

数学・物理通信

11 卷 8 号 2021 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2021 年 12 月 15 日

目次 (Contents)

1. 懸垂線の振動問題 (3)

世戸憲治 2

2. ソリトン理論における広田の方法の拡張

岩崎正春 6

3. 外延量と内包量

矢野 忠 10

4. 大槻氏の核力サプルメントの原稿について

武谷三男・長崎正幸 16

5. 編集後記

世戸憲治 23

1. Oscillation Problem of Catenary Curve (3)

Kenji SETO 2

2. An Extension of the Hirota's Method in Soliton Theory

Masaharu IWASAKI 6

3. Extensive Quantity and Intensive Quantity

Tadashi YANO 10

4. Manuscript of Supplement on Nuclear Forces Prepared by Prof. Otsuki

Mituo TAKETANI and Masayuki NAGASAKI 16

5. Editorial Comments

Kenji SETO 23

懸垂線の振動問題 (3)

世戸 憲治 *

Oscillation Problem of Catenary Curve (3)

Kenji SETO*

1 はじめに

「懸垂線の振動問題 (1)」(「数学・物理通信」11 巻 5 号) では懸垂線が存在する面に対し垂直方向の振動を扱った。また、「懸垂線の振動問題 (2)」(「数学・物理通信」11 巻 7 号) では、懸垂線の真ん中に錘を付けた場合の垂直方向の振動を扱った。今回はそれを補完する意味で、懸垂線が存在する面内で、水平方向、鉛直方向の振動を扱ってみる。結果だけを先に述べると、今回の方程式は前回に求めたものとまったく同じ形になる。

2 懸垂線が存在する面内での水平方向振動

ここでは懸垂線が存在する面内で水平方向に振動する場合を扱ってみよう。ただし、この振動は微小振動で、鎖が水平方向に振動してもその鉛直方向の変位は無視できるものとする。

「懸垂線の振動問題 (1)」で述べたように振動していないときの懸垂線の方程式は、水平方向、鉛直方向の座標軸をそれぞれ、 x, y としたとき、

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (2.1)$$

で表わされる。ここに、長さの次元を持つ定数 a は、懸垂線の最下点における水平張力、線密度、重力加速度を、それぞれ、 T_0, ρ, g としたとき、

$$a = \frac{T_0}{\rho g} \quad (2.2)$$

と定義される。また、この a の値は、前回の論文の (2.13) 式で示したように、鎖の全長を 2ℓ , 持ち上げて懸垂線にしたときの両手の間隔を $2r$ としたとき、方程式

$$\frac{\ell}{a} = \sinh\left(\frac{r}{a}\right) \quad (2.3)$$

から決まる。ただし、 $r < \ell$ とする。

振動しているとき、この線上の点 (x, y) の時刻 t における x 方向変位を $U(x, t)$ とする。ただし、ここではこの変位 $U(x, t)$ は x について偶関数と仮定する。ここで dx を x 方向の微小距離とし、また、(2.1) 式で対応する $y(x + dx) - y(x)$ を dy として、線上の点 (x, y) から $(x + dx, y + dy)$ までの部分を考える。振動しているときはこれらの点は、 $(x + U(x, t), y)$ および $(x + dx + U(x + dx, t), y + dy)$ となる。したがって、これら 2

* 北海学園大学名誉教授

点を結ぶ直線の傾き角を θ とすると, $dx \rightarrow 0$ の極限で

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx + U(x + dx, t) - U(x, t)} = \frac{y'(x)}{1 + \partial_x U(x, t)} \quad (2.4)$$

となり, これから, $\cos \theta, \sin \theta$ は

$$\cos \theta = \frac{1 + \partial_x U}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + y'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + y'^2}} \quad (2.5)$$

となる.

つぎに, Δx を x 方向の微小距離として, 元の曲線 (2.1) での Δx に対応する y 方向の長さを Δy とし, 点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ までの線分の運動を考える. 点 x , 時刻 t での張力を $T(x, t)$ としその方向は接線方向とすると, この部分の x 方向の運動方程式, および y 方向の力の釣り合いの式は, それぞれ,

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) &= T \cos \theta \Big|_{x+\Delta x} - T \cos \theta \Big|_x \\ \rho \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} g &= T \sin \theta \Big|_{x+\Delta x} - T \sin \theta \Big|_x \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる. ここで, $\Delta x \rightarrow 0$ とし, (2.5) 式を用いて $\cos \theta, \sin \theta$ を消去した形にすると,

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1 + \partial_x U) T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + y'^2}} \right] \\ \rho \sqrt{1 + y'^2} g &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y' T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + y'^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

を得る. これは, 一見したところ, 未知関数 $U(x, t)$, $T(x, t)$ に関する非常に複雑な連立非線形微分方程式である. ここで, (2.1) からでる

$$y' = \sinh(x/a), \quad \sqrt{1 + y'^2} = \cosh(x/a) \quad (2.8)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \rho \cosh(x/a) \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1 + \partial_x U) T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + \sinh^2(x/a)}} \right] \\ \rho \cosh(x/a) g &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sinh(x/a) T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + \sinh^2(x/a)}} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる. ここでこの第 2 式を $x = 0$ から任意の x まで積分すると, (2.2) 式を用いて,

$$T_0 \sinh(x/a) = \frac{\sinh(x/a) T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + \sinh^2(x/a)}}, \quad (2.10)$$

あるいは, 両辺を $\sinh(x/a)$ で割って,

$$T_0 = \frac{T(x, t)}{\sqrt{(1 + \partial_x U)^2 + \sinh^2(x/a)}} \quad (2.11)$$

となる. この式を (2.9) の第 1 式右辺に代入すると,

$$\cosh(x/a) \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t), \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (2.12)$$

となる．ここに， c は速度の次元を持つ定数で，(2.12) の第 2 式で定義する．これは変位 U に関する線形の微分方程式であり，線密度が双曲線余弦関数 $\cosh$ で場所ごとに変化する波動方程式である．ただし，これは「懸垂線の振動問題 (1)」で，懸垂線の面に対し垂直方向の振動として導いた方程式 (3.5) とまったく同じなので，この解法についてはここでは議論しない．

なお，ここでは変位 $U(x, t)$ は x について偶関数と仮定するので， $\partial_x U$ の $x = 0$ での値はゼロと考えられる．これは，(2.11) 式で $x = 0$ と置くと両辺が T_0 となって矛盾が起こらないことを注意しておく．

3 懸垂線が存在する面内での鉛直方向振動

前節では懸垂線の水平方向振動を扱った．ここでは鉛直方向振動，つまり，懸垂線が存在する面内の y 方向振動を扱ってみる．振動しているとき，時刻 t での懸垂線上の点 (x, y) の y 方向変位を $V(x, t)$ とする．いま dx を微小距離として懸垂線 $y = y(x)$ で dx に対応する y 上の長さを dy とする．いま，振動する前の点 (x, y) と点 $(x + dx, y + dy)$ を考えると，振動しているときはこれら 2 点は， $(x, y + V(x, t))$ と $(x + dx, y + dy + V(x + dx, t))$ となる．したがって，これら 2 点を結ぶ直線の傾き角を θ とすると， $dx \rightarrow 0$ の極限で，

$$\tan \theta = \frac{dy + V(x + dx, t) - V(x, t)}{dx} = y' + \partial_x V \quad (3.1)$$

となる．これから $\cos \theta$, $\sin \theta$ は

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (y' + \partial_x V)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y' + \partial_x V}{\sqrt{1 + (y' + \partial_x V)^2}} \quad (3.2)$$

となる．

つぎに， Δx を x 方向の微小距離として，元の懸垂線 (2.1) での Δx に対応する y 方向の長さを Δy とし，点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ までの線分の運動を考える．点 x ，時刻 t での張力を $T(x, t)$ としその方向は接線方向とすると，この部分の x 方向の力の釣り合いの式，および， y 方向の運動方程式は，それぞれ，

$$\begin{aligned} 0 &= T \cos \theta \Big|_{x+\Delta x} - T \cos \theta \Big|_x \\ \rho \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) &= T \sin \theta \Big|_{x+\Delta x} - T \sin \theta \Big|_x - \rho \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} g \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる．これは $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとり，(3.2) 式の $\cos \theta$, $\sin \theta$ を用いると，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T(x, t)}{\sqrt{1 + (y' + \partial_x V)^2}} \right) \\ \rho \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(y' + \partial_x V) T(x, t)}{\sqrt{1 + (y' + \partial_x V)^2}} \right) - \rho \sqrt{1 + y'^2} g \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる．さらに (2.1) 式より， $y' = \sinh(x/a)$ となるので，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T(x, t)}{\sqrt{1 + (\sinh(x/a) + \partial_x V)^2}} \right) \\ \rho \cosh(x/a) \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(\sinh(x/a) + \partial_x V) T(x, t)}{\sqrt{1 + (\sinh(x/a) + \partial_x V)^2}} \right) - \rho \cosh(x/a) g \end{aligned} \quad (3.5)$$

と変形される。ここで、この第 1 式から

$$\frac{T(x, t)}{\sqrt{1 + (\sinh(x/a) + \partial_x V)^2}} = \text{Const} \quad (3.6)$$

となるが、変位 $V(x, t)$ は x について偶関数と仮定すると、 $x = 0$ で $\partial_x V(x, t) = 0$ となるので、 $x = 0$ での T を T_0 とすると、

$$\frac{T(x, t)}{\sqrt{1 + (\sinh(x/a) + \partial_x V)^2}} = T_0 \quad (3.7)$$

となる。これから (3.5) の第 2 式は、(2.2) 式の $a = T_0/(\rho g)$ を用いると一部で相殺が起こり、

$$\cosh(x/a) \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t), \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (3.8)$$

となる。ここで、 c は (2.12) 式のところでも定義した速度の次元を持つ定数である。これで、鉛直方向に対する変位 V も水平方向に対する変位 U と同じ方程式を満たすことになる。

4 おわりに

前回はそうであったが、結果の方程式が Mathieu 方程式になると、いつも興奮めして落胆してしまう。何故かというと、Mathieu 方程式は 2 階の線形微分方程式なのに、三角関数、あるいは、双曲線関数が入っただけで、解析的にコンパクトな解が求められない方程式になってしまうからである。今回の解析もそうであるが、前にやった量子力学における周期ポテンシャル問題でも、ポテンシャルを三角関数にすれば、方程式は Mathieu 方程式になる。また、古典力学の問題で、振子を逆さに立てて、支点を上下に動かすと安定して倒れなくなる、いわゆる倒立振子の問題というのがある。この場合も、支点の上下動を三角関数にすると Mathieu 方程式に帰着する。そんなとき、私はいつも周期関数を三角関数ではなく、鋸歯形に変えて解析したり数値計算をしたりしてきた。しかし、今回は懸垂線が初めから双曲線関数なのでこれを勝手に変える訳にもいかない。前回は仕方なく双曲線関数のまま数値計算を試みたが今回はもう勘弁してもらおう。

ソリトン理論における広田の方法の拡張

岩崎正春^{*1}

An Extension of the Hirota's Method in Soliton Theory

Masaharu IWASAKI^{*2}

1 はじめに

ソリトンをはじめとする非線形波動については前世紀後半以来いろいろな分野の人たちに注目され、種々な解法が求められて活発に研究されてきた。ここで取りあげる「広田の方法」はそれらの中の一つであり、その簡明さと広い汎用性から非常に興味ある方法である。実際、佐藤幹夫グループによってこの方法の数学的側面が深く研究され、興味ある結果が得られている。それらの成果は広田本人によって単行本の形で出版されているので、参考文献として挙げておく。[1]

この小論では、この方法を拡張し、広田の方法の基礎をなす双線形形式の一般化について考える。これに際して、流体力学の非線形現象である衝撃波（ここではキंकと呼ぶ）に応用できないかを考察する。まず話の順序として次の節で従来の広田の方法について、典型的なソリトン解をもつ KdV 方程式を例にとって説明する。つづく第3節で広田の双線形形式の拡張について考え、一例として Burgers 方程式を取り上げて、その双線形化について議論する。

2 ソリトン理論と広田の方法

話をわかり易く進めるため、ソリトン解をもつ代表的な方程式である KdV 方程式を例にとって広田の双線形理論について説明する。一次元波動 $u(t, x)$ はある条件のもとで次の方程式を満たす。

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

これが KdV 方程式であり、浅瀬の水路の中を伝搬する波の運動を記述している。また、この方程式は孤立波（ソリトン）の解をもつことで有名になった。それを示すため、 u の代わりに次式で定義される関数 $f(t, x)$ を導入する。

$$u = (2 \log f)_{xx} = 2 \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} \quad (2.2)$$

右辺の分子は f について2次形式になっていることに注意しよう。これを (2.1) へ代入すると、 $f(t, x)$ についての方程式に書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(f_{tx}f - f_tf_x + f_{xxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2)}{f^2} = 0$$

左辺の分子をゼロと置けば KdV 方程式を満たすのでそのようにする。

$$f_{tx}f - f_tf_x + f_{xxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2 = 0$$

我々は方程式の一般解より、むしろ特解としてのソリトン解に着目している。

ここで広田の方法のキーワードである「広田微分」と呼ばれる演算子を導入する。

$$D_t^m D_x^n (f(t, x) \cdot g(t, x)) = (\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n f(t, x) g(t', x')|_{t=t', x=x'}$$

^{*1} 高知大学名誉教授

^{*2} miwasaki@cure.ocn.ne.jp

左辺に出てくる関数のペア $(f \cdot g)$ が双線形形式であり、以後の議論で中心的役割を演じる。この新しい微分を用いると先の KdV 方程式は双線形形式で書けることが分かる。

$$D_x(D_t + D_x^3)(f \cdot f) = 0 \quad (2.3)$$

広田はこの双線形方程式がソリトン解をもつことを示した。

まず手始めに 1-ソリトン解を求めよう。解として次の指数関数型を仮定する。

$$f = 1 + \exp \eta, \quad \eta = \omega t + px + c$$

右辺の ω, p, c は定数である。この関数を KdV 方程式 (2.3) へ代入する。左辺を広田微分の関数 $F(D_t, D_x) = D_t D_x + D_x^4$ と表すと、

$$F(D_t, D_x)(f \cdot f) = F(\omega, p) \exp \eta + F(-\omega, -p) \exp \eta + F(0, 0) \exp 2\eta = 0 \quad (2.4)$$

ここで $F(\omega, p)$ は次の性質をもつことに注意する。

$$F(\omega, p) = F(-\omega, -p)$$

また、 $F(0, 0) = 0$ であるから、(2.4) は波の分散関係を与える式に帰着する。

$$F(\omega, p) = \omega p + p^4 = 0 \quad (2.5)$$

この解を、もともとの波動 $u(t, x)$ に引き戻すと、よく知られたソリトン解が得られる。

$$u = \frac{2p^2 \exp \eta}{(1 + \exp \eta)^2} = \frac{p^2}{2} (\cosh \frac{\eta}{2})^{-2}$$

ソリトンの頂点の位置は、 $\eta = \omega t + px + c = 0$ の点であるので、ソリトンの速度は分散式 (2.5) を用いると $v = -\frac{\omega}{p} = p^2$ となる。

つぎに 2-ソリトン解も求めておこう。広田に従い天下りの的に次の形を仮定する。

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + \exp \eta_{12} \quad (2.6)$$

右辺の η_1, η_2 は先に求めた 1-ソリトン解であり、最後の項の η_{12} は次のように選ばれている。

$$\eta_{12}(t, x) = \eta_1(t, x) + \eta_2(t, x) + \delta$$

最後の δ は定数であり、全体で KdV 方程式を満たすように後で決められる。(2.6) を KdV 方程式 (2.3) へ代入すると次のように計算される。

$$F(D_t, D_x)(f \cdot f) = F(D_t, D_x)(\exp \eta_{12} \cdot 1 + 1 \cdot \exp \eta_{12} + \exp \eta_1 \cdot \exp \eta_2 + \exp \eta_2 \cdot \exp \eta_1)$$

ただし、ここで 1-ソリトン解の性質 $F(\omega_1, p_1) = 0, F(\omega_2, p_2) = 0$ と $F(0, 0) = 0$ を用いた。上式をさらに計算すると次のようになる。

$$F(D_t, D_x)(f \cdot f) = [F(\omega_1 + \omega_2, p_1 + p_2) \exp \delta + F(\omega_1 - \omega_2, p_1 - p_2)] \exp(\eta_1 + \eta_2)$$

右辺の大カッコ内がゼロになるように未定定数 δ を選ぶと、2-ソリトン解 (2.6) が得られたことになる。

3 Burgers 方程式と広田の方法

流体の非線形波動としてはソリトン以外に衝撃波が存在する．空間のある境界面を境にして波が非連続的にふるまう現象である．代表的にはジェット機が作る円錐状の波面（マッハコーン）が良く知られている．ここでは衝撃波解（以後，kink 解と呼ぶ）をもつ方程式として Burgers 方程式を取り上げる．空間 1 次元に限定すると， $v_t + vv_x = \nu v_{xx}$ と書かれる．右辺は粘性項で ν は粘性率を表す．時空のスケール変換と $u = -v$ により，変数 u に関する微分方程式に書きかえる．

$$u_t = uu_x + u_{xx} \quad (3.1)$$

ソリトンの場合と同様に，次の変換により方程式を双線形形式にする．

$$u = (2 \log f)_x \quad (3.2)$$

右辺の x 微分が 1 次であることに注意しよう．この置き換えを Cole-Hopf 変換という．方程式 (3.1) を $f(t, x)$ の微分方程式に書き変えると，

$$f_{tx}f - f_t f_x - f_{xxx}f + f_{xx}f_x = 0$$

ここで双線形形式に書き変えるため，広田微分のほかに次の微分を新たに導入する．

$$\partial_x(f \cdot g) = (\partial_x + \partial_{x'})f(x)g(x')|_{x=x'}$$

この微分と広田微分を合わせると次の公式を得る．

$$\begin{cases} (f_x \cdot g) = \frac{1}{2}(\partial_x + D_x)(f \cdot g) \\ (f \cdot g_x) = \frac{1}{2}(\partial_x - D_x)(f \cdot g) \end{cases}$$

この公式を利用すると，Burgers 方程式 (3.1) は次のように書ける．

$$(D_t D_x - D_x^2 \partial_x)(f \cdot f) = 0 \quad (3.3)$$

ただし，ここで次の公式を用いた．

$$D_t^m D_x^n (f \cdot f) = 0 \quad (\text{for } m + n = \text{odd}) \quad (3.4)$$

[証明] 次の関数，

$$(\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n f(t, x) f(t', x') \equiv G(t, x; t', x')$$

において，変数の入れ替え $t \leftrightarrow t', x \leftrightarrow x'$ により，

$$G(t', x'; t, x) = (-1)^{m+n} G(t, x; t', x')$$

したがって求める結果が得られる．

$$G(t, x; t', x')|_{t=t', x=x'} = 0 \quad (\text{for } m + n = \text{odd})$$

(証明終)

この公式は D 微分の間に ∂ 微分がいくら挿入されても，その証明の手続きから明らかなように，結果は変わらないことに注意しよう．

さて，新たな双線形形式に書かれた Burgers 方程式 (3.3) を次のように一般化して解いてみよう．

$$F(D_t, D_x; \partial_x)(f \cdot f) = 0 \quad (3.5)$$

ただし, F は D_t, D_x, ∂_x の多項式であり, つぎの条件を満たすものとする.

$$\begin{cases} F(-D_t, -D_x; \partial_x) = F(D_t, D_x; \partial_x) \\ F(0, 0; \partial_x) = 0 \end{cases}$$

まず, 1-kink 解としてソリトンの場合と同様に次の形を仮定する.

$$f = 1 + \exp \eta, \quad \eta = \omega t + px + c \quad (3.6)$$

これを (3.5) へ代入すると,

$$(F(\omega, p; p) + F(-\omega, -p; p)) \exp \eta = 0$$

つまり (3.6) が解であるためには, ω, p は次式を満たせばよい.

$$F(\omega, p; p) = 0 \quad (3.7)$$

Burgers 方程式の場合は, $\omega - p^2 = 0$ となり, 波の分散関係を与える. このとき波の速度は $v = -\frac{\omega}{p} = -p$ となる. 解 (3.6) から波の形を求めると,

$$u = \frac{2p}{1 + \exp(-\eta)} \rightarrow \begin{cases} 2p & (x \rightarrow \infty) \\ 0 & (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

つまり, この解は衝撃波が右 (正) の方から左に向かって速度 $v = -p$ で進んでいる状態を表している.

つぎに 2-kink 解について付け加えておこう. ソリトンの場合との類推により次の形を仮定する.

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 \quad (3.8)$$

右辺の $\eta_1 = \omega_1 t + p_1 x + c_1$, $\eta_2 = \omega_2 t + p_2 x + c_2$ はそれぞれ 1-kink 解を表している. (3.5) へ代入すると,

$$2F(\omega_1 - \omega_2, p_1 - p_2; p_1 + p_2) \exp(\eta_1 + \eta_2) = 0$$

ソリトンのときはこの項を打ち消すため付加項 $\exp(\eta_1 + \eta_2)$ を付け加えたが, Burgers 方程式の場合はこの式は自動的に満たされている. 実際, 分散式 (3.7) を用いて,

$$F(\omega_1 - \omega_2, p_1 - p_2; p_1 + p_2) = (\omega_1 - \omega_2)(p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)^2(p_1 + p_2) = 0$$

最後に, Cole-Hopf 変換により $f(t, x)$ の線型方程式が得られることを, われわれの双線形形式の中で導いておく. 双線形 Burgers 方程式 (3.3) を, 公式 (3.4) を使って次のように変形する.

$$D_x[(\partial_t + D_t) - \frac{1}{2}(\partial_x + D_x)^2](f \cdot f) = D_x[2(f_t - f_{xx}) \cdot f] = 0$$

すなわち Burgers 方程式は熱伝導方程式,

$$f_t - f_{xx} = 0$$

に変換された.

以上この小論において, ソリトン理論で威力を発揮した広田による双線形形式の一つの拡張を試みた. 拡張の仕方はいろいろあると思われるが, ここでは他ではあまり見かけない広田微分に通常の微分を加えた形で試みた. 今後は Burgers 方程式以外の非線形方程式に適用することにより, その有効性が試されるものと思われる.

参考文献

- [1] 広田良吾, 『ソリトンの数理』(岩波書店, 1992)

外延量と内包量

矢野 忠^{*1}

Extensive Quantity and Intensive Quantity

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

このエッセイはたぶん愛媛県数学教育協議会（愛数協）の機関誌「研究と実践」（愛数協）にエッセイとして投稿したと思うが、その原稿がどこかに紛失したらしく、掲載にならなかった。今回「数学・物理通信」に投稿するにあたり、このまえおきを新たにつけた。内容は初等的であるのでちょっとここに投稿するのは気が引けたが、まだここで述べた内容が目新しい方もあるかと思うので、あえてここに投稿する。

大学での物理の講義で先生が「速さとは距離なのだが、ただし距離とはいってもある単位時間中に進んだ距離だ」といわれた。その言い方は正しいのだが、距離といってしまうとひょっとしてぼんやりと授業を聞いていた学生には本当の距離と単位時間中に進んだ距離とがごっちゃになってしまっていて、速さと距離の区別がつかなくなる恐れがある。だが、それにしても速さとはある種の距離を示すという理解の仕方にはいいところがある。しかし、なかなか速度についての理解が進まない。

私はぼんやりしたあまり頭のいい子どもではなかったから、速度とか速さとかがほんとうにわかったのは物理学を高校で履修してからであった。これは内包量が難しいからであろうか。一度わかってしまうとどこが難しかったのだろうか、わからなかった理由がむしろわからなくなってしまうかもしれない。そういう事態をなんとか抜け出したいという思いをもって書いている。

1 はじめに

広い意味の「量」について小学校や中学校・高校で学ばない人が大多数なので、ここに簡単な概観をしよう。ここで述べるようなことを知っている人もいるかもしれないが、そういう人は復習をしようと思って読んでほしい。もっと詳細を知りたい人は参考文献 [1], [2] を読んでほしい。また物理化学（または熱力学）ではここで「外延量」(extensive quantity) といっているものを「示量変数」(extensive variable) と呼び、「内包量」(intensive quantity) といっているものを「示強変数」(intensive variable) と呼んでいる^{*3}。だから、ここで学ぶことは物理化学の内容の幾分かの先取りとなっている^{*4}。

2 分離量と連続量

量には分離量と連続量がある。分離量はミカンの個数とか鉛筆の本数とか子どもの数とか1個、2個、3個と数えられる量である。連続量は言葉の示す通り連続した量であり、たとえば水の量のようなものである。確かにコッ

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 正しくは「変数」ではなく「変量」と呼ぶべきであろうが、ここでは伝統的な呼ぶ方に倣った。

^{*4} wikipedia [3] によれば外延量と示量変数、内包量と示強変数とは違うとのことであるが、前者が加法性をもつこと後者が加法性をもたない点で同じものと考えた方がむしろよいであろう。ただし、示量変数と示強変数は限定された用い方をされているらしい。

一杯の水とかバケツ 2 杯の水というように容器等で数えることができるが、それはあくまで容器等が数えられるのであって、水一つ、水二つと水そのものは数えることができない。物理や工学その他で使われる量はほとんどが連続量である*5。

3 外延量

連続量は大きく分けて外延量と内包量に分かれる。外延量は言葉通りに外へ伸びている量であり、大きさとか広がりとかいったことを表す量である。例えば、ビンの中のミネラルウォーターの量が 200ml であるとか紐の長さが 3m であるとか、そういった大きさを表す量は外延量である。かばんの重さも外延量である。これらは足し算ができる。例えば、 200cm^3 の水と 300cm^3 を合わせると 500cm^3 となる。これは明らかにたし算ができる。だが、温度が 30°C の水 2m^3 と温度が 50°C の水 3m^3 の水を合わせたとき 80°C の水 5m^3 が得られるかといえばそれはあり得ない。だから水量を合わせても水のもっている温度はたし算ができないのである。

もちろん、午前 10 時に気温が 20°C だったが、午後 2 時には午前 10 時よりも 10°C だけ上がっていた。というときに午後 2 時の気温は 30°C になるというようにたし算はできるから話は少しややこしくなる。

ともかくも物をあわせたときに、それらのものの属性である量は外延量についてはたし算できるが、内包量についてはたし算できないのだということを理解してほしい*6。

4 内包量

内包量は強さを表す量であるが、度とよばれる量と率とよばれる量にわかれる。たとえば、密度とか速度、打率とか利率といったように「度」とか「率」という語がついている。速度というのはある時間に進んだ距離であり、例えば市街地では車は時速 $40\text{km}/\text{時}$ で走らないと警察に捕まってしまう。郊外に出れば時速が $50\text{km}/\text{時}$ で走れるところが多くなり、市街地よりも速く走ることができるようになる。

このように内包量は二つの量があってその二つの量の割合で決まるような量である。小学校 5 年の 2 学期くらいから急に算数がわからなくなる小学生が増えるといわれるが、これは内包量が算数の中に出てくるからである。みなさんにも心あたりがあるかもしれない。

ところが残念ながら、このような量についての系統的かつ意識的な教育が一部の小、中学校を除いてほとんどの小学校や中学校でもなされていない。これは将来克服されなければならない現在の数学および理科教育上の欠点である。

度と率とのちがいについてはつぎの 4.1 節で述べよう。

4.1 度と率

密度は物の質量をその体積で割ったものである。質量は kg が単位であり、体積は m^3 が単位である。したがって密度の単位は kg/m^3 である。

速度の場合はたとえば、車が進んだ距離をその距離を進むに要した時間で割って得られる。距離は m が単位であり、時間は s が単位であるので、速度の単位は m/s である。

銀行預金の利率は銀行に預け入れた元金に対してどれだけの利息がつくかを表す量である。元金も利息もいずれも同じ種類の量でお金の額である。日本の場合だとその単位は円である。利率は利息（円）を元金（円）で割っ

*5 フランス語を学んだ人は部分冠詞というのを知っておられるだろう。名詞に部分冠詞 *du, de la* 等がつくものは数えられない。

*6 ものを合わせたときに加法性が成り立たないからといって、まったく内包量に加法ができないわけではない。たとえば、相対速度の加法などはできる。その点についての立ち入った議論が実は必要なのだが、数教協の中でも明瞭な結論は得られてはいないと思う。

て得られる．すなわち、円/円 で無名数となり、単位は表には出てこない．このように率と呼ばれる量は 2 つの量から求められるが、種類としては同じもの（この場合は金）のわり算で求められる．

度は 2 つの量が異なった種類の量の割合であり、だから新しい単位の量が生まれる．他方、率は同じ種類の量の割合であり、単位はつかない量である．小学生らには単位の違った度よりも同じ単位で割られて単位がつかない量である、率の方が理解し難いといわれている．こういう度とか率という語がついた量のことを「内包量」という．内包量の例として 1km^2 に住む人口を示す、人口密度がある．

注意しておく必要があるのは濃度という語である．濃度は度という語がついてはいるが、これは率に属する量である．よく引き合いにだされるのは食塩水の濃度だが、これは食塩水の中に含まれる食塩の量を食塩水の量で割ったものである．このときには両方ともその質量をとっているので、分子に来る量の単位も分母に来る量の単位も質量の単位の kg（または g）である．

4.2 内包量のシェーマ：面積図

内包量はつぎのような長方形の図形で表すことが多い．これを数学教育の用語で「面積図」といっている．小学校の先生は「かけわり図」ともいっている（図 1 参照）*7．図 1 の右側の大きな長方形の面積にあたる量を「分布量」という．この長方形の下に描かれた線分は上の長方形の横の長さにあたる量で「土台量」という．また大きな長方形の左側の短冊形の長方形を「内包量」（小学校では一当たり量という）といい、これは分布量を土台量で割ったもので与えられ、これは長方形の縦の長さにあっている*8．この面積図を見れば、すぐにつぎのような

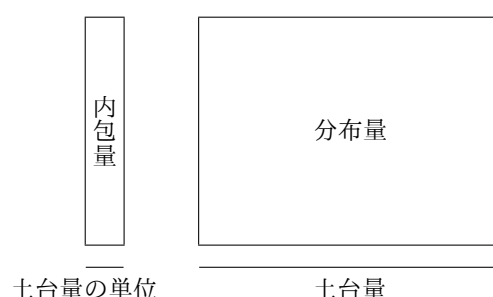


図 1 内包量の面積図

式が書けるであろう．これを内包量の第 1～第 3 用法といっている．

$$\begin{array}{ll} \text{内包量} = \frac{\text{分布量}}{\text{土台量}} & \text{第 1 用法} \\ \text{分布量} = \text{内包量} \times \text{土台量} & \text{第 2 用法} \\ \text{土台量} = \frac{\text{分布量}}{\text{内包量}} & \text{第 3 用法} \end{array}$$

内包量の第 1 用法は分布量と土台量からの内包量の定義式である．内包量の第 2 用法は分布量を内包量と土台量から求める式である*9．内包量の第 3 用法は土台量を分布量と内包量から求める式である．これらの量の関係はこの長方形の面積とその横と縦の長さと同じ構造をしている．

*7 数教協では面積図のような図をよく使う．こういう図をシェーマといっている．他にシェーマとしてよく使われるのは加法のときのテープ図、関数の説明のときのブラック・ボックスとか水槽とかがある．また数の位取り記数法の原理を教えるときのタイル図がある．

*8 この小さな縦長の長方形の代わりにタテに伸びた線分で内包量を表す人もいるが、単位当たり量であることを示すために縦長で短冊形の長方形で表したほうがよい．

*9 この第 2 用法は乗法の意味の説明に使われることが多い．第 1 用法と第 3 用法はそれぞれ除法の意味の説明にも使われる．

長方形の面積 S がその縦の長さ a と横の長さ b との積であるから、式で表せば

$$\begin{aligned}\text{長方形の面積} &= \text{縦の長さ} \times \text{横の長さ} \\ S &= ab\end{aligned}$$

で与えられる。この式に対応しているのは内包量の第 2 用法である。それはともかくとして図 1 を見れば、すぐに内包量の 3 つの用法は書き下せるであろう。だから、これらの 3 用法を暗記しておく必要はない。理解・記憶しておかなければならないのは長方形の面積にあたる量が分布量であり、その下の長方形の横の長さにあたるのが土台量であり、縦の長さにあたるのが内包量だということである。

例として、速さについて考えてみよう。いうまでもなくこの速さは内包量である。この速さについてシェーマとしての面積図は図 1 と同じ構造だが、つぎのようになる（図 2 参照）。速さ v に関するこの面積図がすぐに描

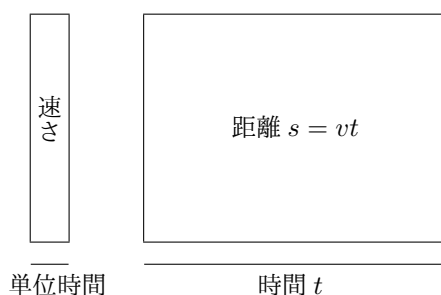


図 2 速さに関する面積図

けるようになれば、速さに関するつぎのような式は誰でも書くことは難しくないのである。距離を s 、時間を t で表せば、

$v = \frac{s}{t}$	第 1 用法
$s = vt$	第 2 用法
$t = \frac{s}{v}$	第 3 用法

5 速さの三角形

電気の「オームの法則の覚え方」として回路にかかる起電力を E 、流れる電流を I 、その回路の電気抵抗を R として 3 つの量を小さな三角形の中に上から反時計回りに (E, I, R) の順に配置したオームの三角形というのを中学校の理科で学んだ人もいるだろう（図 3 参照）^{*10}。ただし、起電力 E はボルト V を単位とし、電流 I はアンペア A を単位とし、また電気抵抗 R はオーム Ω を単位とする。この覚え方がいいと思われるのはいま求めたい量のところを手で隠すとその量は後の残りの量の割り算または掛け算で与えられるかがすぐに分かる。しかし、これは単なる覚え方であって、その深い理解をもたらすものではない。

この関係と類似の「速さの三角形」として三角形を描き、(は, じ, き) の 3 語を図 4 のように並べて覚えるように小学校で指導された方もいるだろう。この速さの三角形では (き, は, じ) を三角形の上部から反時計回りに配置しないとうまくこれらの 3 つの量の関係が導出できない。要するに、どうしてこういう風に三角形の中に

^{*10} 中学生のころに E ボルト, I アンペア, R オームと唱えて、このオームの三角形を学んだことを覚えている。

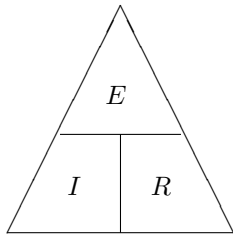


図3 オームの三角形

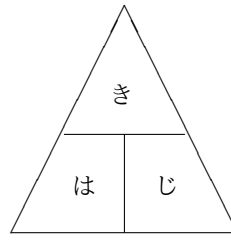


図4 速さの三角形

(は, じ, き) という3語をおくのかということは理由はわからず結局のところ棒暗記であるだろう^{*11}。これがこの「速さの面積図」を考えることで明確になった。

しかし, なぜ距離を長方形の面積にあたるにとるのかということは結局は「距離, 速さ, 時間」という3つの量の関係を理解した上でこういう風にとられている。だから, こういった面積図といえども結局はこれらの量の間の深い理解が結局は必要である。

私自身のことを省みても小学校ですでに速さ, 距離, 時間の3つの量の関係を学んだにもかかわらず, その関係をよく理解をしていなかったのも, 高校で物理を学んでやっとこの三者の関係が理解できたのであった。だから, 物理を学んでいない人がこれらの量の関係がよくわからないというのはわからないでもない。

6 加速. 速さ, 時間

一旦, この面積図の理解が進むと同じような構造を持った量はすべて面積図で表されることが理解できる。同じ構造を持った量として速さ, 時間, 加速を挙げることができる^{*12}。今度は長方形の面積(分布量 $\Rightarrow$ 内包量)の

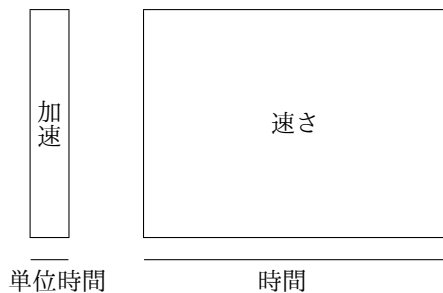


図5 加速に関する面積図

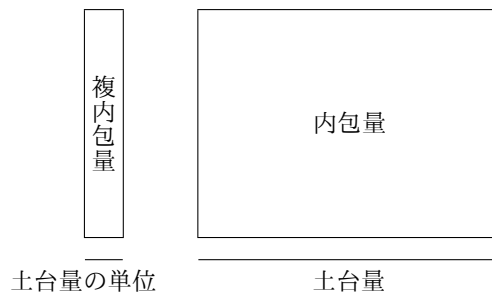


図6 複内包量の面積図

ところに速さがきて, 縦の長さのところに加速(内包量 $\Rightarrow$ 複内包量)が来る(図5参照)^{*13}。長方形の横の長さ(土台量)は時間である。これなど前の距離, 速さ, 時間のときとちがうので戸惑う人がいる。要するに速さ, 加速, 時間の3つの量がやはり距離, 速さ, 時間と同じ量構造をもっているということを理解しないといけない。た

^{*11} 私自身はこういう形で, 速さ, 距離, 時間の関係を教わったことはない。

^{*12} 速度, 加速度といわずに速さ, 加速という言い方をしているのは物理での慣例にしたがって, 量の大きさだけを問題にするからである。もしかこの表現が気になる方は速度, 加速度をつかわれてもいい。その場合にはスカラーではなく, ベクトルとなる。

^{*13} ここで()内の $\Rightarrow$ の左側の量は速さが定義されたときの量で右側の量は加速が定義されるときを示す。

だし、距離は外延量であったが、速さは内包量となっており、内包量であった速さのところには複内包量 [4] の加速が来ている（図 6 参照）。図 5 を描ければ、つぎの式はすぐに書き下せるであろう。

$$\begin{array}{ll} \text{加速} = \frac{\text{速さ}}{\text{時間}} & \text{第 1 用法} \\ \text{速さ} = \text{加速} \times \text{時間} & \text{第 2 用法} \\ \text{時間} = \frac{\text{速さ}}{\text{加速}} & \text{第 3 用法} \end{array}$$

7 おわりに

いろいろ述べたが、要するに面積図のシェーマを身につけるといろいろな関係を直ちに書き下すことができるようになる。覚えることよりも理解することが大事である。いつも基本にかえて考える習慣を身につけているとそのうちにそういうことを意識しなくてもわかるようになる。

『小学校で教育的に大いに役立った「量の体系」であるが、中学校、高校と進むにつれてそのようなわりきり方では処置に困るものも出てくる』ということを受数協の元会長であった、故矢野寛（ゆたか）先生から聞いたことがあった。

また、量の理論のもっと進んだ内容については小島順氏と他の方々の議論を記録した文献 [5] を参照していただきたい。そこには 1979 年末までの量の理論に対する文献が載っている。

付録 示強変数と示量変数とは？

この付録ではインターネットのサイトから示量変数と示強変数の説明をそのまま引用しておく [6]。

示強変数とは？

示強変数とはあるものを真っ二つに分けたとき、変化しない状態変数のことです。例えば、20℃の部屋にしきりを作って二つの部屋にしたとき、どちらの部屋の温度も 20℃のままで温度は変わりません。この温度のように変化しない状態変数を示強変数といいます。この他には圧力、濃度、密度などがあります。

示量変数とは？

示量変数とはあるものを真っ二つに分けたとき、変化する状態変数のことです。例えば、先ほどと同じように一つの部屋にしきりをつけて二つの部屋にしたとき、部屋の体積は 1/2 になってしまいます。この体積のように変化する状態変数を示量変数といいます。この他にはモル数などがあります。

(2009.4.4)(2021.11.19 改訂)

参考文献

- [1] 遠山 啓,『数学の学び方・教え方』(岩波新書, 1972) 9-42
- [2] 銀林 浩,『量の世界』(麦書房, 1975) 4-136
- [3] <http://ja.wikipedia.org/wiki/>
- [4] 遠山 啓, 銀林 浩編,『量と構造』(国土社, 1971) 27-47 では、「複内包量」の代わりに「2 次内包量」といっている。
- [5] 小島順 他,『量の理論』(数学セミナー増刊 シンポジウム数学 5) (日本評論社, 1980) 137-191
- [6] <http://piano.chem.yamaguchi-u.ac.jp/kiho/ken/jiyuudo/jikyuu.html>

大槻氏の核力サプルの原稿について

武谷三男・長崎正幸^{*1}

Manuscript of Supplement on Nuclear Forces Prepared by Prof. Otsuki

Mituo TAKETANI and Masayuki NAGASAKI

まえおき

これは編集者（矢野）が大学院学生であったころに指導教授であった小川修三さんやその他のスタッフのところへ郵送されてきたメモである。研究者一般ではなく、かなり内輪の核力研究グループ内というきわめて限られた研究者に対して配布されたメモである。研究者個人への批判もその中に含まれている。それでももちろん武谷氏本人もどこにも印刷されたものとして、公表はしなかったし、また公表するつもりもなかったであろう。

ただ、武谷は2000年に亡くなられてもう20年以上になるし、存命の方も少数はおられるが、関係者もその多くはもう亡くなっている。それで歴史的文書という観点からここに公表したい。

これは核力グループが研究の総括として *Progress of Theoretical Physics* の Supplement として発行を計画していた号の大槻昭一郎氏が準備していた原稿の批判を述べたメモである^{*2}。おそらくは大槻氏はその批判を取り入れて原稿の書き直しをされただろうと思われる。だからこの文書の内容はもう無意味であろう。ただ、研究に取り組む武谷さんの考え方の一環を知る資料というだけである。その点を誤解のないようにお願いしたい。

この文書の公表を契機として TNS とよばれた、武谷の核力研究の戦略とその評価と結末についての科学的な研究が行われることを期待したい。これは私自身に課された課題でもあるし、また物理学史研究者に開かれたいわゆる *Open Question* ともしたいと思う。なお、「はじめに」と「武谷・長崎のメモ」の節に分けたのは編集者であるが、以下は編者注とか編者付加部分を除いてすべて著者である、武谷・長崎によるものである。（編集者：矢野）

1 はじめに

大槻昭一郎氏の核力サプルの part 2 の原稿 “On Repulsive Core of Nuclear Forces” が核力関係の研究者に配布され、1月7日までに大槻氏宛にコメントを寄せるようにとの大槻氏の希望が述べられています。

「大槻原稿」では、大槻氏の著しい誤読から Nagasaki-Hirasawa-Taketani ^{*3} に対して間違った議論が行われ、またそれに基づいておかしい主張が行われているので、核力関係研究者の注意を喚起したいと思い、このメモを記します^{*4}。

^{*1} 元立教大学

^{*2} 最終的に発表された大槻氏の論文は [1] である：編者注

^{*3} [2]; 「大槻原稿」の Ref. 76)

^{*4} 以下の本文ではページ数ごとに議論がされているので、小節としてページ数を用いている：編者注

2 武谷・長崎メモ

2.1 p.38

「大槻原稿」の § 3-1 Hard core scattering (p. 38) では, high energy ($kr_c \gg 1$) における hard core による散乱は N-N の大角散乱 data よりもはるかに大きい角分布を与えることが言われたのち, 次のように述べられています.

The phenomenological way out of this difficulty is to introduce a strong absorption on the surface and/or inside the hard core radius. Of course, this type of partial wave solution is not excluded phenomenologically and corresponds to one of Hama and Kawaguchi's solutions (KH-II above) and to Nagasaki, Hirasawa and Taketani's solutions⁷⁶⁾. Can an absorptive effect that is compatible with the existence of a hard core and is consistent with the forward diffraction largely mask effects coming from the hard core itself? Can a strong absorption take place inside the hard core?

この“absorption in the hard core”なる「独創的」な概念は Nagasaki, Hirasawa and Taketani とはまったく何の関係ありません. そこで扱われたのは hard core およびそれを取り囲む吸収領域がある場合の散乱です. hard core とはそもそも現象論的にその中の領域を除外してしまうものだから, 上に挙げた「大槻論文」からの引用文とはまったく逆に“absorption inside the hard core”は現象論的には許されないものです. Nagasaki, Hirasawa and Taketani (以後 N.H.T. と表記する: 編者付加) も Hama-Kawaguchi (H.K.) もそんなものはありません.

N.H.T. や H.K. で扱われているのは小さな l をもつ partial waves に対する (絶対値が比較的大きな) 負の phase shift δ_l です. $|\delta_l|$ が比較的大きな値をもつこれらの lowest partial waves に対しては, imaginary phase shift χ_l は大きな値がとられています.

l が小さい partial waves が (絶対値の比較的大きな) 負の δ_l と大きな χ_l をもつことは, hard core 内で吸収がおこることを意味しません. N.H.T. ではこれらの partial waves を吸収するのは, hard core を取り囲む吸収領域なのです. もっと初等的な説明を加えれば, たとえば free な S-wave ($l = 0$) は $r = \infty$ から次第に原点に向かって集まってきて再び $r = \infty$ に向かって広がっていきませんが, hard core とそれを取り囲む吸収領域がある場合には S 波は中心に集まってくる途中で吸収を受けたのち, hard core で散乱され, 再び吸収領域で吸収を受けて $r = \infty$ へと広がっていくのです.

こうした事情に対する「大槻原稿」のまちがった議論は, 「大槻原稿」に一貫している「 l が小さい波の吸収は r が小さいところで起こる」という誤った理解に原因があります.

2.2 p.43

実際, 「大槻原稿」は §3.2 iii, Two channel model (p.41) において Hida-Sawada-Yano-Yonezawa [3] に触れ, elastic channel に hard core を考えても

Then, the magnitude of the overlapping integral I_L is a rapidly decreasing function of L , which results in an apparently strong absorption inside the hard core in the first channel.

と述べています. ところが「大槻原稿」Fig. 3-4-1 にあるように elastic channel の radial wave function R_L は

$r \leq r_c$ で zero なのですから, $I_L = \int_0^\infty R_L U R'_L dr$ は $r > r_c$ からの寄与のみを含みます*5. すなわち, outside the hard core で吸収されるのです.

一般に r が小さいところでの吸収は l が小さい波に対してのみ起こります. l が大きい波は r が小さいところまで入り込まないからです. しかし, 逆は必ずしも真ならず, なのです. すなわち, l が小さい波に対する吸収が起こるのは r が小さいところだけとは限らないのです. I_L が $L \simeq 0$ だけに残るということは, a few lowest partial waves が吸収されるということであって, $r < r_c$ だけで起こるということではないのです.

2.3 p. 39

これに関連して「大槻原稿」p.39 において

Re δ_L with $b_L \leq r_c$ is determined solely by the hard core. Im δ_l with $b_L \leq r_c$ is fairly reduced by the hard core. In the case of absence of the short range absorption, $\frac{d\sigma}{d|t|}$ at large angles is considerably larger than experiment, owing to the reduction of Im δ_L by the hard core and to the pesence of Re δ_L for $b_L \leq r_c$.

と述べているのも問題になります.

この叙述は Adachi, Fujimura, Mori, Otsuki and Yagisawa(「大槻原稿」Ref. 77) の論文の紹介として行われています. ちなみに Adachi, Mori および Yagisawa の3氏は, この論文の内容についてもこの論文が P.T.P. に投稿されたことについても何も知らず, したがって preprint や投稿原稿のコピーも持っておらず, Adachi 氏は驚いて P.T.P. にこの論文の取り下げを要求されたということなので, このメモでは Fujimura-Otsuki (以後 F. O. として引用する: 編者注) として引用することにします.

さて, P.T.P. に問い合わせてやっと存在がわかった F. O. では “Im δ_L with $b_L \leq r_c$ is fairly reduced by the hard core” の「証拠」として Fig. 2-2 があげられています. この図には Klein-Gordon eq. を用いた場合の

$$\text{“Case SHC” : hard core} + iV_1 e^{-\mu_1 r^2} \text{ (} r_c = 1/M, V_1 = -0.1119 \text{ GeV, } \mu_1 = 0.04765 \text{ (GeV)}^2 \text{)}$$

に対する $r_l = e^{-2\text{Im } \delta_l}$ と $iV_1 e^{-\mu_1 r^2}$ なる吸収だけがある場合に $|V_1|$ が小さいとして WKB 近似を用いたときの r_l とが比較されています. $b \leq 1/M$ のとき前者の約 0.5 に対し, 後者は約 0.4 です. Im δ_l の減少にすれば, 約 0.5 に対し約 0.1 の減少です. これが fairly reduced の実体です. (この図では $b = 0$ でも $r_l < 1$ なのですから, 「大槻原稿」流に言えば, 「hard core の中で吸収がおきている」わけでしょう)

問題は, もともと大角度散乱の data から本質的にはずれることなく $b \leq 1/M$ の吸収を大きくして hard core の effect を mask しようかどうかということなのですから, F. O. の Fig. 2-2 はこの目的には役立たないものです. F. O. では WKB 近似は hard core があると使えないとしている節がありますが, hard core がありそれを soft absorptive potential が取り囲んでいるとき, $b \leq r_c$ に対し WKB 近似は

$$\text{Im } \delta(b) = \int_{r_c}^{\infty} \frac{V(r)}{\sqrt{r^2 - b^2}} r dr$$

を与えます. $b \geq r_c$ のときは積分の下限は b となり, $r^2 = z^2 + b^2$ とおけば,

$$\text{Im } \delta(b) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{b^2 + z^2}) dz$$

となります. F. O. の Fig. 2-2 中の WKB 近似とはすべての b に後者を用いたものです. $b \leq r_c$ に前者を用いるなら Fig. 2-2 中の計算機による結果と大してちがわぬ結果がでることがすぐわかります.

*5 「大槻原稿」(3.35) 式 (ちなみに Hida et al では積分の下限・上限は書かれていません); R'_L は inelastic channel の radial wave function です.

2.4 p. 40

「大槻原稿」の p.40 には F. O. の Fig. 2-4 が Fig. 3-3 として転載されています。これは上に述べた “Case SHC” の角分布を描いたものですが、 $r_l \simeq 0.5$ ($l \simeq 0$) ですから、もちろん角分布は大角度で大きくなります。その原因を「大槻原稿」は

owing to the redcut of $\text{Im } \delta_l$ by the hard core and to the presence of $\text{Re } \delta_l$ for $b \leq r_c$

と説明します。これはナンセンスです。 r_l ($l \simeq 0$) を “reduce” する前の値約 0.4 にしておいても大角度で角分布が大きくなるのは当たり前だからです。

この図は「吸収が弱ければ hard core による散乱が大きく効く」ことを示しただけのもので、N.H.T. が示したようにこの図の計算値におよそ $(1/0.5)^2$ をかけたものが（前方を除き）hard core による散乱断面積を与えます。この意味でこの図は $kr_c \gg 1$ のときの hard core 散乱の（前方を除く）角分布を計算してみたようなものです。

次に、「大槻原稿」は short range absorption を付け加えた F. O. に触れ、

but then an unwanted diffraction pattern appears in turn

なので F. O. は

could not find the parameters compatible with experiment within their framework

と述べています。

まことに “within their framework” で “could not” なのですが、その “framework” とは

$$\text{hard core} + i \sum_{n=1}^3 V_n e^{-\mu_n r^2}$$

で

$$\mu_1 = (0.045 \sim 0.055 \text{ (GeV)}^2) \leftarrow \text{long range absorption}$$

$$\mu_2 = (0.12 \sim 0.13 \text{ (GeV)}^2) \leftarrow \text{short range absorpition}$$

$$\mu_3 = (0.4 \sim 0.5 \text{ (GeV)}^2) \leftarrow \text{short range absorpition}$$

ということです。 $b \leq r_c$ の吸収が大きくなるためには、それゆえ、 V_3 を大きくしなければならず、F. O. の Fig. 3-1 には

$$V_1 = -0.08, \quad V_2 = -0.5, \quad V_3 = -2.0 \text{ (GeV)}$$

のときの角分布が描かれています。 V_3 が急に大きいので回折現象がおきて、角分布は途中で exp. data よりも小さくなり、つぎに数倍になり、さらに大角度へ行くと再び exp. data より小さくなります。この途中の「数倍」が「氣にくわぬ」というので、F. O. は V_3 を小さくします。すると、もちろん大角度ではね上がってしまうのです。

Fujimoto-Fujimura (unpublished) は吸収ポテンシャルをもっとスムーズなものにすれば回折現象が実際に減ってしまうことを示しました。これは解析的にはつぎのように表せます。(Hirasawa, Nagasaki and Taketani

[4] を参照とあるが、この論文は P.T.P. には見いだせない：編者注)

$$1 - e^{-2\text{Im } \delta(b)} \simeq Ae^{-\lambda^2 b^2} \quad \text{なら}$$

$$f(\theta) \simeq ik \left(\frac{A}{2\lambda^2} \right) e^{-\frac{(\Delta p)^2}{4\lambda^2}}$$

(Δp : momentum transfer)

となります。逆に

$$\text{Im } \delta(b) \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - Ae^{-\lambda^2 b^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[Ae^{-\lambda^2 b^2} + \frac{1}{2} A^2 e^{-2\lambda^2 b^2} + \frac{1}{3} A^3 e^{-3\lambda^2 b^2} + \dots \right]$$

一方、吸収ポテンシャル $iV(r)$ が著しく大きくなければ $b > r_c$ のとき、大よそ

$$\text{Im } \delta(b) \simeq \int_b^\infty \frac{V(r)}{\sqrt{r^2 - b^2}} r dr$$

です。したがって

$$V(r) \simeq V_1 e^{-\lambda^2 b^2} + V_2 e^{-2\lambda^2 b^2} + V_3 e^{-3\lambda^2 b^2} + \dots \quad \text{なら}$$

$$\text{Im } \delta(b) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\lambda} \left[V_1 e^{-\lambda^2 b^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_2 e^{-2\lambda^2 b^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} V_3 e^{-3\lambda^2 b^2} + \dots \right]$$

よって

$$V_n \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{A^n}{\sqrt{n}}$$

すなわち、吸収による角分布が $e^{-(\Delta p)^2/2\lambda^2}$ に比例していても、吸収ポテンシャルは $e^{-\lambda^2 b^2}$ だけではなく、 $e^{-2\lambda^2 b^2}, e^{-3\lambda^2 b^2}, \dots$ が適当にまざってスムーズになっている、そのために角分布に回折縞が生じないようになることもありうるのです。

2.5 p. 40

「大槻原稿」はついで、Kanada-Otsuki-Sakai-Yasuno [5] に触れます。この論文では absorption model の名の下に “the absorption parameter obtained from the forward diffraction peak” と hard core scattering の (real) phase shift を用い大角度で exp. data よりも大きい角分布を導き、hard core は都合よくないとしています*6。

しかし、この Kanada et al. に引用されていない N. H. T. [2] が示すように、forward diffraction に効くのは l が大きい波であって、 l が小さい波の吸収は forward diffraction からはきまらないのです。N. H. T. は $b \leq r_c$ の波の吸収に energy dependence をもたせれば（これは energy と共に新しいチャンネルが開けるので当然である）、hard core があっても大角度散乱を説明できるということを示したのです。

2.6 p. 41

「大槻原稿」は p. 41 で

In the absorption model an extensive search of the parameters is easily made.

*6 「大槻原稿」 Fig. 3-4; Kanada et al. Fig. 3-4

と述べていますが、このようにそれは決して “extensive” ではなく、その本質上きわめて “restrictive” なものです。

Kanada et al. では Fig. 3-7 および Fig. 3-8 で $l \leq l_0$ ($l_0 = 2, 3$ or 4) に対してのみ $e^{-2\text{Im } \delta_l} = 0$ とおいた角分布が示されています。他の l に対しては forward diffraction peak から決められたものがそのまま使われているのですから、当然回折縞が出るのです。Kanada et al. は

It is quite difficult to guess a modification which just happens to mask the hard core effect without giving rise to large diffraction pattern.

と述べています。しかしながら、たとえば Fig. 3-8 の山と谷の中間の各点をスムーズに結んでみれば、Fig. 3-3 に示されるすべての l に対し前方から決めた吸収と hard core を考えた角分布と似た形で大角度で何桁か小さい角分布になるのですから、Kanada et al. が示したことは hard core effect の mask のさせ方がまずければ、だめということで、うまく mask させてもなおかつダメということでは決してありません。

2.7 p.3, p.4

最後に一般的な問題について書きます。「大槻原稿」は次のように述べています。

The TNS theory was proposed just after Jasrow's attempt, ... (「大槻原稿」 p.3)

Jastrow suggested in his attempt at introducing the hard core that it was to be associated with a heavy particle. (「大槻原稿」 p.4)

以上から読み取れることは、TNS の方法よりも前に Jastrow の hard core があって、これは TNS よりも priority があるといわんばかりだということです。しかし、実際はどうか。

TNS の方法がはっきりと発表されたのは実は 1949 年です。武谷・中村「素粒子論の方法について」[6] の (B) C-meson について、(C) 核力について、をご覧ください。これは『続弁証法の諸問題』(1950) に再録されてあります。さらに、その英訳に近いものが Taketani, Nakamura and Sasaki [7] なのです。したがって、方法論として打ち出したのは、1951 年の TNS よりもずっと前で、私どもが主として 1951 TNS を引用するのは priority よりもそこに一番詳しく書かれてあるからにすぎません。“The TNS theory was proposed just after Jastrow's attempt” とわざわざ “just after” と書かれるいわれはないのです。われわれがすでに方法を確立したところに Jastrow の hard core が現れたので、これはわれわれの inner region の phenomenological potential の一例であるという意味にすぎなかったのです。

つぎに Jastrow が hard core を heavy particle と関連させたという問題を取りあげますと、これは 1951 TNS が heavy mesons を武谷が強調したことに対して、そんなことはすでに Jastrow の方が先に言っているぞという意味なのでしょう。Jastrow は P. R. (1950) の letter で

The attractive field is perhaps to be associated with the π -meson and the short-range repulsive field with heavier partilces. (下線は著者 (武谷・長崎))

と述べています。ここでは short range の斥力が heavier partilces に perhaps 関係あるかもしれないということをいっているだけで、核力の引力部分についてもこれと並列に perhaps π 中間子に関係があるかもしれないといっているだけなのです。「大槻原稿」ではこれが “it (hard core をさす) was to be associated with a heavy particle” となってしまうのですから困ったものです。

Heavier meson について P. R. 掲載の論文を引くなら、Taketani, Nakamura, Ono and Sasaki [8] を引かねばなりません。そこでは range のちがう mixture field を導入する必要が述べられ、

One suggestion may be a nuclear field carried by π -mesons mixed with a third meson which is heavier than π -mesons, ...

とあります。これは Jastrow よりも 1 年前にまさにアメリカの P. R. で発表されたもので当時、学界雑誌もうすぐ、論文の数も少なかったので、核力をやる Jastrow が当時読まなかったはずはありません。したがって heavier particle という Jastrow の発想はわれわれに優先権があると当然主張してよいと思います。したがってなんといっても “just after Jastrow” とわざわざいわれる理由はありません。

ちなみに、武谷、中村、佐々木、「核力の理論」 [9] は核力の range も一つではだめで、二つは必要なことを主張しており、「核力に対する C-中間子」を考えております。これは坂田氏たちの電磁場に対する C-中間子と analogous に考えた核力に対する重い中間子のことです。これは 1950 TNS にもありますし、『続弁証法の諸問題』にもあります。

重要なことは重い meson の可能性を含めて TNS の方法の必要を打ち出したということですし、それをその後の核力研究を通じて一貫して証明して来たという点であって、その点 Jastrow が一発で終わったのとちがうところです。

(1967.12.27)

参考文献

- [1] S. Otuki, On Repulsive Core of Nuclear Force, Prog. Theor. Phys. Suppl. **No. 42** (1968) 39-106
- [2] Nagasaki, Hirasawa and Taketani, Prog. Theor. Phys. **38** (1967) 514-516
- [3] Hida, Sawada, Yano, and Yonezawa, Prog. Theor. Phys. **37** (1967) 692-701
- [4] Hirasawa, Nagasaki and Taketani, Prog. Theor. Phys. to be published
- [5] Kanada, Otsuki, Sakai and Yasuno, Prog. Theor. Phys. **38** (1967) 1134-1145
- [6] 武谷・中村, 素粒子論の方法について, 素粒子論研究, 1949 年 8 月号 99
- [7] Taketani, Nakamura and Sasaki, Prog. Theor. Phys. **5** (1950) 730-734
- [8] Taketani, Nakamura, Ono and Sasaki, Phys. Rev. **76** (July 1, 1949) 60-63
- [9] 武谷・佐々木・中村, 核力の理論, 素粒子論研究, 1948 年 10 月号 77

編集後記

また寒くなってきました。前にカナダのエドモントンでマイナス 40 度を経験した話をしましたが、その続きの話をします。このエドモントンにある住宅のほとんどの家には地下室があります。何故か分かりますか。地下室は冬に暖かいからという理由もありますがそれだけではありません。

話がちょっとそれますが、北海道生まれの私が本州に行ったときに驚いたことがあります。それは水道管が地下から一旦家の外で立ち上がり、そこから家の中に引き込まれていることです。もし北海道でそんなことをしたら、冬には水道管の中の水が凍結してしまい水が出なくなってしまう。さらに悪いことに、水は凍ると体積が膨張するので水道管が破裂してしまいます。この管の破裂を避けるため北海道では、水道管は地下を通してそのまま家の中まで引き込んでから立ち上げるようになっています。もし家を留守にするときは水道を凍結させないために、家の中の暖房を付けたままにするか、そうでなければ地下で水を止め、そこから上の部分は水抜きをしなければなりません。

私が住んでいる札幌では水道管はすべて地下 1 メートルの深さのところを通して配管されるようになっています。これは各地方ごとに凍結深度というのがあって、水道管はこの凍結深度より深いところに埋設しなければならないためです。ちなみに札幌の凍結深度は地下 60cm です。

話をカナダに戻すと、エドモントンの水道管は地下 5 メートルの深さのところを通して配管されています。そのため家を立てるときは必ず地下 5 メートルまで掘る必要があります。水平距離で 5 メートルというのとはたいしたことないように思うかもしれませんが、鉛直距離で 5 メートルというのは大変な距離です。ちなみに、我が家の 1 階の床から 2 階の天井までの距離を測ってみると 5 メートル 8 センチでした。という訳で、5 メートルというのはおよそ 2 階分の高さに匹敵します。どうせここまで掘るならいっそ地下室を作ってしまうというのが各家に地下室がある第 1 の理由です。そうして、この地下室には大きな暖房機が設置されています。またまた、長話になってしまいました。

話は変わりますが、今回の号には私が書いたものを含めて 4 編の論文が掲載されています。私の「懸垂線の振動問題 (3)」は散歩をしていて電柱間に張られた電線が風に揺られているのを見て、思い付いたものです。毎度のことながら、この数式展開は、ちょうど子供がおもちゃをいじくる感覚と同じで楽しみながらやっています。つぎの岩崎さんの「ソリトン理論における広田の方法の拡張」は、30 年ほど前に広田さんがソリトン理論を展開するのに用いた方法をキンク理論にも適用できるようにと考察を重ねたものです。ソリトン理論はもう一昔前にすべて終わったのかと思っていましたが、まだやることがあったのですね。つぎの矢野さんの「外延量と内包量」というのは、初めて読んだときに何のことかと思いました。しかし、中身を読んでも、難しいことは一つもなく、すらすらと読めてしまいました。たまにはこういった論文、いや、エッセイも良いかと思います。

最後の武谷・長崎の「大槻氏の核力サプルメントの原稿について」というのは、武谷三男研究家の矢野さんが編集したものです。これは、私のような素人にはかなり難解で、読むのに大変苦勞をしました。これは武谷三男研究の一貫として歴史的意味があるものと思われます。

最後に、この「数学・物理通信」が長く続くことを願ってやみません。

(世戸憲治)