3 - p} \tag{6.30}$$
$$x_2 + x_3 = -\sqrt{y_3 - p} \tag{6.31}$$

をとるか，解として

$$x_1 + x_4 = -\sqrt{y_3 - p} \tag{6.32}$$
$$x_2 + x_3 = \sqrt{y_3 - p} \tag{6.33}$$

をとるかが自動的に決まってくる．ここにはもう任意に解を決めることはできない。

このレポートでは $(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ と $(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)$ の平方根号の前の符号が正であるように解をとっていることに注意しておく．

もちろん，(4.19)-(4.22) での右辺の定数は値と符号を含めて表しているので，この式自身を変更する必要はない．それを x_1, x_2, x_3, x_4 について解くのは中学生でもできるだろう．

[*25] この 2 つの因数の符号を決める自由度があるが，残りの因数 $(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)$ は自由度がない．もちろん，3 つの因数のどの 2 つを自由にとってもよい．

参考文献

[1] 大栗博司,『数学の言葉で世界を見たら』(幻冬社,2015)

[2] 原田耕一郎,『群の発見』(岩波書店,2001)

[3] 志賀浩二,『方程式』(岩波書店,1994)37-39

[4] 志賀浩二,『方程式』(岩波書店,1994)15-16

[5] 原田耕一郎,『群の発見』(岩波書店,2001)63-65

[6] 高木貞治,『代数学講義』(共立出版,1948)196-198

[7] 矢野　忠,4 次方程式のラグランジュの解法,数学・物理通信,11 巻 4 号 (2021.6) 23-28

[8] 中村　亨,『ガロアの群論』(講談社ブルーバックス,2010)

[9] 中村　亨,『ガロアの群論』(講談社ブルーバックス,2010)131

4 次方程式のラグランジュの解法

矢野　忠[*1]

Lagrange's Method for the Equation of Fourth Order

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

飯島・矢野のレポート「ガロア理論以前」 [1] の飯島による初稿を読んで，なかなか納得できなかったのが 4 次の方程式の解法のところだった．

飯島は原田耕一郎『群の発見』 [2] を読んで，それにしたがって 4 次方程式の解の求め方を解説していたのだが，どうも私にはひっかかってしまい，彼のレポートをはじめあまり正しく評価できなかった．

そのうちに『群の発見』では，多くの 4 次方程式の解法から得られた歴史的知見を，それとは明示せずに利用しているのではないか思うようになった．

それで，このエッセイでは歴史的に最後に得られたと思われる 4 次方程式の Lagrange の解法について高木貞治『代数学講義』にしたがって解説をしたい [3]．これは飯島・矢野のレポート [1] を理解するのに必要な知識であると考えるから．

その解説に入る前に 4 次方程式の解法にどんな解法が存在しているのかを名前だけだが，志賀 [4] と高木 [3] にしたがって紹介しておく．

どれが歴史的に古い解法かはわからないが，すくなくとも

1. フェラリの解法
2. デカルトの解法
3. オイラーの解法
4. ラグランジュの解法

が存在する．

解法 1-3 については [4] に詳しく書かれている．このエッセイでは飯島・矢野のレポートを理解するに役立つと思われる解法 4 を解説する．

2　ラグランジュの解法

4 次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ の解は 4 つ存在する[*3]．それらを x_1,x_2,x_3,x_4 としよう．この 4 つの解を 2 つずつペアにわける分け方は

$$
\begin{gathered}
(x_1,x_2) \text{ と } (x_3,x_4)\\
(x_1,x_3) \text{ と } (x_2,x_4)\\
(x_1,x_4) \text{ と } (x_2,x_3)
\end{gathered}
$$

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ で $x\to x-\frac{a}{4}$ と変換すれば，3 次の項を消去できる．

の 3 通りある[*4]

4 つの解 x_1, x_2, x_3, x_4 の有理式で，解の互換によって 3 つの異なった形の式をつくることができる[*5]．これらは

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4 \tag{2.1}$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \tag{2.2}$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 \tag{2.3}$$

である[*6]．

y_1, y_2, y_3 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式でもあるから，4 次方程式の係数から有理的にその値を求めることができる[*7]．したがって，y_1, y_2, y_3 は 3 次の分解方程式の解である．

x_1, x_2, x_3, x_4 の 1 次式で解の互換で対称性を保つものを 3 つつくれないが，

$$u_1 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) \tag{2.4}$$
$$u_2 = (x_1 + x_3) - (x_2 + x_4) \tag{2.5}$$
$$u_3 = (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3) \tag{2.6}$$

とすれば，これらは解 x_1, x_2, x_3, x_4 の互換によって，不変だったり，不変ではないが，符号が変わって $-u_1, -u_2, -u_3$ となったりする[*8]．

しかし，解の互換をした後のこれらの 2 乗

$$u_1^2, u_2^2, u_3^2 \tag{2.7}$$

は y_1, y_2, y_3 と同様に解の互換に対して不変になり，対称性が保たれる．

この 3 つの式 u_1, u_2, u_3 に，もともと解の互換によって対称性が保たれていた

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{2.8}$$

を合わせた 4 つの式が最後に解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めるときに用いられる．

話を本筋に戻すと，u_1^2, u_2^2, u_3^2 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である[*9]．特に積 $u_1u_2u_3$ はそれ自身がもともと対称式である．

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = A \tag{2.9}$$
$$u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2 = B \tag{2.10}$$
$$u_1u_2u_3 = C \tag{2.11}$$

とおけば，$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2$ は 3 次の分解方程式

$$t^3 - At^2 + Bt - C^2 = 0 \tag{2.12}$$

[*4] なぜ 4 つの解を 2 つずつペアに分けるのか．これは代数方程式の係数が解の対称式で表されることと，その解の任意の 2 つの解の互換での対称性を考えるからである．また，代数方程式を解くことは解を，方程式の係数の加減乗除とべき根で表すことであることを思い出しておこう．

[*5] ここは [1] の付録 3 を参照せよ．そこに説明があるので，ここでは説明を繰り返さない．

[*6] この y_1, y_2, y_3 は実は元の 4 次方程式の分解 3 次方程式の解となっている．なお，y_1, y_2, y_3 の x_1, x_2, x_3, x_4 の互換による変換の様子は付録 1 を参照せよ．

[*7] 具体的に述べると，元の方程式を $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ としたとき，

$$y_1 + y_2 + y_3 = p$$
$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -4r$$
$$y_1y_2y_3 = q^2 - 4pr$$

と表される．これらの右辺は 4 次方程式の係数 p, q, r で表されるから，x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式となる．

[*8] この解の互換によって u_1, u_2, u_3 がどのように変換するかは付録 2 をみよ．

[*9] このことは付録 3 をみよ．そこに具体的に示してある．

の解である．

この方程式の 3 つの解を t_1, t_2, t_3 とすれば，

$$u_1 = \pm\sqrt{t_1},\quad u_2 = \pm\sqrt{t_2},\quad u_3 = \pm\sqrt{t_3} \tag{2.13}$$

である．平方根の符号は $u_1u_2u_3 = C$ に適合するように定める．u_1, u_2 の平方根号の前の符号を任意に決めれば，u_3 の符号は $u_1u_2u_3 = C$ から一義的に決まってくる．

$C > 0$ とすれば，その符号は

$$u_1 = \sqrt{t_1},\qquad u_2 = \sqrt{t_2}\qquad u_3 = \sqrt{t_3} \tag{2.14}$$
$$u_1 = \sqrt{t_1},\qquad u_2 = -\sqrt{t_2}\qquad u_3 = -\sqrt{t_3} \tag{2.15}$$
$$u_1 = -\sqrt{t_1},\qquad u_2 = \sqrt{t_2}\qquad u_3 = -\sqrt{t_3} \tag{2.16}$$
$$u_1 = -\sqrt{t_1},\qquad u_2 = -\sqrt{t_2}\qquad u_3 = \sqrt{t_3} \tag{2.17}$$

と定まり，また $C < 0$ とすれば，その符号は

$$u_1 = \sqrt{t_1},\qquad u_2 = \sqrt{t_2}\qquad u_3 = -\sqrt{t_3} \tag{2.18}$$
$$u_1 = \sqrt{t_1},\qquad u_2 = -\sqrt{t_2}\qquad u_3 = \sqrt{t_3} \tag{2.19}$$
$$u_1 = -\sqrt{t_1},\qquad u_2 = \sqrt{t_2}\qquad u_3 = \sqrt{t_3} \tag{2.20}$$
$$u_1 = -\sqrt{t_1},\qquad u_2 = -\sqrt{t_2}\qquad u_3 = -\sqrt{t_3} \tag{2.21}$$

と定まる．

$C < 0$ の場合も $C > 0$ のときと，集合全体で見ると相対的符号の同じものが対応して存在する[*10]．だから前もって $C > 0$ と決めておいてもかまわない．実際に用いるときには u_i，$(i = 1, 2, 3)$ を 2 乗を考えるから．いま C を実数としたが，C は実数ではないかもしれない．そのときには (2.13) の平方根の前の正と負の符号の積と (2.11) の右辺の符号とが一致するようにとればよい．

2 節の冒頭で 4 次方程式を

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{2.22}$$

と表していた．この 4 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 を分解 3 次方程式の解の平方根 $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$ で表すことを考えよう．

このとき $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$ の前の符号として，(2.14) の場合をとれば，

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{2.23}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{t_1} \tag{2.24}$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \sqrt{t_2} \tag{2.25}$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \sqrt{t_3} \tag{2.26}$$

と表される．これを x_1, x_2, x_3, x_4 について解けば，

$$4x_1 = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \tag{2.27}$$
$$4x_2 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \tag{2.28}$$
$$4x_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \tag{2.29}$$
$$4x_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \tag{2.30}$$

[*10] たとえば，(2.14) に対応するのは (2.21) である．同様に (2.15) に (2.20) が，(2.16) に (2.19) が，また (2.17) には (2.18) が対応している．

となる．

いま (2.14) の場合をとったので，さらに (2.15)-(2.17) の 3 つの可能性があるように思われる．しかし，それぞれの場合をとって調べてみると，(2.23)-(2.26) の右辺の式はこれらの場合でつきており，新しい符号の組み合わせはでてこない．ただ，左辺の x_i の i の値が変わっているだけである．番号 i は他のものと区別する以外に意味はないので，もしそうしたいなら x_i の番号を付け替えてやればよい．

3　おわりに

このエッセイは飯島・矢野のレポート「ガロア理論以前」 [1] において急に (4.17) の

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) = -8q \tag{3.1}$$

の左辺が現れるのかを解明するために書いた．このエッセイでの記号 u_1, u_2, u_3 を使えば，上の式は

$$u_1 u_2 u_3 = -8q \tag{3.2}$$

であった．

4　付録

4.1　付録 1　y_1, y_2, y_3 の変換

この付録 1 では x_1, x_2, x_3, x_4 の中の 2 つの解の互換による y_1, y_2, y_3 の変換を調べよう．

まず，$x_1 \leftrightarrow x_2$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_1 \to y_1 \quad (\text{不変}) \\ &y_2 \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$

つぎに，$x_1 \leftrightarrow x_3$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_2 \to y_2 \quad (\text{不変}) \\ &y_1 \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$

さらに，$x_1 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_3 \to y_3 \quad (\text{不変}) \\ &y_1 \leftrightarrow y_2 \end{aligned}$$

また，$x_2 \leftrightarrow x_3$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_3 \to y_3 \quad (\text{不変}) \\ &y_1 \leftrightarrow y_2 \end{aligned}$$

$x_2 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_3 \to y_3 \quad (\text{不変}) \\ &y_1 \leftrightarrow y_2 \end{aligned}$$

最後に，$x_3 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} &y_1 \to y_1 \quad (\text{不変}) \\ &y_2 \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$

である．これからわかるように y_1, y_2, y_3 は集合としては不変になっており，x_1, x_2, x_3, x_4 の中の 2 つの解の互換によって y_1, y_2, y_3 以外のものがでてくることはない．

4.2　付録 2　u_1, u_2, u_3 の変換と $u_1u_2u_3$ の不変性

この付録 2 では x_1, x_2, x_3, x_4 の 2 つの解の互換による u_1, u_2, u_3 の変換と $u_1u_2u_3$ の不変性を調べよう．

まずはじめに，$x_1 \leftrightarrow x_2$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_1 &\to u_1 \quad (\text{不変}) \\ u_2 &\leftrightarrow -u_3 \\ u_1u_2u_3 &\to u_1(-u_3)(-u_2) = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

つぎに，$x_1 \leftrightarrow x_3$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_2 &\to u_2 \quad (\text{不変}) \\ u_1 &\leftrightarrow -u_3 \\ u_1u_2u_3 &\to (-u_3)u_2(-u_1) = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

さらに，$x_1 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_3 &\to u_3 \quad (\text{不変}) \\ u_1 &\leftrightarrow -u_2 \\ u_1u_2u_3 &\to (-u_2)(-u_1)u_3 = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

また，$x_2 \leftrightarrow x_3$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_3 &\to u_3 \quad (\text{不変}) \\ u_1 &\leftrightarrow u_2 \\ u_1u_2u_3 &\to u_2u_1u_3 = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

$x_2 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_2 &\to u_2 \quad (\text{不変}) \\ u_1 &\leftrightarrow u_3 \\ u_1u_2u_3 &\to u_3u_2u_1 = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

最後に，$x_3 \leftrightarrow x_4$ の変換に対しては

$$\begin{aligned} u_1 &\to u_1 \quad (\text{不変}) \\ u_2 &\leftrightarrow u_3 \\ u_1u_2u_3 &\to u_1u_3u_2 = u_1u_2u_3 \quad (\text{不変}) \end{aligned}$$

である．

これらの x_1, x_2, x_3, x_4 の任意の 2 つ解を取り出した互換による変換では u_1, u_2, u_3 は集合としては変わらないか，または変わったとしても単に符号が変わるだけである．

4.3　付録 3　u_1^2, u_2^2, u_3^2 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である

付録 2 の説明で，この付録 3 の命題は十分説明できたと思ったが，それでも納得できない方もおられるようなので，具体的に示しておこう．

4 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式とはこれらの解の互換によって不変な式のことである．付録 2 で示されたのは，これらの解の互換 $x_i \leftrightarrow x_j, (i \neq j)$ によって 3 つの u_i のうちの 1 つが不変であれば，残りの 2 つの u_j, u_k は相互の入れ替わるか，または入れ替わるだけではなく，かつ，負号がつくことが示された．

ここで，対象となる u_1^2, u_2^2, u_3^2 の対称式は

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{4.1}$$
$$u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2 \tag{4.2}$$
$$u_1^2u_2^2u_3^2 \tag{4.3}$$

である．

まず，解の互換 $x_1 \leftrightarrow x_2$ を考えると，付録 2 の結果から u_1 は不変であり，$u_2 \to -u_3, u_3 \to -u_2$ となるから，(4.1)-(4.3) の式はすべて $x_1 \leftrightarrow x_2$ に対して不変である．

$x_1 \leftrightarrow x_3$ に対しても，$x_1 \leftrightarrow x_4$ の対しても同様である．

つぎに，解の互換 $x_2 \leftrightarrow x_3$ を考えると，付録 2 の結果から u_3 は不変であり，$u_1 \leftrightarrow u_2$ となる．すなわち，u_1 と u_2 とが入れ替わるだけである．それだから，もともと u_1^2, u_2^2, u_3^2 の対称式では解の互換 $x_2 \leftrightarrow x_3$ に対して対称式であることがわかる．

解の互換 $x_2 \leftrightarrow x_4$ に対しては，u_2 が不変であり，u_1 と u_3 とが交換するだけである．また，解の互換 $x_3 \leftrightarrow x_4$ に対しても，u_3 が不変であり，u_1 と u_2 とが交換するだけである．

したがって，「u_1^2, u_2^2, u_3^2 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である」ことがわかる．

参考文献

[1] 飯島光治，矢野　忠，ガロア理論以前，数学・物理通信，11 巻 4 号 (2021.6) 10-22

[2] 原田耕一郎，『群の発見』（岩波書店，2001）63-65

[3] 高木貞治，『代数学講義』（共立出版，1948）194-203

[4] 志賀浩二，『方程式』（岩波書店，1994）37-44

編集後記

『数学・物理通信』読者の皆様，こんにちは．このごろは，右を向いても，左を向いてもコロナ，コロナで恐怖心を煽られてしまいます．去年のいまごろはどうせ一年もすると終わるだろうと勝手に思っていたのですが，さにあらず，感染者は益々増え続けるばかりで，私が住む札幌は，5 月の中ごろには，1 日の感染者が 499 人と 500 人に迫る勢いでした．このままでは，いつ自分の身に振りかかってきてもおかしくないと思える状況になってしまいました．6 月に入ってからは少し減少し始めましたが，それでも 1 日あたり 100 人以上の日が続き，単位人口当たりで見ると全国的にも最大級に属するほどです．

これまで感染することなく過ごせたのが不思議なくらいですが，もし感染すると私などはすぐに死んでしまうのではと思っています．その理由は，コロナでの死者はほとんど 60 才以上の人であること，私は若いときに結核にかかり右肺の 3 分の 1 が肺として機能していないこと，および，若いときから 5 年ほど前まで何十年もの間タバコを吸い続けていたため肺全体が弱っているなどの理由です．という訳で，是が非でもコロナ・ワクチンを受けておこうと思い，先日早速，1 回目のワクチンを受けてきました．6 月中には 2 回目も受ける予定なのでこれが済めば，一安心できるといったところです．

私は過去に抗生物質を服用して発疹ができ全身が痒くなって大変な目にあったことがあるので，コロナ・ワクチンを受けるときも，もし副作用でこんなことが起きると大変なことになると，恐怖心でいっぱいでした．しかし，コロナで死ぬよりは発疹だけですむならまだましと思い直し，ワクチンをすることにしました．結果は何の副作用もなく，あっけなく終わってしまい本当にワクチンを打ってくれたのかと疑うくらいでした．まったく，人騒がせな世の中になったものと思わざるを得ません．

話は変わって，今号には，飯島光治・矢野忠さんによる『ガロア理論以前』という論文があります．これは 3 次方程式・4 次方程式の解法として，解の対称性に着目してこれら方程式を解く方法を解説したものです．もともと，3 次方程式にはカルダノ (Cardano) の解法，4 次方程式にはフェラーリ (Ferrari) の解法があり，これらの解法はよく知っていたのですが，ここで紹介された方法は，これら直接解法とはまた一味違った方法で，興味を引くものでした．

この方法がガロアの 5 次以上の一般方程式が代数的に解けないということに繋がるのではと思いますが，そこまでは書かれていないのでよくは分かりません．ついでに言うと，3 次方程式を最初に解いたのはカルダノではなく，タルタリア (Tartaglia) という人で，公表しないことを約束させてカルダノに教えたのに，カルダノは約束を破って公表してしまい，その後，3 次方程式の解の公式はカルダノ公式と言われています．このためタルタリアとカルダノとの間には紛争が続いたと言われています．この辺の歴史も調べてみると面白いものがあると思われます．

（世戸憲治）