

数学・物理通信

12 卷 2 号 2022 年 3 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 3 月 28 日

目次 (Contents)

1. 鎖の線密度が一定でないときの懸垂線 (2)

世戸 憲治 2

2. 順列・組合せ・二項定理

矢野 忠 7

3. 編集後記

世戸 憲治 37

1. Catenary of Chain with Non-uniform Density (2)

Kenji SETO 2

2. Permutation, Combination and Binomial Theorem

Tadashi YANO 7

3. Editorial Comments

Kenji SETO 37

鎖の線密度が一定でないときの懸垂線 (2)

世戸 憲治 *

Catenary of Chain with Non-uniform Density (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「鎖の密度が一定でないときの懸垂線 (1)」(「数学・物理通信」12 巻 1 号) では、鎖の線密度が双曲線余弦関数のマイナス 2 乗、いわゆる、ソリトン型で変化する場合の懸垂線を扱った。そこでは、解は、複雑ではあるが、初等関数の範囲内で求めることができ、その数値計算例も確かめてみた。先回の密度関数と対照させてあえて表現すれば、今回は密度関数が双曲線余弦関数のプラス 1 乗の形で変化する場合を扱う。この場合は一般には楕円関数が必要になってしまうが、その特別な場合は初等関数の範囲内で解くことができる。

2 方程式の導入とその解法

2.1 前回の復習

鎖の線密度が一定でない場合の懸垂線の求め方として、前回の復習になってしまうが、ここで、くり返しておく。

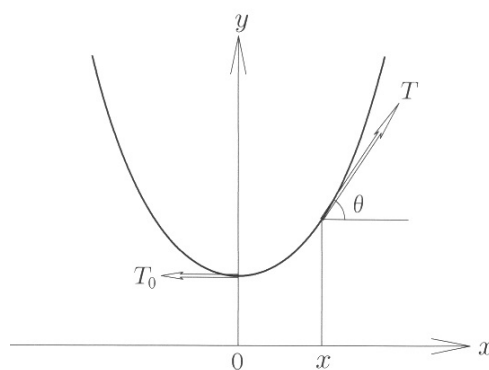


図 1

図 1 に示すように長さ $2S_0$ の鎖を持ち上げ、両手の間隔を $2\ell (< 2S_0)$ として懸垂線を作る。ここでは水平右向きに x 軸、鉛直上方に y 軸をとり、鎖の最下点が y 軸上に来るようにする。この鎖の線密度が連続的に変化するものとするが、これは鎖の真ん中を中心として左右対称になっているものとし、その密度 ρ を、鎖の真ん中から測った長さを s として、 s の偶関数 $\rho(s)$ とする。

この懸垂線の方程式を $y = y(x)$ で表すことにし、この鎖の最下点から x の正側の任意の点 (x, y) までの部

* 北海学園大学名誉教授

分を考える．この部分の鎖の長さを $s(x)$ とすると¹⁾,

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.1)$$

となる．ここに, y' は y の微係数である．また, この部分の質量を $m(s)$ とすると,

$$m(s) = \int_0^s \rho(s) ds \quad (2.2)$$

となる．さらに, 鎖の最下点において作用する水平張力を T_0 , また, 点 (x, y) において, 懸垂線の接線方向である角度 θ の方向に作用する張力を $T(x)$ とすると, 水平方向, 鉛直方向の力の釣り合いから,

$$T(x) \cos \theta = T_0, \quad T(x) \sin \theta = m(s)g \quad (2.3)$$

となる．ここに, g は重力加速度である．問題は, 密度関数 $\rho(s)$ が与えられたものとして, これら方程式から, $s(x)$, $y(x)$, $T(x)$ を求めることである．

初めに, (2.3) の 2 式の比をとり, $\tan \theta = y'$ となることから,

$$y' = \frac{1}{\mu} m(s), \quad \mu = \frac{T_0}{g} \quad (2.4)$$

となる．ここに, μ は質量の次元を持つ量でこの第 2 式で定義する．一方, (2.1) 式を x で微分すると,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.5)$$

となるので, これに, (2.4) 式を代入すると,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \mu^{-2} m^2(s)} \quad (2.6)$$

となり, さらに, これを変数分離して積分形にすると,

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + \mu^{-2} m^2(s)}} = x \quad (2.7)$$

となる．ここで, $x = 0$ のとき, $s = 0$ となることを使った． $\rho(s)$ が与えられれば, (2.2) 式から $m(s)$ が分かり, この積分ができれば, s と x の関係が求められる．これを s について解けたものとして, $s = s(x)$ が求まると (2.5) 式から,

$$y' = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} \quad (2.8)$$

となるので, これを x で積分して解曲線 $y = y(x)$ が求められる．さらに, これが求まると (2.3) 式から $T(x)$, T_0 も求められる．以下, 密度関数を具体的に与えた場合を考察する．

2.2 密度関数が双曲線余弦関数の場合

前回は, 密度関数が双曲線余弦関数 $\cosh$ のマイナス 2 乗となるソリトン型の場合を考察した．今回は, 密度関数が双曲線余弦関数のプラス 1 乗, すなわち,

$$\rho(s) = \rho_0 \cosh\left(\frac{\rho_0}{\nu} s\right) \quad (2.9)$$

¹⁾ 本来ならば, 積分変数と積分の上限を示す変数は区別すべきであるが, ここでは, 誤解の恐れはないものとして, 数式が煩雑になるのを避けるため, 同じ変数名を使うことにする．

と与えられた場合を考察する．ここに， ρ_0 は $s = 0$ のときの線密度，また， ν は質量の次元を持つ定数とする．これは鎖の端の方にいくほど密度が大きくなることを意味する．これを (2.2) 式に代入すると， $m(s)$ は，

$$m(s) = \rho_0 \int_0^s \cosh\left(\frac{\rho_0}{\nu}s\right) ds = \nu \sinh\left(\frac{\rho_0}{\nu}s\right) \quad (2.10)$$

と求められる．さらに，これを (2.7) 式に代入すると，

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + (\nu/\mu)^2 \sinh^2((\rho_0/\nu)s)}} \quad (2.11)$$

となるが，この右辺の積分は，変数 s を虚数の領域までに拡張すると第 1 種の楕円積分になる．ただし，ここでは，楕円積分のような面倒なことは避けることにし，初等関数で解ける範囲に限定した議論を展開することにしよう．そのため，ここでは，

$$\nu = \mu \quad (2.12)$$

という制限を付けてしまう．このとき，(2.11) 式は，

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\cosh((\rho_0/\mu)s)} = \frac{\mu}{\rho_0} \text{gd}\left(\frac{\rho_0}{\mu}s\right) \quad (2.13)$$

と積分ができてしまう．ここに，gd は Gudermann 関数である．これを逆に s について解くと，Gudermann 逆関数を gd^{-1} として，

$$s = \frac{\mu}{\rho_0} \text{gd}^{-1}\left(\frac{\rho_0}{\mu}x\right) \quad (2.14)$$

となる．ここで，gd および， gd^{-1} について，簡単に触れておくと，

$$\phi = \text{gd}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh(t)} = \arctan[\sinh(x)], \quad (2.15)$$

$$x = \text{gd}^{-1}(\phi) = \int_0^\phi \frac{dt}{\cos(t)} = \text{arcsinh}[\tan(\phi)], \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \quad (2.16)$$

と定義される関数である²⁾．これを用いて (2.14) 式を x で微分すると，

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos((\rho_0/\mu)x)} \quad (2.17)$$

となり，さらに，これを (2.8) 式に代入すると，

$$y' = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} = \tan\left(\frac{\rho_0}{\mu}x\right) \quad (2.18)$$

となるので，これを積分して，解曲線は

$$y = -\frac{\mu}{\rho_0} \log\left[\cos\left(\frac{\rho_0}{\mu}x\right)\right] + C \quad (2.19)$$

と求められる． C は力学的に意味のない積分定数である．また，(2.18) 式は点 (x, y) における接線方向の角度 θ が，

$$\theta = \frac{\rho_0}{\mu}x \left(< \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.20)$$

²⁾ 詳しくは，「グーデルマン関数とメルカトル図法」(「数学・物理通信」9 巻 2 号) を参照のこと

となることを意味する．この θ を (2.3) の第 1 式に代入すると，張力 $T(x)$ が

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos\left(\left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)x\right)} \quad (2.21)$$

と求められる．また，(2.4) 式の y' に (2.18) 式を代入すると，

$$m(s) = \mu \tan\left(\frac{\rho_0}{\mu}x\right) \quad (2.22)$$

となるが，これを (2.3) 式の第 2 式に代入し，(2.20) (2.21) 式を用いると， $\mu = T_0/g$ となって，これは (2.4) 式の定義に戻るだけである．なお，この (2.22) 式は，(2.10) 式の $m(s)$ の式に (2.14) 式の s を代入し，(2.16) 式の gd^{-1} を用いても出すことができる．

最後に求めなければならないのは， μ の値である．これは鎖の全長が $2S_0$ であり，それを持ち上げて懸垂線にしたときの両手の間隔が 2ℓ であったことから決まる．これは鎖の右半分でいうと，鎖の最下点から右端の $x = \ell$ までの長さが S_0 ということであり，(2.14) 式から

$$S_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \text{gd}^{-1}\left(\frac{\rho_0}{\mu}\ell\right) \quad (2.23)$$

となるが，さらに，この式は，(2.16) 式の gd^{-1} の具体的形を用いて，

$$\sinh\left(\frac{\rho_0}{\mu}S_0\right) = \tan\left(\frac{\rho_0}{\mu}\ell\right) \quad (2.24)$$

と変形される．これが， μ を求めるための方程式である．図 2 に $q = \tan(p)$ と $q = \sinh(p)$ を $p \geq 0$ の範囲で描いたものを示す．ただし，ここでは図の見やすさから，縦軸のスケールは横軸の $1/4$ にしてある．

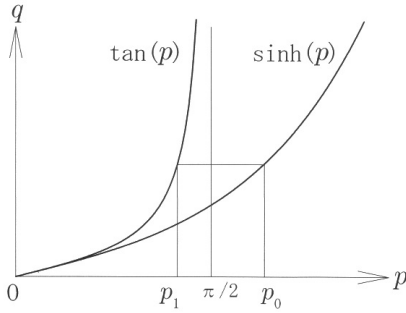


図 2

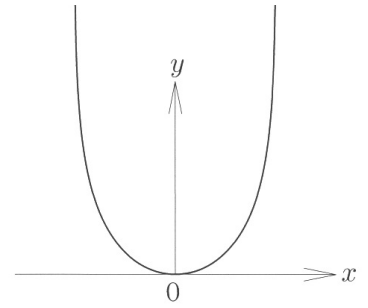


図 3

本来，この (2.24) 式は μ を求めるための方程式であるが，逆に， μ を与えられたものとして， ℓ を求めるための方程式とみなした方が，理解しやすい．この図にある点 p_0 は

$$p_0 = \frac{\rho_0}{\mu} S_0 \quad (2.25)$$

とおいたもので，この値が与えられたものとして， $\sinh(p_0)$ と同じ大きさになる $\tan(p)$ の p を求めるとよい．そのときの p を p_1 とすると，図から明らかなように，必ず $p_1 < p_0$ となる．したがって，

$$p_1 = \frac{\rho_0}{\mu} \ell \left(< \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.26)$$

とすると， S_0 よりも小さな ℓ が必ず 1 個求められることになる．このとき， p_0 の値が大きくなるほど， p_1 の値は $\pi/2$ に近づくこともわかる．

ここで、数値計算例を 1 つだけ挙げておく。これまでに出てきたパラメータの値を、適当ではあるが、

$$\rho_0 = 1 \text{ kg/m}, \quad \mu = 1 \text{ kg}, \quad S_0 = 5 \text{ m} \quad (2.27)$$

と設定した場合を数値計算してみる。このときの ℓ の値は、小数以下 5 桁の精度で、

$$\ell = 1.55732 \text{ m} \quad (2.28)$$

となる。このときの解曲線 (2.19) 式のグラフを前ページの図 3 に示す。一見、双曲線余弦関数に似ているように見えるが、鎖の端の方での立ち上がりは、双曲線関数のときよりも急峻になる。これは (2.26) 式の p_1 の値が $\pi/2$ で押さえられているためである。

3 おわりに

前回の論文を書いて以来、密度関数をどのようにとると、解析的にきれいに解けるかを考えてきた。しかし、これまでに見つけられたのは、前回のソリトン型と、今回の双曲線余弦関数型の 2 つだけである。なかなか、難しい問題で、私にとって、永遠に解けないオモチャのような気がしてきた。そのうち、暇を見つけて何度か挑戦してみたい。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、いくつかのご教示いただきました。先生に心から感謝いたします。

順列・組合せ・二項定理

矢野 忠^{*1}

Permutation, Combination and Binomial Theorem

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

順列, 組合せは私の高校生時代は確率・統計の数学のテキストの中で前段階としておかれていた. ところが現在では集合, 順列・組合せ, 二項定理とが一緒になっており, 数学教育上の位置づけも変わっている. また, 教材の配置にしても順列より前に重複順列をおかれているのが普通である. いずれにしてもあまりこのレポートは up-to-date ではない. そのことをご承知のうえで読んでほしい.

50 年以上も昔のテキストの順列・組合せ・二項定理の箇所を再編するのは時代錯誤もいいところであろう [1]. だが, あまり数学が得意でなかった高校時代に苦しみながら学んだそのテキストの思い出から, 今回このような試みをするようになった.

ここで, ちょっと長くなるが, 『現代数学指導法事典』 [2] に数学者・銀林浩先生が書かれた「順列・組合せの意義」の箇所を引用しよう^{*3}.

順列・組合せの意義

これまで, 順列・組合せというと, 確率論を学ぶための準備と考えられていて, しかも初等幾何学と同じような極めて技巧的な問題の解法に終始していた. それはちょうど, 解析幾何学を学ぶ準備として三角法があり, しかもそれが種々の旧式の技巧 (たとえば, 三角方程式や三角不等式) にみちみちていたのと, よく似ている.

しかし, この後の例とまったく同じように, 確率論を学習するのに, そんな技巧的な順列・組合せの技能は必要がなく, ただ原則的な認識があれば, 足りる. 第 2 に, 行動科学の発展とコンピュータの利用によって, 近年種々の組合せ的理論が大進展するにいたったので, それらをも視野に収めておかなければならない.

したがって, 順列・組合せという名称よりも,
組合せ論, あるいは組合せ数学
という名称で, 独自に考察する方が望ましいといえよう.

1 はじめに

ある文献を読んでいて, それは四元数に関連していたが, 変数が 4 つある場合にその変数でつくれる, 2 次の項がいくつあるかということがそこに書かれていた. そして計算式が $(5 \cdot 4)/2 = 10$ とあった. この数の計算ができなかったわけではないが, その意味するところがすぐにはわからなかった.

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} ちなみにつけ加えておけば, これは 1971 年の時点での数学者・銀林浩氏の解説であり, 1985 年発行の『わかる数学指導法事典』 [3] では, 確率・統計の分野はあるが, そこにはもちろん, 順列・組合せの項目はなく, 他の分野にも順列・組合せへの言及はない.

もっとも, この事典は関数の分野においても, 指数関数・対数関数・三角関数についての簡単な記述はあるものの, 詳細な記述はないので, 中学校数学までを主たる対象にした事典であると思われる.

それで変数を w, x, y, z としてその 2 次の単項式をつくってみたら、 $w^2, wx, wy, wz, x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2$ の 10 項となることがわかった。それでも $(5 \cdot 4)/2 = 10$ の意味がわからなかった。しばらくして、そうかこれは 4 個の変数から重複を許して 2 個取り出した場合の数だなとわかった。ところが 4 個の変数から重複を許して 2 個取り出す組合せの数を求める式が思い出せない。そのことを書いた書籍を探したが、見つからない。

そうこうしているうちに、『順列組合せより確率まで』[4] という古い本を持っていたことを思い出してその本を見て、重複順列についての ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ という公式を見つけて、ようやく $(5 \cdot 4)/2 = 10$ という計算の意味が理解できた。

ということで、私は順列と組合せにとっても弱いことを改めて思い知らされた。それで、60 年以上前に使った高校数学のテキストを取り出してきて、順列と組合せのところだけでも再編して記録しておきたいと考えた。問題の解答は主に [5], [6] を参照してつけた。自分で泥臭い別解を考えたものもまれにはあるが、すべてにはつけられなかった。

ともかく、以下は主として [1] の引用と勝手なその改変である。

2 基礎事項

文芸書で買いたいものが 3 冊、料理本で買いたいものが 2 冊ある。いずれか 1 冊だけ買うとすれば、その買い方は何通りであろうか。また文芸書と料理本とを 1 冊づつ買うとすると、その買い方は何通りであろうか。

このような問題は、日常よく起こることである。いま、文芸書を a, b, c 、料理本を s, t とすれば、いずれか 1 冊の買い方は

文芸書を購入することにすれば、 a か b か c の 3 通り、または料理本を購入することにすれば、 s か t の 2 通り、すなわち、 $3 + 2 = 5$ の計 5 通りがある。

また、料理本と文芸書の各々を 1 冊ずつの買い方は、

もし、 a を買うときには、 s か t かの 2 通りがあるし、 b を買うときでも s か t かの 2 通りがあるし、 c を買うときでも s か t かの 2 通りがある。すなわち、 $3 \times 2 = 6$ の 6 通りの買い方がある。

このように、いろいろの場合を正しく数えるときの基礎となるのは、つぎの 2 つの原則である。

(和の原則)

二つのことがら A, B があって、これらは同時には起りえないものとする（排反事象という）。そして A の起り方は m 通り、B の起り方は n 通りであるとすれば、A か B のいずれかが起る起り方は $m + n$ 通りである。

(積の原則)

二つのことがら A, B があって、これらの起り方は互いに無関係とする（独立事象という）。そして、A の起り方は m 通り、B の起り方は n 通りであるとすれば、A と B がともに起るのは $m \times n$ 通りである。

いろいろ複雑な問題もこの原則にあてはめて一步一步順序よく考えていけば、かならず解決されるであろう。

(例) A, B, C の 3 校から、それぞれ 2 名のテニスの選手 a, a' ; b, b' ; c, c' を出して、図 1 のように勝抜き戦を行う。同じ学校から出た選手は、優勝戦以外では顔が合わないようにするには、何通りの試合方法があるか。ただし、X 組、Y 組は、これが互いに入れかわっても同じものとみなす。

(解) 同じ学校から出る選手は優勝戦以外では顔が合わないようにするには、 a と a' ; b と b' ; c と c' が同じ組に入らないようにすればよい。したがって、X 組に入れる 3 人をきめれば、Y 組の方は必然的にきまってしまう。また、X 組、Y 組が互いに入れ替わっても同じとみなすのであるから、A 校の a 選手は X 組に入れるものとして

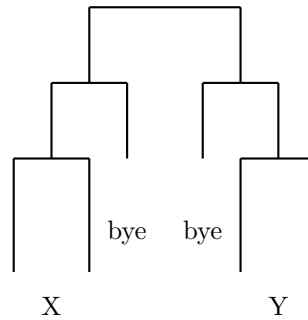


図1 X, Y はグループ, bye は不戦勝

考えてもかまわない.

そこで, つぎに B 校の選手であるが, これは X 組に b を入れるか, b' を入れるかの 2 通りがあり, この各々に対して X 組に c を入れるか, c' を入れるかの 2 通りがあるから, 結局 X 組に入れる 3 人の選び方は 2×2 通りある. そこで, たとえば, X 組に a, b', c の 3 人が選ばれるとしても, このうちだれを不戦勝にするかで 3 通りがあるから, またこの各々に対して Y 組の 3 通りがあるから, 結局 $3 \times 3 = 9$ 通りがあることになる.

すると, 3 人ずつ 2 組に分ける方法が 4 通りあり, その各々に対して 9 通りずつの組み合わせ方法があるのだから, 全体では

$$4 \times 9 = 36 \quad \text{通り}$$

の組合せ方があることとなる. これが求めるものである.

(問題 1) A 市から B 市へ行く道は 4 本, B 市から C 市へ行く道は 2 本, C 市から D 市へ行く道は 3 本あるとすれば, A 市から B 市, C 市を経由して, D 市に行く道筋は何通りあるか.

(解答) A 市から B 市に行く道と, B 市から C 市へ行く道および C 市から D 市に行く道はそれぞれ無関係にとれるので,

$$4 \times 2 \times 3 = 24$$

であるから, 24 通りである.

(問題 2) 1,000 円札 2 枚, 500 円硬貨 3 個, 100 円硬貨 4 個がある. これらを使って, ちょうど支払える金額は何通りあるか.

(解答) この問題ではお札と硬貨の, それらの種類を最低一つは使うのか, それとも使わなくてもよいのかははっきりとはわからない. それでまずは必ず使うと仮定して考えてみよう.

1,000 円札は 1 枚使うか, 2 枚使うかの 2 つの場合しかない. それに対して 500 円硬貨は使う個数は 3 個までなので, 3 つの場合がある. 同様に 100 円硬貨は 4 つの場合がある. そうすると

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

であるから, 24 通りである.

つぎに, 紙幣または硬貨をまったく使わないことも許されるとすれば, 1000 円札は 0 枚使う可能性が付加されるので, 可能性は 3 通りとなる. 同様に 500 円硬貨 0 個使う可能性が追加されて, 4 通りとなる. 最後に, 100 円硬貨も使わない場合が追加されて, 5 通りの可能性がある. したがって, この場合には

$$3 \times 4 \times 5 = 120$$

であるから, 120 通りとなる.

(問題3) 1 から 20 までの整数で, 2 で割り切れるものは 10 個, 3 で割り切れるものは 6 個ある。したがって, 2 か 3 で割り切れるものは, $10 + 6 = 16$ 個ある。この推論のどこに誤りがあるか。

(解答) 3 の倍数で 2 の倍数にもなっているものが, 6, 12, 18 の 3 個ある。これらを差し引いておかないといけない。したがって, $16 - 3 = 13$ 個が正しい答えである。

(問題4) 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g, 64g の分銅のある「てんびん」がある。この「てんびん」で何 g までがすべて測れるか。

(解答) 分銅が 1g のしかないときは 1g までしか測れない。つぎに, 1g, 2g までの分銅があれば, $1+2=3$ g まで測れる。さらに 1g, 2g, 4g の分銅があれば, $1+2+4=7$ g まで測れる。こういう風に考えて行けば, $1+2+4+8+16+32+64=127$ g まで測れるとわかる。

(問題5) $360 = 2^3 3^2 5$ であることから 360 の約数 (1 および 360 を含めて) は $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ であることを示せ。一般に, 整数 a の素因数分解を

$$a = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdots$$

とすれば, a の約数の個数はどうか。

(解答) $360 = 2^3 3^2 5$ であるから, 約数を考えるとき, 2, 3, 5 の因数として, それぞれ, $2^0, 3^0, 5^0$ も含めれば, 因数 2 は $3 + 1 = 4$ 通りであり, 因数 3 は $2 + 1 = 3$ 通りであり, 因数 5 は $1 + 1 = 2$ 通りである。したがって, 360 の約数は $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ である。

同様に考えれば, 上に素因数分解が与えられた, 約数の個数は $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \cdots$ で与えられる。

(問題6) A, B, C, D の 4 校からそれぞれ 2 名のテニス選手を出して図 2 のように勝抜き戦を行う。同じ学校から出た選手は優勝戦以外では顔が合わないようにするには, 何通りの方法があるか。ただし, X 組, Y 組は, これが互いに入れ替わっても同じものとみなす。

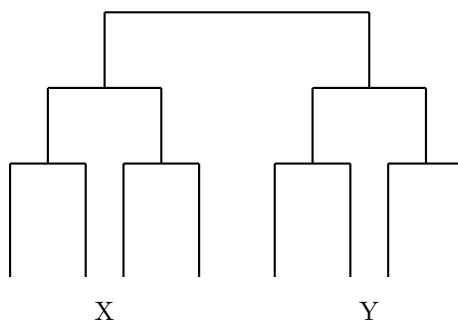


図2 X, Y はグループ

(解答) A, B, C, D の 4 校からの選手をそれぞれ, $a, a', b, b', c, c', d, d'$ とする。X 組, Y 組が互いに入れ替わっても同じとみなすのであるから, A 校の a 選手は X 組に入れるとしてもかまわない。このとき a' 選手は Y 組に入ることになる。これに対して X 組に入れる選手は B 校からは 2 通り, C 校からも 2 通り, D 校からも 2 通りである。したがって, これらの方法は $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りある。

いま X 組の選手が a 選手以外に b', c', d であったとしよう。このときに a 選手と最初にあたる選手を選ぶ, 選び方は 3 通りある。 a 選手と最初にあたる, どれかの選手を一人選べば, 後の二人は自動的に X 組の別の組になる。Y 組には A 校から a' 選手が入るが, この a' 選手と最初にあたる選手を選ぶ, 選び方も 3 通りある。これが

決まれば、Y 組の残りは自動的に決まる．したがって、同じ学校から出た選手が優勝戦以外で顔が合わないようにするには

$$8 \times 3 \times 3 = 72 \text{ 通り}$$

の方法がある．

(別解) a 選手に対して X 組に入る可能性のある選手の組を図 3 に示した．X 組の組合せは

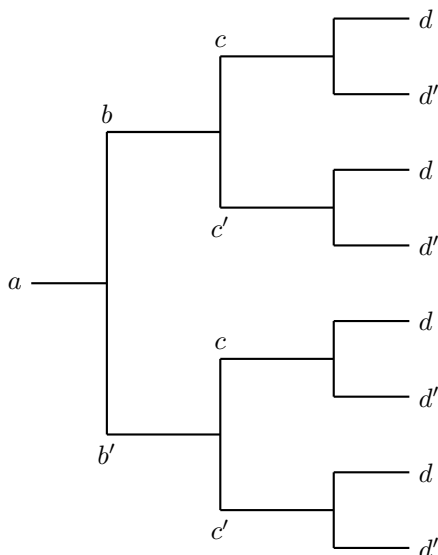


図 3 X 組の選手の組合せ

$$(abcd), (abcd'), (abc'd), (abc'd') \\ (ab'cd), (ab'cd'), (ab'c'd), (ab'c'd')$$

の 8 通りの組合せがある．これに対して Y 組の方もそれぞれ対応した組合せがある．その組合せはここでは省略するが、ちょうどプライムのない文字にプライムをつけ、逆にプライムのついた文字にはプライムを除いた文字の対応した組となっている．

いずれにしても X 組と Y 組とはそれぞれ対応した組しかとれないので、全体で 8 通りしかない．あとは a 選手と a' 選手とののはじめての対戦選手を決めてやれば、全体の対戦相手の組が決まる．すなわち、

$$8 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 8 \times 3 \times 3 = 72 \text{ 通り}$$

である．

(問題 7) 甲子園で行われる今年 (2022 年) の春の選抜高校野球大会の出場校は 32 校である．この大会はトーナメント (勝ち抜き) 方式で行われる．このときの全試合数はいくらか．ただし、引き分け再試合はないものとする．

(解答) 出場校 32 校の試合を、初戦からはじめて決勝戦までの対戦図を描いて、その試合数を数える泥臭い方法もある．そういうやり方も一度はぜひやってみてほしいが、ここでは別の方法を考えてみよう．

まず、32 校も出場校があつては面倒だから、まず出場校は 2 校だけだとすれば、試合数は 1 である．これは誰だってわかる．では 4 校だとすれば、どうなるか．図を描いてもいいし、頭で図を思い描いてもよいが、試合数は $2 + 1 = 3$ であることがわかるであろう．

もっと出場校を増やして、8校とすれば、試合数は $4 + 2 + 1 = 7$ となる。こう考えてくれば、出場校が16校になれば、試合数は $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ となるし、出場校が32校であれば、試合数は $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ であることもおのずからわかる。

これで、答えとしては出場校が32校の今年の選抜高校野球大会の総試合数は31であることがわかったのだが、私が大学の1年か2年のときに読んだ、数学者・吉田洋一さんだったかのエッセイには、トーナメント方式での全体の試合数は負けたチームの数と $1:1$ に対応しており、負けたチームの数は (出場チームの数) $- 1$ であるから、この場合には $32 - 1$ が試合数となるという考えがあることを知った。

3 順列

ものを並べるとき、その順序を考えることは大切なことである。いくつかのものを一列に並べる、並べ方のことを順列 (Permutation) という。いま、ここに a, b, c, d, e の5文字があるとき、これから2個だけ取り出して並べる、並べ方を考えてみよう。第1番目に取り出すものは a, b, c, d, e の5通り、そのどれに対しても、第2番目にとるものは第1番目にとったものを除いた4通りである。したがって、2個取り出して並べる、その並べ方は

$$5 \times 4 = 20 \text{ 通り}$$

である。もし、3個取り出して並べるならば、さらに第3番目を考えると、上の20通りのどれに対しても、第1番目、第2番目を除いた3通りであるから、その並べ方は

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 通り}$$

となる。そして一般に n 個のものから r 個取り出して並べる場合はつぎのようになる。

相異なる n 個のものから、 r 個取り出して並べる順列の数を ${}_nP_r$ という記号で表すと

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (3.1)$$

下に定義する記号 $n!$ の記号をもちいると、この順列の数 ${}_nP_r$ は

$${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (3.2)$$

と表すこともできる。

(3.2) で、特に、 $r = n$ の場合、すなわち n 個のものを全部並べる順列の数は

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (3.3)$$

となるが、この右辺を $n!$ (n の階乗 (factorial of n)) と表す。すなわち、 n 個のものを全部並べる順列の数は

$${}_nP_n = n!, \quad n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (3.4)$$

である*4。

(注意) 記号 ${}_nP_r$ の P は順列 (Permutation) の頭文字をとったものである。なお、これは「 P の n, r 」と読むとよい。

*4 $:=$ の記号を知らない人もいるかもしれない。これは $:=$ の左辺の記号をその右辺で定義するという記号である。以前は $\equiv$ で式を定義することが多かったが、最近は定義式に $:=$ の記号がよく使われる。

$n = 10$ までの $n!$ を値を示した．わずかに $n = 10$ としても $10! = 3,628,800$ というかなり大きな数となる．

$$\begin{aligned}1! &= 1 \\2! &= 2 \\3! &= 6 \\4! &= 24 \\5! &= 120 \\6! &= 720 \\7! &= 5,040 \\8! &= 40,320 \\9! &= 362,880 \\10! &= 3,628,800\end{aligned}$$

もっと大きな自然数に対して $n!$ の値はすでに数表に掲載されているが [7]，大きな n の値に対して近似値を比較的簡単に計算できるスターリング (Stirling) の公式をここで与えておく．それは

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (3.5)$$

とか

$$\log n! \sim n \log n - n \quad (3.6)$$

とかで表される．この (3.5) のあまり形式ばらない導出は [8] に載っている．数学的な導出は [9] にその記述があるので，関心のある人は読んでみてほしい．

スターリングの公式 (3.5) による $n!$ の近似値の相対誤差がどのくらいになるかは興味深い問題である．これについては付録 1 で述べよう．

(例 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個を全部並べてできる順列のうちで両端が奇数となるものの数を求めよ．

(解答) 両端に奇数をおく，そのおき方は ${}_3P_2$ 通り，両端が定まれば，中央の 4 個はどんな順でもよいのだから，全体では

$${}_3P_2 \times {}_4P_4 = 3 \cdot 2 \times 4! = 144 \text{ 通り}$$

となる．

(例 2) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種の数字だけでつくれる 3 桁の数は何通りあるか．

(解答) 3 つの数字を並べるのであるが，223 とか 444 とかのように同じ数字が並んでもよいのであるから， ${}_5P_3$ と答えてはまちがいである．100 の位の数字は 1, 2, 3, 4, 5 の 5 通り，そのどれに対しても 10 の位の数字は 1 から 5 までの 5 通り，そのどれに対しても 1 の位の数字は 5 通りであるから，積の原則によって，全体では

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \text{ 通り}$$

である．

この例と同様に，一般につぎのことがわかる． n 種のものから，同種のものをくりかえし取ることを許して， r 個取り出す順列の数を Π_r で表すと

$${}_n\Pi_r = n^r \quad (3.7)$$

このような順列を重複順列 (repeated permutation) という．

(注意) ${}_n\Pi_r$ においては $n < r$ でもよいことに注意せよ. なおこの記号は「 Π (パイ) の n, r 」と読むとよい.

(例3) a, a, a, b, c, d の 6 個の文字全部からできる順列の数を求めよ.

(解答) a という同一文字が 3 個含まれるから, 少し複雑である. いま求める順列の数を x とする. その一つの順列, たとえば

$$acabda$$

をとってみると, このままで a だけを互いに入れ替えても順列は変わらない. しかし, 仮に 3 つの a を a_1, a_2, a_3 とみなせば, これらを入れ替えることによって $3!$ 通りの異なる順列が得られる. x 通りの順列の各々に対してまったく同様であるから, 全体では積の原則により $x \times 3!$ 通りの順列となる. そして, これは結局 a_1, a_2, a_3, b, c, d の 6 文字から得られる順列の数 $6!$ となるはずであるから

$$x = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

これと同様に, 一般につぎのことが成り立つことがわかる.

n 個のもののうちで p 個は同じもの, q 個は他の同じもの, r 個は別の他の同じもの, $\dots$ であるとき, n 個のものの全部できる順列の数はつぎの通りである.

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \cdot \dots} \quad (3.8)$$

この順列に名前はないが, 同種順列とよぶことにしよう^{*5}.

(例4) 10 段ある階段がある. これを昇るとき, 1 段ずつでも, 2 段ずつでもよく, また 1 段と 2 段とを混せて昇ってもよいとすれば, 昇るのに何通りの方法があるか.

(解答) 2 段昇りを何回使うかで場合を分けると

- (1) 1 段昇りだけを使う場合
- (2) 2 段のぼりを 1 回だけ使う場合
- (3) 2 段のぼりを 2 回使う場合
- (4) 2 段のぼりを 3 回使う場合
- (5) 2 段のぼりを 4 回使う場合
- (6) 2 段のぼりを 5 回使う場合

の 6 つの場合がそのすべてである.

(1) と (6) の場合は 1 通りということはすぐわかる. しかし, (2) - (5) の場合はなかなかすぐにはわからない.

それで, いま 1 段昇りを数字 1 で表し, 2 段昇りを数字 2 で表すことにすれば, はじめに 2 段昇りを使えば, 後の 8 段は 1 段のぼりしか使えない. それで数の列で書けば, この場合は 21111111 で 10 段となる. 要するに全体で $(10 - 2) + 1 = 9$ ステップのどこに 2 をおくかだから 9 通りの昇り方がある. (3) の場合以下も同様に考えていけばよい.

(3) の場合には 2 を 2 つ使うので, $(10 - 4) + 2 = 8$ ステップになる. この 8 個の数字 1 と 2 の数の列で

$$22111111$$

^{*5} これはこのレポートだけの用語で一般には名前はない. しかし, こういう名前をつけておいた方が印象的だと思う.

の順序に昇るとか

21211111

の順序に昇るとかが (3) の昇り方である. すると (3) の昇り方の総数は, 結局

2 が 2 個, 1 が 6 個あるときの順列

ということになり, 上の公式から

$$\frac{(2+6)!}{2! \cdot 6!} = 28$$

であることがわかる. このような考え方で (1) - (6) の各々について昇り方の数を求めると

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad \frac{(1+8)!}{1! \cdot 8!} = 9$$

$$(3) \quad \frac{(2+6)!}{2! \cdot 6!} = 28$$

$$(4) \quad \frac{(3+4)!}{3! \cdot 4!} = 35$$

$$(5) \quad \frac{(4+2)!}{4! \cdot 2!} = 15$$

$$(6) \quad 1$$

となり, これらを全部合わせて, 求める昇り方の総数は

$$1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89 \text{ 通り}$$

となる.

(問題 1) 緑, 青, 黄, 赤の四種の旗がある. ちがう色の旗 3 枚を使って何通りの信号ができるか. また, 同じ色の旗も使ってよいことにすればどうか.

(解答) ちがう色の旗を使った信号は

$${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

通りである.

同じ色の旗を何度でも使ってもいいとすれば,

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

通りである.

(問題 2) 駅が 30 ある鉄道会社では, 何種類の乗車券をつくらなければならないか.

(解答) 駅が 2 駅しかなければ, 駅名を A, B とすれば, $A-B$ と $B-A$ の 2 つあればよい. すなわち,

$${}_2P_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

3 駅になれば, 駅名を A, B, C とすれば,

$$A-B, A-C$$

$$B-A, B-C$$

$$C-A, C-B$$

すなわち

$${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

こうした簡単な場合から、駅が 30 あれば

$${}_{30}P_2 = 30 \cdot 29 = 900 - 30 = 870$$

であることが推論される。

(問題 3) 7 人を一列に並べるとき、特別の 3 人が隣り合う場合は何通りあるか。またその 3 人のうちどの 2 人も隣り合わない場合は何通りあるか。

(解答) まず最初の設問に答えよう。特別の 3 人を記号で A, B, C としよう。このときにこの 3 人がどういう風に隣り合っているかはいま考えなくてもいいから、この 3 人のグループを一つの文字 X で代表させよう。そうすると 7 人の内から 3 人を引いて、その後で 1 人分だけたして、 $7 - 3 + 1 = 5$ 人の人の全順列を考えるといい。

したがって

$${}_5P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ 通り}$$

しかし、いま特別の 3 人を 1 人だとまとめてしまったが、実はこれは 3 人の合成チームであったから、この中では 3 人の人は自由に並び代わってもよい。だから、上の 120 通りの一つ一つに対して、 $3!$ 通りの順列があるので、最初の設問の答えは

$${}_5P_5 \cdot {}_3P_3 = 5! \cdot 3! = 120 \times 6 = 720 \text{ 通り}$$

である。

次の設問は前に隣り合っていた 3 人が誰も隣り合わない場合の数を求めるのだが、これは全体の 7 人の全順列から、前に求めた順列の数を引けばよい。それで

$${}_7P_7 - {}_5P_5 \cdot {}_3P_3 = 7! - 5!3! = 6(7-1)5! = 36 \times 5! = 36 \times 120 = 4,320 \text{ 通り}$$

(問題 4) 相異なる 5 個の玉を輪に並べる方法は何通りあるか。またこの玉を糸につないで、首飾りをつくるとすれば、何通りの方法があるか。

(解答) これは円順列の問題である。相異なる 5 個の玉のうちで、1 個だけとって輪に固定し、それ以外の 4 個の玉の順列を考えればよいから、 $4! = 24$ 通りの方法がある。たとえば、A, B, C, D, E の順序であるが、B, C, D,

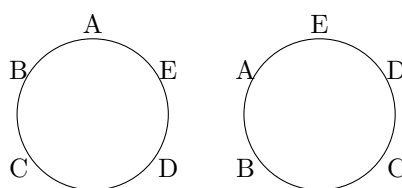


図 4 円順列

E, A とか、C, D, E, A, B とか、D, E, A, B, C とか、E, A, B, C, D とかは単に循環しているだけだが、ちがった配列になる。図 4 では一つだけずらしたもののだけを一つだけ描いたが、一つずつずらした配置が 5 つできる。これらは同じ配置だから、これを回避しようとする、どれか一つを固定してやればよい。これが全体を固定する理由である。

この玉を糸につないだ首飾りでは左右を反対にしても同じものであるから、 $4!/2 = 12$ 通りである。

(解答) 2種の記号 $\bullet -$ を r 個重複を許して並べるとすれば, その並べ方は

$$2\Pi_r = 2^r = 50$$

となる, r を求めればよい. $2^r = 50$ の両辺の常用対数をとれば,

$$\begin{aligned} r \log 2 &= \log 50 \\ r &= \frac{\log 50}{\log 2} \\ r &\sim 6 \end{aligned}$$

であるから、 $2^6 = 64$ 個まで許せば十分である。これは $2^5 = 32$ では 50 通りの符号にはまだ足りない。

(問題 6) equations の文字を全部つかってできる順列のうちで両端に子音をもつ順列の数を求めよ.

(解答) 子音は (s, t, n, q) の4文字, 母音は (a, i, u, e, o) の5文字である. まず子音を



のように両端におくことを考える．これは4文字から2文字を取り出して並べる順列であるから， ${}_4P_2$ 通りある．この順列の一つである，両端が(s, t)となったときを考えると，残りの母音(a, i, u, e, o)と子音(n, q)の合計7文字を並べるが，これは ${}_7P_7$ となる．

したがって、全体の数は

$${}_4P_2 \times {}_7P_7 = 4 \cdot 3 \times 7! = 60,480 \text{ 通り}$$

となる.

(問題 7) equations のすべての文字を用いてつくる順列のうち、少なくとも 1 端には子音 (s, t, n, q) がいずれかがくるものは何通りあるか.

(解答) 少なくとも一端にということとは

両端に子音がくる場合の順列の数を A

一端に子音がくる場合の順列の数を B

とする. このとき求める順列の数は

$$x = A + B$$

である。この場合の数 A, B を別々に計算して求める数 x を求めればよい。しかし、ここでは少なくとも 1 端には子音がくるといふことの余事象 (complementary event) ^{*6}である、両端に母音がくる順列の数を考え、これを a とする。 x に a を足した場合の数は equations のすべての文字を用いてつくる順列の数となるから、

$$x + a = 9!$$

となる．ここで両端に母音がくる順列の数は 5 つの母音 (e, u, a, i, o) から 2 つを選んで並べる順列の数であるから，

$${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$$

*6 余事象とは、ある着目している事象 A に対し、「 A ではない」事象を余事象といい、 $\bar{A}$ または A^c で表す。事象 A と事象 $\bar{A}$ とを合わせれば、起り得る事象の全体となる。すなわち、

$$(\text{A の起る場合の数}) + (\bar{\text{A}} \text{ の起る場合の数}) = \text{全体の起る場合の数}$$

が成り立つ.

通りであり、その両端以外におかれる 7 つの文字は自由におけるから

$${}_7P_7 = 7!$$

であるから、両端に母音が来る順列の数は

$$a = 20 \cdot 7!$$

したがって求める順列の数 x は

$$x = 9! - 20 \cdot 7! = (72 - 20)7! = 52 \times 7! = 262,080 \text{ 通り}$$

である。

(問題 8) equations のすべての文字を用いてつくる順列のうち、子音の順が q, t, n, s となるものは何通りあるか。

(解答) 子音の順序が q, t, n, s のように条件がつくとき、この条件のついた順列の数を x とする。このときに条件のついた q, t, n, s の順序を自由に変えたとすると、上の x に対してそれぞれ $4!$ の順列ができる。これらの積 $4!x$ が equations のすべての文字を用いてつくる順列数 $9!$ に等しい。すなわち

$$\begin{aligned} 4!x &= 9! \\ x &= \frac{9!}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 15,120 \end{aligned}$$

4 組合せ

ものを並べるときは順序が問題になるが、どれとどれを取り出すかという、その取り出し方だけが問題となる場合も多い。これが組合せ (combination) の問題である。いま

$$a, b, c, d, e$$

の 5 個の文字から 3 個とる組合せの数を求めてみよう。今度は順序は考えないのだから

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$$

などは、順列としてはちがっても組合せとしては同じものである。さて、求める組合せの数を x とすれば、その各々に対して上のように $3!$ 通りの順列ができるから、全体ではちょうど $x \times 3!$ 通りの順列が得られる。そして、これは上の 5 個の文字から 3 個取り出して並べる順列の数 ${}_5P_3$ にほかならないから

$$\begin{aligned} x \times 3! &= {}_5P_3 \\ x &= \frac{{}_5P_3}{3!} = 10 \end{aligned}$$

となる。まったく同様にして、一般につぎのことが成り立つ。

相異なる n 個のものから、 r 個取り出す、組合せの数を ${}_nC_r$ という記号で表すと

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad (4.1)$$

なお、(4.1) の右辺の分子、分母に $(n-r)! = (n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ をかけると、分子の方はちょうど $n!$ となるから

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (4.2)$$

とも表せる。ただし、この式で特に $r = n$ の場合を考えると

$${}_nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} \quad (4.3)$$

のように $0!$ という本来無意味のものが出てくるが、 ${}_nC_n$ はその意味から当然 1 でなければならないので、

$$0! = 1 \quad (4.4)$$

という規約をしておく*7。

(注意) 記号 ${}_nC_r$ の C は組合せ (Combination) の頭文字 C をとったものである。そして、これは「 C の n, r 」と読む。この記号の代わりに

$$\binom{n}{r} \quad (4.5)$$

という記号を使うこともある。最近では多分こちらの記号を使う文献が多くなっていると思われる*8。

なお、文字 a が r 個、文字 b が $(n-r)$ 個あるときの順列の数は同種の順列の公式から

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (4.6)$$

であって、これはちょうど ${}_nC_r$ である。このように組合せとは同じものが 2 種類あるときの順列にほかならない。例を挙げてみよう*9。

(例) 1 個のサイコロを 5 回続けて投げる反復試行において、1 の目が 3 回出る場合の数はいくらか。

(解答) これは 5 回続けてサイコロを投げるという異なった試行において 1 の目が 3 回出るということで

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

として答を求めることができる。

しかし、サイコロの目が 1 が出るか、または 1 の目でなければ、何であっても同じであるから、それらをまとめて、もう一つの目だと考え、1 の目か 1 以外の目としてまとめれば、2 種類になる。

このとき 1 の目を $\square$ で表し、1 以外の目を $\blacksquare$ で表すことにすれば、その並べ方は 1 の目が 3 回連続して出る場合は

$\square \square \square \blacksquare \blacksquare$
 $\blacksquare \square \square \square \blacksquare$
 $\blacksquare \blacksquare \square \square \square$

*7 $n! = n(n-1)!$ で $n = 1$ とおけば、 $1! = 1 \cdot 0!$ となるから、 $0! = 1! = 1$ となることが納得できる。

*8 文献によれば、このレポートで使っている ${}_nC_r$ は表記法が必ずしも国際的に一定しないが、(4.5) は国際的にもその表記法は変わらないという。

*9 以下の例を以前に書いた、レポート [10] につけた脚注である。組合せ ${}_nC_r$ は同じ種類のものが 2 種あるときの同種順列であることを今回私が見つけたのかと思ったが、昔のテキスト [1] にはすでにこのことが指摘されていた。それも自分で高校生のとき、アンダーラインまでしていた。

つぎに、1 の目が 2 度連続して出る場合は

$\square \square \blacksquare \square \blacksquare$
 $\square \square \blacksquare \blacksquare \square$
 $\blacksquare \square \square \blacksquare \square$
 $\blacksquare \square \blacksquare \square \square$
 $\square \blacksquare \blacksquare \square \square$
 $\square \blacksquare \square \square \blacksquare$

最後に、1 の目が続かない場合は 1 通りしかなく

$\square \blacksquare \square \blacksquare \square$

これらで起り得る全部の場合は尽きており、それは 1 の目が 3 つ連続して起こる場合は 3 回、2 つ連続して起る場合は 6 回、連続しない場合は 1 回である。合計は $3 + 6 + 1 = 10$ 通りである^{*10}。

これは同種順列で異なる 2 種類のものから 5 個を取り出して並べる順列で 1 の目が 3 個、1 以外の目を 2 回取り出して並べる順列

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10$$

と同じことになる。これは ${}_5C_3$ に等しいことがわかる。

(例) 8 つの野球チームでリーグ戦を行う。各試合とも 20 回戦まで行くとすれば、全部で何試合あるか。

(解答) 8 つのチームの対戦の組合せ方は

$${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

だけあるから、試合数は

$$28 \times 20 = 560$$

である。

組合せの数を表す ${}_nC_r$ については、つぎのような性質がある。

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad (4.7)$$

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \quad (4.8)$$

これらの性質は、後で述べる、二項定理の係数について成り立つ、パスカルの三角形 (Pascal's triangle) から見出されたものと思われる。それでパスカルの三角形と関係させて理解すると、この関係がわかりやすいし、関係を覚えやすい^{*11}。

以下に示すのは、(4.7), (4.8) の発見法的な証明でない、組合せの定義を用いた証明である。

まず、(4.7) は ${}_nC_r$ の式 (4.2) で $r \rightarrow n - r$ とおきかえれば、

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! [n - (n-r)]!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$$

が成り立つから、(4.7) が証明された。

^{*10} 1 の目 $\square$ と 1 以外の目の $\blacksquare$ との並び方の対称性を考えるとほぼ半分の 6 個だけ考えただけで全体の並び方の数を推論できることがわかるが、それは頭のいい人の考えることであって、凡人である私たちは 10 通りすべての並び方を描くことを厭わないようにしたい。

^{*11} パスカルの三角形については、二項定理の節と付録 2 を参照せよ。

つぎに, (4.8) も ${}_nC_r$ の定義を用いて, (4.8) の右辺から左辺を導くと考えれば,

$$\begin{aligned}
{}_n C_r &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
{}_n C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&\text{であるから} \\
{}_n C_r + {}_n C_{r-1} &= (n-1)! \left[\frac{1}{r!(n-r-1)!} + \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \right] \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \left[\frac{n}{r(n-r)} \right] \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= {}_n C_r
\end{aligned}$$

が成り立つから, (4.8) が証明された.

また, つぎのように組合せの意味からもわかる.

(4.7) については n 個のものから r 個取り出すかということは, どの $(n-r)$ 個を残すかというのと同じである. したがって

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r} \quad (4.7)$$

が得られる.

(4.8) については, n 個の $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の中から r 個を取り出すのに

- (1) a_1 を含む場合
- (2) a_1 を含まない場合

に分ければ,

a_1 を含む場合はすでに 1 個取り出しているのだから, 残りの $n-1$ 個から $r-1$ 個取り出せば, 全体で r 個取り出すことになるので, この場合の取り出し方は ${}_{n-1}C_{r-1}$ となる.

つぎに, a_1 を含まない場合は a_1 を除いた $n-1$ の中から r 個を取り出さなければならないので ${}_{n-1}C_r$ となる. それでこの二つの場合をあわせたものが全体の ${}_n C_r$ に等しいから

$${}_n C_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \quad (4.8)$$

これらの関係 (4.7) と (4.8) が成り立つことは二項定理の係数について成り立つ, パスカルの三角形の観察から得られた二項定理の係数の間の関係から予想されたことであろう. それをここで一般的にその意味を考えて証明したことになる.

前にも述べたが, 第 1 の証明法は先人の数学者たちが見つけた関係をただ正しいと天下りに追認しただけである. 第 2 の証明法はそういうところはなく, 二項展開での係数について成り立つ, パスカルの三角形で成り立っていた係数の間の関係を一般に証明したことになる.

なお, (4.7) で特に $r = n$ の場合を考えると, ${}_n C_n = {}_n C_0$ となり, 本来は無意味な ${}_n C_0$ というものが出てくるが, $0!$ と同様, これも

$${}_n C_0 = 1 \quad (4.9)$$

と規約しておく．すると，(4.2) および (4.7) の公式が $r = 0, r = n$ のときも成り立つことになって都合がいい*12．

また， ${}_{15}C_{13}$ のように ${}_nC_r$ において r が n に近い場合には，(4.7) にしたがって

$${}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$$

と計算できて簡単である．

(重複組合せ)

つぎに，同じものを繰り返しとることを許した重複組合せを考えてみる．たとえば

$$1, 2, 3, 4, 5$$

の 5 個の数字から，繰り返しを許して 3 個取り出す組合せという問題である．これは少し複雑であるが，つぎのような工夫でその組合せの数を求めることができる．

いま，3 個の数字の大小の順に整理して，たとえば

$$(1, 3, 4), (2, 2, 5), (4, 4, 4) \quad (\text{A})$$

としておく．さて，これらの組合せにおいて，第 1 番目の数字はそのままにし，第 2 番目の数字には 1 を加え，第 3 番目の数字には 2 を加えると，上の 3 つはそれぞれ

$$(1, 4, 6), (2, 3, 7), (4, 5, 6) \quad (\text{B})$$

というように，相異なる数字の組合せとなる．そして，(B) の組合せを見れば，逆に (A) の組合せを知ることができる．つまり，(A) の全体の組合せの全体と (B) の組合せの全体とは，上に示したように 1:1 の対応をし，その個数は同じとなる．ところが，(B) は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

の 7 個の数字から 3 個をとりだす組合せであるから，その数は

$${}_7C_3 = {}_{5+2}C_3 = {}_{5+3-1}C_3$$

であり，この $5+2$ の 2 は，前に第 3 番目の数字に加えたところの 2 である．

以上の例から推論すれば，同じものから r 個取り出す場合ならば，加える数は $r-1$ であるから，一般につぎのことがわかる．

相異なる n 種のものから，繰り返しを許して r 個取り出す組合せの数を ${}_nH_r$ という記号で表すと

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \quad (4.10)$$

となる．

このような組合せを**重複組合せ (repeated combination)** という．この公式によれば，たとえば x, y, z の 3 文字からできる 4 次の項 (x^4, x^3y, xyz^2 など) は，全部で

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 \text{ 項}$$

あることとなる．実際に， x, y, z の 3 文字からできる 4 次の項をつくってみれば，

文字 1 種類だけ使うとき (3 個): x^4, y^4, z^4

文字を 2 種類使うとき (9 個): $x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3z, x^2z^2, xz^3, y^3z, y^2z^2, yz^3$

文字を 3 種類全部使うとき (3 個): x^2yz, xy^2z, xyz^2

*12 都合がいいだけでなく， ${}_nC_0 = 1$ であることに納得がいく．

の $(3 + 9 + 3) = 15$ 個の項が確かにできることがわかる^{*13}.

(注意) ${}_nH_r$ においては $n < r$ でもよいことに注意せよ. なお, ${}_nH_r$ の H は同次積 (Homogeneous Products) の頭文字をとったのである. ここに, たとえば 4 次の同次積とは上の x^4, x^3y, xyz^2 などのことである.

(問題 1) 15 種類の商品を取り扱う店がある. その中から 5 種類ずつを選び, 毎日とりかえてウィンドウを飾るとすれば, 何日間変わった組み合わせ方ができるか.

(解答) 15 種類の商品から 5 種類の商品を選ぶとすれば,

$${}_{15}C_5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = 3003 \text{ 日} \sim 8.23 \text{ 年}$$

(問題 2) 5 本の平行線が他の 3 本の平行線と交わってできる平行四辺形の総数を求めよ.

(解答) 横に平行な 5 本のうちから, 2 本を取り出す取り出し方は ${}_5C_2$ であり, それに交わる縦の平行線 3 本から 2 本を取り出す取り出し方は ${}_3C_2$ である. だから, できる平行四辺形の数は

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} \times \frac{3 \cdot 2}{2!} = 5 \cdot 2 \times 3 = 30$$

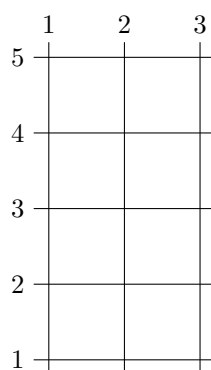


図 5 平行四辺形 (長方形) の数

(別解) これは上のように考えてその数が計算できたが, 平行線が等間隔で互いに直交しているとして, できる長方形 (正方形を含む) の数を数えてもよい (図 5 参照).

横の長さ a , 縦の長さ b でできる長方形を (a, b) と表せば, $a = 1, 2$ をとることができ, $b = 1, 2, 3, 4$ をとることができる. したがって, $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$ の長方形の数を数える. したがって,

表 1 長方形の数

(a, b)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
個数	8	6	4	2	4	3	2	1

表 1 から

$$8 + 6 + 4 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 = 30$$

としても答は出るが, 長方形の数を数えるのがかなり面倒である.

(問題 3) 男性 20 名, 女性 12 名の中から, 男性 6 名, 女性 4 名を選ぶのに, その選び方は何通りあるか.

(解答) 男性 20 名から 6 名の選び方は ${}_{20}C_6$ であり, 女性 12 名から 4 名の選び方は ${}_{12}C_4$ である. 全体の選び

^{*13} ここで, 「1. はじめに」で述べた 4 文字の変数 w, x, y, z からできる 2 次の単項式の例を思い出しておこう.

方は

$$\begin{aligned} {}_{20}C_6 \times {}_{12}C_4 &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!} \times \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} \\ &= 38,760 \times 495 = 19,186,200 \end{aligned}$$

(問題4) 4個のサイコロを振るとき、出る目の組合せは何通りあるか。

(解答) サイコロは6つの面をもつから、出る目は1, 2, 3, 4, 5, 6の6通りである。4個のサイコロを振るとき、出る目はこの6通りを重複を許してとることになるから、

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126 \text{ 通り}$$

(問題5) かきと、なしと、りんごとで20個入りの果物かごをつくりたい。その盛り合わせは何通りあるか。ただし、いずれも少なくとも5個は入れておくものとする。

(解答) 20個のうちで15個はすでに決まっているから、3種の果物から重複を許して5個取り出す取り出し方は

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ 通り}$$

である。

(問題6) 30人を10人ずつ3組に分ける、分け方は何通りあるか。

(解答) まず30人から10人を選ぶ方法は ${}_{30}C_{10}$ である。残りの20人から10人を選ぶ方法は ${}_{20}C_{10}$ である。後残りの10人から10人を選ぶ方法は1通りである。したがって、

$${}_{30}C_{10} \times {}_{20}C_{10} = \frac{30!}{10! \cdot 20!} \times \frac{20!}{10! \cdot 10!}$$

であるが、問題は30人を10人ずつ3組に分けるので、10人ずつ3回にわけて選ぶとは書いてない。すなわち、この数は10人ずつ選んだので、3組のグループに順序をつけたことになっている。

それで30人を10人ずつ3組に分ける方法を x とすると、それらの3組に順序をつけると $3!x$ となるが、これが前に求めた数に等しい。それで

$$\begin{aligned} 3!x &= \frac{30!}{10! \cdot 20!} \times \frac{20!}{10! \cdot 10!} \\ x &= \frac{30!}{10! \cdot 20!} \times \frac{20!}{10! \cdot 10!} \times \frac{1}{3!} \\ &= \frac{30!}{10!} \times \frac{1}{10! \cdot 10!} \times \frac{1}{3!} \\ &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdots 11}{(10!)^2 3!} \end{aligned}$$

5 二項定理

n が正の整数のとき、 $(a+b)^n$ の展開の公式を求めてみよう。たとえば、 $(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)$ を展開して a について整理すれば、

$$a^3 + a^2(b_1 + b_2 + b_3) + a(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) + b_1b_2b_3$$

となるのと同様に、 $(a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_n)$ を展開すると

$$\begin{aligned} (a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_n) &= a^n + a^{n-1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a^{n-2}(b_1b_2 + b_1b_3 + \cdots + b_{n-1}b_n) + \cdots \\ &\quad + a(b_1b_2\cdots b_{n-1} + \cdots + b_2b_3\cdots b_n) + b_1b_2\cdots b_n \end{aligned}$$

となる．この式で a^n の係数は 1, a^{n-1} の係数は $b_1, b_2, \dots, b_n$ の和, a^{n-2} の係数は $b_1, b_2, \dots, b_n$ の n 個から 2 個ずつとってつづつた積の ${}_nC_2$ 個の和, 一般に a^{n-r} の係数は, $b_1, b_2, \dots, b_n$ の n 個から r 個ずつとってつづつた積の ${}_nC_r$ 個の和である．したがって, ここで

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = b$$

とおけば, つぎの等式が得られる．これが二項定理 (**binomial theorem**) である．

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_{n-1} ab^{n-1} + {}_nC_n b^n \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r}b^r \\ &\quad + \dots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}\tag{5.1}$$

なお, ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ であるから, 上の式を $\sum$ を使って

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r}b^r\tag{5.2}$$

と書くこともできる．この場合 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の一般項 (**general term**) という． $(a+b)^n$ において, $n = 1, 2, 3, \dots$ としたときの係数を順次に求めて, 付録 1 に述べたパスカルの三角形を見つけたのではないかと思われる．これについてはつぎの性質がある*14．

- (1) 各行の数は中央に関して左右対称である．
- (2) 各数は, その数の一段上の左上と右上との 2 数の和である．

これらは数式としては (4.7), (4.8) として表されている．

(注意) ${}_nC_r$ は, 二項定理の展開係数でもあるから, これはまた二項係数 (**binomial coefficient**) とよばれることもある．

(例 1) $(x - \frac{1}{x^2})^{12}$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ．

(解答) この展開式の一般項は

$${}_{12}C_r x^{12-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r {}_{12}C_r x^{12-r} x^{-2r} = (-1)^r {}_{12}C_r x^{12-3r}$$

であるから, $12 - 3r = 3$ とおくと $r = 3$ となる．したがって x^3 の係数は

$$(-1)^3 {}_{12}C_3 = -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -220$$

(例 2) $(a+b+c)^7$ の展開式で a^4b^2c の項を求めよ．

(解答) $(a+b+c)^7$ を $[a+(b+c)]^7$ と考えると二項定理が使える．

まず, $b+c = B$ とおいて, 考えると $(a+B)^7$ になるので, a の 4 次の項は ${}_7C_3 a^4 B^3$ の係数は

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

である．つぎに $B^3 = (b+c)^3$ から b^2c の係数を求める．これは ${}_3C_1 b^2c$ であるから, この係数は

$${}_3C_1 = 3$$

したがって, a^4b^2c の係数は

$${}_7C_3 \cdot {}_3C_1 = 35 \times 3 = 105$$

*14 付録 2 をみよ

である.

(問題1) つぎの各式を展開した結果を書け.

$$(1) (a+b)^5$$

$$(2) (a-b)^6$$

$$(3) (1+x)^n$$

$$(4) (q+p)^n$$

(解答)

$$(1) (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(2) (a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(3) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

$$(4) (q+p)^n = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3 + \cdots + nqp^{n-1} + p^n$$

(問題2) つぎの係数を求めよ.

$$(1) (2x+3y)^6 \text{ の } x^2y^4 \text{ の係数}$$

$$(2) \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} \text{ の } x^{10} \text{ の係数および, } \frac{1}{x^2} \text{ の係数}$$

$$(3) (4x^2+3x+2)^4 \text{ の } x^5 \text{ の係数}$$

(解答)

(1) $(2x+3y)^6$ の一般項は

$${}_6C_r(2x)^{6-r}(3y)^r = {}_6C_r 2^{6-r} 3^r x^{6-r} y^r$$

この一般項が x^2y^4 となるときの係数は $r=4$ のときであるから, その係数は

$$\begin{aligned} {}_6C_r 2^{6-r} 3^r &= {}_6C_4 2^2 3^4 \\ &= {}_6C_2 2^2 3^4 \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 4 \cdot 81 \\ &= 15 \cdot 324 \\ &= 4,860 \end{aligned}$$

(2) $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ の一般項は

$$\begin{aligned} {}_{10}C_r (x^3)^{10-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r &= (-1)^r {}_{10}C_r x^{30-3r-r} \\ &= (-1)^r {}_{10}C_r x^{30-4r} \end{aligned}$$

である.

このとき x^{10} の係数は $30-4r=10$ のときである. すなわち $r=5$ である. このときの係数は

$$(-1)^5 {}_{10}C_5 = (-1) \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = -252$$

つぎに $\frac{1}{x^2}$ の係数は $30 - 4r = -2$ のときであるから、 $r = 8$ である。このときの係数は

$$(-1)^8 {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$$

(3) $(4x^2 + 3x + 2)^4$ の x^5 の係数を求めるのはちょっと面倒である。

$$\begin{aligned} (4x^2 + 3x + 2)^4 &= [(2 + 3x) + 4x^2]^4 \\ &= (2 + 3x)^4 + {}_4C_1(2 + 3x)^3(4x^2) + {}_4C_2(2 + 3x)^2(4x^2)^2 + {}_4C_3(2 + 3x)(4x^2)^3 + {}_4C_4(4x^2)^4 \end{aligned}$$

であるが、 x^5 の項ははじめから数えて、第2項と第3項にしか現れない。第1項は高々4次の項までしかないから、考えなくてもよい。

第2項の $(2 + 3x)^3$ の x^3 の項は

$${}_3C_3(3x)^3 = {}_3C_3 \cdot 3^3 x^3$$

であり、また第3項の $(2 + 3x)^2$ の x の項は

$${}_2C_1 2^{2-1}(3x) = {}_2C_1 \cdot 2 \cdot 3x$$

である。したがって

第2項からの係数として

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot 3^3 \times 4$$

が得られ、

第3項からの係数として

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot 2 \cdot 3 \times 4^2$$

が得られる。

したがって、 x^5 の係数は

$$\begin{aligned} {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot 3^3 \times 4 + {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot 2 \cdot 3 \times 4^2 &= 4 \cdot 1 \cdot 3^3 \times 4 + \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 2^2 \cdot 3 \times 4^2 \\ &= 3^3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \\ &= 3^2 \cdot 4^2(3 + 2 \cdot 4) \\ &= 1,584 \end{aligned}$$

(別解) もしかして、多項定理の知識があるとすれば^{*15}、つぎのような別解を求めることができるだろう。 $(4x^2 + 3x + 2)^4$ を展開したときの x^5 の係数はどうなるか。この式を展開すれば、一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!} (4x^2)^p (3x)^q 2^r = \left(\frac{4!}{p!q!r!} 4^p 3^q 2^r \right) x^{2p+q} \quad (\text{A})$$

となる。 $(4x^2 + 3x + 2)^4$ の展開は上の一般項の和である。ただし、 p, q, r は

$$p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0 \text{ で、 } p + q + r = 4 \quad (\text{B})$$

をみたす整数である。また p, q は

$$2p + q = 5 \quad (\text{C})$$

で与えられるから、 x^5 の係数を求めるには (B), (C) をみたす整数 p, q, r の組をすべて求めて、その各組に対する係数を (A) から求めて、加えればよい。

^{*15} 付録3を参照せよ。

(C) をみたとす、負でない整数 p, q の組は

$$p = 0, q = 5$$

$$p = 1, q = 3$$

$$p = 2, q = 1$$

となるが、 $p = 0, q = 5$ のときは $p + q + r = 4$ から $r = -1$ となるので、この場合は除外できる。 $p = 1, q = 3$ のときは $r = 0$ となり、 $p = 2, q = 1$ のときは $r = 1$ となる。

したがって、可能な (p, q, r) の組は

$$(p, q, r) = (1, 3, 0), (2, 1, 1)$$

となる。これらに対する (A) の x^5 の係数の組は

$$\frac{4!}{1!3!0!} 4 \cdot 3^3 \cdot 2^0 = 4^2 \cdot 3^3$$

および

$$\frac{4!}{2!1!1!} 4^2 \cdot 3 \cdot 2 = 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2$$

である。この 2 つを加えれば、 x^5 の係数は

$$4^2 \cdot 3^3 + 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 3^2 (3 + 8) = 1,584$$

となる。これは前の解と一致している。

(問題 3) 数学的帰納法で二項定理を証明せよ。

(解答)

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

を数学的帰納法で証明しよう。

まず、 $n = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^1 {}_1C_r a^{1-r} b^r &= {}_1C_0 a + {}_1C_1 b \\ &= a + b \end{aligned}$$

であるから $n = 1$ のときに二項定理は成り立つ。

つぎに、 $n = k$ のときに二項定理

$$(a + b)^k = \sum_{r=0}^k {}_kC_r a^{k-r} b^r$$

が成り立つとすれば、 $n = k + 1$ のときにも二項定理が成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= (a + b)(a + b)^k \\ &= (a + b) \sum_{r=0}^k {}_kC_r a^{k-r} b^r \\ &= \sum_{r=0}^k {}_kC_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^k {}_kC_r a^{k-r} b^{r+1} \end{aligned}$$

ここで、右辺の第2項の和の指標 r を $r+1=p$ とおきかえれば、 $r=p-1$ であるから

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^k {}_k C_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{p=1}^{k+1} {}_k C_{p-1} a^{k+1-p} b^p$$

したがって

$$(a+b)^{k+1} = {}_k C_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^k ({}_k C_r + {}_k C_{r-1}) a^{k+1-r} b^r + {}_k C_k b^{k+1}$$

ここで、等式

$$\begin{aligned} {}_k C_r + {}_k C_{r-1} &= {}_{k+1} C_r \\ {}_k C_0 &= {}_{k+1} C_0 \\ {}_k C_k &= {}_{k+1} C_{k+1} \end{aligned}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= {}_{k+1} C_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^k {}_{k+1} C_r a^{k+1-r} b^r + {}_{k+1} C_{k+1} b^{k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1} C_r a^{k+1-r} b^r \end{aligned}$$

が成立する。これで、 $n=k+1$ のときに二項定理が成り立つことが示された。

したがって、数学的帰納法により

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

が成立する。

上の数学的帰納法による二項定理の証明では和をとる記号 $\sum$ を用いたが、これを用いない方法でも同様に証明できる。

(問題4) $(1+x)^n$ の展開式を利用して、つぎの等式を証明せよ。

$$(1) \quad {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n \quad (1)$$

$$(2) \quad {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0 \quad (2)$$

$$(3) \quad {}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_n = {}_n C_1 + {}_n C_3 + {}_n C_5 + \cdots = 2^{n-1} \quad (3)$$

$$(4) \quad {}_n C_1 + 2 \cdot {}_n C_2 + 3 \cdot {}_n C_3 + \cdots + n \cdot {}_n C_n = n \cdot 2^{n-1} \quad (4)$$

$$(5) \quad {}_n C_1 - 2 \cdot {}_n C_2 + 3 \cdot {}_n C_3 - 4 \cdot {}_n C_4 + \cdots + (-1)^{n-1} n \cdot {}_n C_n = 0 \quad (5)$$

$$(6) \quad {}_n C_0 + \frac{1}{2} \cdot {}_n C_1 + \frac{1}{3} \cdot {}_n C_2 + \frac{1}{4} \cdot {}_n C_3 + \cdots + \frac{1}{n+1} \cdot {}_n C_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad (6)$$

$$(7) \quad {}_n C_0 - \frac{1}{2} \cdot {}_n C_1 + \frac{1}{3} \cdot {}_n C_2 - \frac{1}{4} \cdot {}_n C_3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot {}_n C_n = \frac{1}{n+1} \quad (7)$$

$$(8) \quad \frac{1}{2} \cdot {}_n C_1 - \frac{1}{3} \cdot {}_n C_2 + \frac{1}{4} \cdot {}_n C_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1} \cdot {}_n C_n = \frac{n}{n+1} \quad (8)$$

$$(9) \quad ({}_n C_0)^2 + ({}_n C_1)^2 + ({}_n C_2)^2 + \cdots + ({}_n C_n)^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} \quad (9)$$

(解答) まず $(1+x)^n$ の展開式を書いておこう。

$$(1+x)^n = A, \quad A := {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + {}_n C_3 x^3 + \cdots + {}_n C_r x^r + \cdots + {}_n C_n x^n \quad (10)$$

- (1) $(1+x)^n$ の展開式で $x=1$ とおけば、証明すべき式 (1) が得られる。
 (2) $(1+x)^n$ の展開式で $x=-1$ とおけば、証明すべき式 (2) が得られる。
 (3) (1)+(2) をつくり、2 でわれば、

$${}_nC_0 + {}nC_2 + {}nC_4 + \cdots + {}nC_n = 2^{n-1}$$

が得られ、(1)-(2) を 2 でわれば、

$${}_nC_1 + {}nC_3 + {}nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$$

が得られる。この 2 つの式を合わせたのが、(3) である。

- (4) $(1+x)^n$ を x で微分すれば、

$$n(1+x)^{n-1} = {}nC_1 + 2 \cdot {}nC_2 x + 3 \cdot {}nC_3 x^2 + \cdots + r \cdot {}nC_r x^{r-1} + \cdots + n \cdot {}nC_n x^{n-1} \quad (11)$$

となる。(11) で $x=1$ とおけば、(4) が得られる。

- (5) (11) で $x=-1$ とおけば、(5) が得られる。

- (6) (4) では $(1+x)^n$ を x で微分したが、今度は $(1+x)^n$ を x で積分して、下限が 0 で上限が 1 の定積分を考えればよい^{*16}。

すなわち、

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{r=0}^n {}nC_r \int_0^1 x^r dx$$

これから

$$\sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} {}nC_r = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

が求まる。

- (7) (6) では $(1+x)^n$ を x で積分して、その積分の下限が -1 で上限が 0 の定積分を考えればよい。

すなわち、

$$\int_{-1}^0 (1+x)^n dx = \sum_{r=0}^n {}nC_r \int_{-1}^0 x^r dx$$

これから

$$\sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r+1} {}nC_r = \frac{1}{n+1}$$

が求まる。

- (8) これは (7) で左辺の第 1 項を右辺に移項すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r}{r+1} {}nC_r &= \frac{1}{n+1} - 1 \\ &= -\frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

となる。両辺に -1 をかけると

$$\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r+1} {}nC_r = \frac{n}{n+1}$$

が求まる。

^{*16} (6) - (8) は [11] による。(7) は [11] には載っていないが、付随して著者が考えたものである。

(9) これはちょっと難しい．まず， $(1+x)^n$ の展開式 (10) を再度ここに書いておこう．

$$(1+x)^n = A, \quad A := {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n \quad (10)$$

つぎに， $(1+x)^n$ の展開式 (10) で各項の係数を関係式 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を用いて書き換えた

$$(1+x)^n = B, \quad B := {}_nC_n + {}_nC_{n-1}x + {}_nC_{n-2}x^2 + {}_nC_{n-3}x^3 + \cdots + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_0x^n \quad (12)$$

を考えて，(10) と (12) との積をつくる．この積で注目するのは x^n の係数である．しかし，他の項の係数も参考のために，いくつか書いておく．

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n} \\ a_0 &= {}_nC_0 \cdot {}_nC_n = ({}_nC_0)^2 \\ a_1 &= {}_nC_0 \cdot {}_nC_{n-1} + {}_nC_1 \cdot {}_nC_n = 2{}_nC_0 \cdot {}_nC_1 \\ a_2 &= {}_nC_0 \cdot {}_nC_{n-2} + {}_nC_1 \cdot {}_nC_{n-1} + {}_nC_2 \cdot {}_nC_n = 2{}_nC_0 \cdot {}_nC_2 + ({}_nC_1)^2 \\ &\vdots \\ a_n &= ({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + ({}_nC_{n-1})^2 + ({}_nC_n)^2 \\ &\vdots \\ a_{2n-1} &= {}_nC_{n-1} \cdot {}_nC_0 + {}_nC_n \cdot {}_nC_1 = 2{}_nC_0 \cdot {}_nC_1 \\ a_{2n} &= {}_nC_n \cdot {}_nC_0 = ({}_nC_0)^2 \end{aligned}$$

上の係数で x^n の係数 a_n は $(1+x)^{2n}$ は和の記号 $\sum$ を用いて表すと

$$(1+x)^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} {}_{2n}C_r x^r$$

であるから， $r=n$ とおいて， ${}_{2n}C_n$ を求めると

$${}_{2n}C_n = \frac{2n(2n-1) \cdots (n+1)}{n!} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

であるから

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + ({}_nC_{n-1})^2 + ({}_nC_n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

これが (9) である．

(別解 1) (9) の別解 1 と 2 を以下ににあたえておく^{*17}．

まず

$$(1+x^{-1})^n = [(1+x)x^{-1}]^n = (1+x)^n x^{-n}$$

を確認しておく．

さらに，

$$(1+x)^n (1+x^{-1})^n = (1+x)^{2n} x^{-n}$$

であることに着目して，それぞれの因数を二項定理をつかって展開する．

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots + {}_nC_n x^n \\ (1+x^{-1})^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x^{-1} + {}_nC_2x^{-2} + \cdots + {}_nC_r x^{-r} + \cdots + {}_nC_n x^{-n} \\ (1+x)^{2n} &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1x + {}_{2n}C_2x^2 + \cdots + {}_{2n}C_r x^r + \cdots + {}_{2n}C_n x^n + \cdots + {}_{2n}C_{2n} x^{2n} \end{aligned}$$

^{*17} この別解 1 とつぎの別解 2 は [14] によるものである．

であるから、 $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ の展開の定数項は

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_r)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2$$

となる。また $x^{-n}(1+x)^{2n}$ の展開は

$$x^{-n}(1+x)^{2n} = {}_{2n}C_0x^{-n} + {}_{2n}C_1x^{-n+1} + {}_{2n}C_2x^{-n+2} + \cdots + {}_{2n}C_rx^{-n+r} + \cdots + {}_{2n}C_n + \cdots + {}_{2n}C_{2n}x^n$$

である。

したがって、 $(1+x)^n(1+x^{-1})^n = x^{-n}(1+x)^{2n}$ の両辺の展開の定数項は

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_r)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2 = {}_{2n}C_n$$

である。これが (9) である。

(別解 2) 別解 1 での解

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_r)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2 = {}_{2n}C_n$$

は ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ の関係を用いると

$$({}_nC_0)({}_nC_n) + ({}_nC_1)({}_nC_{n-1}) + ({}_nC_2)({}_nC_{n-2}) + \cdots + ({}_nC_r)({}_nC_{n-r}) + \cdots + ({}_nC_n)({}_nC_0) = {}_{2n}C_n$$

と書き換えることができる。この式を組み合わせ論法で証明しよう。

$2n$ 個のものから n 個を選ぶために、まず $2n$ 個のものを n 個ずつ 2 つの山に分ける (分け方はどうでもよい)。 n 個のものを選ぶには、最初の山から k 個選ぶ、その選び方は ${}_nC_k$ 通りあり、第 2 の山から $n-k$ 個選ぶ、選び方が ${}_nC_{n-k}$ 通りある。したがって、 n 個を選ぶ、選び方は

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k}$$

であり、これはまた ${}_{2n}C_n$ にも等しいから、証明しようとした式が証明される。

6 おわりに

このように書いてくるとどこで終わりにすべきかわからなくなる。スターリングの公式の導出とか、 $n!$ の実数への一般化であるガンマ関数のことも書くべきだったかなとも思いはじめるが、それらに触れなくともけっこう長いレポートになってしまった。ここれで筆をおくべきであろう。

7 付録

7.1 付録 1 $n!$ のスターリングの公式による近似値

$n!$ のスターリングの公式による近似値がどの程度よいのかはとても興味深い。これについては詳しい文献は [13] であるが、[14] には簡潔に述べてある。

リウ [14] によれば、近似式による絶対誤差は n の増大とともに増大するが、相対誤差は単調に減少する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n! - \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right] \rightarrow \infty$$

であるが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \rightarrow 1$$

である.

具体的に見てみると, $5! = 120$ に対し, 近似値は 118.019 であり, 近似値の相対誤差は 2 パーセントである. また $10! = 3,628,800$ であるのに対し, 近似値は 3,598,695.6187 となり, 相対誤差は 0.8 パーセントである. さらに, $12! = 479,001,600$ に対し, 近似値は 475,687,486.473 となり, 相対誤差は 0.7 パーセントとなる. さらに, $100! = 0.9332621544 \times 10^{158}$ に対して, 近似値の相対誤差は 0.08 パーセントであるという.

7.2 付録2 パスカルの三角形

パスカルの三角形について調べておこう. すなわち, $(a+b)^n, n=1, 2, 3, 4$ の場合を考えてみよう.

$$a+b$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + (1+1)ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + (3+1)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (1+3)ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

一々こういう計算をするのはばかられるから, これくらいにしておくが, これらの計算で計算を省略した部分までを補って, $(a+b)^n$ の $n=1 \sim 7$ までの $a^p b^q$ の係数を書き出して表にすると

					1								
					1		1						
				1		2		1					
			1		3		3		1				
		1		4		6		4		1			
	1		5		10		10		5		1		
	1	6		15		20		15		6		1	
1		7	21		35		35		21		7		1

表 1

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
& & & & & & & {}_0C_0 \\
& & & & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 \\
& & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 \\
& & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 \\
& {}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 \\
{}_5C_0 & & {}_5C_1 & & {}_5C_2 & & {}_5C_3 & & {}_5C_4 & & {}_5C_5 \\
& {}_6C_0 & & {}_6C_1 & & {}_6C_2 & & {}_6C_3 & & {}_6C_4 & & {}_6C_5 & & {}_6C_6 \\
{}_7C_0 & & {}_7C_1 & & {}_7C_2 & & {}_7C_3 & & {}_7C_4 & & {}_7C_5 & & {}_7C_6 & & {}_7C_7
\end{array}$$

この表 2 からたとえば, ${}_{7}C_2 = {}_6C_1 + {}_6C_2$ であることがわかる. ${}_{7}C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$ であり, ${}_6C_1 = 6$, ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$ であるから, 確かに $6 + 15 = 21$ となり, ${}_{7}C_2 = {}_6C_1 + {}_6C_2$ が成り立っている.

7.3 付録 3 多項定理

$$(a + b + c)^n = \overbrace{(a + b + c)(a + b + c) \cdots (a + b + c)}^n$$
$$a^p b^q c^r, (\text{ただし } p + q + r = n)$$

n 個のカッコの中から a を p 個取り出し、残りの $n - p$ 個のカッコの中から、 b を q 個取り出す。残りの $r = n - p - q$ からは c がとられる。これは a と b とが選ばれると自然と決まってしまう。

$$\begin{aligned} {}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} \\ &= \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!} \\ &= \frac{n!}{p!q!r!}, \quad (p+q+r=n) \end{aligned}$$
$$(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r, \quad (p+q+r=n)$$

34

7.4 付録4 復習と研究の問題

(A)*18

1. 10 を 5 個の自然数の和に分ける方法は何通りあるか. また 10 を 5 個以内の自然数に分ける方法は何通りあるか.

(答) 7 通り, 29 通り

2. 輪投げをする場合, 赤, 青, 緑, 黄, 白の 5 個の輪をこの順序に投げるとき, 輪が棒にささる, ささり方は何通りあるか. また, いろいろな順序で投げたとすればどうか.

(答) 31 通り, $5! \times 31 = 325$ 通り

3. 15 人の旅行団が A, B, C 三か所に 分かれて一泊することになった. A には 8 人, B には 3 人, C には 4 人泊まることとすれば, 分宿の組分けは何通りあるか.

(答) ${}_{15}C_8 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = \frac{15!}{8! \cdot 3! \cdot 4!}$ 通り

(B)

1. 正方形の 4 畳半の部屋では畳のしき方は何通りあるか. ただし, 向きがちがうだけで合同なものは一通りと数える.

(答) 6 通り

2. 立方体の六面を 4 色で, ぬり分ける方法は何通りあるか. ただし, この場合にぬり分けるというのは, 隣りあう 2 面をちがった色でぬることを意味する. また 5 色でぬり分ける場合はどうか.

(答) 6 通り, 15 通り

3. 候補者が 3 人, 選挙人が 15 人ある記名投票で, 1 人 1 票を投票するとき, その結果に何通りの場合ができるか. また, 無記名投票とすれば, 票の分かれ方は何通りとなるか.

(答) 3^{15} 通り, 136 通り

4. 6 人の家族が円卓のまわりに並ぶ. 父と母とが向かい合うような並び方は何通りあるか.

(答) 父と母が向かい合って座り, その間の向かい合って 2 つと 2 つの座席がある. これらの家族 4 人の座席の順列は ${}_4P_4 = 4! = 24$ 通りである.

5. 図 6 は, 東西, 南北, 等間隔の道路をもつ町を表している. 町の西南端 A から東北端 C へ, まわり道をしないで行くとすれば, 経路は全部でいくつあるか.

(答) 東向きに 3 つ, 北向きに 4 つ行けばよい. それで東の文字 E を 3 つ, 北の文字 N を 4 つ並べる, 並べ方をもとめればよい. たとえば,

ENNENEN

みたいな同種順列であるから, 経路は

$$\frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ 通り}$$

*18 この (A) と (B) は [15] の問題をほぼそのまま引用したものである. この箇所には確率と統計の問題もあったが, ここでは省いている. 確率と統計について書く機会があれば, 引用したいと思うが, 多分その機会はなさそうである.

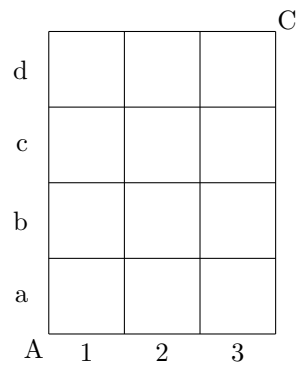


図 6 等間隔の道路をもつ町

である。

謝辞

編集委員の世戸憲治さんからは初稿を読んで 26 もの修正箇所のご指摘をいただきました。ここにその労に対して厚く御礼を申し上げます。世戸さん、ありがとうございました。

(2022.3.20)

参考文献

- [1] 田島一郎,『解析 II』改訂版(好学社, 1955) 263-278
- [2] 遠山啓編,『現代数学指導法事典』(明治図書, 1971)
- [3] 銀林浩監修,『わかる数学指導法事典』(明治図書, 1985)
- [4] 藤森良夫,『順列組合せより確率まで』(考え方研究社, 1938) 3-76
- [5] 藤森良夫,『解析の基礎』続編(考え方研究社, 1954) 783-795
- [6] 田島一郎,『よくわかる数学 I』(旺文社, 1963) 342-355
- [7] 林桂一(森口繁一増補),『高等関数表』第 2 版(岩波書店, 1967) 232
- [8] 高橋康,『統計力学入門』(講談社サイエンティク, 1984) 89-93
- [9] 高木貞治,『解析概論』改訂第三版(岩波書店, 1983) 258-259
- [10] 矢野忠, 順列・組合せ, あれこれ, 研究と実践(愛数協) No. 95 (2007.9) 1-9
- [11] 安藤洋美,『大道を行く高校数学』統計数学編(現代数学社, 2001) 145-146
- [12] C. L. リウ(伊理正夫, 伊理由美訳),『組合せ数学入門 I』(共立全書, 1972) 30
- [13] 森口繁一,『数値計算術』(共立出版, 1987) 160-163
- [14] C. L. リウ(伊理正夫, 伊理由美訳),『組合せ数学入門 I』(共立全書, 1972) 16
- [15] 田島一郎,『解析 II』改訂版(好学社, 1955) 307-308

編集後記

皆さん、こんにちは。私が住むここ札幌は、この冬何十年ぶりかの大雪に見舞われ、積雪量は、平年の2倍、雪が少なかった去年の3倍を記録しました。道路脇に積み上げた雪の高さは私の背をはるかに越える2mから高いところは3m位にもなっています。おかげで2月中はほとんど連日、老体に鞭打ちながら、雪掻きに追われていました。私は、普段は犬の散歩くらいで体を動かすことは少ないので、雪掻きは良い運動になり、体にとっても良いことと思いつつ励んでいます。この大雪がすべて消えるのは5月半ば過ぎまでかかりそうです。

これほどの雪になると、恐ろしいことに、屋根に積もった雪の重さで倒壊する建物が何軒もありました。これはまさしく座屈現象で、建物の柱の弾性が雪の重さによる圧縮に耐えられなくなり曲がることでその位置エネルギーを小さくしようとするからです。標準的な家の大きさを 70m^2 として、その屋根に厚さ1mの雪が積もったとします。もしこれが水そのものなら、その重さは70トンですが、雪は水の重さの30%から50%なので、仮に50%とすると、雪の重さは35トンにもなります。これは8トントラックで4台分以上の重さが屋根に載っていることになり、潰れる家があるのも納得できます。また、勝手なことを長々と書いてしまいました。

話し替わって、今回の『数学・物理通信』は、私の短い《オモチャ遊び》と、編集長の矢野さんが書かれた長篇の《数学エッセイ》の2つだけになってしまいました。この矢野さんのところを読んでみて、内容的にはそれほど難しくはないのですが、よくこれだけ長いものを書くものと感心してしまいました。矢野さんは本当に書くことが好きなのですね。これが、『数学・物理通信』がこれほどまでに長く続いてこられた要因なのでしょう。

(世戸憲治)