

数学・物理通信

11 卷 7 号 2021 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2021 年 12 月 9 日

目次 (Contents)

1. 懸垂線の振動問題 (2)

世戸憲治 2

2. 「Levi-Civita の記号の縮約」再々論

矢野 忠 13

3. 自然科学と論理学

武谷三男 21

4. 辻信行さんを偲ぶ

矢野 忠 25

5. 編集後記

矢野 忠 28

1. Oscillation Problem of Catenary Curve (2)

Kenji SETO 2

2. The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited Again

Tadashi YANO 13

3. Natural Sciences and Logic

Mituo TAKETANI 21

4. Memory of Mr. Nobuyuki TUJI

Tadashi YANO 25

5. Editorial Comments

Tadashi YANO 28

懸垂線の振動問題 (2)

世戸 憲治*

Oscillation Problem of Catenary Curve (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「懸垂線の振動問題 (1)」(「数学・物理通信」11 巻 5 号) では懸垂線周りの微小振動を扱った。今回は、鎖の真ん中に錘をつけた場合の振動問題を扱う。

2 鎖の真ん中に錘を付けた場合

長さが 2ℓ , 線密度 ρ の鎖の真ん中に質量 $2m$ の錘を付けたものを考える。この鎖の両端を手で同じ高さに持ち上げ、両手の間隔を $2r$, ($r < \ell$) としたときの懸垂線の形を求める。

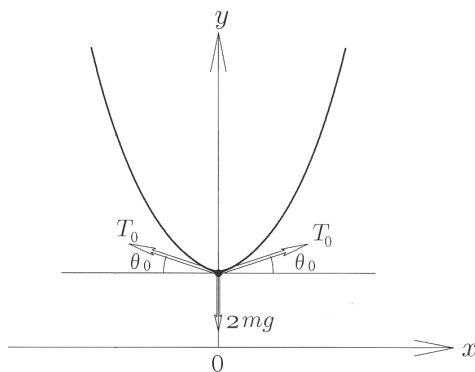


図 1 錘に作用する力

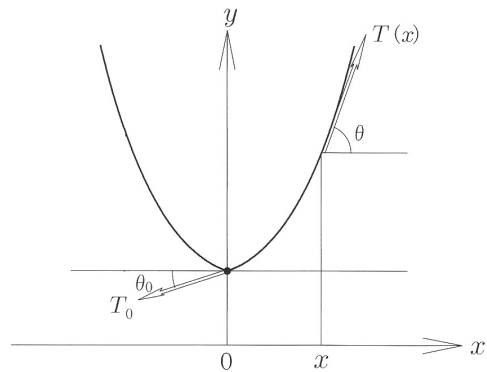


図 2 区間 $[+0, x]$ の鎖部分に作用する力

図 1 に示すように、水平に x 軸、鉛直上方向に y 軸を取り、懸垂線の錘が付いた最下点が y 軸上にくるようにする。この場合、懸垂線の形は y 軸に対し左右対称の形になる。ここでは、錘の大きさは、数学的な取り扱い易さから、無限小の点として扱うことにする。

この錘が付いた左右両側での鎖の傾き角度を、正の側、負の側で、それぞれ、 θ_0 , および、 $-\theta_0$ とする。この錘にかかる重力は、重力加速度を g として、 $2mg$ であり、これを両側の鎖で支えることになるので、この点で

* 北海学園大学名誉教授

の鎖の張力を T_0 とすると、その釣り合いの式は、

$$2T_0 \sin(\theta_0) = 2mg \quad (2.1)$$

となる。

つぎに、鎖部分について考えるが、懸垂線の左右対称性を考えて x 座標が正の側だけを考えよう。図 2 に示すように x を正の任意の値として区間 $[+0, x]$ における鎖の部分を考える。ここで、 $+0$ としたのは、錘の大きさをゼロとしているので、その錘のすぐ右端という意味で使うものとする。同じように錘の左端は -0 と記述する。ここでは、この区間における懸垂線の長さ s は、曲線の方程式を $y = y(x)$ として、

$$s = \int_{+0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.2)$$

であり¹⁾、これに密度 ρ と重力加速度 g を掛けるとこの部分に作用する重力は $\rho s g$ となる。また、点 x における張力を $T(x)$ 、接線の傾き角を θ とすると、この部分の水平方向、鉛直方向の力の釣り合いの式は、

$$T(x) \cos(\theta) = T_0 \cos(\theta_0), \quad T(x) \sin(\theta) = T_0 \sin(\theta_0) + \rho s g \quad (2.3)$$

となる。この 2 本の式から、 $T(x)$ を消去し、 $\tan(\theta) = y'$ なること、および、(2.2) 式を用いると、

$$y' = \tan(\theta_0) + \frac{1}{a} \int_{+0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.4)$$

となる。ここで、長さの次元を持つ量 a を

$$a = \frac{T_0 \cos(\theta_0)}{\rho g} \quad (2.5)$$

と定義した。この (2.4) 式を x で微分すると、

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.6)$$

となり、これを変数分離して、積分形にすると、

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{a} \int dx \quad (2.7)$$

となる。この左辺の積分は、積分変数を

$$y' = \sinh(p) \quad (2.8)$$

と変換すると容易に積分され、

$$p = \frac{x}{a} + C \quad (2.9)$$

となる。ここに、積分定数 C は、 $x = +0$ のときの y' が $\tan(\theta_0)$ になることから、

$$\sinh(C) = \tan(\theta_0) \quad (2.10)$$

となり、これから、積分定数 C が、

$$C = \operatorname{arcsinh}(\tan \theta_0) = \operatorname{gd}^{-1}(\theta_0) \quad (2.11)$$

¹⁾ ここで、積分の上限を表す x と積分変数の x は、もちろん、異なるものであるが、数式簡略化のため同じ x で表すことにする。

と決まる．ここに、 gd^{-1} は逆 Gudermann 関数である²⁾．

以上をまとめて、

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \quad (2.12)$$

となる．これをさらに積分すると、鎖部分の曲線の形が、

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right), \quad x > 0 \quad (2.13)$$

と決まる．ここでは、不要な積分定数は、敢えて、入れないことにする．残る仕事は、パラメータの θ_0 , T_0 , a を決めなければならない．このためには、 x 座標が $+0$ から r までの鎖の長さが ℓ であったことを用いる．すなわち、

$$\ell = \int_{+0}^r \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.14)$$

でなければならない．(2.12) 式から、

$$\sqrt{1 + y'^2} = \cosh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \quad (2.15)$$

となるので、この積分は、

$$\ell = a \left[\sinh\left(\frac{r}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) - \tan(\theta_0) \right], \quad (2.16)$$

あるいは、双曲線関数の加法定理を用いて、

$$\ell = a \left[\sinh\left(\frac{r}{a}\right) \frac{1}{\cos(\theta_0)} + \cosh\left(\frac{r}{a}\right) \tan(\theta_0) - \tan(\theta_0) \right] \quad (2.17)$$

となる．一方、(2.1) (2.5) 式から、 T_0 を消去すると、

$$\tan(\theta_0) = \frac{m}{\rho a} \quad (2.18)$$

となるので、(2.17) 式から θ_0 を消去した形で書くと、

$$\ell = \sqrt{a^2 + (m/\rho)^2} \sinh\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{m}{\rho} \left[\cosh\left(\frac{r}{a}\right) - 1 \right] \quad (2.19)$$

となる．これから、 ℓ , r , m , ρ を与えられたものとして、パラメータ a を求めることになる．もちろん、これは超越方程式なので厳密解を求めることは不可能であり、数値的に求めるしかない． a が求まると、(2.18) 式から θ_0 が、(2.1) 式から T_0 が

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{m}{\rho a}\right), \quad T_0 = \frac{mg}{\sin(\theta_0)} = g\sqrt{(\rho a)^2 + m^2} \quad (2.20)$$

と求められる．また、点 x における張力 $T(x)$ は、(2.3) の第 1 式、 $y' = \tan \theta$, a の定義式 (2.5), および、(2.15) 式から、

$$T(x) = \frac{T_0 \cos(\theta_0)}{\cos(\theta)} = T_0 \cos(\theta_0) \sqrt{1 + y'^2} = a\rho g \cosh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \quad (2.21)$$

と求められる．

²⁾ 逆 Gudermann 関数については、「おわりに」のところで述べる．

なお、 x の負の側での懸垂線の形 $y(x)$ 、および、張力 $T(x)$ は、(2.13)、(2.21) 式で x の符号を変えたものになるので、この x を絶対値付にして、

$$y = a \cosh\left(\frac{|x|}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right), \quad T(x) = a\rho g \cosh\left(\frac{|x|}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \quad (2.22)$$

としておくとも x が正と負の両方で使える。

3 懸垂線の振動問題

3.1 方程式の導入とその解法

前回と同じく、懸垂線が作る面に対し垂直方向を z 方向とし、鎖のこの方向への微小振動を解析する。今回は、鎖の真ん中に錘がついているので、その分、振動の仕方は複雑化する。時刻 t 、座標 x における z 方向の変位を $U(x, t)$ とする。ただし、あまり煩雑化するのを避けるためと、もし変位が奇関数の場合はせっかく付けた錘がまったく動かないことになるので、今回は、この変位 $U(x, t)$ が、 x について偶関数になる場合だけを扱う。

運動方程式を作るためには、座標 x での張力 $T(x)$ の z 方向成分が必要である。これは前回も求めたが、前のものとは多少異なってくるので、もう一度、くり返す。静止しているときの懸垂線上の点 $P(x, y, 0)$ と、 dx を微小距離として、点 $Q(x+dx, y+dy, 0)$ を考える。これら2点は振動しているとき、それぞれ、 $P'(x, y, U(x, t))$ 、 $Q'(x+dx, y+dy, U(x+dx, t))$ になったとする。このとき、線分 $P'Q'$ を z 方向に平行移動して P' を P に重ねたときの Q' の位置を Q'' とする。このときの Q'' の座標は $Q''(x+dx, y+dy, U(x+dx, t) - U(x, t))$ 、 $\angle PQQ'' = 90^\circ$ となる。これから $\angle Q''PQ$ を ϕ とすると、その正接は

$$\tan(\phi) = \frac{QQ''}{PQ} = \frac{U(x+dx, t) - U(x, t)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\partial U(x, t)/\partial x}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (3.1)$$

と求められる。一方、張力 $T(x)$ は振動しているときも常に接線方向に作用するので、その z 成分は、 $T(x) \sin(\phi)$ であるが、ここでは角度 ϕ は小さいものとして、これを $T(x) \tan(\phi)$ で近似する。また、張力 $T(x)$ として、(2.21) 式を用いると、

$$T(x) \text{ の } z \text{ 成分} \cong T(x) \tan(\phi) = T_0 \cos(\theta_0) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \quad (3.2)$$

と求められる。ここで、 $\sqrt{1 + y'^2}$ が相殺されることに注意する。前回と異なることは、 $\cos(\theta_0)$ が付く点である。

これを用いて、錘、および、鎖の振動方程式を作る。初めに、錘の方から考えると、 x の正の側で錘に作用する張力 T_0 の z 方向成分は、この (3.2) 式から、 $T_0 \cos(\theta_0) (\partial U / \partial x)|_{x=+0}$ となる。 x の負の側でも同じ大きさの力が作用するので、錘の運動方程式は

$$2m \frac{\partial^2 U(0, t)}{\partial t^2} = 2T_0 \cos(\theta_0) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \quad (3.3)$$

となる³⁾。つぎに、鎖部分の方程式を考えるが、ここでは変位 U を偶関数としているので、 x の正の側だけで考える。これも前回と同じであるが、 Δx を微小長さとして、鎖の区間 $[x, x + \Delta x]$ の部分を考える。この部分の質量は、 $\rho \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$ であり、また、この部分に作用する張力の z 方向成分は、点 $x + \Delta x$ で

³⁾ $\partial_x U$ は $x = 0$ で不連続になっていて、 $\partial U / \partial x|_{x=-0} = -\partial U / \partial x|_{x=+0}$ になっている。

$T_0 \cos(\theta_0) \partial U(x + \Delta x, t) / \partial x$ となり、また、点 x では、 $-T_0 \cos(\theta_0) \partial U(x, t) / \partial x$ となる。したがって、その運動方程式は、

$$\rho \sqrt{1 + y'^2} \Delta x \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cos(\theta_0) \left[\frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] \quad (3.4)$$

となり、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\rho \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cos(\theta_0) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

となる。この方程式は、見方を変えると、張力が $T_0 \cos(\theta_0)$ で一定で、密度が場所ごとに $\rho \sqrt{1 + y'^2}$ に従って変化する真つすぐな弦の振動方程式と見ることもできる。

ここで、錘と鎖を一体化した密度関数 $\rho(x)$ を

$$\rho(x) = 2m\delta(x) + \rho \sqrt{1 + y'^2} \quad (3.6)$$

と定義する。ここに、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。これを用いると、2本の方程式 (3.3) と (3.5) は、1本の方程式で表すことが可能で、

$$\rho(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cos(\theta_0) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

となる。実際、この式を -0 から $+0$ まで積分し、 $\partial U / \partial x$ が x について奇関数であることを用いると、錘の方程式 (3.3) 式が再現される。

方程式 (3.5) は、(2.15) 式の $\sqrt{1 + y'^2}$ を用いると、

$$\cosh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

となる。ここに、波動伝播速度に相当する c を

$$c = \sqrt{\frac{T_0 \cos \theta_0}{\rho}} \quad (3.9)$$

と定義する。

この方程式を解くため、変位 $U(x, t)$ に関し変数分離形を仮定し、その時間依存部分は、適当な値の角振動数 ω を用いて $\cos(\omega t)$, または、 $\sin(\omega t)$ とする。すなわち、

$$U(x, t) = X(x) [\cos(\omega t) \quad \text{or} \quad \sin(\omega t)] \quad (3.10)$$

とおく。この操作で変位 U の x 依存部分 $X(x)$ は

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cosh\left(\frac{x}{a} + \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) X(x) \quad (3.11)$$

を満たすことになる。

この方程式を解くために、独立変数を x から q へ、

$$q = \tanh\left(\frac{x}{2a} + \frac{1}{2} \text{gd}^{-1}(\theta_0)\right) \quad (3.12)$$

と変換し、このときの従属変数 $X(x(q))$ を以下改めて $X(q)$ と記すことにする。このとき方程式は

$$(1 - q^2)^3 \frac{d^2 X(q)}{dq^2} - 2q(1 - q^2)^2 \frac{dX(q)}{dq} = -\lambda^2(1 + q^2)X(q), \quad \lambda = \frac{2a\omega}{c} \quad (3.13)$$

と変換される．ここに，無次元数 λ は (3.13) の第 2 式で定義する．この方程式の係数は，すべて q の多項式であり， $X(q) = q^\alpha$ とおいてみると決定方程式は $\alpha(\alpha - 1) = 0$ となる．これから， $\alpha = 0, 1$ となるので，この解は，定数項から始まる級数，あるいは，1 次の項から始まる級数で解ける．そこで，

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n q^n \quad (3.14)$$

と展開し，方程式に代入し，両辺の q の冪をそろえて，方程式が成立するように係数 D_n 間の漸化式を求めると， $n \geq 2$ なる n に対し，

$$n(n-1)D_n + (\lambda^2 - 3n^2 + 13n - 14)D_{n-2} + (\lambda^2 + 3n^2 - 23n + 44)D_{n-4} - (n^2 - 11n + 30)D_{n-6} = 0 \quad (3.15)$$

を得る．ここで， D_n の添え字 n が負になるとき，その D_n はゼロとする．これから， D_0, D_1 を初期値として，それ以降の n に対する D_n がすべて決まる．ただし，これを解析的に求めることは不可能に近く，実際は数値的に求めることになる．簡単に分かることは，もし， $D_0 \neq 0, D_1 = 0$ としたときは，奇数次の D_n はすべてゼロとなるので，このときの解 $X(q)$ は q の偶関数となる．逆に， $D_0 = 0, D_1 \neq 0$ としたときは偶数次の D_n はすべてゼロとなるので，解 $X(q)$ は q の奇関数となる．

ここでは， $D_\alpha = 1, D_{1-\alpha} = 0, (\alpha = 0, 1)$ としたときの解を，変数 q を (3.12) 式を用いて x に戻したとして，これを $F_\alpha(x, \lambda)$ と記すことにする． λ を変数に加えたのは後の都合で，固有値，固有関数を表すときに都合がよいためである．ここで， q の偶関数，奇関数が，そのまま， x の偶関数，奇関数になるわけではないことを注意しておく．ここでは x について偶関数の場合だけを扱っているので，(2.22) 式で示したように x を正負に拡張したときは x に絶対値が付いて $|x|$ となることに注意する．これで (3.11) 式の一般解を， A, B を任意定数として，

$$X(x, \lambda) = AF_0(|x|, \lambda) + BF_1(|x|, \lambda) \quad (3.16)$$

とおく．

つぎに，錘の運動方程式 (3.3) に (3.10) 式の変数分離を適用すると，

$$-m\omega^2 X(0) = T_0 \cos(\theta_0) \left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=+0} \quad (3.17)$$

となる．これに (3.16) 式を代入すると，

$$[bF'_0(+0, \lambda) + \lambda^2 F_0(0, \lambda)]A + [bF'_1(+0, \lambda) + \lambda^2 F_1(0, \lambda)]B = 0, \quad b = \frac{4a^2 \rho}{m} \quad (3.18)$$

となる．ここに， b は長さの次元を持つ量でこの第 2 式で定義する．以下，この式が成り立つように，係数 A, B を

$$A = [bF'_1(+0, \lambda) + \lambda^2 F_1(0, \lambda)], \quad B = -[bF'_0(+0, \lambda) + \lambda^2 F_0(0, \lambda)] \quad (3.19)$$

と取ることとし，(3.16) 式を

$$X(x, \lambda) = [bF'_1(+0, \lambda) + \lambda^2 F_1(0, \lambda)]F_0(|x|, \lambda) - [bF'_0(+0, \lambda) + \lambda^2 F_0(0, \lambda)]F_1(|x|, \lambda) \quad (3.20)$$

としておく．これは方程式 (3.11) と境界条件 (3.17) 式の両方を満たす解である．

3.2 固有値, 固有関数とその規格化

ここで求めた (3.20) 式の $X(x, \lambda)$ は, さらにもう一つの境界条件, $x = \pm r$ が鎖の固定端であるという条件

$$X(\pm r, \lambda) = 0 \quad (3.21)$$

を満たさなければならないので,

$$[bF_1'(+0, \lambda) + \lambda^2 F_1(0, \lambda)]F_0(r, \lambda) - [bF_0'(+0, \lambda) + \lambda^2 F_0(0, \lambda)]F_1(r, \lambda) = 0 \quad (3.22)$$

となる. これから λ の値が決まる. これは飛び飛びの値として決まるであろう. これらを正の小さい方から, λ_i , ($i = 1, 2, 3, \dots$) とし, これを固有値とする. また, (3.20) 式で λ が固有値 λ_i のときの $X(x, \lambda_i)$ を固有関数とする. なお, λ と角振動数 ω は (3.13) の第 2 式の関係があるので, λ が固有値 λ_i のときの対応する ω を, これもまた, 固有値 ω_i とする. この意味で, 以下, 方程式 (3.22) を固有値方程式と呼ぶ.

(3.7) 式における $U(x, t)$ を (3.10) 式のように変数分離したとき, x 依存部分 $X(x, \lambda)$ は, 方程式

$$-\omega^2 \rho(x) X(x, \lambda) = T_0 \cos(\theta_0) \frac{d^2 X(x, \lambda)}{dx^2} \quad (3.23)$$

を満たすことになるが, ω を λ で表すように変形すると,

$$-\lambda^2 \rho(x) X(x, \lambda) = mb \frac{d^2 X(x, \lambda)}{dx^2} \quad (3.24)$$

となる. ここで, c の定義 (3.9), λ の定義 (3.13), b の定義 (3.18) を用いた. これは, Sturm-Liouville 型の方程式なので, $\rho(x)$ を重みとした固有関数の直交性の式が導かれる. 具体的には, いま, 固有値とは限らない 2 個の λ を考え, これらを λ, λ' とする. また, これらに対応する関数 $X(x)$ を, $X(x, \lambda), X(x, \lambda')$ とする. これらの関数は, (3.24) の形の方程式,

$$-\lambda^2 \rho(x) X(x, \lambda) = mb \frac{d^2 X(x, \lambda)}{dx^2}, \quad -\lambda'^2 \rho(x) X(x, \lambda') = mb \frac{d^2 X(x, \lambda')}{dx^2} \quad (3.25)$$

を満たしている. この第 1 式に $X(x, \lambda')$ を, また, 第 2 式に $X(x, \lambda)$ を掛けて, 辺々を引き算すると,

$$-(\lambda^2 - \lambda'^2) \rho(x) X(x, \lambda) X(x, \lambda') = mb \frac{d}{dx} \left[\frac{dX(x, \lambda)}{dx} X(x, \lambda') - \frac{dX(x, \lambda')}{dx} X(x, \lambda) \right] \quad (3.26)$$

となるので, この式を $-r$ から r まで積分すると,

$$\int_{-r}^r \rho(x) X(x, \lambda) X(x, \lambda') dx = \frac{mb}{\lambda^2 - \lambda'^2} \left[\frac{dX(x, \lambda')}{dx} X(x, \lambda) - \frac{dX(x, \lambda)}{dx} X(x, \lambda') \right]_{-r}^r \quad (3.27)$$

となる. ここで, λ, λ' を固有値 λ_i, λ_j とすると, 境界条件 (3.21) 式が満たされるので, この式右辺の大括弧の部分はゼロとなる. したがって, もし, $\lambda_i \neq \lambda_j$ ならば, 異なる固有値に属する固有関数同士の直交性

$$\int_{-r}^r \rho(x) X(x, \lambda_i) X(x, \lambda_j) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (3.28)$$

が導かれる.

同じ固有値 λ_i になるときは、先に $\lambda' = \lambda_i$ とおき、その後、 $\lambda \rightarrow \lambda_i$ の極限值をとる。結果として、固有関数の直交式

$$\int_{-r}^r \rho(x) X(x, \lambda_i) X(x, \lambda_j) dx = N_i^2 \delta_{i,j} \quad (3.29)$$

を得る。ここに、規格化定数 N_i^2 を、

$$N_i^2 = \frac{mb}{\lambda_i} \left[\frac{dX(x, \lambda_i)}{dx} \right]_{x=r} \left[\frac{\partial X(r, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_i} \quad (3.30)$$

と定義する。これを求めるとき、 $\left[dX(x, \lambda_i)/dx \right] X(x, \lambda)$ が x の奇関数となることを用いた。これから、 $X(x, \lambda_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる。

3.3 初期値問題

変位 $U(x, t)$ の一般解は、固有関数 $X(x, \lambda_i)$ に時間部分の $\sin(\omega_i t)$ 、あるいは $\cos(\omega_i t)$ を掛けたものの重ね合わせとして求められる。ここでは、任意係数 C_i を用いて

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x, \lambda_i) \sin(\omega_i t) \quad (3.31)$$

とおく。これに初期条件を付加して係数 C_i を決める。ここでは、初期条件として、初期変位はゼロとし、錘部分に衝撃を加えることで、一定量の力積を与えることにする。この力積は錘の運動量となるので、ここでは、単位長さあたりの運動量 $2mv_0 \delta(x)$ が生じるものとして、初期条件を、

$$U(x, 0) = 0, \quad \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2mv_0 \delta(x) \quad (3.32)$$

とする。この運動量に含まれる v_0 は初速度である。この (3.31) 式で、初期条件の第 1 式はすでに満たしているので、あとはこの第 2 式を適用すると、

$$\rho(x) \sum_{i=1}^{\infty} C_i \omega_i X(x, \lambda_i) = 2mv_0 \delta(x) \quad (3.33)$$

となる。この両辺に $X(x, \lambda_j)$ を掛けてから、 x について $-r$ から r まで積分すると、固有関数の直交性 (3.29) 式が使える、

$$C_i = \frac{2mv_0}{\omega_i N_i^2} X(0, \lambda_i) \quad (3.34)$$

と決まる。これを (3.31) 式に戻して、変位 $U(x, t)$ が、最終的に、

$$U(x, t) = 2mv_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X(0, \lambda_i)}{\omega_i N_i^2} X(x, \lambda_i) \sin(\omega_i t) \quad (3.35)$$

と求められる。逆にこの式から $t = 0$ における速度を求めると、

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2mv_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X(0, \lambda_i)}{N_i^2} X(x, \lambda_i) \quad (3.36)$$

となる。これは、固有関数の完全性の式

$$\rho(x) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X(x, \lambda_i) X(x', \lambda_i)}{N_i^2} = \delta(x - x') \quad (3.37)$$

を使うと,

$$\rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2mv_0 \delta(x) \quad (3.38)$$

となって, 初期条件 (3.32) の第 2 式が再現される.

4 数値計算例

これまでの解析結果に基づいた数値計算例を示す. ここでは, 適当ではあるが, 鎖, および, 錘に関する数値を,

$$\ell = 1 \text{ m}, \quad r = 0.5 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad \rho = 1 \text{ kg/m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (4.1)$$

と取ることとする. この設定で, a を求めるための方程式 (2.19) を数値的に解き, さらにその他のパラメータを求めると, 小数点以下 4 桁の精度で,

$$a = 0.8458 \text{ m}, \quad b = 2.8616 \text{ m}, \quad \theta_0 = 0.8687, \quad T_0 = 12.8354 \text{ N}, \quad \text{gd}^{-1}(\theta_0) = 1.0045, \quad c = 2.8790 \text{ m/s} \quad (4.2)$$

という値になる.

さらに, (3.15) 式の係数 D_n を求めるための漸化式を数値的に解き, D_{200} までを求めてみた. これを基にして, (3.14) 式の級数を求めるわけだが, このときの q の値は $\tanh$ という絶対値が 1 以下の数値の冪乗で与えられるので, この級数の収束性はかなり良いはずである. しかし, D_n の値は λ の値に依存する形で求められ, λ の値が大きくなるにつれ, D_n の値もかなり大きくなってしまいうため, 級数の収束性は λ の値に大きく左右されてしまう. ここでは先に D_n を求め, その後に級数を求めたのが良くないのかもしれない. この方法では非常に大きな数と非常に小さな数の掛け算になってしまい数値的に不安定になる. 本来なら, D_n を求めることと級数を求めることを同時進行させ, このような事態になることを避けるようなうまい方法があるとよいのだが, そのような方法を思いつかなかった. 実際に数値計算を試した結果では, λ の値がおおよそ 60 位までは計算できたがそれ以上は数値的に不安定になってしまい無理であった.

ということで, 固有値方程式 (3.22) に基づき固有値 λ_i を求めた結果, 60 以下の固有値は 8 個あり,

$$\lambda_i = 2.0918, \quad 8.1497, \quad 15.3999, \quad 22.8296, \quad 30.3109, \quad 37.8138, \quad 45.3275, \quad 52.8473 \quad (4.3)$$

という値を得た. これ以上大きな固有値は値を求めても信頼性がなくなるので, ここでは扱わないこととする. この固有値に対する規格化された固有関数 $X(x, \lambda_i)/N_i$ を最初の 5 個だけ, 次ページの図 3 に示す. この図で示した i 番号はモード番号 (固有値番号) である. どの固有関数もモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ. また, この図から, 第 2 モード以上のときでも, 固有関数は, $x = 0$ で必ずしもゼロになる訳ではないこと, および, 第 1 モードのときは $x = 0$ でその微係数はほとんどゼロとなっているように見える. 実際に, このときの微係数を, 規格化した固有関数につき, モード番号 $i = 1, 2, 3$ に対して, 数値的に求めてみると,

$$\frac{dX(x, \lambda_i)/N_i}{dx} \Big|_{x=+0} = -0.9392, \quad -6.0338, \quad -11.8887 \quad (4.4)$$

という値になる. これから $i = 1$ のときは完全にゼロではないが, ゼロに近い値である. 錘の運動方程式 (3.3) から考えると, 錘を動かす原動力は変位の x での微分である. したがって, 第 1 モードは錘の運動にはあまり

寄与しない。これに寄与しているのは，第2モード以上ということになる．ここでの場合に当てはめると，初め錘には，衝撃によって，初速度 v_0 が与えられるが，第2モード以上の働きによってこの速度は減少させられることになる．

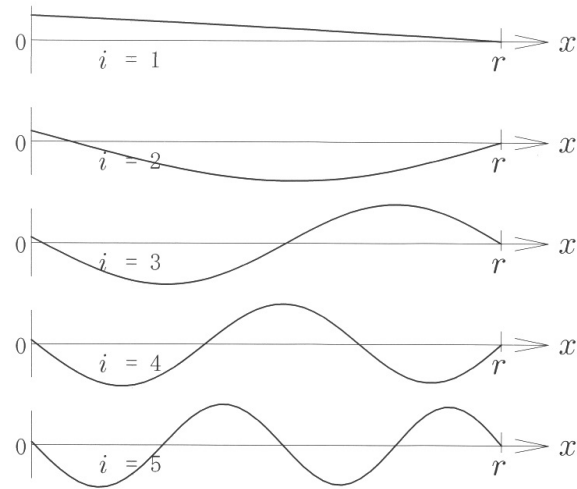


図3 固有関数

つぎに，(3.35) 式に基づき変位 $U(x,t)$ をグラフ化したものを図4に示す．このグラフは，水平右方向に x 軸，斜め上方向に t 軸，上方向に U 軸をとり，3次元的に表したもので，ここでは， x について 0m から $r = 0.5\text{m}$ まで， t については 0s から 3s までを描いた．ただし， U 軸は任意スケールである．また，このグラフでは陰になって見えない部分を描かないように陰線処理をしている．

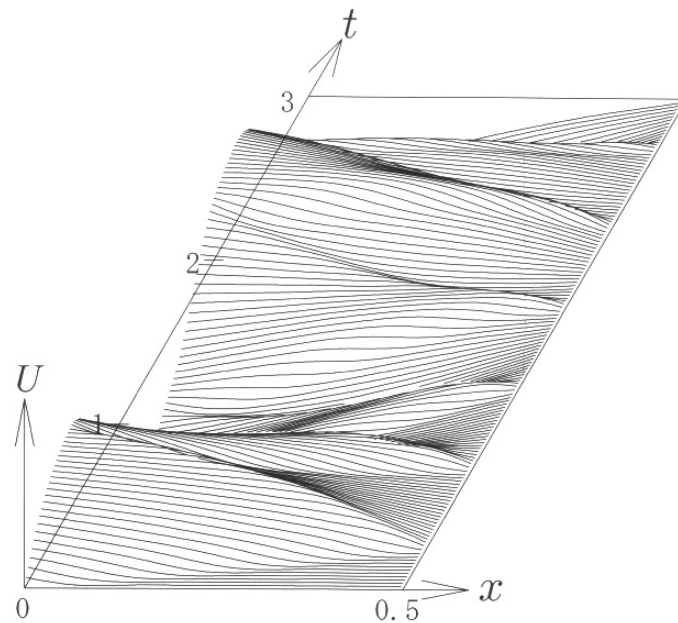


図4 変位 $U(x,t)$

このグラフから，初め錘に与えられた衝撃が，暫時， x 方向に伝播していき， $x = r$ の端点で反射していくの

が分かる。(4.3) 式から λ_1, λ_2 を拾い, (3.13) の第 2 式で ω_1, ω_2 に変換し, これらモードの振動周期を求めると,

$$2\pi/\omega_1 = 1.7648 \text{ s}, \quad 2\pi/\omega_2 = 0.4529 \text{ s} \quad (4.5)$$

となる. この図からもこれら 2 つの周期を持つ振動が重なっているのが分かる. ただし, この振動は, 全体として見たときは, 周期性を持ったものにはならないため, その振動の様子は結構複雑である.

5 おわりに

今回は, 前回の鎖でできた懸垂線の振動問題を少し拡張して, 鎖の真ん中に錘を付けた場合を扱ってみた. この場合の解析解を見つける過程は結構難しい点もあるが, 最後の数値計算により, 思った通りの結果がでたことで, 間違いはないものと確信する. この種の懸垂線の振動問題は, 散歩しているときに, 電柱間に張られた電線が風に揺れているのを見て思い付いたものである. 何故こんなことにこだわっていちいち面倒なことをするのかとお叱りを受けそうだが, 私にとってはオモチャをいじくりまわすようなもので, これからもこの種の変形問題を何度かやってみようと考えているのでお許しいただきたい.

(2.11) 式のところで, 物理ではめったにお目にかかれない逆 Gudermann 関数, あるいは Lambert 関数と呼ばれるものに出会えたのは幸いである. ここでの問題に直接かかわるものではないが, 以前に調べたことがあるので, 簡単に紹介しておく.

この関数は通常,

$$\text{gd}^{-1}(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\cos p} dp, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.1)$$

で定義される. この右辺の積分は,

$$\int_0^\theta \frac{1}{\cos p} dp = \int_0^\theta \sqrt{1 + \tan^2 p} dp \quad (5.2)$$

と変形してから, $\tan p = \sinh q$ と変数変換をし, $dp = dq / \cosh q$ を用いて

$$\text{gd}^{-1}\theta = \int_0^{\text{arcsinh}(\tan \theta)} dq = \text{arcsinh}(\tan \theta) \quad (5.3)$$

となる. これが, (2.11) 式で引用したものである.

「グーデルマン関数とメルカトル図法」(「数学・物理通信」9 巻 2 号) で述べたようにこの関数にはその他に種々の表し方

$$\text{gd}^{-1}(\theta) = \text{arctanh}(\sin \theta) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) = \log \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \quad (5.4)$$

などがある. この最初の式は, (5.1) 式において $\cos p = \sqrt{1 - \sin^2 p}$ とおいてから $\sin p$ を $\tanh q$ と置き換えて積分すると得ることができる. この 2 番目, 3 番目の式は, この最初の式を変形したものである.

[謝辞]

今回も, 京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき, 私の書き方で至らなかった点などについて, いろいろとご教示いただきました. 先生に心から感謝いたします.

「Levi-Civita の記号の縮約」再々論

矢野 忠^{*1}

The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited Again

Tadashi YANO^{*2}

1. はじめに
2. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示
3. Levi-Civita の記号の縮約
4. おわりに
5. 付録

まえおき

このエッセイは「Levi-Civita の記号の縮約」再々論 [1] の改訂版である。話の筋は変えなかったが、記号の定義をきちんと書いたこと、(2.6)-(2.8) の証明を詳しく述べたこと、および、付録 1, 2 を新たに付け加えた。付録 1, 2 は余計かもしれないが、直観的に正しいと感じることの具体的な内容の記述である。

1 はじめに

愛数協の機関誌「研究と実践」第 18 号に「テンソル解析の学習における問題点」というテーマでエッセイを載せたが [2]、その中で Levi-Civita の記号とその縮約について述べた。またその再論として「研究と実践」第 64 号に「Levi-Civita の記号の縮約」再論を載せた [3]。またその直後に発行された「研究と実践」第 65 号に前記の「テンソルの学習における問題点」の改訂版を載せた [4]。これらのエッセイで Levi-Civita の記号とその縮約については語り尽くしたと思っていたが、そこで述べたのとは異なった証明を『流体力学』 [5] に見つけた。

天才物理学者 Feynman がどこかで言ったように「人は少なくとも二つ以上の方法で物事を理解しなければ、その事を分かったことにはならない」から、あえて標題のテーマについて再々論してみよう。

2 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示

問題にする重要な関係式について述べる前に、ここで取り扱う記号の定義を述べておこう。

それは Kronecker のデルタ δ_{ij} と Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} の定義である。

まず Kronecker のデルタ δ_{ij} は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.1)$$

で定義される。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

つぎに Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ または } (2, 3, 1) \text{ または } (3, 1, 2) \text{ のとき} \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1) \text{ または } (2, 1, 3) \text{ または } (1, 3, 2) \text{ のとき} \\ 0, & \text{上の 2 つの場合以外のとき} \end{cases} \quad (2.2)$$

で定義される。

上で定義された Levi-Civita の記号の積と Kronecker のデルタの行列式との間に有用な関係式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

が成り立つ。

『流体力学』（前編）[5] にはこの関係の今まで見たことのなかった証明が与えられている。ここではその証明を述べてみよう。

(2.3) の左辺は ϵ_{ijk} と ϵ_{pqr} のテンソル積として 6 階のテンソルを表す^{*3}。一方、右辺の行列式を展開すると $\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}$ のような 3 個の 2 階のテンソル積，すなわち，6 階のテンソルの和になる。

この等式を証明するには，右辺の行列式の行を，その添字 ijk から 123 の順序となるように入れ替えれば，行の置換による符号 ϵ_{ijk} がくくり出せるから，

$$\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

となる。つぎに同様に行列式の列の順序を pqr から 123 の順序となるように入れ替えれば，行列式の列の置換による符号 ϵ_{pqr} がまたくくり出せて

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られて，式 (2.3) が証明された^{*4}。さすがに流体物理学の研究で業績をあげられた，今井功先生の証明は簡潔で要を得ている。

^{*3} この表現はあまり正確ではない。というのは ϵ_{ijk} 等は正確には普通のテンソルではないからである。正確にはこれは相対テンソル（テンソル密度ともいう）と呼ばれているものである。空間反転に対する変換性が普通のテンソルとは異なっている。しかし，ここでは空間反転をとりあつかわないので，普通のテンソルのように扱っている。

^{*4} この証明で直観的に十分かとも思うが，納得できない人のために具体的な証明を付録 1 に述べる。

この式 (2.3) から順次縮約を 1 回, 2 回, 3 回と行えば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{iqr} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{ji} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{ki} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ii} \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \delta_{iq} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jr} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} \end{vmatrix} + \delta_{ir} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jq} \\ \delta_{ki} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jr} & \delta_{jq} \\ \delta_{kr} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\
&= (3 - 1 - 1) \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijr} &= \delta_{jj}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kj} \\
&= 3\delta_{kr} - \delta_{kr} \\
&= 2\delta_{kr} \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6 \tag{2.8}$$

が得られる. ここで 2 度現れる添字についてはそれぞれ 1-3 までの和をとるという Einstein の規約が用いられている.

今井先生の証明を今まで見たから, ついでに藤井昭彦先生の代数的な証明も見よう*⁵. その要点は Levi-Civita の記号 ϵ_{ijpq} の行列式表示の導出に端的に現れているから, そこを見てみよう.

ϵ_{ijpq} は 4 階のテンソルであるから, 2 階のテンソル $\delta_{ip}, \delta_{iq}, \delta_{jp}, \delta_{jq}$ の中の 2 つの積の 1 次結合で表されるはずである. ただし, $(i, j), (p, q)$ はそれぞれのペアの添字に関して反対称でなければならない. そのような組み合わせは $\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$ に限られる. 試みに $i \leftrightarrow j$ の交換を行ってみれば, $\delta_{jp}\delta_{iq} - \delta_{jq}\delta_{ip} = -(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})$ と $i \leftrightarrow j$ の交換に対して反対称となっている. また, 同様に $p \leftrightarrow q$ の交換を行ってみれば, やはり反対称になっていることが分かる. したがって, a を未定の定数として

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{pq} = a \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

と表せる. ここで, $i = 1, j = 2, p = 1, q = 2$ とおけば, $a = 1$ が得られる. したがって

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{pq} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

が成り立つことが分かる. これが分かるら

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu\alpha} & \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\gamma} & \delta_{\mu\delta} \\ \delta_{\nu\alpha} & \delta_{\nu\beta} & \delta_{\nu\gamma} & \delta_{\nu\delta} \\ \delta_{\rho\alpha} & \delta_{\rho\beta} & \delta_{\rho\gamma} & \delta_{\rho\delta} \\ \delta_{\sigma\alpha} & \delta_{\sigma\beta} & \delta_{\sigma\gamma} & \delta_{\sigma\delta} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

が成り立つことは容易に推量できるのであろう*⁶.

*⁵ これは [6] にエレガントな証明がある.

*⁶ (2.11)(2.12) 等の式の添字でラテン文字は 1-3 をとり, ギリシャ文字は 0-3 または 1-4 をとると約束する.

3 Levi-Civita の記号の縮約

「研究と実践」第 18 号 [2] に Levi-Civita の記号の応用についても述べた．これらはもちろん私の独創ではなく，テンソル解析の初歩を学んだことのある人なら誰でもよく知っていることである．問題は

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示（または行列式を展開した式）をどう導くか

にかかっていた．しかし，実際に応用として必要とされるのは

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ を縮約したときに成り立つ式，(2.6),(2.7),(2.8)

である．特に，(2.6) が重要である．これらが容易に証明できれば，現実の教育に役立つことになる．『物理数学 (I)』[7]^{*7}はこれに挑戦した恐らくははじめての試みであろう^{*8}．この試みの教育的実践の成果を詳らかにしないうが，それなりの実績を踏まえていると考えるのが妥当であろう．そうだとすれば，愛媛大学でもこの Levi-Civita の記号の工学教育への導入とそのベクトル解析への積極的活用を図るべきであろう．(2.6),(2.7),(2.8) がどのように用いられるかは前記のエッセイで示したので [4]，ここでは (2.6),(2.7),(2.8) の標準的な証明を与えておこう．

まず (2.6) の証明を $j = k$ と $j \neq k$ とに分けて考えよう．

$j = k$ の場合は，Levi-Civita の記号の定義にしたがって，(2.6) の左辺は

$$\epsilon_{ijj} = 0, \quad (j \text{ について和をとらない}) \quad (3.1)$$

である．一方 (2.6) の右辺は

$$\delta_{jq}\delta_{jr} - \delta_{jr}\delta_{jq} = 0, \quad (j \text{ について和をとらない}) \quad (3.2)$$

で (2.6) が成立することが分かる．

$j \neq k$ の場合は， $(j, k) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ の場合とその逆順の $(j, k) = (2, 1), (3, 2), (1, 3)$ の場合がある．逆順の場合は新たに考える必要がないことを後に示す．ここでは $(j, k) = (1, 2)$ について調べてみよう．このとき (2.6) の左辺は

$$\epsilon_{i12}\epsilon_{iqr} = \epsilon_{312}\epsilon_{3qr} = \epsilon_{3qr} = \begin{cases} 1, & (q = 1, r = 2) \\ -1, & (q = 2, r = 1) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (3.3)$$

である．一方，(2.6) の右辺は

$$\delta_{1q}\delta_{2r} - \delta_{1r}\delta_{2q} = \begin{cases} 1, & (q = 1, r = 2) \\ -1, & (q = 2, r = 1) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (3.4)$$

で，(2.6) が成り立つ． $(j, k) = (2, 3), (3, 1)$ の場合も同様である^{*9}．

$(j, k) = (2, 1), (3, 2), (1, 3)$ の場合は $j \leftrightarrow k$ の交換に対して (2.6) が

$$\epsilon_{ikj}\epsilon_{iqr} = \delta_{kq}\delta_{jr} - \delta_{kr}\delta_{jq} \quad (3.5)$$

となるが，これは

$$-\epsilon_{ijk}\epsilon_{iqr} = -(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}) \quad (3.6)$$

^{*7} その後 [8] に [7] とほぼおなじ内容が載っていることを知った．これが [7] の文献の原典であろうかと推測される．

^{*8} もちろん，物理学や数学に進む学生を除いての話である．少し高等な古典力学のテキストである，『古典力学』（上）第 2 版 [9] には Levi-Civita の記号が出ている

^{*9} 話の筋としてはそのとおりであるが[‡]，付録 2 に $(j, k) = (2, 3), (3, 1)$ の場合も示しておく．

となり、これは (2.6) と同じであるので、新たに証明する必要がない。

(2.7) の証明は (2.6) で j と q について縮約すれば、

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijr} &= \delta_{jj}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kj} \\ &= 3\delta_{kr} - \delta_{kr} \\ &= 2\delta_{kr}\end{aligned}\tag{2.7}$$

と証明される。

さらに、(2.8) の証明は (2.7) で k と r について縮約すれば

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2 \cdot 3 = 6\tag{2.8}$$

と証明される。

4 おわりに

Levi-Civita の記号の縮約はベクトルの 3 重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ において現れる。テンソル解析を学んだことのない人にとってはなじみの薄い、この Levi-Civita の記号の使い方を覚えれば、ベクトル解析の多くの面倒な公式を覚える必要はあまりなくなるであろう。

5 付録

5.1 付録 1 (2.4) と (2.5) の具体的な導出

(2.4) と (2.5) の導出は直観的に正しいと認められるであろうが、それでももう一つ納得できないと思われるかもしれない。それで具体的に個々の場合を計算してみることにした。これは直観的な説明に納得できない方のためだから、すでに納得できた方は読む必要がない。

まず、(2.4) の導出からはじめよう。(2.4) および (2.5) における添字 i, j, k はすべて 1, 2, 3 をとるのだが、 i, j, k が同じ数を重複して取る場合には $\epsilon_{ijk} = 0$ である。したがって、 (i, j, k) が異なった 1, 2, 3 の数となる場合だけを考えればよい。

これから行列式の各行の入れ替えで (2.4) が成り立つことを示したい。

(i, j, k) が (1, 2, 3) の偶置換である場合から考える^{*10}。この場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ の場合がある。

$(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の場合は偶置換の最後に考えることにして、はじめに $(i, j, k) = (2, 3, 1)$ の場合を考えよう。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \\ \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \\ &= (+1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{231} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}\end{aligned}\tag{5.1}$$

^{*10} すなわち、行列式の各行の入れ替えが偶数回行われる場合を偶置換と言っている。

が成り立つ.

これはまったく正しい. しかし, いつも行列式を一々書くのは煩わしいので, つぎのような記号 D_{ijk} を導入しよう.

$$D_{ijk} := \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

ここで, p, q, r はこの段階では固定した数で, 行列式の行の入れ替えのときには変えない.

この記号を導入すれば, 上の行の入れ替えの計算をもっと簡便に表すことができる.

この記号を導入すれば, 上の (5.1) の計算は簡便に

$$D_{231} = (-1)D_{132} = (-1)(-1)D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{231}D_{123} \quad (5.3)$$

と表すことができる.

以下, この表記で行の入れ替えの計算を示すことにする.

つぎに, $(i, j, k) = (3, 1, 2)$ のとき, 行列式の行の入れ替え演算は

$$D_{312} = (-1)D_{132} = (-1)(-1)D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{312}D_{123} \quad (5.4)$$

となる.

偶置換の場合の最後に, はじめにスキップした $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ のときを考える. このとき, 行列式の行の入れ替えは行わないので,

$$D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{123}D_{123} \quad (5.5)$$

である. この場合を始めにもってきてもよかったのだが, まったく行列式の行の入れ替えをしないのは, 特別な場合なので, わざと偶置換の場合の最後に考えた.

この3つの場合では $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ である. したがって, 行の偶置換の場合に (2.4) が成り立つ.

つぎに (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の奇置換の場合を考えよう. この場合は $(i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)$ の場合がある.

前に定義した D_{ijk} を奇置換の場合でも続けて用いよう. そうすると

$$D_{321} = (-1)D_{123} = \epsilon_{321}D_{123} \quad (5.6)$$

$$D_{213} = (-1)D_{123} = \epsilon_{213}D_{123} \quad (5.7)$$

$$D_{132} = (-1)D_{123} = \epsilon_{132}D_{123} \quad (5.8)$$

この3つの場合ではもちろん $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ である.

したがって, 行の奇数回の入れ替え (奇置換) の場合にも (2.4) が成り立つ.

(i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換の場合も奇置換の場合も (2.4) が成り立つ.

つぎに行列式の列の入れ替えについて考えることにしよう. この場合には (2.4) で

$$D_{123} = C_{pqr} := \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

と定義しよう.

$(p, q, r) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ のとき偶置換であり, $(p, q, r) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)$ のとき奇置換である.

まず偶置換から考えよう．このとき $C_{231}, C_{312}, C_{123}$ の3通りの場合がある．それらはそれぞれ

$$C_{231} = (-1)C_{132} = (-1)(-1)C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{231}C_{123} \quad (5.10)$$

$$C_{312} = (-1)C_{132} = (-1)(-1)C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{312}C_{123} \quad (5.11)$$

$$C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{123}C_{123} \quad (5.12)$$

となる．

つぎに奇置換を考えよう．このとき $C_{321}, C_{213}, C_{132}$ の3通りの場合がある．それらはそれぞれ

$$C_{321} = (-1)C_{123} = \epsilon_{321}C_{123} \quad (5.13)$$

$$C_{213} = (-1)C_{123} = \epsilon_{213}C_{123} \quad (5.14)$$

$$C_{132} = (-1)C_{123} = \epsilon_{132}C_{123} \quad (5.15)$$

以上で偶置換の場合も奇置換の場合も行列の列の入れ替えに対して

$$D_{123} = C_{pqr} = \epsilon_{pqr}C_{123} \quad (5.16)$$

が成り立つことが示された．

(5.16) は (2.4) から (2.5) への式の変形を証明している．したがって，(2.5) の具体的な証明がなされた．

5.2 付録2 (2.6) の証明 $(j, k) = (2, 3), (3, 1)$ の場合

この付録2では (2.6) の $(j, k) = (2, 3), (3, 1)$ の場合の証明をしておく．

まず $(j, k) = (2, 3)$ の場合を証明しよう．

この場合，(2.4) の左辺は

$$\epsilon_{i23}\epsilon_{iqr} = \epsilon_{123}\epsilon_{1qr} = \epsilon_{1qr} = \begin{cases} 1, & (q=2, r=3) \\ -1, & (q=3, r=2) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (5.17)$$

であり，また (2.6) の右辺は

$$\delta_{2q}\delta_{3r} - \delta_{2r}\delta_{3q} = \begin{cases} 1, & (q=2, r=3) \\ -1, & (q=3, r=2) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (5.18)$$

である．したがって， $(j, k) = (2, 3)$ のとき (2.6) は成り立つ．

つぎに $(j, k) = (3, 1)$ の場合を証明しよう．

この場合，(2.6) の左辺は

$$\epsilon_{i31}\epsilon_{iqr} = \epsilon_{231}\epsilon_{2qr} = \epsilon_{2qr} = \begin{cases} 1, & (q=3, r=1) \\ -1, & (q=1, r=3) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (5.19)$$

であり，また (2.6) の右辺は

$$\delta_{3q}\delta_{1r} - \delta_{3r}\delta_{1q} = \begin{cases} 1, & (q=3, r=1) \\ -1, & (q=1, r=3) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \quad (5.20)$$

である．したがって， $(j, k) = (3, 1)$ のときも (2.6) は成り立つ．

(2001.8.1) (2002.3.20 改訂) (2021.12.3 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 研究と実践 (愛数協), 第 77 号 (2001.9), 16-20 (『数学散歩』 (国土社, 2005), 『物理数学散歩』 (国土社, 2011) 所収)
- [2] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践 (愛数協), 第 18 号 (1985.3), 7-17
- [3] 矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再論, 研究と実践 (愛数協), 第 64 号 (1997.12), 2-10 (『数学散歩』 (国土社, 2005), 『物理数学散歩』 (国土社, 2011) 所収)
- [4] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点 (改訂版), 研究と実践 (愛数協), 第 65 号 (1998.3), 2-17 (『数学散歩』 (国土社, 2005), 『物理数学散歩』 (国土社, 2011) 所収)
- [5] 今井 功, 『流体力学』 (前編) (裳華房, 1973) 267-268
- [6] エイチスン, ヘイ (藤井昭彦訳) 『ゲージ理論入門』 II (第 2 版) (講談社, 1992) 328-330 問題略解
- [7] 中山恒義, 『物理数学 (I)』 (裳華房, 2001) 37-40
- [8] Chung Wa Wong, *Introduction to Mathematical Physics, Methods and Concepts*, (Oxford Univ. Press, 1991) の訳本, (小林, 近訳) 『物理数学入門』 I 線形代数とフーリエ級数 (丸善, 1996) 18-22
- [9] ゴールドスタイン (瀬川, 矢野, 江沢訳), 『古典力学』 第 2 版 (上) (吉岡書店, 1983) 225

自然科学と論理学

武谷三男

Natural Sciences and Logic

Mituo Taketani

まえおき

これは故武谷三男氏の遺した多量の文書の中にあった一つのエッセイである。

武谷三男『弁証法の諸問題』[1]では“Naturscienko kaj Logiko”というタイトルでエスペラント語に訳されて収録された論文の、これは原文であろうと推測される。このエッセイを多量の文書の中から発見された武谷史料研究会会員の西谷正氏と武谷史料室室長の三本龍生氏の許可を頂いて、ここに掲載する。

この機会に両氏にこの「数学・物理通信」への掲載の許可を頂いたことに関して感謝を申し上げたい。なお、この文書の発見の経緯等については「東海の科学史」に掲載された西谷氏の論文[2]を参照をお願いする。なお、本文を読みやすいように編集者の一存で現代風に漢字をひらかなにしたり、現代風のよみがなにしたりした。原文を読みたい方は西谷氏の論文を読んでください。

なお、編集者がこの論文の解説をするのに適当な者とは思わないが、付録1として現代の量子力学の基本法則の解説と、付録2として量子論における粒子性と波動性の説明を付加した。これらは弁証法の哲学についてではなく、あくまで量子力学の基本法則と量子論における粒子性と波動性の説明である。

また、この論文はEngelsのanti-Duehring（反デューリング論）[3]、[4]をめぐる論争が昔あり、その中で書かれた論文ではないかとの示唆を米澤穰（広島大学名誉教授）さんから頂いた。そのことを頭において読んでいただけるとよいと思う。（編集者：矢野）

1 自然科学と論理学

現代は社会においても、文化においても危機が叫ばれている。形式的思惟の枠の中に厳格に閉じ込められていると思われていた数学や物理学も前世紀の末葉からおおきい矛盾を現わしはじめた。もはや、形式的思惟は数学、物理学に、ついて行くことができなくなった。ポアンカレのいわゆる Crise（crise はフランス語、ドイツ語なら Krise, 危機：編者付加）。このことが安価な経験主義、マッハ主義、懐疑論、象徴主義、不可知論等を生むこととなった。しかし、この解決はすでに示されてある。すなわち、Hegel により倒立ではあるが体系付けられ、その後正しく発展した論理であり（Engels の Dialektik, 弁証法をさす：編者注）、これなくしては不可能である。

私は形式論理学が初等数学ではすでに成立しないことを anti-Duehring（反デューリング論：編者付加）の中の、種々の反対論を生んだが、最近日本で議論の中心になっている一つの例で、その正しい解決を示しながら、示そう^{*1}。すなわち、ある代数量 a を否定すると $-a$ になり、これを $-a$ を掛けることによって否定すると a^2 になると考へ、否定の否定によって高次の形で復帰する Dialektik の一つの例証であるということである。これは初めから否定を考えるのは困難であり幾分の不自然を伴う。しかし、Dialektik の眼目是对立の統一で、他の法則はこの発現に他ならないことからもっと根本的に考えると、この場合 a と $-a$ とは対立であり、これが二乗によって a^2 に統一される。すなわち a^2 は $a \times a$ でもあるし、 $(-a) \times (-a)$ でもある。この矛盾した二つが a^2 に統一さ

^{*1} 編者注：これはあまりわかりやすい文章ではない。「私は形式論理学が初等数学ではすでに成立しないことを示そう」といいたいのであろう。

れている。故にこの際、形式論理学の“AはAにして non-Aに非ず”という同一律と矛盾律は成立しない。一般に形式論理学は抽象的だと言われている。このことは厳密にいうと、単に Element（要素：編者付加）の Menge（集合：編者付加）において各 Element をバラバラに考えるときにのみ（形式論理学は：編者付加）成立し、一度その間に関係ができるや（形式論理学は：編者付加）成立しなくなる。例えば、群（Gruppe）や体（Koerper），Ideal などでは成立しない。

Cantor によって初められた Mengenlehre（集合論：編者付加）において、種々の無限大をあつかうとき形式論理学は決定的な困難に出あう。すなわち Continuum, Wohlordnungssatz（順序づけ定理）etc. において全く形式論理が破たんを来すのである。これの正しい道は Dialektik のみが示し得るのである。

ポアンカレの Crise は新しい物理学にその解決を見出した。この物理においては形式的思惟がお互に他を排する波動と粒子の二つが統一されている*²。これが量子力学のいわゆる Unbestimmtheit Relation（不確定性関係：編者付加）に導く、すなわち電子や光粒子（photon）は観測を加へた（観測した：編者修正）場合予測できない行動をする。ただ統計的にのみ結果が予測せられる。“因果律（Kausalgesetz）は否定された！または他の隠されたパラメーター（parameter）がある！これは認識できない故に神のみぞ知る！”。しかしこれは量子力学の正しい理解から来る（だろうか：編者付加）。量子力学では“二つの系を合成するとき各部分の和以上のものが全体に現われる”－全体と部分の Dialektik（弁証法：編者付加）－。および“系の全体としては厳密に因果的（kausal）である”。観測とは観測者と対象とで合成系を作ることである。しかしこれだけでは観測はない。次にこの合成系（全体）から対象（部分）を抽出するのである。この時、同一状態が観測において異って現象し、それは確率においてのみ predict（予言：編者付加）できる故に、形式的な同一律と、充足理由律がなり立たない。－これがいわゆる因果律の否定と称するものの真の内容である－。しからば観測から実在の像を作り得ることを断念しなければならぬか？ 断じて否！ 単独的な観測は偶然的であるが、この総計において（回数を無限に多くして）いくらかでも正確に反映する事が出来る。“必然的なものは偶然性の無限の集合を通じて自己の道を切り開く”のである。本質と現象の関係は Dialektik（dialektisch 弁証法的：編者修正）にのみ把握できる。量子力学において本質は波動関数で表わされる State（状態：編者付加）であり、これが波動、粒子、確率の形において現象するのである。観測における状態（State）のいわゆる因果的な変化（reduction）は“主観の作用、因果律の否定”でなくして、物質の法則、すなわち、量子力学の合成則の Dialektik に根拠があるのである。これは観測者と対象の切れ目はどこに置いても同一の結果を得ることからも理解できる。

量子力学は原子、核、高 energy（エネルギー：編者付加）現象、負運動状態等において甚しい困難と矛盾を示しつつある。これを救うのは Dialektik と今後の dialektisch な実験のみである。

2 付録

2.1 付録 1 量子力学の法則

この付録 1 は故小川修三先生の講義にもとづいている*³。

量子力学には二つの大きな法則がある。

第一法則は系の状態の観測が行われないうちの量子力学の状態は、つぎの Schroedinger 方程式にしたがって時間変化する。

*² 付録参照

*³ しかし、[5] にはここで述べた量子力学の基本法則の記述はそれほど明確ではない。これは編集者が小川さんの「原子核物理学」の初回の講義で聞いた内容である。

すなわち、量子力学の状態 $\psi(\mathbf{r}, t)$ を空間の位置 $\mathbf{r}(x, y, z)$ と時間 t の関数とすれば、Schroedinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$
$$H := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})$$

である。ここで、 H はハミルトン演算子であり、 $V(\mathbf{r})$ は粒子に働く力のポテンシャルで、 Δ は 3 次元のラプラス演算子であり、直交座標系では

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で定義されている。

第二法則は系の状態が観測されたときの状態の変化についてである。系の状態はハミルトン関数の固有状態の重ね合わせで表されているが、系の観測がなされた瞬間にある特定の固有状態に瞬間的に移行する。これを状態の収縮と言っている。そしていま電子の状態は物理的にとりうるエネルギーのどれか一つになり、その状態に瞬間的に移行する。この変化は将来的にはなんらかの方程式で記述できるようになるのかもわからないが、現在のところはこれが量子力学の大枠の法則として認められている。

第二法則を数式で説明をしておく、系の観測前の状態を $\psi(\mathbf{r}, t)$ とすると

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(\mathbf{r})$$

で表された観測前の状態 $\psi(\mathbf{r}, t)$ からそれを重ね合わせとして表していたその固有状態のいずれか一つ

$$u_k(\mathbf{r}), \quad k: \text{無数の } n \text{ のどれかひとつ}$$

へと遷移する。

一般の重ね合わせの状態からどの固有状態へと遷移するかは前もって予言することはできないが、どのくらいの確率でその状態に遷移するかはわかる。その確率は状態 $u_k(\mathbf{r})$ の前の展開係数である、 $c_k(t)$ の絶対値の 2 乗 $|c_k(t)|^2$ に比例する^{*4}。

だから、系の観測過程において時間的な記述はできないが、まったく何もわからないのではなく、ある系の状態への遷移する確率（「遷移確率」という）が得られる。

2.2 付録 2 量子論における粒子性と波動性

量子力学を学んだ人には常識ではあるが、電子や光子の粒子性と波動性について一言述べておく。

電子の位置を測定するときには、粒子として把握されるが、その運動量を測定するときには波動としてと把握される。要するに、電子はあるときには粒子として、またあるときは波動として認識される。

ところが古典的には粒子として認識されるものは波動ではないし、波動として認識されるものは粒子ではない。このことから電子は古典的には捉えることができないが、量子論では可能である。このことは不確定性関係としても認識された。電子の位置の測定の不確定さを Δx 、運動量の不確定さを Δp とすれば、 $(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$ という関係が成り立つ。これを不確定性関係という。ここで $\hbar$ はプランク定数 h を定数 2π でわった定数である。

^{*4} いまは量子力学では状態という概念を使うが、Schroedinger 流の量子力学を波動力学といったことから、ここで述べた状態の遷移のことを波束の収縮ともいう。これを武谷の論文では「因果的な変化 (reduction)」と言っている。量子力学は Schroedinger 方程式にしたがって、状態が時間的に変化するので因果法則にしたがっていると考えられている。

電子は古典的には粒子と考えられていたが、一方では波動性をもつことが実験的に証明された。また光は古典的に波動と考えられていたが、光電効果や Compton 効果に見られるように、粒子性をもつことが実験的に証明された。もちろん、電子や光の、粒子性と波動性が同時に現れることはないが、二つの性質をもっていることは認めなければならない。（編集者：矢野）

参考文献

- [1] 武谷三男,『弁証法の諸問題』 新装版（武谷三男著作集, 第 1 巻）（勁草書房）, 67-69
- [2] 西谷正,「武谷三男三題」,『東海の科学史』 第 14 号（2021 年春）, 36-48
- [3] F. エンゲルス（大内兵衛, 細川嘉六監訳）,『反デューリング論；自然の弁証法』 （大月書店）
- [4] F. エンゲルス（田辺振太郎訳）岩波文庫『自然の弁証法』 上, 下（岩波書店）
- [5] 小川修三（矢野忠 編集）, 量子力学講義ノート 1,「素粒子論研究」電子版 24 巻 3 号 (2016. 11.15)

辻信行さんを偲ぶ

矢野 忠^{*1}

Memory of Mr. Nobuyuki TUJI

Tadashi YANO^{*2}

10月だったろうか、すでに11月に入っていたらうか、用があって出版社の海鳴社の辻信行さん宛にメールを出したら、夫人の和子様から夫の辻信行さんが昨年末に、76歳で急死されていたとのメールをもらった。

出版人としての辻さんと私とがメールのやり取りをするようになったのは多分、堀源一郎著『ハミルトンと四元数』（海鳴社）が出版されて間がないころだったと思う。

この書は2007年11月7日の発行だから、2008年のはじめのことだったろうか、と思って愛数協の『研究と実践』をとりだしてみたら、この『研究と実践』に私のエッセイ「四元数」が掲載されたのは、2008年10月のことであり、つぎのエッセイ「四元数の発見」が『研究と実践』に掲載されたのは2009年9月のことであった。もっとも「四元数の発見」の脱稿日は2008.2.29となっているから、1年以上原稿が『研究と実践』の編集者の手元にあったことになる。だから2008年のはじめのころというのはたぶんまちがっていないようだ。

それはともかくとして、堀さんの著書の第2章として「四元数の発見」という章があるが、ここに書いてあることは確かにハミルトンの記したノートの和訳ではあるが、どういうふうにはミルトンが四元数を発見されたのかはこれを読んでもよくわからなかった。それで私の書いたエッセイ「四元数の発見」をメールで送って私のエッセイのほうが、どのようにして四元数をハミルトンが発見したのかという、いきさつがわかりやすいのではないかと申し述べた。

このとき、辻さんはご自身でも私のエッセイを読まれたのだと思うが、堀先生が著書をまとめるときに協力されたサイエンス・ライターの木幡超士さんにも私のエッセイを読んでもらったらしく、彼も私の意見に賛成しているとのメールがかえって来た。これが辻さんとのかわりかできたきっかけであった。このときに私のエッセイ「四元数の発見」がすでに『研究と実践』に掲載されていたのか、まだ未発表のときであったのかはいまではわからない。まだ未発表であった可能性が強いと思う。

私が生まれて初めて書いた、四元数についてのエッセイ「四元数」の発表は2008年10月だったが、この原稿の脱稿は2007年11月8日となっている。したがって、私が四元数に関心を持つようになったきっかけは、堀さんの著書を読んだためではない。しかし、このいきさつを述べることは辻さんの話から大きく外れることになる。

とにかく辻さんとメールでやりとりするようになったのは、堀さんの著書がきっかけであったことはまちがいない。そしてそのころ海鳴社ではバウンダリ叢書というのを発行しようと考えていたらしく、その一冊として、「200頁くらいの四元数の本を書きませんか」と辻さんから依頼があったが、私には特別に用意した原稿があるわけでもなく、お断りするしかなかった。しかし、せっかくお誘いを受けたのだから何とかしたいとは考えたが、そのときはどうにもならなかった。

2009年12月に友人の数学者、新関章三さんと相談して、メールで無料配布の、一種の雑誌『数学・物理通信』の発行をはじめた。しかし、四元数のことを『数学・物理通信』にシリーズで書きだすのは創刊から2年ほどたった2011年12月であった。はじまりは『研究と実践』に書いた原稿「四元数の発見」を微修正したものであったが、つぎの「四元数の発見へ2」は、実は、私が読んでもまったくわからなかった『ハミルトンと四元数』の第2章の解説であった。いま考えてもこの章の解説が私によくできたものだと思う。

これは2012年に発行した『数学・物理通信』2巻1号に掲載された。これで少なくとも四元数の発見への経緯

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

は解き明かされたが、四元数と空間回転との関係の解明が残されていた。これは一連のエッセイ「四元数と回転」1-3 でなされた。さらに「四元数と球面線形補間」のエッセイを『数学・物理通信』4 巻 2 号 (2014.4.21) に書いて、この四元数のシリーズはおしまいになった。

四元数のシリーズを「数学・物理通信」に書いている間にもたえず、「だいぶできましたね」という激励のメールをもらってはいたが、そのときには辻さんの本気度は私にはわからなかった。

ともかく連載が終った段階で辻さんにメールを出して四元数の本の出版の気持ちに変わりがないか、お尋ねしたところ「出したい」という力強い承認の言葉をもらった。このとき、「四元数なら、海鳴社と言われるくらいになりたい」と言われた。

それで 2014 年の夏はこれらの連載原稿を本の体裁にするのに使った。9 月のはじめには pdf の最終原稿を送ることができたと思う。『四元数の発見』の発行は 2014 年 10 月 1 日となっているが、9 月 20 日ころには印刷された数冊が私のところに届いた。

しかし、そのときにはまだ辻さんにお目にかかったことはなく、メールのやり取りだけであった。実際にお会いしたのは 2014 年 12 月であったと思う。東京の子どものところへ出かける機会があり、そこから事務所に電話をかけたら、奥様の和子さんが出られて、辻さんは出張で京都に出かけているので、来週初めには帰ってきているからとのことだった。

週はじめの月曜日の 11 時ころに西神田の海鳴社を訪ねた。そこで頂ける予定の本の印税の一部で数学者の高瀬正仁さんが訳された『オイラーの無限解析』『オイラーの解析幾何』（海鳴社）を購入した。それと村上雅人さんの、なるほどシリーズの『量子力学 I, II, III』もほしいとの希望を述べたら、即座に「そちらは差し上げましょう」と言われた。ということでこれらの書は私の書棚にいまもある。

2 時間くらい滞在したと思うが、辻さんはハンサムな人であり、かつ話していてとても気持ちのいい方であった。それからもう一度だったか二度だったかよくは覚えていないが、会社を訪問した。別室に出版された在庫の本が積んである会社の事務室である。あるときは妻と一緒に邪魔したこともあった。夫人の和子様も話のおもしろい才気煥発の方であり、お会いすると楽しい気持となった。

辻さんはどういう経歴の方かは存じ上げてはいないが、京都大学物理学科を卒業された方だとインターネットの情報で知った。辻さんのかかわられた本として私が知っている初期のものに数学者の森毅さんの書かれた『異説数学者列伝』（蒼樹書房）がある。これで辻信行さんという方の存在を知られた方は多いと思う。私もそのうちの一人であった。その後、独立されて出版社を立ち上げられて、それが海鳴社であったのだろう。

高瀬正仁訳の『オイラーの無限解析』『オイラーの解析幾何』は有名であるが、そのほかに前にもあげた村上雅人さんのなるほどシリーズがあり、これは処女作の『なるほど虚数』にはじまり、最近の『なるほどグリーン関数』などこのシリーズはもう 20 冊を越えている。そのすべてをもっているわけではないが、10 冊ほどを私も持っている。そのうちの数冊は辻さんのご厚意で頂いたものである。

最後にお会いしたときに村上雅人さんの『なるほどベクトル解析』を購入したいといったら、それは差し上げましょうと言われた。この書を見た、子どもたちがこの本を読みたいからということで、彼らに数年貸していたが、最近返してもらって 1 月ほど前にようやく読み終えた。

辻さんに、はじめてお会いしたときに、みすず書房の有名な出版編集者であった、松井巻之助さんの弟分のような役割を出版界で担っておられたとも伺った^{*3}。

いまはもう海鳴社からは出版されてはいないが、吉田武さんの『オイラーの贈物』などは版を何度も重ねて 3 万部も売れたそうなので、これは理工学書としてベストセラーであろう。それから高林武彦先生の『熱学史』第 2 版とか、『量子力学』も逃してはいけないだろう。こういう目利きは辻さんが物理学科出身だということがその理由であろう。

^{*3} 松井さんは朝永振一郎先生のかつての教え子であり、その故もあって朝永先生の著書の大部分はみすず書房から出版されている。

ベストセラーとなった吉田さんの『オイラーの贈物』のほかに、村上さんの『なるほど虚数』とか私の『四元数の発見』とかに共通にその思想の底流にあるのはオイラーの公式である。それに加えて高瀬さん訳の『オイラーの無限解析』『オイラーの解析幾何』まで含めて、大数学者オイラーは出版人・辻信行さんに陰に陽に大きな影響を与えたといっていだろう。

私はその方面には疎いが、いろいろな方面のたとえば、精神医学等の出版も手がけておられたと聞く。その出版点数は総数で 400 にもおよぶとか。

出版は最近ではインターネットや You Tube に押されて、どちらかといえば地道な仕事だが、やはり社会の中で、知と文化の基本を形成していることはまちがいが無い。出版に携わる人には辻さんのようにやはり大きな志があるのであろう。今や、海鳴社は夫人和子様とご息女横山さんに受け継がれているという。これからもいい本を出版されて、日本の文化度を大いに上げて頂きたいと切に願っている。

辻さんの思い出といいながら、結局自分のことを多く語ってしまった。最後になるが、辻信行さんのご冥福をお祈りする。

(2021.12.7)

編集後記

2021 年 12 月となりました。11 巻 7 号を発行します。

今号はいままでとかなり違って数式よりも文章が多い号となりました。しかし、これは編集方針を変えるというつもりではありません。たまたま、こういう号になっただけです。ただ、いまでもこのサーキュラーを遠くに感じていたかもしれない方々にはすこしこの「数学・物理通信」を近しく感じていただけるならば、幸いです。

今回は世戸さんの論文のようなきちんとした論文から、出版人・海鳴社主の辻信行さんの追悼文まで多様なものとなりました。

いつもながら、編集委員の世戸憲治さんに感謝の意を表したいと思います。彼の丹念な校正によって意図のよりはっきりした文章になったと感じているからです。世戸さん、今後もよろしくお願いします。

(矢野 忠)