数学・物理通信

11巻5号　　2021年9月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2021年9月11日

目次 (Contents)

懸垂線の振動問題 (1)

世戸 憲治 *

Oscillation Problem of Catenary Curve (1)

Kenji SETO*

1　はじめに

鎖の両端を固定して垂らしたときの形を懸垂線 (catenary) という．この曲線が双曲線余弦関数 (cosh) で表されることは，微分積分学の創始者 Leibniz や Johann Bernoulli の時代から良く知られたことで，1690 年代のことである．確かに，この懸垂線の理論はきれいに証明され見事と言うしかないが，これをちょっとでも拡張しようとするとすぐに難問にぶつかってしまう．例えば鎖にさらに錘をつけたり，鎖の密度を場所によって変えたり，この懸垂線周りの振動を扱おうとすると，たちまち解析学の限界に突入してしまう．今回は，この懸垂線周りの振動問題を扱ってみるが，これが如何に難しい問題であるかを分かっていただけたらと思う．

2　通常の懸垂線

いま，長さが 2ℓ, 線密度 ρ の鎖があるものとする．この鎖の両端を同じ高さに持ち上げ，両手の間隔を $2r$ としたときの懸垂線の形を求める．

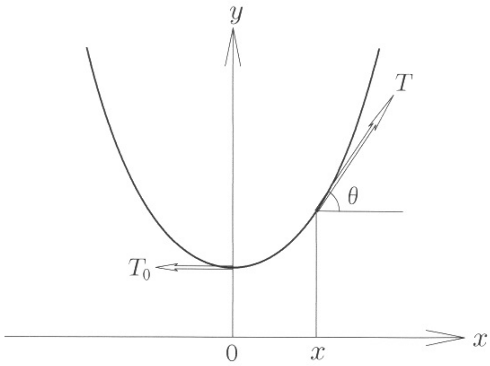

図 1

図 1 に示すように，水平に x 軸，鉛直上方向に y 軸をとり，懸垂線の最下点が y 軸上にくるようにする．この懸垂線のうち，最下点から，x 座標が x の任意の点までの部分に作用する力を考える．この部分の長さ s は，

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

懸垂線の曲線方程式を $y=y(x)$ として,

$$s=\int_0^x \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2.1}$$

となる．ここに，y' は y の微係数で，$y'=dy/dx$ である．これに密度 ρ および，重力加速度 g を掛けるとこの部分に作用する重力は ρsg となる．また，この部分に作用する張力は，最下点で水平方向に作用する T_0 と，点 x のところで懸垂線の接線方向に作用する $T(x)$ である．いま，この点 x での接線の傾き角を θ とすると，これら力の水平方向，鉛直方向の釣り合いの式は，

$$T(x)\cos\theta=T_0, \qquad T(x)\sin\theta=\rho sg \tag{2.2}$$

となる．これらの式から張力 $T(x)$ を消去し，$\tan\theta=y'$, および，(2.1) 式の s を用いると，

$$y'=\frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2.3}$$

となる．ここに，a は長さの次元を持つ量で，

$$a=\frac{T_0}{\rho g} \tag{2.4}$$

と定義する．この (2.3) 式を微分すると，

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \tag{2.5}$$

となり，これを変数分離して，積分形にすると，

$$\int\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{a}\int dx \tag{2.6}$$

となる．ここで，左辺の積分変数を，

$$y'=\sinh\xi \tag{2.7}$$

と変換すると，この積分は容易に実行され，

$$\xi=\frac{x}{a} \tag{2.8}$$

となる．ここでは，積分定数を入れていないが，これは，懸垂線の最下点が $x=0$ の点にくるようにしているので，そこでは，$y'=0$ となるためである．これら (2.7) (2.8) の 2 式から，

$$y'=\sinh(x/a) \tag{2.9}$$

となり，これを積分して，

$$y=a\cosh(x/a) \tag{2.10}$$

と，懸垂線の形が求められる．ここでも，不要な積分定数は，敢えて，入れないことにする．

初めに述べたように，$x=0$ から $x=r$ までの鎖の長さが ℓ であった．この条件のもとに，定数 a, ひいては，最下点のおける張力 T_0 を求めてみよう．すなわち，(2.1) 式より

$$\ell=\int_0^r \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2.11}$$

であるから，(2.9) 式から導かれる

$$\sqrt{1+y'^2} = \cosh(x/a) \tag{2.12}$$

を用いて，この積分式は

$$\ell/a = \sinh(r/a) \tag{2.13}$$

となる．この式から，ℓ, r を与えられたものとして，a を求めることになる．これは超越方程式なので，厳密解は求められないが，図形的には，図 2 に示すように，曲線 $Y = \sinh X$ と直線 $Y = (\ell/r)X$ を描いて，$X > 0$ となるところの交点を求めると，その交点の座標が $(r/a,\ \ell/a)$ となる．ここで，$r < \ell$ であることに注意する．

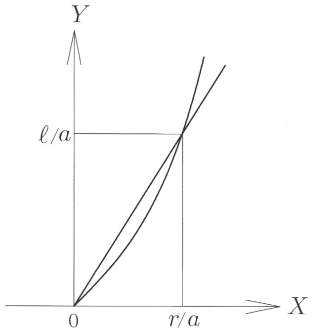

図 2

a が求まると (2.4) 式から T_0 も求められる．また，任意の点における張力 $T(x)$ は (2.2) の第 1 式から

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos\theta} = T_0\sqrt{1+\tan^2\theta} = T_0\sqrt{1+y'^2} = T_0\cosh(x/a) \tag{2.14}$$

と求められる．当然のことながら，張力 $T(x)$ は一定ではなく，x の増加に伴い双曲線余弦関数で増加していく．

3　懸垂線のまわりの微小振動

3.1　方程式の導入

懸垂線として最も身近に見られるものは，公園の周りに張ってある鎖や電柱間に張られている電線などである．これらに風が吹くとヒューと音をたてて振動が起こる．この振動を解析してみよう．ここでは簡単化のため，この振動は懸垂線が作る平面とは垂直な z 方向のみに動くものとする．いま時刻 t, 座標 x におけるこの z 方向の変位を $U(x,t)$ とする．ここで，張力の z 方向成分を求めるため，振動していないときの懸垂線上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ と，dx を微小長さとして，点 $\mathrm{Q}(x+dx, y+dy)$ の 2 点を考える．これら 2 点が振動しているときは，点 $\mathrm{P}'\big(x,y,U(x,t)\big)$ と点 $\mathrm{Q}'\big(x+dx,y+dy,U(x+dx,t)\big)$ になったとする．このとき，線分 PQ と線分 P′Q′ がなす角を ϕ とすると，

$$\tan\phi = \frac{U(x+dx,t)-U(x,t)}{\mathrm{PQ}} = \frac{U(x+dx,t)-U(x,t)}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \tag{3.1}$$

となり，これは $dx \to 0$ の極限で

$$\tan\phi = \frac{\partial_x U}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\partial_x U}{\cosh(x/a)} \tag{3.2}$$

となる．ここで，(2.12) 式を用いた．この点における張力 $T(x)$ は (2.14) 式で与えられるが，張力は振動しているときも常に懸垂線の接線方向に作用するので，その z 成分は $T(x)\sin\phi$ となる．ここでは，角度 ϕ は小さいものとし $\sin\phi \cong \tan\phi$ として，その z 成分は，(2.14) (3.2) 式から，

$$T(x)\tan\phi = T_0 \partial_x U(x,t) \tag{3.3}$$

となる．張力 $T(x)$ は x の値が大きくなるほど $\cosh(x/a)$ で大きくなるが，$\tan\phi$ の値がこれに逆比例して小さくなるために $\cosh(x/a)$ が消去され，結果として張力の z 成分は $\partial_x U$ のみに比例することになる．

つぎに，振動方程式を作るため Δx を微小長さとして，懸垂線上の 2 点 $(x,\ y)$ と $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ を考える．この 2 点間の距離は $\Delta x\sqrt{1+y'^2}$ であり，これに密度 ρ を掛けたものが質量となり，さらに，加速度を掛けたものが，この 2 点間の両端に作用する張力の z 成分となるので，その運動方程式は，

$$\rho\Delta x\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \Big[T_0\partial_x U(x,t)\Big]_{x+\Delta x} - \Big[T_0\partial_x U(x,t)\Big]_x \tag{3.4}$$

となり，これから $\Delta x \to 0$ の極限で，波動方程式

$$\cosh(x/a)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \tag{3.5}$$

を得る．ここで，再び (2.12) 式を用いた．また，c は速度の次元を持つ量で，この第 2 式で定義する．この式は通常の真っすぐな弦の振動に当てはめると，線密度が $\cosh(x/a)$ で変化する弦の振動方程式と同じ式になっている．

3.2　方程式の解法

この方程式を解くために，変位 $U(x,t)$ が，座標 x 依存部分と時間 t 依存部分に変数分離されるとし，しかも，時間依存部分は適当な角振動数 ω を用いた三角関数で表されるものとし，

$$U(x,t) = X(x)\big[\cos(\omega t), \quad \text{or} \quad \sin(\omega t)\big] \tag{3.6}$$

とおくと，x 依存部分は

$$c^2\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\omega^2\cosh(x/a)X(x) \tag{3.7}$$

となる．これは変形 Mathieu 方程式[1)]の一種であるが，この解は超幾何関数の範疇には属さないことと，この解で良く知られているのは，周期関数になる場合，および，Floquet の解と呼ばれる擬周期関数の場合だけである．しかもこれら 2 つの場合もその解は解析的にコンパクトな形で解けるわけではない．そのためこの変形 Mathieu 関数を用いて初期値問題までを解こうとするとかえって面倒なことになってしまう．

ここでは，この方程式を独自の方法で解くことから始める．独立変数 x から p への変数変換

$$p = \sinh\left(\frac{x}{2a}\right) \tag{3.8}$$

をすると，方程式は

$$(1+p^2)\frac{d^2X(p)}{dp^2} + p\frac{dX(p)}{dp} = -\lambda^2(1+2p^2)X(p), \qquad \lambda = \frac{2a\,\omega}{c} \tag{3.9}$$

1) 変形 Mathieu 微分方程式は y を u の関数 $y(u)$ として，$d^2y/du^2 = \big[a - 2q\cosh(2u)\big]y$ で定義される．

と，係数が p の多項式のみで表される方程式となる．ここに，無次元定数 λ をこの第 2 式で定義する．

ここで，$X(p)$ の方を

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n \tag{3.10}$$

と展開して方程式に代入し，両辺の冪をそろえて，方程式が成り立つための係数に対する条件を求めると，$n \geq 2$ に対し，

$$n(n-1)C_n + \left[(n-2)^2 + \lambda^2\right]C_{n-2} + 2\lambda^2 C_{n-4} = 0, \qquad n \geq 2 \tag{3.11}$$

という式を得る．ただし，ここで，$C_{-1} = C_{-2} = 0$ とするので，特に，$n = 2,\ 3$ の場合は，

$$2 \cdot 1\, C_2 + \lambda^2 C_0 = 0, \qquad 3 \cdot 2\, C_3 + \left(1^2 + \lambda^2\right)C_1 = 0 \tag{3.12}$$

である．

この (3.11) 式で，$C_0 \neq 0,\ C_1 = 0$ と仮定すると

$$C_3 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_7 = 0, \quad \cdots \tag{3.13}$$

と奇数次の係数はすべてゼロとなり，偶数次の係数は，

$$C_2 = -\frac{1}{2 \cdot 1}\lambda^2 C_0, \quad C_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}\left[(2^2 + \lambda^2)C_2 + 2\lambda^2 C_0\right], \quad C_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5}\left[(4^2 + \lambda^2)C_4 + 2\lambda^2 C_2\right], \quad \cdots \tag{3.14}$$

と遂次的に求めていくことが可能である．

また，逆に，$C_0 = 0,\ C_1 \neq 0$ とすると，

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_6 = 0, \quad \cdots \tag{3.15}$$

と偶数次の係数がすべてゼロとなり，奇数次の係数は

$$C_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}(1^2 + \lambda^2)C_1, \quad C_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}\left[(3^2 + \lambda^2)C_3 + 2\lambda^2 C_1\right], \quad C_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6}\left[(5^2 + \lambda^2)C_5 + 2\lambda^2 C_3\right], \quad \cdots \tag{3.16}$$

と遂次的に求められる．

すでに明らかなように，偶数次の係数のみで定義される (3.10) 式の $X(p)$ は偶関数であり，奇数次の係数のみで定義される $X(p)$ は奇関数となる．この偶奇性は (3.8) 式の関係で，変数 p を変数 x に戻したときもそのまま引き継がれる．以下では，$C_0 = 1,\ C_1 = 0$ としたときの (3.10) 式の解 X を偶関数 $F_0(x, \lambda)$，また，$C_0 = 0,\ C_1 = 1$ としたときの解を奇関数 $F_1(x, \lambda)$ と記すことにする．これらの関数をよりコンパクトな形で書くことができると良いのだが，これは大変難しい問題になりそうで，ここではこれ以上触れないことにする．

3.3 固有値，固有関数とその直交性

ここまでで，方程式 (3.7) の 2 つの独立解 $F_0(x, \lambda)$，$F_1(x, \lambda)$ が形式的ながら求められたことになる．2 節の最初で述べたように長さ 2ℓ の鎖を持ち上げて，両手の間隔を $2r$ としたので，これら関数の x の範囲は $[-r,\ r]$ である．しかも，その両端は固定端と考えるので，

$$F_0(r, \lambda) = 0, \qquad F_1(r, \lambda) = 0 \tag{3.17}$$

でなければならない．この式から，λ の値が決まる．方程式 (3.7) は x が有限領域の Strum-Liouville 型の方程式なので，このときの λ は飛び飛びに無限個の値が求まるはずである．これらを正の小さい方から λ_i, $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ として，固有値とする．また，このときの関数 $F_k(x, \lambda_i)$, $(k = 0, 1)$, $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を固有関数と呼ぶ．[2] λ が求まると (3.9) の第 2 式から角振動数 ω の値が決まる．これも固有値 $\omega_i = \dfrac{c}{2a}\lambda_i$, $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ と記すことにする．

ここで，固有値とは限らない 2 個の λ を考え，それらを λ, λ' とし，それらに対応する関数を $F_k(x, \lambda)$, $F_k(x, \lambda')$, $(k = 0, 1)$ とする．これらの関数は (3.7) 式を満たしているので，

$$c^2 \frac{d^2 F_k(x, \lambda)}{dx^2} = -\omega^2 \cosh(x/a) F_k(x, \lambda), \qquad c^2 \frac{d^2 F_k(x, \lambda')}{dx^2} = -\omega'^2 \cosh(x/a) F_k(x, \lambda') \tag{3.18}$$

が成り立ち，この第 1 式に $F_k(x, \lambda')$ を，また，第 2 式に $F_k(x, \lambda)$ を掛けてから，辺々を引き算すると，

$$(\omega^2 - \omega'^2) \cosh(x/a) F_k(x, \lambda) F_k(x, \lambda') = -c^2 \Big[\frac{d^2 F_k(x, \lambda)}{dx^2} F_k(x, \lambda') - \frac{d^2 F_k(x, \lambda')}{dx^2} F_k(x, \lambda) \Big] \tag{3.19}$$

となる．ここで，ω, ω' を λ, λ' で表し，右辺を変形すると，

$$(\lambda^2 - \lambda'^2) \cosh(x/a) F_k(x, \lambda) F_k(x, \lambda') = -(2a)^2 \frac{d}{dx} \Big[\frac{dF_k(x, \lambda)}{dx} F_k(x, \lambda') - \frac{dF_k(x, \lambda')}{dx} F_k(x, \lambda) \Big] \tag{3.20}$$

となるので，この両辺を $-r$ から r まで積分すると，

$$\int_{-r}^{r} \cosh(x/a) F_k(x, \lambda) F_k(x, \lambda') dx = -\frac{(2a)^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} \Big[\frac{dF_k(x, \lambda)}{dx} F_k(x, \lambda') - \frac{dF_k(x, \lambda')}{dx} F_k(x, \lambda) \Big]_{-r}^{r} \tag{3.21}$$

となる．ここで，λ, λ' が (3.17) 式を満たして固有値 λ_i, λ_j となるときは，右辺大括弧の中身がゼロとなるので，もし，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であれば，異なる固有値に属する固有関数同士の直交性

$$\int_{-r}^{r} \cosh(x/a) F_k(x, \lambda_i) F_k(x, \lambda_j) dx = 0, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \tag{3.22}$$

が証明されたことになる．同じ固有値になるときは，先に $\lambda' = \lambda_i$ とし，その後，$\lambda \to \lambda_i$ の極限をとる．結果として，$\cosh(x/a)$ を重みとする固有関数同士の直交性の式

$$\int_{-r}^{r} \cosh(x/a) F_k(x, \lambda_i) F_k(x, \lambda_j) dx = N_{k,i}^2 \delta_{i,j} \tag{3.23}$$

を得る．ここに規格化定数 $N_{k,i}^2$ を

$$N_{k,i}^2 = \frac{(2a)^2}{\lambda_i} \Big[\frac{dF_k(x, \lambda_i)}{dx} \Big]_{x=r} \Big[\frac{\partial F_k(r, \lambda)}{\partial \lambda} \Big]_{\lambda=\lambda_i} \tag{3.24}$$

と定義する．この式を得るために，$\dfrac{dF_k(x, \lambda')}{dx} F_k(x, \lambda)$ が $k = 0$, 1 いずれの場合も奇関数になることを用いた．

ついでながら，偶関数の $F_0(x, \lambda_i)$ と奇関数の $F_1(x, \lambda_j)$ との場合は，その積が奇関数になるので，

$$\int_{-r}^{r} \cosh(x/a) F_0(x, \lambda_i) F_1(x, \lambda_j) dx = 0 \tag{3.25}$$

と直交することは言うまでもない．

---

[2] もちろん，$F_0(r, \lambda) = 0$ と $F_1(r, \lambda) = 0$ では異なる λ が求められるはずであるが，ここでは，数式簡素化のために，誤解のおそれはないものとして，区別なしに書くことにする．

3.4　初期値問題

方程式 (3.5) は x の符号反転に対し不変なので，もし，変位 $U(x,t)$ の初期条件が x の偶関数で与えられれば，時間が経過したあとも偶関数のままであり，また，初期条件が奇関数で与えられるときは時間が経過したあとも奇関数のままである．ここでは，初速度はゼロとし，初期変位が偶関数 $f_0(x)$, または，奇関数 $f_1(x)$ で与えられた場合を解析してみる．すなわち，初期条件を

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad U(x,0) = f_k(x), \qquad (k=0,1) \tag{3.26}$$

とおく．変位 $U(x,t)$ の一般解は，固有関数 $F_k(x,\lambda_i)$ と時間部分 $\cos(\omega_i t)$ の積の重ね合わせとなるので，適当な係数 A_i を用いて，

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i F_k(x,\lambda_i)\cos(\omega_i t) \tag{3.27}$$

と展開しておく．これで初期条件の第 1 式はすでに満たしているので，第 2 式を適用すると，

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i F_k(x,\lambda_i) = f_k(x) \tag{3.28}$$

となる．この両辺に $\cosh(x/a)F_k(x,\lambda_j)$ を掛けて積分し

$$\int_{-r}^{r}\sum_{i=1}^{\infty} A_i \cosh(x/a)F_k(x,\lambda_i)F_k(x,\lambda_j)dx = \int_{-r}^{r} f_k(x)\cosh(x/a)F_k(x,\lambda_j)dx \tag{3.29}$$

固有関数の直交性 (3.23) 式を用いると，係数 A_i が

$$A_i = \frac{1}{N_{k,i}^2}\int_{-r}^{r} f_k(x)\cosh(x/a)F_k(x,\lambda_i)dx \tag{3.30}$$

と求まるので，これを (3.27) 式に戻して，変位 $U(x,t)$ が

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_{k,i}^2}\Big[\int_{-r}^{r} f_k(x')\cosh(x'/a)F_k(x',\lambda_i)dx'\Big]F_k(x,\lambda_i)\cos(\omega_i t) \tag{3.31}$$

と求められる．

初期変位 $f(x)$ が偶関数でも奇関数でもない場合は，

$$f(x) = \frac{1}{2}\big[f(x)+f(-x)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x)-f(-x)\big] \tag{3.32}$$

と偶関数と奇関数の和に分けられるので，それに従い変位の解も (3.31) 式で $k=0$ としたものと，$k=1$ としたものの和の形で与えられる．

4　数値計算例

(2.4) 式で定義された長さの次元を持つ量 a は，方程式 (2.13) で決まる．図 2 のところで説明したように，この式から ℓ/a，あるいは，r/a の値が，r と ℓ の比で決まると考えられる．以下では，長さ ℓ を基準値としてこ

れを $\ell = 1$ と選ぶことにし，r の値を変えたときに a の値がどのように決まるかを求めてみた．このときのグラフを図 3 の実線で示す．この図から，$r \to 0$ のとき $a \to 0$ であり，r が大きくなるにつれ a も大きくなり，$r \to 1$ で $a \to \infty$ となることが分かる．

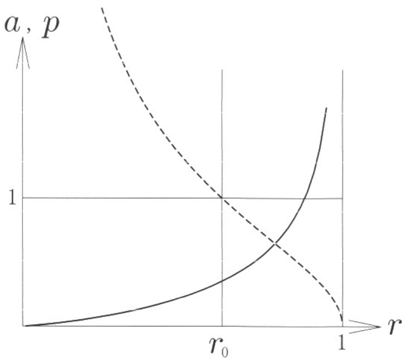

図 3　a と r の関係 (実線)，および，p と r の関係 (点線)

もう一つ，ここでの計算で最も重要なことは，(3.10) 式で定義した級数展開の式が，はたして，収束するのかという問題である．このときの係数 C_n を (3.11) 式に従って数値的に求めてみると，例えば，$\lambda = 1$ で，$C_0 = 1,\ C_1 = 0$ としたときの値は，途中は省略するが，

$$C_0 = 1, \quad C_{50} = 4.4991 \times 10^{-4}, \quad C_{100} = -1.5777 \times 10^{-4}, \quad C_{150} = 8.5659 \times 10^{-5}, \quad C_{200} = -5.5565 \times 10^{-5} \tag{4.1}$$

という値になる．確かに n 番号が上がるごとに C_n の絶対値は 0 に近づき小さくなる．しかし，この近づき方は，初めは急激に 0 に近づくが，その後は，非常にゆっくりであることが分かる．また，この係数 C_n の値は λ の値に大きく左右され，$\lambda = 20,\ C_0 = 1,\ C_1 = 0$ としたときは，

$$C_0 = 1, \quad C_{50} = -2110821.180, \quad C_{100} = 21705.351, \quad C_{150} = -5443.759, \quad C_{200} = 2459.405 \tag{4.2}$$

という値で，初めに大きく振動し，その後ゆっくりと減少していく．

この係数 C_n に p^n を掛け，和をとったときにそれが収束するためには，おおまかに見積もって，$|p| < 1$ ならば良いであろう．もし，$|p| > 1$ でこの級数が収束するには，少なくも，この係数 C_n の n 番号が 1 上がるごとに，その絶対値は桁違いにゼロに近づかなければならないだろう．しかし，実際はそうはなっていない．という訳で，この (3.10) 式が収束するには，$|p| < 1$ という条件が必要だろうと考えられる．p は (3.8) 式で定義されるので，その最大値は $x = r$ のときの $p = \sinh(r/2a)$ である．図 3 にこのときの p と r の関係を示す曲線を点線で描いた．この図から $r \to 0$ のとき $p \to \infty$ となり，その後減少を続け，$r \to 1$ で $p \to 0$ となる．この間で $p = 1$ となるときの r を r_0 とすると，その値は，およそ $r_0 = 0.623225 \cdots$ である．ということで，この級数展開式 (3.10) 式は残念ながら万能ではなく，これが使えるのは $r_0 < r < 1$ の場合に限定されるということである．

ここでは，以下，この条件を満たす $r = 0.75$ と取ったときの $F_0(x, \lambda),\ F_1(x, \lambda)$ を数値的に求め，(3.17) 式に従って，固有値 λ_i を求めてみる．この r に対する a, および, $p = \sinh(r/2a)$ の値は

$$r = 0.75, \qquad a = 0.55504, \qquad p = 0.7282 \tag{4.3}$$

となる．このときの偶関数 $F_0(r,\lambda)=0$ を解いて求めた固有値 λ を 12 個挙げると，

$$\begin{aligned}\lambda_i = 2.1893,\quad 6.1173,\quad 10.1545,\quad 14.2009,\quad 18.2502,\quad 22.3007,\quad 26.3519,\quad 30.4036,\quad 34.4556,\\ 38.5077,\quad 42.5600,\quad 46.6116 \end{aligned}\tag{4.4}$$

と，ほぼ，4 の間隔で並ぶ．また，奇関数の $F_1(r,\lambda)=0$ の方からは

$$\begin{aligned}\lambda_i = 4.1046,\quad 8.1337,\quad 12.1772,\quad 16.2253,\quad 20.2753,\quad 24.3263,\quad 28.3777,\quad 32.4296,\quad 36.4816,\\ 40.5338,\quad 44.5859,\quad 48.6400 \end{aligned}\tag{4.5}$$

と求められ，これも，ほぼ，4 の間隔で並ぶ．このときの固有関数を，偶関数 $F_0(x,\lambda_i)$, 奇関数 $F_1(x,\lambda_i)$ につき，それぞれ，5 個づつを，以下の図 4，図 5 に示す．これらの図で x の範囲は $[0,r]$ である．

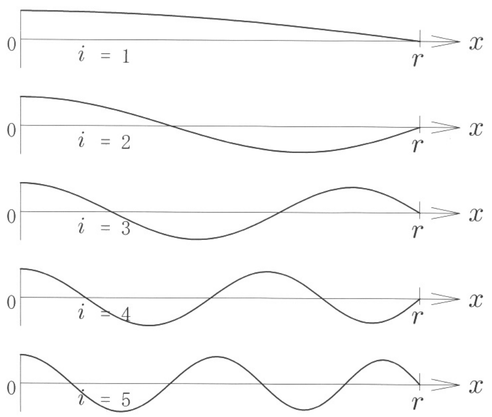

図 4　固有関数 $F_0(x,\lambda_i)$

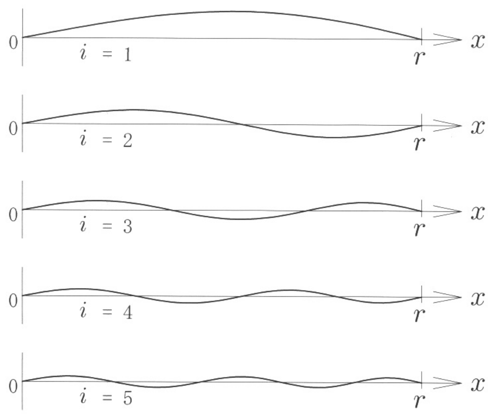

図 5　固有関数 $F_1(x,\lambda_i)$

これら図における i の値はモード番号 (固有値番号) である．図 4 での固有関数はモード番号と同じ個数のゼロ点を持ち，図 5 では，モード番号より 1 だけ多いゼロ点を持つ．

5　おわりに

今回書いた中で最も苦労したのは，懸垂線が振動しているときの張力の z 成分を求めるところである．初めこれを間違えて，平面的に考えてしまい，(3.2) 式の $\tan\phi$ を $\tan\phi=\partial_x U$ とおいていた．この間違いのままに方程式を立てるとそれは Legendre 関数で解けるものになるので，しばらくはそれで正しいものと信じ込んでしまった．しかし，かなり後になってから，張力の z 成分を求めるときは立体的に考えなくてはいけないことに気がつきようやくここに書いた正しい (3.2) 式に到達できた次第である．

しかしながら，こんどは，方程式 (3.7) の解法のところでまた悩んでしまった．この方程式は確かに変形 Mathieu 方程式なので，初めは Mathieu 関数を使って解くべきと考えた．しかし，岩波全書の『数学公式 Ⅲ』をいくら見てもその解法が見えてこない．だいたい Mathieu 方程式などというものは，量子力学での応用を目的にしているらしく，変数 x の動き得る範囲が無限大の場合を想定して書かれている．ここでのように x の範囲が有限などということは考えてもいない風である．

しかたなく，ここでは，Mathieu 関数とは無関係に，独自に解を求める方法をとった．すなわち，(3.8) 式のように変数を x から p に変え，従属変数 X を (3.10) 式のように級数展開する方法である．しかしこの方法も

収束性という点で問題があり，残念ながら，使える場合と使えない場合があることが分かった．それならば，変数 x を変換するとき，双曲線正弦関数 (sinh) などといういかにも発散しそうな関数は使わずに，双曲線正接関数 (tanh) を使うとよいのではと，

$$q = \tanh\left(\frac{x}{2a}\right) \tag{5.1}$$

と変換してみると，方程式 (3.7) は

$$(1-q^2)^3\frac{d^2X(q)}{dq^2} - 2q(1-q^2)^2\frac{dX(q)}{dq} = -\lambda^2(1+q^2)X(q) \tag{5.2}$$

に変換される．ここで，$X(q)$ を

$$X(q) = \sum_{n=0} D_n q^n \tag{5.3}$$

と展開し，方程式に代入して q の冪をそろえると，$n \geq 2$ に対する係数 D_n の方程式

$$n(n-1)D_n + (\lambda^2 - 3n^2 + 13n - 14)D_{n-2} + (\lambda^2 + 3n^2 - 23n + 44)D_{n-4} - (n^2 - 11n + 30)D_{n-6} = 0 \tag{5.4}$$

を得る．ここで，D_n の添え字 n が負になるときは，その D_n はゼロとする．この方程式で係数 D_n を求めたとき，それが n 番号の増加にともないどの程度減少していくかは分からないが，この場合は，$q = \tanh(x/2a)$ の絶対値は 1 より小なので，級数としての収束性は十分に期待できる．これらのことに関しては，次回の論文でより詳しく議論することにしよう．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．先生からいただいたコメントのうち，モード番号の付け方に関する注意を紹介しておきます．ここでは，方程式 (3.7) の解として，級数展開の方法を用いて，偶関数，奇関数の解 $F_0(x,\lambda)$, $F_1(x,\lambda)$ を得て，これに境界条件である (3.17) 式を課して固有値 λ_i, 固有関数 $F_0(x,\lambda_i)$, $F_1(x,\lambda_i)$ を求めた．それらを図 4，図 5 のグラフで示すときに，偶関数，奇関数，それぞれに， 1 から始まるモード番号を付けてしまった．しかし，これは，一般論から言うと，よくない方法であるとの注意を受けました．「正しくは，偶関数，奇関数を含めて，固有値の小さい方から，交互に，ゼロから始まるモード番号を付ける．そうすると，区間 $(-r,\ r)$ で考えたとき，各固有関数のモード番号とノード (ゼロ点) の個数とが一致する」というものです．確かにこの方が統一的で，このときの固有値は (4.4) (4.5) 式を織り交ぜて小さい方から並べると，おおよそ，2 の間隔で並ぶことになります．私がとった方法は，数値計算で固有値，固有関数を求めるとき，偶関数と奇関数に分けて求めた方がやり易いために，ここで書いたような自己流の方式になっています．

四元数の発見

矢野　忠[*1]

Discovery of Quaternion

Tadashi YANO[*2]

まえおき

これは前に書いた四元数のシリーズの改訂版である．

前に連載した四元数のシリーズから小著『四元数の発見』（海鳴社）が編まれたのであるが，いくつかの章で不十分な箇所が査読者の K さんによって指摘されていた．その指摘箇所のあった章だけでも改訂したいと思っている．

『四元数の発見』の改訂版の発行は見通せないが，その準備だけはしておきたい．そういういきさつによる改訂である．これは『四元数の発見』の第 2 章にあたる．

他には第 6 章の改訂を予定している．また，すでに第 8 章はすでに改訂稿をこの「数学・物理通信」に掲載した．

1　はじめに

第 1 章で Cauchy-Lagrange の恒等式から四元数へと導かれたいきさつを述べた．

この章では, Hamilton が 四つの元 $1, i, j, k$ の間の代数系，すなわち四元数へと導かれた推論 [1] をたどってみよう．

少しでも Hamilton の創造の秘密が伝わればと願っている．

2　数のもつべき性質

Hamilton の推論に入る前に, ちょっと寄り道のようだが, Crowe [2] にしたがって Hamilton が 1843 年に“三元数”がもつべきだと考えていた性質の概略を述べておこう[*3]．

1. 加法と乗法に対して結合則が成り立つ．すなわち, α, β, γ を“三元数”として
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$
2. 加法と乗法に対して交換則が成り立つ．すなわち,
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$
3. 分配則が成り立つ．すなわち,
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$
4. 除法がはっきり決まる．すなわち, $\alpha(\neq 0)$ と β とが与えられたときに $\alpha\chi = \beta$ となるような χ が一つ, かつ唯一つ決まる．しかも, もちろんこの χ は α, β と同じ種類の数であり, 数学的な表現をすれば除法に関しても閉じている．

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] この 2 節ではギリシャ文字で “三元数” を，ラテン文字で実数を表す．

5. 新しい数は絶対値の法則にしたがう．すなわち, 3 つの三元数を $a+bi+cj,\ x+yi+zj,\ A+Bi+Cj$ とするとき

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=A+Bi+Cj$$

であれば,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=A^2+B^2+C^2 \tag{2.1}$$

が成り立つ[*4].

6. “三元数”は 3 次元空間と関係づけられる．これは複素数が平面と関係づけられたのと同様に“三元数”は 3 次元空間と関係づけられると予想した.

以上のような性質をもつ数としての“三元数”が可能かどうかを Hamilton は探そうとした.

3 第 3 の元の導入

複素数は 2 つの元 1 と i から成り立っている．元 i は -1 の平方根 $\sqrt{-1}$ を表している．すなわち, $i:=\sqrt{-1}$ である．この i は図 1 のように線分 $\overline{01}$ （これを以後単に元 1 とよぶ）を原点 O を中心にして $\pi/2=90°$ だけ回転すれば得られる．すなわち, この i は実軸上の元 1 に垂直である[*5]．さらに i を $\pi/2=90°$ だけ回転すれば -1 が得られる．数式で表せば，$i^2=-1$ が成り立つ．

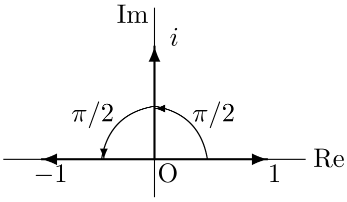

図 1　i と $i^2=-1$ の図形表示

Hamilton はこの i 以外に 1 および i に対して垂直な第 3 の元があることに気がついた．これを j と表す．この j は図 2 のように表される．$i^2=-1$ であるように図 2 から $j^2=-1$ であることがわかる．したがって, $j:=\sqrt{-1}$ である．また, $j\neq i$ であることもわかる[*6].

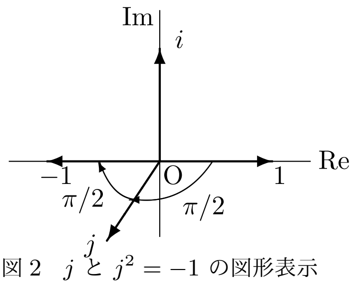

図 2　j と $j^2=-1$ の図形表示

このように i とは異なる j という第 3 の元があることが予想されたから, Hamilton は 3 つの元 $1,i,j$ をもつ数を“三元数”とよんだ.

---

*4 絶対値の法則とは (2.1) の両辺の正の平方根をとったものが成立することである．そのときにはかならず (2.1) が成立するので，これを以下では絶対値の条件とよぶ.

*5 元 1 は始点 0 で終点 1 のベクトルと考えることもできる．同様に元 i は始点 0 で終点 i のベクトルと考えることもできる．以下同様である.

*6 複素数の範囲では $\sqrt{-1}$ はただ一つしか存在しなかった．これから学ぶ四元数では $\sqrt{-1}$ となる数は無限に存在する．これについては章末の付録 2.1 を参照せよ.

4　四元数の発見

結論を言ってしまうと“三元数”は存在しないことがわかったのだが, Hamilton の四元数の発見は“三元数”を探求した結果だから, Hamilton の“三元数”についての推論をたどってみよう．

3 つの元 $1, i, j$ をもつ“三元数” $a + bi + cj$ と $x + yi + zj$ を考え, これらの積がどういう法則にしたがっているかを調べる．そのために“三元数” $a + bi + cj$ と $x + yi + zj$ の積をつくってみよう．

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

となる[*7]．しかし, ここで積 ij はどうしたらいいのだろうか．一般に

$$ij = X + Yi + Zj$$

で表されるのだろうか[*8]．

ところで $(ij)^2 = 1$ となるように思われる．なぜなら,

$$(ij)^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1$$

であるから．もしそうであるなら $ij = 1$ または $ij = -1$ となるであろう．

さて Hamilton は数が合理的な数であるための一つの条件（指導原理） [2] を考える．

いま, 実数 a, b を考え, この積を c としよう．すなわち $ab = c$ である．この数の絶対値をとれば

$$|c| = |a||b| \tag{4.1}$$

が得られる．これは実数 a, b, c が負数であっても正数であっても確かに成立する．さらに a, b, c が複素数であってもこの関係は成立する．これを絶対値の法則（または組成法則）という．

複素数の場合に (4.1) が成り立つことを確かめておこう[*9]．いま

$$\begin{aligned} a &= \alpha + i\beta \\ b &= \gamma + i\delta \\ c &= \epsilon + i\mu \end{aligned}$$

としよう．この場合

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) \end{aligned}$$

が

$$c = \epsilon + i\mu$$

に等しいから

$$\begin{aligned} \epsilon &= \alpha\gamma - \beta\delta \\ \mu &= \alpha\delta + \beta\gamma \end{aligned}$$

が成り立つ．

[*7] この積では $ij = ji$ を仮定している．以下 i と j の積の順序が問題となるところまで同じ仮定をしている．

[*8] ij が三元 $1, i, j$ で張られると考えれば, このように表される．3 次元空間のベクトル $\mathbf{A}$ がすべて一次独立な基底ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の一次結合で $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$ と表されるのと同じ考えである．

[*9] 2 節とはちがって，ここではギリシャ文字は実数である．

それでは $|c| = |a||b|$ は本当に成り立っているであろうか.

$$|c|^2 = \epsilon^2 + \mu^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$$

であり, 一方

$$|a|^2|b|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

である．そこで $(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$ を計算すれば,

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

が成り立つから, $|a|^2|b|^2 = |c|^2$ である．この式の正の平方根をとれば

$$|c| = |a||b| \tag{4.1}$$

が成り立つ．したがって，絶対値の法則は成り立っている．

いま, この式の正の平方根をとる前の式

$$|c|^2 = |a|^2|b|^2 \tag{4.2}$$

が成立することを一般的な数が合理的に成立する条件（「絶対値の条件」とよぶ）としよう[*10].

これから 2 つの“三元数” $a + bi + cj$ と $x + yi + zj$ の積が絶対値の条件を満たしているかどうかを調べよう[*11]．一挙にこの一般の場合を調べるのではなく，順を追って一般化して行こう．

一番簡単な場合として,“三元数” $a + bi + cj$ の 2 乗を考えよう．これは

$$(a + bi + cj)^2 = (a^2 - b^2 - c^2) + 2abi + 2acj + 2bcij$$

となるであろう．ここで, 上の条件を考えると

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \tag{4.3}$$

が成り立つが, これは積 ij の前の係数 $2bc$ を無視したときに成り立つ式である．そこで, 積 ij をどう取り扱ったらいいのか.

上で見たように積 ij のかかった項が余分というか邪魔である．それではひょっとして $ij = 0$ が成立しているのではなかろうか．しかし, この予想は奇妙で居心地がわるいと Hamilton は感じた.

そこで，Hamilton はこんなことを思いついた． $ij = 0$ と考えなくても $ji = -ij$ が成立すれば余分な項は 0 となるのではないか．確かに最後の項 $2bcij$ は $ji = -ij$ であることを考慮すれば, $bcij + bcji = (bc - bc)ij = 0$ と変更され, ij の項は現れない．これが (4.3) が成り立った理由であろう.

それで $ij = k, ji = -k$ と仮定して k の前の係数が 0 となるかどうかを調べてみよう.

そのために“三元数”そのものの 2 乗ではなく, 少しだけ一般化したつぎの場合を考えよう．2 つの“三元数” $a + bi + cj$ と $x + bi + cj$ の積を考えれば

$$\begin{aligned}(a + bi + cj)(x + bi + cj) &= (ax - b^2 - c^2) + b(a + x)i + c(a + x)j + (bc - bc)k \\ &= (ax - b^2 - c^2) + b(a + x)i + c(a + x)j\end{aligned}$$

となって, k の前の係数は $bc - bc = 0$ となる．ここで

$$(ax - b^2 - c^2)^2 + [b(a + x)]^2 + [c(a + x)]^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + b^2 + c^2)$$

[*10] これは“三元数”に対しては (2.1), 具体的には後出の (4.4) である．実は (4.4) は成立しない.

[*11] 以下では (4.4) が成立するかどうかを特別な場合から少しずつ一般化して考えている.

は確かに成立する．したがって, 絶対値の条件 (4.2) は成り立っている．

この結果から $ji=-ij$ であれば都合がいいことは確かめられたが, k の値についてはまだわからない．

さらに一般的な 2 つの“三元数” $a+bi+cj$ と $x+yi+zj$ の積は

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=(ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz-cy)k$$

となる．ここで, $ji=-ij=-k$ となることを用いた．

ではこのとき k の前の係数 $bz-cy$ を除いて絶対値の条件 (4.2)

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{4.4}$$

は成立するのだろうか．残念ながら答えは no である．すなわち, (4.4) の左辺は右辺と比べて $(bz-cy)^2$ だけ小さい．そしてこの $bz-cy$ は k の前の係数である．

すなわち,

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{4.5}$$

が成り立っている．

このことから Hamilton はどうしても第 4 番目の元 k があることを認めなければならなかった．すなわち, 一般の“三元数”の積を考えれば“三元数”の中にはなかった第 4 番目の元 k が必然的に出て来るのだから，“三元数”の積は“三元数”としては表せない（数学的にいえば閉じていない）．したがって,“三元数”を“三元数”の範囲で合理的に定義することはできない*12．

この第 4 番目の元 k はもちろん i でも j でもない別の元である．それで 4 つの元をもった数 $a+bi+cj+dk$ が導入されなければならない．これを四元数という．

一般の四元数 $a+bi+cj+dk$ および $x+yi+zj+wk$ の積が絶対値の条件 (4.2) を満たすことの証明は 6 節に譲るが, いま出てきた特殊な場合（四元数が退化した場合）に絶対値の条件を満たすことを示しておこう．

積の各因子 $a+bi+cj$ と $x+yi+zj$ には四番目の元 k は現れないが, それは見かけであって実際はどちらも四元数である．すなわち, この場合は四元数 $a+bi+cj+dk$ および $x+yi+zj+wk$ で $d=0,\ \ w=0$ という特殊な（退化した）場合である．この結果として 2 数の積には $ij=k$ の元を含む項が現れる．したがって絶対値の条件 (4.2)

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2+0^2)(x^2+y^2+z^2+0^2)$$

が成り立つ．これは (4.5) であった．

このことから Hamilton は“三元数”は存在しないことを認識し, 四元数を発見したのであった．

5　四元数の代数系

前節の最後で四元数 $a+bi+cj+dk$ を導入したが, 2 つの四元数の積を考えれば 3 つの元 i,j,k の間の積

$$ij,\quad ji,\quad jk,\quad kj,\quad ki,\quad ik$$

が現れる．そのうちの 2 つ ij と ji とはすでに

$$ij=k,\quad ji=-k$$

*12 この論理はちょっと難しいかもしれない．たとえを挙げると, 整数だけを考えてその割り算をすると有理数（分数）となり, その商はもう整数とは限らない．したがって, 整数だけの世界では加法, 乗法は整数の範囲で閉じているが，整数の除法は整数には閉じていない．すなわち整数同士の割り算の答えはもはや整数とは限らない．

とおいた．しかし, まだ jk, kj, ki, ik の 4 つの積が残っている．それらについて順々に考えていこう．

まず $k = ij$ であることから $ik = iij = i^2 j = -j$ となる．同様に $kj = ijj = ij^2 = -i$ であることがわかる．このことから Hamilton は

$$ki = j, \quad jk = i$$

であろうと推察した．なぜなら, $ji = -ij = -k$ であるから,

$$ki = -jii = -ji^2 = j, \quad jk = -jji = -j^2 i = i$$

が成り立つからである．

最後に残るのは k^2 の値であるが,

$$k^2 = (ij)^2 = ijij = -ijji = -ij^2 i = i^2 = -1$$

であるから, $k^2 = -1$ となる．これですべての四元数の元の積がわかった．

まとめるとそれらは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{5.1}$$
$$ij = -ji = k \tag{5.2}$$
$$jk = -kj = i \tag{5.3}$$
$$ki = -ik = j \tag{5.4}$$

である．いうまでもないが, 1 と他の 3 つの元 i, j, k とはすべて交換可能であって

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i \tag{5.5}$$
$$1 \cdot j = j \cdot 1 = j \tag{5.6}$$
$$1 \cdot k = k \cdot 1 = k \tag{5.7}$$

である．これを乗積表にまとめれば表 1 となる．ただし, ここでは表 1 の左側の元 $1, i, j, k$ が積の左側の因子と

表 1　乗積表

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

なるようにとっている．すなわち, 左側の元に表の上に書かれた元をかけたものがその交差した箇所に書かれている．たとえば左側の 2 番目の i に上の 3 番目の j をかけたもの $ij = k$ というふうに読む．

6　絶対値の条件

以上で四元数を定義し, その元のしたがう積の法則（四元数の代数系）を求めた．

さて, Hamilton が新しい数を求めるための指導原理 (guiding principle) とした絶対値の条件 (4.2) は四元数に対して成り立っているだろうか．もし, それが成立しないなら, せっかく四元数を導入したのに四元数は合理的には存在できない．このことを確かめよう．

２つの四元数を $a+bi+cj+dk$ と $x+yi+zk+wk$ とし, これらの積を $A+Bi+Cj+Dk$ としよう．２つの四元数の積をとれば,

$$\begin{aligned}(a+bi+cj+dk)(x+yi+zj+wk) &= (ax-by-cz-dw)+(ay+bx+cw-dz)i \\ &\quad +(az+cx+dy-bw)j+(aw+dx+bz-cy)k \end{aligned} \tag{6.1}$$

であるから

$$A = ax-by-cz-dw \tag{6.2}$$
$$B = bx+ay-dz+cw \tag{6.3}$$
$$C = cx+dy+az-bw \tag{6.4}$$
$$D = dx-cy+bz+aw \tag{6.5}$$

とおく.

このとき絶対値の条件 (4.2)

$$A^2+B^2+C^2+D^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+x^2+w^2) \tag{6.6}$$

が成り立つだろうか.

上の (6.2)-(6.5) に与えられた A, B, C, D のそれぞれの 2 乗を計算すれば,

$$\begin{aligned}
A^2 &= a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2w^2-2abxy-2acxz-2adxw+2bcyz+2bdyw+2cdzw \\
B^2 &= b^2x^2+a^2y^2+d^2z^2+c^2w^2+2abxy-2bdxz+2bcxw-2adyz+2acyw-2cdzw \\
C^2 &= c^2x^2+d^2y^2+a^2z^2+b^2w^2+2cdxy+2acxz-2bcxw+2adyz-2bdyw-2abzw \\
D^2 &= d^2x^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2w^2-2cdxy+2bdxz+2adxw-2bcyz-2acyw+2abzw
\end{aligned}$$

となるが, この計算の各行の右辺の各項を縦に加えれば xy, xz, xw, yz, yw, zw 等のいわゆる交差項 (cross terms) の係数は打ち消しあって 0 となり, また x^2, y^2, z^2, w^2 の前の係数はすべて $a^2+b^2+c^2+d^2$ となることがわかるので (6.6) が成り立ち, 絶対値の条件 (4.2) は確かに満たされる.

7 四元数の除法

四元数 $a+bi+cj+dk$ に四元数 $x+yi+zj+wk$ をかけると四元数 $A+Bi+Cj+Dk$ になるとき四元数 $x+yi+zj+wk$ を一義的に求められれば除法ができることになる．それには (6.2)-(6.5) が x, y, z, w で解ければよい．$a=b=c=d=0$ でなければ, (6.2)-(6.5) は逆に解くことができて

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\Delta}(aA+bB+cC+dD) \\
y &= \frac{1}{\Delta}(-bA+aB+dC-cD) \\
z &= \frac{1}{\Delta}(-cA-dB+aC+bD) \\
w &= \frac{1}{\Delta}(-dA+cB-bC+aD) \\
\Delta &= a^2+b^2+c^2+d^2
\end{aligned}$$

となる．したがって, 除法はまったく問題がない[*13].

[*13] (6.2)-(6.5) の解法はいろいろ考えられる．連立方程式を中学生のように加減法で解いてもよいし, 大学生風に Cramer の公式を用いてもよい．また (6.1) の両辺に左から四元数 $a+bi+cj+dk$ の逆数をかけてもよい.

8　四元数の数の性質

2 節で数のもつべき 6 つの性質について述べたが, それらが四元数ではどうなったか見ておこう.

1. 加法と乗法について結合法則は成立している.
2. 加法については交換則は成り立つが, 乗法については交換則は成立しない．すなわち，$\alpha\beta \neq \beta\alpha$ である.
3. 分配則は成り立つ.
4. 除法は 0 による割り算を除いてはっきりと定義できる.
5. 絶対値の法則は成り立つ.
6. “三元数”は存在しなかったので, “三元数”を 3 次元空間と関係づけることはできなかった．しかし, 四元数の虚数部分 $bi + cj + dk$ は 3 次元空間と関係づけることができる．すなわち, 四元数の虚数部分は 3 次元ベクトルとも考えることができる.

2 つの，実部のない四元数 $ai + bj + ck$ と $xi + yj + zk$ との積を考えれば[*14],

$$(ai + bj + ck)(xi + yj + zk) = -(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k \tag{8.1}$$

となるが, この式の実部はベクトルのスカラー積に負号をつけたものであり, 虚部はベクトルのベクトル積と同じである[*15].

9　おわりに

著者が四元数に関心をもった動機は 4 次の Cauchy-Lagrange の恒等式の証明にあった．そして, やっと Hamilton が「どのようにして四元数を考えついたか」について述べることができた.

ベクトルの出現によって四元数はその役目をベクトルに譲り, 長い間半ば忘れられてきたが, 最近になって物体の回転等の記述が四元数で簡単にできることからリバイバルしている.

四元数と物体の回転との関連については第 4 章から第 6 章で述べるので，ぜひそれらの章を読んで頂きたい.

10　付録

10.1　付録　2.1　$\sqrt{-1}$ の定義

（査読者のアドバイス）

数 β として実数をとれば，$\beta^2 = -1$ となる実数は存在しない．また数として複素数をとれば，$\beta^2 = -1$ となる複素数は 2 つしか存在しない．ところが，四元数の場合に $\beta^2 = -1$ となる，i, j, k がすくなくとも 3 つ現れた．だから四元数の場合には $\sqrt{-1}$ の定義が必要である.

ここでは $\sqrt{-1}$ は四元数 $\beta^2 = -1$ の解を表している．また,「四元数では，-1 の平方根が無数にある」というようなコメントがないと，$i := \sqrt{-1}, j := \sqrt{-1}$ と i と j とを同じ記号 $\sqrt{-1}$ で表しているにも関わらず,「独立である」とは読者には納得できないのではないか.

（答） 確かにその通り．しかし，i は普通の複素平面上でのベクトル $\overrightarrow{01}$ を $90^\circ = \pi/2$ 回転して得られるのに対して，j はこの複素平面に垂直な平面を考えてその平面上でのベクトル $\overrightarrow{01}$ を $90^\circ = \pi/2$ 回転して得られるから,「独立である」ことは直観的に明らかだと思っていた (図 2.1 と 2.2 参照).

[*14] 8 節のここと付録では四元数とか純虚数の表現を，たとえば，$x + yi + zj + wk$ から $w + xi + yj + zk$ に変えてあることに注意せよ.
[*15] ベクトルのスカラー積とベクトル積については付録 2.2 を参照せよ.

$a+bi+cj$ を 3 次元空間と関連づけるという考えなら，k はもう 3 次元幾何学的なイメージを描くことができないので，困ってしまう．

j はいま複素平面に垂直な平面上での回転と考えたが，もっと一般的に元の複素平面と任意の角度をなす平面を考えると，その平面上での $90° = \pi/2$ 回転はいくらでも自由に考えることができる．そして $180° = \pi$ 回転すれば，それはすべて -1 となる．しかし，それらの一次独立性から「-1 の平方根が有限個になる」のではないかと思っていた．

実は四元数 $\beta^2 = -1$ の解がいくつあるかなどと考えたこともなかったが，ここであらためて考えてみよう．

四元数を $\beta = w+xi+yj+zk$, （w, x, y, z は実数）としたとき，その 2 乗が -1 となる，w, x, y, z の値を具体的に求めてみれば，確かに $w=0$ の場合に $x^2+y^2+z^2=1$ を満たす x, y, z は解である*16．これは原点を中心にした半径 1 の球面上のすべての点を幾何学的には表している．したがって四元数 $\beta^2=-1$ の解は無数に存在しており，その中に解として $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ もあることもわかる．

もう少し詳しく述べれば，β^2 は

$$\beta^2 = [w^2-(x^2+y^2+z^2)] + 2w(xi+yj+zk)$$

となる．いま $\beta^2=-1$ となる，解 w, x, y, z を求める方程式は

$$\begin{aligned} w^2-(x^2+y^2+z^2) &= -1 \\ 2wx &= 0 \\ 2wy &= 0 \\ 2wz &= 0 \end{aligned}$$

となる．この方程式を解けば，解として

$$w=0,\quad x^2+y^2+z^2=1 \text{ を満たす } x,\ y,\ z$$

が求められる．その中に

$$\begin{aligned} &w=y=z=0,\quad x=\pm 1,\quad (\pm i \text{ に対応}) \\ &w=x=z=0,\quad y=\pm 1,\quad (\pm j \text{ に対応}) \\ &w=x=y=0,\quad z=\pm 1,\quad (\pm k \text{ に対応}) \end{aligned}$$

も含まれる．なお，

$$\begin{aligned} &w=x=y=z=0 \\ &x=y=z=0,\quad w=\text{任意の実数} \end{aligned}$$

の二つの場合は解とはならない．

一般論としては以上でいいのだが，図 1, 図 2 を見ていると 2 乗して -1 となる四元数は $i^2=-1, j^2=-1$ であるから，$xi+yj$ と i と j の一次結合で表せる四元数も $x^2+y^2=1$ ならば，その 2 乗が -1 になることがわかる．ただし，$ij+ji=0$ の関係が成立することは必要である．このときには上の一般解では $z=0$ の場合にあたる．

同様に，$xi+zk, yj+zk$ も四元数の代数が成り立ち，かつ $x^2+z^2=1$ と $y^2+z^2=1$ が成り立てば，それらの 2 乗は -1 となる．

*16 本文では $\beta = x+yi+zj+wk$ ととっていたが，この付録では $\beta = w+xi+yj+zk$ ととっていることに注意しよう．本文では複素数の一般化としての四元数を考えていたが，この付録では四元数の実部と虚部との分離にむしろ焦点をあてている．そして，四元数の虚部は 3 次元空間を表すと考える．

さらに，四元数の代数が成り立ち，かつ $x^2+y^2+z^2=1$ が成り立てば，$xi+yj+zk$ の 2 乗が -1 となることは上に示した通りである．

もう一度，別の方向から考えてみよう．

いま a,b,c を任意の実数として，実部のない四元数 $ai+bj+ck$ を考え，この 2 乗を計算してみよう．

$$\begin{aligned}(ai+bj+ck)^2 &= a^2i^2+b^2j^2+c^2k^2+ab(ij+ji)+ac(ik+ki)+bc(jk+kj)\\ &= -(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

であるから，この両辺を $(a^2+b^2+c^2)$ でわれば，

$$\left(\frac{ai+bj+ck}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2=-1$$

が得られる．したがって，上に求めた x,y,z は

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ y &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ z &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

と与えられる．

10.2　付録　2.2　ベクトルのスカラー積とベクトル積

スカラーとベクトルとはここでは既知とする．ベクトルのスカラー積とベクトル積は四元数の純虚数部（ベクトル部ともいう）の積の実部と虚部に由来し，Gibbs が考案したものである．

空間に固定したある点を原点 O にとり，直交する座標系 Oxyz を考える．x,y,z 軸に沿った単位長さのベクトルを $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ とすれば，2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z \tag{10.1}$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z \tag{10.2}$$

と表される．このときこの 2 つのベクトルのスカラー積とベクトル積はつぎのように定義される[*17]．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{10.3}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{e}_x+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{e}_y+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{e}_z \tag{10.4}$$

この定義でいいのだが，つぎのように添字 x,y,z を数字 1, 2, 3 でおきかえると，つぎのようになる．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{10.5}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3 \tag{10.6}$$

スカラー積は 2 つのベクトルを一つのスカラーに対応させる演算だということができるし，ベクトル積は 2 つのベクトルを 1 つのベクトルに対応させる演算だということができる．しかし，ちょっと気になることはベクトル積からつくられたベクトルの成分の中に対応した成分の数がどこにもあらわれないことである．

たとえば，ベクトル積の第 1 成分を取り出してみると，それは $a_2b_3-a_3b_2$ であり，どこにも第 1 成分を表す 1 という数字がない．また第 2 成分 $a_3b_1-a_1b_3$ と第 3 成分 $a_1b_2-a_2b_1$ もそれぞれ同様に第 2 成分を表す 2 という

[*17] ベクトルのスカラー積とベクトル積には幾何学的な定義もある．ベクトル解析のテクストを参照せよ．

数字がないし，第 3 成分を表す数字 3 がない．そこを不満に感じた人がいた．第 1 成分なら，その成分が 1 から始まるような成分の表示はできないものだろうか．

それで考えたのが，つぎのような記号 ϵ_{ijk} であった．その定義は

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換であるとき} \\ -1, & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換であるとき} \\ 0, & (i,j,k) \text{ が上の 2 つのいずれでもないとき} \end{cases} \tag{10.7}$$

である．この記号は Levi-Civita の記号（または Eddington のイプシロン）とよばれる．この Levi-Civita の記号を用いると (10.6) の各成分は

$$a_2b_3 - a_3b_2 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk}a_jb_k \tag{10.8}$$

$$a_3b_1 - a_1b_3 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{2jk}a_jb_k \tag{10.9}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{3jk}a_jb_k \tag{10.10}$$

と表される[*18]．この Levi-Civita の記号を用いると直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の間には実は

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{10.12}$$

の関係があったことがわかる．

たとえば，(10.12) で $i = 1, j = 2$ とおけば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{12k}\boldsymbol{e}_k \\ &= \epsilon_{123}\boldsymbol{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

が得られる．

また，ϵ_{ijk} の定義から，$i = j = 1$, $i = j = 2$, $i = j = 3$ が成り立つときには $\epsilon_{11k} = \epsilon_{22k} = \epsilon_{33k} = 0$ である．したがって，(10.12) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 &= 0 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つこともわかる．

[*18] テンソル解析で用いられる，Einstein の規約を用いると，3 つの式 (10.8)-(10.10) は一つにまとめられて $\epsilon_{ijk}a_jb_k, (i,j,k = 1,2,3)$ と表される．また (10.6) は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk}a_jb_k\boldsymbol{e}_i, (i,j,k = 1,2,3) \tag{10.11}$$

と簡潔に表される．

(2011. 10. 30)(2021 9. 8 改訂)

参考文献

[1] W. R. Hamilton, Phil. Mag. 3rd series 25 (1844) 489-495

[2] M. J. Crowe,“A History of Vector Analysis”(Dover, 1994), 28

「数学・物理通信」通巻 100 号記念によせて

世戸 憲治 *

In Commemoration of the 100th Issue of the "Communications of Mathematics and Physics"

Kenji SETO*

月日は百号の記念にして，
行きかふ年もまた投稿者なり．
計算用紙の上に生涯を浮かべ，
数式変形に明け暮れて老いを迎ふる者は，
日々計算にして計算を生き甲斐とす．
古人も多く計算に埋没するあり．

これはちょっと無理のしすぎかもしれません．でもいつもこんな気持ちで投稿していることは確かです．ともかく，『数学・物理通信』が通巻百号を迎えたことは喜びに堪えません．これはひとえに編集長の矢野忠さんの努力の賜物と考えられます．この『数学・物理通信』の最初の号がでたのは 2009 年 12 月のことですから，11 年と 9 ヵ月で 100 号を迎えたことになります．平均すると年間あたり，8.5 号づつ発行してきたことになります．

私はこれまでに 91 編の論文を発表してきました．100 編に到達するのも，もう目前です．自分でもよくこれほど頑張れたものと驚いています．また昨年の 3 月からは編集の仕事も一部引き受けることになり，ますます『数学・物理通信』にのめり込むことになってしまいました．ただ，私も歳をとってきたので，この先何年続けられるか不安にもなってきます．ぜひ若い人に引き継いでほしいものといつも考えています．

****

話し変わって，私事で恐縮なのですが，これも昨年の 3 月ころのことだったと思います．私の恩師である中西襄先生から英語の本を出さないかというお誘いがありました．より詳しく言うと，先生は出版社の World Scientific Publishing から数学の本を出さないかと誘われたそうです．そこで，先生はすでに日本語で丸善出版から出版していた本『微分方程式 — 物理的発想の解析学 — 』を英語に訳して出そうと考えたそうです．ところがこの日本語版の本，中身は濃いのですが，サイズが新書版と小さいうえにページ数が 200 ページに満たない本で，この出版社が希望する単行本サイズで 300 ページ程度という要請に合わせるためにはページ数が足りません．そこで，私にお鉢が回ってきて，『数学・物理通信』に書いたものを英語にして, 先生の本と一緒にして一冊の本にしたらどうかという提案でした．

* 北海学園大学名誉教授

これを聞いたとき私は即座に断りました．第一に，私が『数学・物理通信』に書いたものは一つひとつがバラバラの話題で統一性がないこと，加えて，最近は絶えて久しく英語の論文を書いていないので，英文を書くこと自体が私にとってあまりに負担が大きすぎるという 2 つの理由です．という訳で，先生と何度かやり取りをしていく中で，私が書く部分はこの本の中の後半部分で，そこは応用編なので，話題に統一性がなくとも一向にかまわないということと，英文については先生が手伝ってくれるということで，最終的には引き受けることになりました．

この英文原稿はおよそ 1 年と 2 ヶ月ほどかけて今年の 5 月にようやく出来上がり，いまは出版社に提出することができました．私がこの本に採用したのは『数学・物理通信』に書いたものの中から微分方程式に関係したもので面白そうなもの 19 編を選んで載せることにしました．これは結構な厚さになり，先生自身が書かれた部分のページ数をはるかに超えてしまいました．実際に本が出来上がるのはまだ先のことになりそうですが，タイトルは

"Differential Equations and Their Applications – Analysis from a Physicist's Viewpoint – "

で，この "Their Applications" のところが私のオリジナルの部分です．出来上がるのを楽しみにしています．という訳で，物理屋の端くれにすぎない私が英語の専門書を出版できるなんてことは，一生の光栄です．これも『数学・物理通信』があってのことと感謝しています．

最後になりますが，中西襄先生には，この件に関し，いろいろ貴重なご意見をいただいたこと，また，私のつたない英語を丁寧に直していただき大変なご苦労をおかけしたことに対し，この場を借りてお礼申し上げます．

「数学・物理通信」100 号を祝す

Celebrating the 100th Issue

1　紙面の美しさに羨望と憧憬

100 号の達成を心よりお祝い申し上げます．

100 号というのは，言うは易く，達成はなかなか容易なことではない．第 1 巻第 1 号が創刊されたのは 2009 年 12 月で，編集後記には，編者の矢野忠氏が「どれくらいこの通信が続けられるのか，編集人にもわからない．2, 3 号で続かなくなるか，それとも数十号まで続くのか」と書かれているが，12 年で 100 号に達したということは快挙というほかない．

私は決して熱心な読者ではない．これまで 100 号分が送られてきても，目次に目を通し，掲載論文を流し読みで見て，あとは編集後記を楽しんで読むという具合であった．それにしても，もう 100 号なのかと思う．

掲載論文のほとんどは数式があふれ出たもので，二つの意味でその美しさに羨望した．一つはその内容にともなうもので，数学または物理学的事象がこのような数式で表せることに対してである．もう一つは，おそらく数式や図のあふれる原稿を著者自らが作成されていることに対する憧憬から出たものである．

私もときに数式や図を含む文章を書くこともあるが，数式や図の部分はたいてい，ラフな鉛筆書きである．編集者は下手にデータ化されると却って手間を取るので，そのほうがよいと言ってくれるので，いつまで経っても自分でやろうとしない．都合よくデータ化されていて，そのレイアウトもきれいというほかない．

掲載論文は流し読みする程度と書いたが，誰でも知っていそうな基礎的な数学的知識の理解の仕方や物理的事項の数学的解析に関しては，興味をもったことはしばしばある．こんなふうに理解できるのかと，その視点に考えさせられた．ごくたまには数式抜きのエッセイを面白く読ませていただいたことも思い出される．

常日ごろから感じていてよくわからなかったのは，巻号の付け方である．第 1 巻第 8 号の編集後記には「(巻は) 年単位」と書かれていて，創刊から 12 年で 11 巻なので，ほぼ年単位に収まっている．気になるのは号のほうである．1 つの巻に対して，少ないときは全 6 号，多いときは全 12 号で，全 10 号のときが 5 回と多いが，それにしてもまちまちである．しかも同じ日に発行，2 日続けての発行のときもある．これなど，どうして 2 号を合冊して一つの号にしないのだろうか，号をつねに全 6 号とか全 10 号とかに決めて，決まった月に刊行されるとよほどすっきりするようにと思ったこともある．しかし，全 100 号の目次を改めて見ていくと，少数の同人が毎号執筆しているので，多少のムラがあるのは当然で，合冊にしないほうがよほど自然に見えてきた．

平凡な言葉であるが，研究に対しても継続こそが力なり．全 100 号の蓄積の大きさに驚嘆する．編集後記を読むとご苦労が偲ばれる．次は，先ずは 150 号達成に向けて，刊行を続けていただきたい．

西條敏美（元・徳島県公立高校物理教員, 40 年にわたって「徳島科学史雑誌」を主宰）

2　100 号おめでとうございます

「数学・物理通信」100 号，まことにおめでとうございます．50 号が 2016 年でしたから 5 年間でさらに 50 号を達成され，すばらしいです．長く続けておられることに心から敬意を表します．

三角関数など基本的な公式についても丁寧に検証しておられ，勉強させていただいております．編集者，投稿者の皆様の数学，物理に対する真摯な姿勢には大いに学ぶべきものがあると思っております．

今後も「数学・物理通信」の送付を楽しみにしております．さらに長く続けられることを心から期待いたします．

大槻俊明（元民間企業 CNC 技術者，現在東京農工大学大学院で工作機械制御技術を研究)

3　御礼

「数学・物理通信」100 号に際して 3 人の方からお祝いの言葉をいただいた．まことにありがとうございます．

どこまでいけるのかは編集人である私にもわからない．これからは 1 号でも多く発行することを楽しみにしていこうと考えている．西條先生からはまずは「150 号を目指せ」とご教示いただいたが，結果としてそうなればよいが，目標とはできない．やはり 1 号，1 号の発行の積み重ねしかありえないと感じている．

矢野　忠（編集人）

編集後記

2021 年 9 月となって，とうとう今号で通巻 100 号を達成できました．早ければ 6 月に 100 号を達成できるかもしれないなどと思ったのですが，達成はなかなか難しくようやくこの 9 月での達成となりました．

100 号を達成するときには投稿原稿は掲載せず投稿者とか，読者の声を中心にして編集しようかと思っていましたが，その辺のお声かけをするのを生来の怠け者で，怠ってしまったので，いつもの如くとなっています．

今年の夏は 2 週間にわたって長期的な雨天がつづき，そのかわり台風はそれほど来ませんでした．こういう経験はあまり記憶にないことでした．

今年は秋が来るのが早いのかそうでもないのか，ともかくコロナ禍での COVID-19 の記憶は後世に残るでしょう．それとオリンピックを無理矢理に行った年としても．しかし，パラリンピックで障害を持った人が懸命にゲームに励んでいるのをテレビで見たりすると，私たちももっといろいろのことができるのではないかと思うのです．

人間はまだまだ可能性を秘めているのだと思います．自分で限界だと決めつけてしまわない限りは．

（矢野　忠）