

数学・物理通信

12 卷 4 号 2022 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 6 月 17 日

目次 (Contents)

1. 2次元的に動くばね振子 (1)	世戸 憲治	2
2. 電磁気法則の共変性	秋葉 敏男	8
3. 三角関数の還元公式 3	矢野 忠	22
4. 編集後記	世戸憲治	30
1. Spring Pendulum with Two Degrees of Freedom (1)	Kenji SETO	2
2. Covariant Property of Electromagnetic Law	Toshio AKIBA	8
3. Reduction Formulae for Trigonometric Functions 3	Tadashi YANO	22
4. Editorial Comments	Kenji SETO	30

2 次元的に動くばね振子 (1)

世戸 憲治 *

Spring Pendulum with Two Degrees of Freedom (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回のばね振子の論文では錘は上下方向にのみ運動する 1 次元的な振動を扱った。その代わり、ばねの質量を考慮し、ばね自身に起こる波動現象も含めて解析した。今回は、これを拡張し錘は上下の振動の他に水平方向にも動くものとし、2 次元的な振動問題を扱う。ただし、ばねの質量を考慮するとあまりに面倒なことになりすぎるので、今回はばねの質量は考慮しないことにする。

2 方程式の導入とその解

図 1 に示すように、自然長 ℓ , ばね定数 k のばねがあり、このばねの一端は固定し、他端に質量 m の錘をつける。このばねの固定端を原点とし、鉛直下向きに x 軸、水平右向きに y 軸をとり、このばね振子が振動しているときの錘の位置座標を (x, y) とする。また、図に示すように、振動しているときのばねの長さを r , ばねの傾き角を θ とする。もちろんこれらの変数の間には

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2.1)$$

の関係がある。また、振動しているときのばねが錘に作用する張力を T とすると x, y 方向の錘の運動方程式は、重力加速度を g として、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - T \cos \theta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -T \sin \theta \quad (2.2)$$

となる。ここで、張力 T はばねの伸び $r - \ell$ から決まる

$$T = k(r - \ell) \quad (2.3)$$

で与えられること、および座標 (x, y) を極座標 (r, θ) にして運動方程式を書き直すと

$$m \frac{d^2(r \cos \theta)}{dt^2} = mg - k(r - \ell) \cos \theta, \quad m \frac{d^2(r \sin \theta)}{dt^2} = -k(r - \ell) \sin \theta \quad (2.4)$$

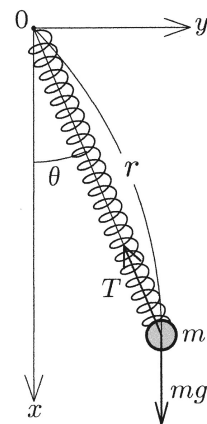


図 1 ばね振子

* 北海学園大学名誉教授

となり、これは2変数 r, θ に関する連立微分方程式となる。しかし、この方程式を解析的に扱うのはあまりに難しすぎる。ここではばねの傾き角 θ は小さいものとして線形近似

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1 \quad (2.5)$$

を用いることにする。このとき方程式 (2.4) は

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg - k(r - \ell), \quad m \frac{d^2(r\theta)}{dt^2} = -k(r - \ell)\theta \quad (2.6)$$

となり、この第1式は r だけの方程式となる。この第1式の非同次方程式には静的な解 r として、

$$L \equiv \ell + \frac{mg}{k} \quad (2.7)$$

が存在し、この L は、ばねに重さ mg の錘を付け静止させたときのばね全体の長さを意味する。これを用いると、この非同次方程式は

$$m \frac{d^2(r - L)}{dt^2} = -k(r - L) \quad (2.8)$$

と $r - L$ に関する同次形に変形される。この方程式は三角関数を用いて簡単に解かれ、解は、 A, α を、それぞれ、長さ、無次元の任意定数として、

$$r = A \sin(\omega t - \alpha) + L, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

と求められる。ここに角振動数 ω をこの第2式で定義する。これを (2.6) の第2式に代入すると、

$$[A \sin(\omega t - \alpha) + L] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2A\omega \cos(\omega t - \alpha) \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \quad (2.10)$$

となる。これは θ に関する線形2階の微分方程式であるが三角関数を2カ所に含むもので、Mathieu 方程式をさらに難しくしたものである。

初期条件 1

ここで、初期条件として、錘が垂れ下がった状態で錘に y 方向の初速度 v_0 を与えるものとして、

$$t = 0 \text{ のとき, } r = L, \quad \dot{r} = 0, \quad \theta = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{L} \quad (2.11)$$

という条件を付けた場合を考える。このときは、 r に関する2つの条件を (2.9) 式に適用すると、

$$A \sin \alpha = 0, \quad A \cos \alpha = 0 \quad (2.12)$$

となってこの2式を満たすには $A = 0$ しかあり得ず、方程式 (2.10) は

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g\theta = 0 \quad (2.13)$$

となって、これは通常の糸で吊られた錘の振子と同じになってしまう。つまり、ばねは伸び縮みすることなく左右に振動するだけである。これではばねにした意味がない。

初期条件 2

こんどは，初期条件を，ばねが自然長 ℓ にある状態で，錘に y 方向の初速度 v_0 を与えるものとし，

$$t = 0 \text{ のとき, } r = \ell, \quad \dot{r} = 0, \quad \theta = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{\ell} \quad (2.14)$$

とおいてみる．このときは (2.7) および (2.9) 式から

$$A \sin \alpha = \frac{mg}{k}, \quad A \cos \alpha = 0 \quad (2.15)$$

となるので，これから $\alpha = \pi/2$, $A = mg/k$ とすると，(2.9) 式の r は

$$r = \frac{mg}{k} [1 + \lambda - \cos(\omega t)], \quad \lambda = \frac{k\ell}{mg} \quad (2.16)$$

となる．ここに，無次元数 λ をこの第 2 式で定義する．またこのとき，方程式 (2.10) は

$$[1 + \lambda - \cos(\omega t)] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\omega \sin(\omega t) \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2.17)$$

となる．この式を解析的に扱うために，独立変数を t から p に

$$p = \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad (2.18)$$

と変換する．この変換で，時間 t の 1 階微分，2 階微分は，

$$\frac{d}{dt} = \frac{dp}{dt} \frac{d}{dp} = \frac{\omega}{2} \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \frac{d}{dp}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2 p}{dt^2} \frac{d}{dp} + \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{dp^2} = \frac{\omega^2}{4} \left[(1-p^2) \frac{d^2}{dp^2} - p \frac{d}{dp}\right] \quad (2.19)$$

に変わるので，(2.17) 式は

$$(\lambda + 2p^2)(1-p^2) \frac{d^2 \theta}{dp^2} + (8 - \lambda - 10p^2) p \frac{d\theta}{dp} + 4\theta = 0 \quad (2.20)$$

となり，微分の前に付く係数はすべて p の多項式になる．この方程式で $\theta = p^\gamma$ とおいてみると，その決定方程式は $\gamma(\gamma-1) = 0$ となるので，この解は定数項から始まる級数か， p の 1 次の項から始まる級数で解くことができる．そこで， θ を p の級数

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n \quad (2.21)$$

とおいてみる．これを方程式 (2.20) に代入し， p の幂を揃えて方程式が成立するように係数 C_n の漸化式を求めると， $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し，

$$(n+1)(n+2)\lambda C_{n+2} + [(2-\lambda)n^2 + 6n + 4]C_n - 2(n^2 - 4)C_{n-2} = 0 \quad (2.22)$$

となる．ただし，ここで，添え字が負のときの C の値はゼロとする．これを分かりやすくするために， $n = 0$ から 4 までは具体的に書き下すと，

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \lambda C_2 + 4C_0 &= 0 \\ 2 \cdot 3 \cdot \lambda C_3 + [(2-\lambda)1^2 + 6 \cdot 1 + 4]C_1 &= 0 \\ 3 \cdot 4 \cdot \lambda C_4 + [(2-\lambda)2^2 + 6 \cdot 2 + 4]C_2 &= 0 \\ 4 \cdot 5 \cdot \lambda C_5 + [(2-\lambda)3^2 + 6 \cdot 3 + 4]C_3 - 2(3^2 - 4)C_1 &= 0 \\ 5 \cdot 6 \cdot \lambda C_6 + [(2-\lambda)4^2 + 6 \cdot 4 + 4]C_4 - 2(4^2 - 4)C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる．これから分かるように， C_0 を適当に決めると C_2 が決まり，さらに，3 番目の式から C_4 が決まり，5 番目の式から C_6 が決まる．同じように，2 番目の式で C_1 を適当に決めると C_3 が決まり，4 番目の式で C_5 が決まる．以下同様である．ここでは，初期値として， $C_0 = 1, C_1 = 0$ として (2.22) 式から係数 C_n を決めたときの解 θ を $F_0(p)$ と記し，同様に， $C_0 = 0, C_1 = 1$ として係数 C_n を決めたときの解を $F_1(p)$ と記すことにする．当然のことながら $F_0(p)$ は p の偶関数， $F_1(p)$ は p の奇関数である．この p に対する偶奇性は，(2.18) 式から，時間 t に対する偶奇性と一致する．以下，この (2.18) 式の関係を用いて関数 $F_0(p), F_1(p)$ を関数 $F_0(t), F_1(t)$ と記すことにする．しかし，これら関数を解析的にコンパクトな形で求めることは不可能に近い．ここでは，これら関数の初めの 2 項だけを求めてみると

$$F_0(t) = 1 - \frac{2}{\lambda} \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \cdots, \quad F_1(t) = \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \frac{\lambda - 12}{6\lambda} \sin^3\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \cdots \quad (2.24)$$

となる．

以上から方程式 (2.20) の一般解 $\theta(t)$ は， C, D を任意定数として，

$$\theta(t) = C F_0(t) + D F_1(t) \quad (2.25)$$

と書かれる．これに (2.14) 式の初期条件 $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = v_0/\ell$ を適用すると，

$$C = 0, \quad D = \frac{2v_0}{\ell\omega} \quad (2.26)$$

となるのでこのときの解は

$$\theta(t) = \frac{2v_0}{\ell\omega} F_1(t) \quad (2.27)$$

と奇関数の解になる．なお，この解 $\theta(t)$ の周期 P は，関数 $F_1(t)$ の時間依存性が $\sin(\omega t/2)$ のみから構成されることを考慮すると，

$$P = \frac{4\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.28)$$

となる．これは (2.16) 式の r の振動周期 $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ の 2 倍になっている．

3 数値解析

ここでは，前節の「初期条件 2」に基づいた数値解析を実行してみる．錘の質量 m ，ばねの自然長 ℓ とばね定数 k ，重力加速度 g ，および，錘の初速度 v_0 の各パラメータについて，適当ではあるが，

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad k = 30 \text{ N/m or } 60 \text{ N/m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = 1 \text{ m/s}, \quad (3.1)$$

と設定する．ばね定数 k だけは 30 N/m と 60 N/m の 2 通りを試みることにする．ここでは数値計算をするに当たって，初めに係数 C_n の漸化式 (2.22) を用いて，奇数次の $n = 61$ までの C_n を求めてみた．ここで問題になるのは，はたしてこの係数 C_n は n 無限大でゼロに収束するかどうかである．これはこの漸化式から分かるように $\lambda = k\ell/(mg)$ の値が大きいほど，つまり k の値が大きいほど，係数 C_n は， n が大きくなるにつれ，ゼロに近づくと考えられる．実際に数値的に試した結果では， k の値が 20 N/m より大きいときは C_n はゼロに近づいていくが， k がそれより小さいところでは発散してしまい使い物にならなくなる．これは，ばねが柔らかす

ぎると θ 方向の変位が大きくなってしまい、ここで採用した線形近似が成立しなくなるためと考えられる。結果として、この線形近似が成立するためには、ばねにはある程度の硬さが必要ということになる。

初めに、ばね定数 $k = 30 \text{ N/m}$ の場合について、(2.16) 式の r と (2.21) 式の θ に ℓ を掛けた $\ell\theta$ を時間 t の関数として数値的に求めたものを図 2 に示す。また、このときの錘が動いた軌跡を図 3 に示す。

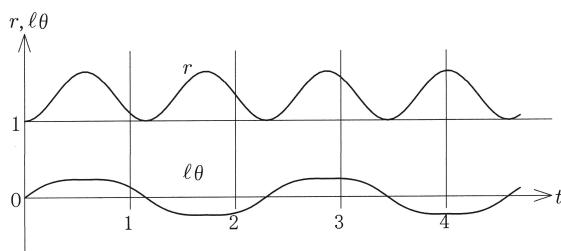


図 2 r と $\ell\theta$, $k = 30 \text{ N/m}$ の場合

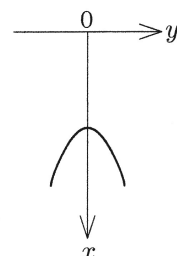


図 3 錘の軌跡

つぎに、ばね定数 $k = 60 \text{ N/m}$ の場合を図 4 と図 5 に示す。

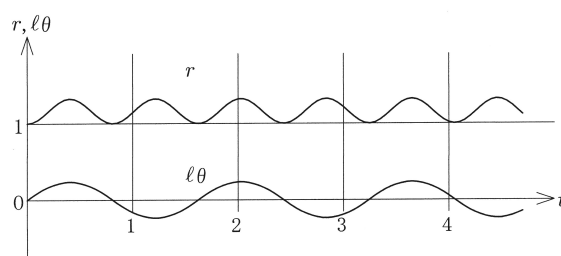


図 4 r と $\ell\theta$, $k = 60 \text{ N/m}$ の場合

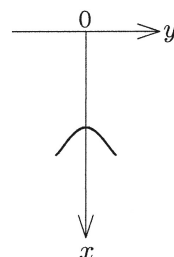


図 5 錘の軌跡

これら図 2, 図 4 のグラフから、(2.28) 式のところで述べたように、どちらの図の場合も、 θ の周期は r の周期の 2 倍になること、また、ばね定数 k の値が 2 倍になると r の振幅は半分になること、および、 r , θ ともに、その周期も小さくなり $1/\sqrt{2} = 0.7071 \dots$ 倍になることがグラフから分かる。また、図 3, 図 5 の錘が実際に動く軌跡からは、錘は 1 つの単純な道を往復するだけであることが分かる。当然のことながら、ばね定数が高い方、つまり、硬いばねの方が錘が動く範囲は狭くなる。

4 おわりに

2 次元的に動くばね振子の問題を初めて扱ってみた。予想では簡単にできだろうと思っていたが、そうはいかず、思った以上に難しいものであった。こんなことは誰かがすでにやっていたような気がするが、これまでに本などでは見たことがない。

最後に挙げた図 3, 図 5 の錘の軌跡であるが、初めはリサージュ曲線のようなものを予想していたがそうはならず放物線に似た単純な曲線上を往復するだけのものになってしまった。ここでは、錘に初速度を与える位置をばねの自然長の $r = \ell$ としたがこれを任意の位置にしたり、また、初速度を与える方向も y 方向のみならず、適当な角度を付けて斜め方向に打ち出したりすると、その軌跡はもっと複雑なものになるものと考えられる。また、これをさらに拡張して、3 次元的に動くばね振子を考えたとき、もしそれが解析的に扱えるのであれば、面白いかもしれない。もう少し、頑張って挑戦する価値はあるであろう。

ここでは、方程式 (2.4) をそのままの形で解くことを初めから諦め、角度 θ は小さいものとして (2.5) 式の近似を用いた解析をしてしまった。ここで、この方程式をそのままの形で解こうとするとどうなるかを書いておく。この (2.4) 式で時間の 2 度微分のところをもう少し計算すると、

$$\begin{aligned} m \left[\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta \right] &= mg - k(r - \ell) \cos \theta \\ m \left[\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta \right] &= -k(r - \ell) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。これら 2 式の第 1 式に $\cos \theta$ を、第 2 式に $\sin \theta$ を、それぞれ掛けてから、両辺を加えると

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - k(r - \ell) \quad (4.2)$$

となり、また、第 1 式に $\sin \theta$ を、第 2 式に $\cos \theta$ を、それぞれ掛けてから、両辺の差を作ると、

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -mgr \sin \theta \quad (4.3)$$

となる。この (4.2) 式右辺の $mr\dot{\theta}^2$ は錘の θ 方向の運動で生じる遠心力、 $mg \cos \theta$ は錘に作用する重力の r 方向成分、最後の $-k(r - \ell)$ はばねが錘を引く力である。また、(4.3) 式左辺は角運動量の時間微分で、右辺は重力による力のモーメントである。いずれにしてもこれら 2 式は r と θ が複雑に絡んだ連立微分方程式でこれを解析的に解くことは難しいと思われる。

太陽の周りを回転する惑星の運動のような中心力の場合は (4.3) 式右辺がゼロになり、角運動量が保存されるので、解析的に扱い易くなる。この場合で言うと重力加速度 g をゼロとした

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - \ell), \quad m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (4.4)$$

の場合である。これはばねに錘を付けて水平面内で振り回したときの運動方程式である。しかしこれも、ばねの自然長 ℓ がゼロの場合は三角関数の範囲内で簡単に解けそうだが、そうでない有限の自然長の場合は、非常に難しい問題になってしまう。そのうち、機会を見て議論することにしよう。

電磁気法則の共変性

秋葉 敏男

Covariant Property of Electromagnetic Law

Toshio AKIBA¹

1 はじめに

「物理法則を表す数式は座標変換しても形式は不変である (共変性がある)」ことを要請するのが相対性原理です。この原理は、「自然空間の一樣・等方性から、任意の位置での観測結果は同等なものである」との考え方に由来します。この考え方は、座標変換における物理法則の一種の対称性を要請しているともとれます。

この共変性は、座標変換と表裏一体のもので、慣性系²から慣性系への座標変換の場合には、ガリレー変換とローレンツ変換が知られていて、それぞれに対応する共変な法則としてニュートン力学と相対論的力学が構成されています。そして、加速度系を含むより一般的な座標変換に対して形式不変な法則として、重力場方程式が得られたわけです。

一方、電磁気法則も物理法則の一つですから、座標変換の下で相対性原理を満たすべきです。

電磁気法則は電磁場についてのマクスウェル方程式です。座標変換すれば電磁場の表示式は変化しますから、この方程式が相対性原理と整合するためには変換前後の電磁場は何らかの条件 (共変条件) で結ばれているはずです。

本論のテーマは、特殊ローレンツ変換の下での「電磁気法則の共変条件」を明らかにし、その共変条件が経験法則といかに関わっているかを示すことです。

ところで、この共変条件の説明としては、以下のような論法が見受けられます。

(1) 3次元ベクトル場表示のマクスウェル方程式について、共変性を要請して「3次元ベクトル場に対する共変条件式」を求める [1][2]

このとき、3次元ベクトル場を16成分の量 $\{f_{\mu\nu}\}$ を用いて表示すると、3次元ベクトル場の共変条件は $\{f_{\mu\nu}\}$ のテンソル性にほかなりません。³

(2) 4元ポテンシャル (A_μ) にローレンツゲージ条件を課す場合、このゲージ条件がすべての慣性系で成り立てば (A_μ) は4元ベクトル性を持ちます。このとき、(A_μ) の4元回転である $\{f_{\mu\nu}\}$ のもつテンソル性が共変性を意味します。[3][4][6][7]

(3) 16成分量 $\{f_{\mu\nu}\}$ を天下一の導入して、マクスウェル方程式を $\{f_{\mu\nu}\}$ で表示した上で、 $\{f_{\mu\nu}\}$ に対する共変性を説明する。[5][8]

ここでは、方法 (1) の論法を解析してみますが、本題に入る前に、特殊相対論の必要事項の概略を復習しておきます。そこでは「特殊相対論」や「特殊ローレンツ変換」を指す場合は、単に「相対論」や「ローレンツ変換」のように記します。

2 相対論の概要

相対運動する慣性系を次のように設定します。

¹ta106365@gmail.com

²等速直線運動する物体がそのまま同じ等速度運動を続けるような物理系

³付録2 参照

慣性系の空間座標軸は直交軸とします。そして、ある慣性系 S の座標変数を (x, y, z, t) とし、慣性系 S' の座標変数を (x', y', z', t') とするとき、対応する空間座標軸は平行で、 S' 系は S 系に対して x' 軸の正の向きに速さ V で等速直線運動しているとします。

このとき、両系の座標変数は良く知られたローレンツ変換

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (2.1)$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (2.2)$$

で結びつけられています。ここに、 c は真空内の光の速さであり、 $\gamma := 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$, $\beta := V/c$ としています。

つぎに、 S 系で速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で運動する物体の S' 系における速度を $\mathbf{v}'$ とすれば、 $\xi := 1 - v_x V/c^2$ とし、つぎの関係式が成り立ちます。($v := |\mathbf{v}|$)

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\xi\gamma} (\gamma(v_x - V), v_y, v_z) \quad (2.3)$$

$$(\xi\gamma)^2(c^2 - v'^2) = (c^2 - v^2) \quad (2.4)$$

(2.3) については、上記のローレンツ変換式を用いて以下のように示されます。

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx - Vdt}{dt - Vdx/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \\ &= \frac{v_x - V}{\xi} \\ \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{\gamma(dt - Vdx/c^2)} = \frac{v_y}{\xi\gamma} \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{\gamma(dt - Vdx/c^2)} = \frac{v_z}{\xi\gamma} \end{aligned}$$

そして、(2.4) については (2.3) を使って

$$\begin{aligned} c^2 - v'^2 &= c^2 - \frac{\gamma^2(v_x - V)^2 + v_y^2 + v_z^2}{(\xi\gamma)^2} \\ (\xi\gamma)^2(c^2 - v'^2) &= \gamma^2(c^2\xi^2 - (v_x - V)^2) - v_y^2 - v_z^2 \\ &= \gamma^2\left(c^2 - V^2 + v_x^2\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\right) - v_y^2 - v_z^2 \\ &= \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)c^2 - v^2 = c^2 - v^2 \end{aligned}$$

以上で、よく使われる関係式 (2.3), (2.4) が証明されました。

相対論では時間と空間の座標変数が一組となって変換されます。そこで、4 成分の座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$ で構成されるミンコフスキー空間を導入して、3 次元空間で定義された物理量を手掛かりに、種々の 4 成分量を定義しています。その中で、ローレンツ変換において、4 成分座標と同形の変換をするものを 4 元反変ベクトルと呼びます。すなわち、4 成分 $\{X^0, X^1, X^2, X^3\}$ がローレンツ変換により次のように変換される場合です。

$$X^{0'} = \gamma(X^0 - \beta X^1) \quad (1')$$

$$X^{2'} = X^2, \quad X^{3'} = X^3$$

$$X^{1'} = \gamma(X^1 - \beta X^0) \quad (2')$$

次節で扱う電荷密度 ρ および電流密度 $\mathbf{j}$ から構成される $(c\rho, \mathbf{j})$ は、その一例です。この反変ベクトルに対して、変換式 (1'), (2') の β を $-\beta$ で置き換えた形の変換をうける量 $\{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3\}$ を共変ベクトルとよびます。

$$Y'_0 = \gamma(Y_0 + \beta Y_1) \quad (1'')$$

$$Y'_2 = Y_2, \quad Y'_3 = Y_3$$

$$Y'_1 = \gamma(Y_1 + \beta Y_0) \quad (2'')$$

微分演算子 $\{\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu\}$ はその一例です。以下の議論では、反変ベクトルを単にベクトルと記しています。⁴

3 電磁気法則の共変条件

真空内のマクスウェル方程式は電束密度を $\mathbf{D}$ 、磁束密度を $\mathbf{B}$ として

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I 群方程式}) \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I 群方程式}) \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{II 群方程式}) \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (\text{II 群方程式}) \quad (3.4)$$

ここに、 ρ は電荷密度、 $\mathbf{j}$ は電流密度であり、電場を $\mathbf{E}$ 、磁場を $\mathbf{H}$ とすれば $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の関係にあります。 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれる定数で、真空内の光の速さ c とは $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$ で結ばれています。 $\mathbf{E}$ および $\mathbf{H}$ は力を表す量ですから、3次元ベクトル場です。そこで、以後 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ などを「3元ベクトル場」とよぶことにします。

ところで、電荷・電流が皆無な状態では、マクスウェル方程式 (3.3), (3.4) は符号を除いて (3.1), (3.2) と同形です。よって、まず方程式 (3.1), (3.2) の共変性を考察しますが、議論の便宜のためこれらの方程式を I 群方程式と名付け、電荷・電流を含む方程式 (3.3), (3.4) を II 群方程式とよびます。

3.1 I 群方程式 (3.1), (3.2) の共変性

以下の推論は文献 [1](8章) にならっています。まづ、(3.1) から $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ について

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

変換則 (1''), (2'') に注意して座標変換すると

$$\gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \quad (3.5)$$

つぎに、式 (3.2) の x 成分をみると

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

座標変換すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \gamma V \frac{\partial B_x}{\partial x'} \quad (3.6)$$

⁴ここでの4元ベクトルの定義は、特殊ローレンツ変換に限定したものです

(3.5), (3.6) から $\partial B_x / \partial t'$ を消去すると

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(B_y + \frac{V E_z}{c^2} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right) = 0 \quad (3.7)$$

共変性の要請により, 式 (3.7) は変換後の法則

$$\text{div} \mathbf{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \quad (3.8)$$

と一致すべきです. (3.7), (3.8) より

$$\frac{\partial(B'_x - B_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(B'_y - \gamma(B_y + V E_z / c^2))}{\partial y'} + \frac{\partial(B'_z - \gamma(B_z - V E_y / c^2))}{\partial z'} = 0 \quad (3.9)$$

(3.9) においては, 左辺の各項の被微分関数は任意の値をとれますから, 各項はすべて 0 でなければなりません. 従って, 第 1 項については $\partial(B'_x - B_x) / \partial x' = 0$ となり, $(B'_x - B_x) := f(y', z', t')$ のように x' を含まない関数で書けます. このような関数を $f[x']$ と表すことにします. 第 2,3 項についても同様ですから

$$B'_x = B_x + f[x'] \quad (3.10)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + V E_z / c^2) + g[y'] \quad (3.11)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - V E_y / c^2) + h[z'] \quad (3.12)$$

と書けます.

そこで再び式 (3.2) の x 成分に着目すると, (3.10) に注意して

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} &= -\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ &= \left(\gamma V \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \right) B'_x \\ &= -\gamma V \left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) - \gamma \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ i.e. \quad \frac{\partial}{\partial y'} (E_z + \gamma V B'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} (E_y - \gamma V B'_z) &= -\gamma \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \end{aligned}$$

と書けますから, これと変換後の対応する関係式

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

と比較して $\mathbf{B}$ の場合と同様の推論により u, v を任意関数として

$$\gamma E'_z = E_z + \gamma V B'_y + \gamma u[y']$$

$$\gamma E'_y = E_y - \gamma V B'_z + \gamma v[z']$$

(3.11), (3.12) を用いて変形整理すると

$$E'_y = \gamma(E_y - V B_z) - V h[z'] + v[z'] \quad (3.13)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + V B_y) + V g[y'] + u[y'] \quad (3.14)$$

が得られます. さらに, 式 (3.2) の y 成分の解析から

$$E'_x = E_x + w[z'] \quad (3.15)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + V B_y) + \phi[x'] \quad (3.16)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + V E_z / c^2) + \psi[t'] \quad (3.17)$$

(3.14),(3.16) から, 関数 ϕ は $\phi = Vg[x', y'] + u[x', y']$ とおくべきです. さらに, (3.11),(3.17) から関数 ψ は $\psi = g[y', t']$ と置き換えなければなりません. (これらを総合すると $g = g[x', y', t']$)

そして, 式 (3.2) の z 成分を解析すると

$$E'_y = \gamma(E_y - VB_z) + r[x'] \quad (3.18)$$

$$E'_x = E_x + \bar{w}[y'] \quad (3.19)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - VE_y/c^2) + s[t'] \quad (3.20)$$

(3.15),(3.19) から $\bar{w} = w[y', z']$ また, (3.13),(3.18) から $r = -Vh[x', z'] + v[x', z']$ さらに, (3.20),(3.12) より $s = h[z', t']$ という条件になります.(これらを総合して $h = h[x', z', t']$) 以上をまとめると

$$B'_x = B_x + f[x'] \quad (3.21)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + VE_z/c^2) + g[x', y', t'] \quad (3.22)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - VE_y/c^2) + h[x', z', t'] \quad (3.23)$$

$$E'_x = E_x + w[y', z'] \quad (3.24)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - VB_z) - Vh[x', z', t'] + v[x', z'] \quad (3.25)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + VB_y) + Vg[x', y', t'] + u[x', y'] \quad (3.26)$$

これらが I 群方程式 (3.1), (3.2) が共変的であるための必要十分な条件です.

ここに得られた条件を用いて, II 群方程式の共変性を確かめてみると

$$\begin{aligned} c\rho &= \gamma(c\rho' + \beta j'_x) + c\epsilon_0(-\partial_x w + \gamma\partial'_y v - \gamma\partial'_z u) \\ j_x &= \gamma(j'_x + \beta c\rho') + (-\partial'_y(h/\gamma + \beta\gamma v/c) + \partial'_z(-g/\gamma + \beta\gamma u/c) - \partial_0 w/c)/\mu_0 \\ j_y &= j'_y + (-\partial'_z f + \partial_x(h/\gamma + \beta\gamma v/c) - \gamma\partial_0 v/c)/\mu_0 \\ j_z &= j'_z + (\partial_y f + \partial_x(-g/\gamma + \beta\gamma u/c) + \gamma\partial_0 u/c)/\mu_0 \end{aligned}$$

のような, 電荷・電流密度を含む条件式が得られます. つまり, 任意関数は確定しません.

ここで, 電磁場を含む経験法則である「ローレンツ力」に注目します.

上記の共変条件式 (3.21)~(3.26) で任意関数をすべて 0 としたものを「条件 I」とすると, 付録 1 に示すように「4 元ローレンツ力の 4 元ベクトル性」と「条件 I」とは 同等な法則です.

この条件 I を使えば, 次節の計算が示すように II 群方程式から電荷・電流密度に対する共変条件式が得られて, それは 4 元電流密度の 4 元ベクトル性を示すものです.

3.2 II 群方程式 (3.3), (3.4) の共変性

方程式 (3.3) を変形すると $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ですから, 座標変換後の対応する量 $\text{div} \mathbf{E}'$ を計算してみます.⁵ 変換則 (1''), (2'') に注意して

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E}' &= \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \\ &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x + \frac{\partial}{\partial y} \gamma(E_y - VB_z) + \frac{\partial}{\partial z} \gamma(E_z + VB_y) \\ &= \gamma \text{div} \mathbf{E} + \frac{\gamma V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \gamma V (\text{rot} \mathbf{B})_x \end{aligned}$$

⁵($\text{div} \mathbf{E}$)' を $\text{div} \mathbf{E}'$ と記します

$$\begin{aligned}
&= \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\gamma V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \gamma \mu_0 V \left(j_x + \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \\
&= \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} - \gamma \mu_0 V j_x \quad (\because c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0) \\
&= \gamma (\rho/\epsilon_0 - \mu_0 V j_x)
\end{aligned}$$

共変性の要請により, 最後の表式は ρ'/ϵ_0 に等しくなければなりません. 従って

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{V}{c^2} j_x \right) \quad (3.27)$$

つぎに, マクスウェル方程式 (3.4) の x 成分については,

$$\begin{aligned}
\mu_0 (\operatorname{rot} \mathbf{H}')_x &= \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\
&= \gamma (\operatorname{rot} \mathbf{B})_x - \frac{\gamma V}{c^2} \left(\operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) \\
\therefore (\operatorname{rot} \mathbf{H}')_x &= \gamma (j_x + \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}) - \frac{\gamma V}{\mu_0 c^2} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) \\
&= \gamma (j_x - V \rho) + \gamma \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x \\
&= \gamma (j_x - V \rho) + \epsilon_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'}
\end{aligned}$$

共変性の要請により, 最後の表式は $j'_x + \epsilon_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'}$ に等しくなければなりません. 従って

$$j'_x = \gamma (j_x - V \rho) \quad (3.28)$$

そして, (3.4) の y 成分を計算すると

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \mathbf{B}')_y &= \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right) \\
&= (\operatorname{rot} \mathbf{B})_y + (1 - \gamma^2) \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{V \gamma^2}{c^2} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right) \\
&= (\operatorname{rot} \mathbf{B})_y + \frac{V \gamma^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} (E_y - V B_z) - \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial B'_z}{\partial t} \\
&= (\operatorname{rot} \mathbf{B})_y + \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial x} - \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial B'_z}{\partial t} \\
&= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 j_y + \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial x} - \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial B'_z}{\partial t} \\
&= \mu_0 j_y + \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_y - V \gamma B'_z) \\
&= \mu_0 j_y + \frac{V \gamma}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial x} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t} \\
&= \mu_0 j_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'}
\end{aligned} \quad (3.29)$$

共変性の要請により, 最後の表式は $\mu_0 j'_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'}$ に等しくなければなりません. 従って

$$j'_y = j_y \quad (3.30)$$

(3.4) の z 成分についても同様の計算で

$$(\operatorname{rot} \mathbf{B}')_z = \mu_0 j_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'}$$

を導くことができ、共変性の要請により

$$j'_z = j_z \quad (3.31)$$

共変条件をまとめると、条件 I として

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{VE_z}{c^2} \right), \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{VE_y}{c^2} \right) \quad (3.32)$$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \quad (3.33)$$

そして、条件 II として

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x) \quad (3.34)$$

$$j'_x = \gamma(j_x - \beta c\rho) \quad (3.35)$$

$$j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \quad (3.36)$$

4 成分量 $(c\rho, \mathbf{j})$ は 4 元電流密度と呼ばれます。条件 (3.34)～(3.36) は、4 元電流密度が 4 元ベクトルであるべきことを示しています。ここで、議論の便宜のため条件 (3.32)～(3.33) を条件 I と名付け、条件 (3.34)～(3.36) を条件 II としています。

ところが、この条件 II：「4 元電流密度の 4 元ベクトル性」と、次節で述べる「電荷保存則の共変性」とは同等な法則であることが示されます。

4 電荷保存則の共変性

電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ との間には、

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

の関係があります。これが電荷保存則です。

これを示すために、(3.3) の両辺を t で偏微分すると

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(3.4) の関係 $\partial \mathbf{D} / \partial t = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \text{i.e. } \operatorname{div} \mathbf{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

となり、(4.1) が示されました。

次に、電荷保存則に関係する下記の法則を確かめておきます。

[法則 1] 4 元電流密度 $(c\rho, \mathbf{j}) := (j^0, j^1, j^2, j^3)$ が 4 元ベクトルであれば、電荷保存則は共变的であり、逆も成り立ちます。

[証明] 4 元電流密度 (j^μ) が 4 元ベクトルであると仮定すると、変換式 (3.34)～(3.36) が成り立ちますから、

$$j^{0'} = \gamma(j^0 - \beta j^1)$$

$$j^{1'} = \gamma(j^1 - \beta j^0)$$

$$j^{2'} = j^2, \quad j^{3'} = j^3$$

一方, 電荷保存則は $\partial_\mu j^\mu = 0$ と表記されますから

$$\begin{aligned}\partial'_\mu j^{\mu'} &= \gamma^2(\partial_0 + \beta\partial_1)(j^0 - \beta j^1) + \gamma^2(\partial_1 + \beta\partial_0)(j^1 - \beta j^0) + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 \\ &= \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = \partial_\mu j^\mu\end{aligned}$$

つまり, 電荷保存則は共変的です.

逆命題を示すために, ローレンツ変換を

$$\begin{aligned}x^{\mu'} &= a^\mu_\sigma x^\sigma \\ x^\mu &= b^\mu_\sigma x^{\sigma'}\end{aligned}$$

の形で表します. (b^μ_σ は a^μ_σ の逆行列です) このとき,

$$\begin{aligned}\partial'_\mu j^{\mu'} &= \frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} \frac{\partial j^\lambda}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} \frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \\ &= \frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} b^\nu_\mu J^\lambda_\nu \quad (J^\lambda_\nu := \frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\nu})\end{aligned}$$

一方,

$$\partial_\lambda j^\lambda = \frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} = J^\lambda_\nu \delta^\nu_\lambda$$

逆命題の仮定により $\partial'_\mu j^{\mu'} = \partial_\lambda j^\lambda$ ですから

$$\frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} b^\nu_\mu J^\lambda_\nu = J^\lambda_\nu \delta^\nu_\lambda$$

J^λ_ν は任意の値をとれますから,

$$\frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} b^\nu_\mu = \delta^\nu_\lambda$$

両辺に a^σ_ν を掛けて, ν について和をとると

$$\frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} a^\sigma_\nu b^\nu_\mu = a^\sigma_\nu \delta^\nu_\lambda = a^\sigma_\lambda$$

左辺の行列の積の部分は δ^σ_μ に等しいですから

$$\frac{\partial j^{\mu'}}{\partial j^\lambda} \delta^\sigma_\mu = \frac{\partial j^{\sigma'}}{\partial j^\lambda} = a^\sigma_\lambda$$

したがって, $j^{\sigma'}$ は K_σ を定数として $j^{\sigma'} = a^\sigma_\lambda j^\lambda + K_\sigma$ の形に書けます. 特に, 慣性系の相対速度 V が 0 のとき, $a^\sigma_\lambda = \delta^\sigma_\lambda, j^{\sigma'} = j^\sigma$ ですから, $j^\sigma = j^\sigma + K_\sigma$ となり $K_\sigma = 0$ が得られます. つまり

$$j^{\sigma'} = a^\sigma_\lambda j^\lambda$$

が成り立ち, (j^μ) が 4 元ベクトルであることが示されました. ⁶[証明終]

ここまでの議論で, マクスウェル方程式の共変条件について, 以下のことが判明しました.

- [1] 4 元ローレンツ力の (反変) ベクトル性を前提にすれば, 共変条件 I は一意的に定まる.
- [2] II 群方程式の共変条件は電荷・電流密度への拘束式 (共変条件 II) となる.
- [3] 条件 II は 電荷保存則の共変性と同等です

⁶逆の証明では, 文献 [8] の付録 2 を参考にしています

5 おわりに

ここまで、3 元ベクトル場表示の電磁気法則の共変性をみてきました。議論を要約すると

[1] 電磁気法則の共変性の基礎になる経験法則が 2 つある

[2] 4 元ポテンシャルは電磁気法則の共変性に関与しない

これらの点については、文献などでは明快に指摘されていません。

[1] に関連して、共変性に関わる法則の因果関係をまとめると次のようになります。

$$[\text{電荷保存則の共変性}] \iff [4 \text{ 元電流密度の } 4 \text{ 元ベクトル性}] \implies [\text{電磁気法則の共変性}]$$

↑

$$[4 \text{ 元ローレンツ力の } 4 \text{ 元ベクトル性}] \iff [\text{電磁場の共変条件 I}]$$

つまり、電荷保存則とローレンツ力という 2 つの経験法則が、電磁気法則の共変性の基礎であることとなります。

[2] に関連して、「電磁気法則のテンソル表示」について付け加えておきたいと思います。

付録 2 では、2 添字 16 成分の物理量 $\{f_{\mu\nu}\}$ は、4 成分量 (A_μ) (4 元ポテンシャル) の 4 元回転により定義されます。これより、 $\{f_{\mu\nu}\}$ は反対称性の量であることになり、その共変条件は テンソル条件式そのものであることがわかります。(式 (a2.19) 参照) つまり、 $\{f_{\mu\nu}\}$ の特性は (A_μ) の性質とは無関係に定まります。そもそも、同一の電磁場を表す (A_μ) にはゲージ変換に由来する任意性がありますから、これは当然のことです。

一方、4 元ポテンシャル (A^μ) 表示の電磁場をマクスウェル方程式に代入すれば、 (A^μ) についての方程式が得られます。この方程式を簡潔な波動方程式の形にするために (A^μ) のゲージ変換による任意性が利用されます。その一つが「ローレンツゲージ条件 $(\partial_\mu A^\mu = 0)$ 」で、このゲージ条件式が共変的ならば (A^μ) は 4 元ベクトルの性質をもちます。

(A^μ) の 4 元ベクトル性を前提とする議論においては、最後に $\{f_{\mu\nu}\}$ のテンソル性を 3 元ベクトル場に表示換えした関係式 (条件 I: § 3.2 の (3.32), (3.33)) に言及している文献もあります [5][7]。ところが、この論考を書き上げてから編集者から、ある文献⁷を紹介されました。そこでは (p.382~p.399)、さらに進んで電荷・電流密度を含むマクスウェル方程式の共変性の確認計算にまで及んでいます。それは、4 元電流密度の 4 元ベクトル性を用いて方程式の共変性を導くものです。本論 § 3.2 における (類似の) 計算は、方程式に共変性を要請して 4 元電流密度の 4 元ベクトル性を導くものですから、推論の前提と結果がまったく逆になっています。この文献は 4 元ポテンシャルの 4 元ベクトル性を前提にして、共変性を導いていますが、その他も分かりやすい解説で大変参考になりました。編集者の配慮に心から感謝します。そして、拙い論文を細部にわたり校閲して下さった査読者にも、深く謝意を表します。

付録 1 ローレンツ力と電磁気法則の共変性

[a1-1] 4 元ローレンツ力の導入

S 系の磁場の中の電流が受けるアンペール力が、速度 $\mathbf{v}$ を持つ運動電荷 q の受けるローレンツ力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ として定式化されました。この力の表式が、相対性原理により全ての慣性系で同一数式で表されるならば、 S' 系では $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$ と書けるはず⁸です。変換式 (2.3) および条件式 (3.32), (3.33) を用いると

⁷石井 俊全 著『一般相対性理論を一步一步数式で理解する』ベレ出版 (2017)

⁸ S' 系のローレンツ力では電荷は q' であるが、電荷はその運動状態にはよらず不変であるので、 $q' = q$ が成り立つ。文献 [5](p.194~p.198) 参照

$\mathbf{F}'$ は

$$F'_x = \frac{1}{\xi} \left(F_x - \frac{qV}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (\text{a1.1})$$

$$F'_y = \frac{1}{\gamma\xi} F_y \quad (\text{a1.2})$$

$$F'_z = \frac{1}{\gamma\xi} F_z \quad (\text{a1.3})$$

となります。まづ, F'_x については

$$\begin{aligned} F'_x &= q(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y) \\ &= qE_x + \frac{qv_y}{\xi\gamma} \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) - \frac{qv_z}{\xi\gamma} \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\ &= qE_x + \frac{q}{\xi} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x - \frac{qV}{\xi c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - v_x E_x) \\ &= qE_x \left(1 + \frac{v_x V}{\xi c^2} \right) + \frac{q}{\xi} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x - \frac{qV}{\xi c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

$1 + v_x V / \xi c^2 = 1 / \xi$ ですから

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{q}{\xi} (E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x) - \frac{qV}{\xi c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\xi} \left(F_x - \frac{qV}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \right) \end{aligned}$$

となり, (a1.1) が得られます。つぎに, F'_y については

$$\begin{aligned} F'_y &= q(E'_y + v'_z B'_x - v'_x B'_z) \\ &= q\gamma(E_y - V B_z) + \frac{qv_z}{\xi\gamma} B_x - \frac{q(v_x - V)}{\xi} \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \\ &= q\gamma E_y \left(1 + \frac{V(v_x - V)}{\xi c^2} \right) + \frac{qv_z}{\xi\gamma} B_x - q\gamma B_z \frac{v_x + V(\xi - 1)}{\xi} \\ &= \frac{qE_y}{\xi\gamma} + \frac{qv_z}{\xi\gamma} B_x - \frac{qB_z v_x}{\xi\gamma} \\ &= \frac{q}{\xi\gamma} (E_y + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y) = \frac{F_y}{\xi\gamma} \end{aligned}$$

F'_z についても同様に導くことができます。

(a1.2), (a1.3) から $\mathbf{F}$ は 4 元反変ベクトルの空間成分とはなり得ませんから, ミンコフスキー力⁹にならって, 試みに $\mathbf{G} := \mathbf{F} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ なる力を導入してみると, 関係式 (2.4) を使って

$$\begin{aligned} G'_x &= \frac{F'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{\gamma\xi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{F_x - qV(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})/c^2}{\xi} \\ &= \gamma \left(G_x - \frac{qV(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \\ &:= \gamma (G_x - qV(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})/c^2) \end{aligned} \quad (\text{a1.4})$$

(a1.4) においては, $\mathbf{s} = \mathbf{v} / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ と定義しています。そして, $G'_y = G_y$ および $G'_z = G_z$ であることも容易に確かめられます。ここで, 以後の議論でよく使われる関係式を提示しておきます。

$$\xi\gamma\sqrt{1 - (v'/c)^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (\text{a1.5})$$

⁹運動量を $\mathbf{p}$, エネルギーを E とするとき, $\mathbf{f} = d\mathbf{p} / \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$ と $f^0 = dE / c \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$ から成る 4 元力 $(f^0, \mathbf{f})$

この式は、2-1 節の (2.4) 式を変形したものです。

この関係を使えば、 $G'_y = G_y$ については

$$\begin{aligned} G'_y &= \frac{F'_y}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \frac{\xi\gamma F'_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= \frac{F_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = G_y \end{aligned}$$

同様の計算で $G'_z = G_z$ も示されます。

そこで、 $\mathbf{G}$ を空間成分とする 4 元反変ベクトルの第 1 成分を G_t とすれば、ローレンツ変換式は

$$G'_x = \gamma(G_x - VG_t/c)$$

となるはずです。よって、(a1.4) と比較して

$$G_t = q(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})/c \quad (\text{a1.6})$$

が得られます。念のため、 G'_t と G_t の関係をみておきます。

$s'_x = \gamma(s_x - V/\sqrt{1-v^2/c^2})$, $s'_y = s_y$, $s'_z = s_z$ に注意して

$$\begin{aligned} G'_t &= \frac{q\gamma}{c} \left(s_x - \frac{V}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) E_x + \frac{q\gamma}{c} s_y (E_y - VB_z) + \frac{q\gamma}{c} s_z (E_z + VB_y) \\ &= \frac{q\gamma}{c} \left(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} - \frac{VE_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - V(\mathbf{s} \times \mathbf{B})_x \right) \end{aligned}$$

$\mathbf{s} = \mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ ですから

$$\begin{aligned} G'_t &= \frac{q\gamma}{c} \left(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} - \frac{V}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x) \right) \\ &= \frac{\gamma}{c} \left(q\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} - V \frac{F_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \\ &= \gamma \left(G_t - \frac{V}{c} G_x \right) \end{aligned}$$

となり、確かにローレンツ変換式を満足しています。ここに得られた 4 元反変ベクトル $(G_t, \mathbf{G})$ は、4 元ローレンツ力とよぶべきものです。

$$(G_t, \mathbf{G}) = \frac{q}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} , \quad \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \quad (\text{a1.7})$$

[a1-2] 4 元ローレンツ力と電磁場の共変条件

前節で、4 元力 $(G_t, \mathbf{G})$ が 4 元反変ベクトルであることは、マクスウェル方程式の共変性条件 I : (3.32), (3.33) により示されました。逆に、4 元力 $(G_t, \mathbf{G})$ が 4 元反変ベクトルであることから、(3.32) , (3.33) を導くことができます。

つまり、次の法則が成り立ちます。

[法則 2] マクスウェル方程式が特殊ローレンツ変換で共变的であるための電磁場に対する条件から、4 元ローレンツ力が 4 元反変ベクトルであることが導かれ、逆も成り立ちます。

[証明] 法則の逆を示すために, $(G_t, \mathbf{G})$ が 4 元反変ベクトルであると仮定します. これは以下の変換式が成り立つことを意味します.

$$G'_t = \gamma \left(G_t - \frac{V}{c} G_x \right) \quad (\text{a1.8})$$

$$G'_x = \gamma \left(G_x - \frac{V}{c} G_t \right) \quad (\text{a1.9})$$

$$G'_y = G_y, \quad G'_z = G_z$$

まづ (a1.8) を電磁場を用いて表せば

$$\frac{q\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}'}{c\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma \frac{q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\gamma V}{c} \frac{q}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (E_x + v_y B_z - v_z B_y)$$

関係式 (a1.5) に注意して変形すると

$$\xi \mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - V(E_x + v_y B_z - v_z B_y)$$

$\mathbf{v}'$ を S 系の速度 $\mathbf{v}$ に変換して, 速度の成分ごとに整理すると

$$(v_x - V)E'_x + \frac{1}{\gamma}(v_y E'_y + v_z E'_z) = (v_x - V)E_x + v_y(E_y + V B_z) + v_z(E_z - V B_y) \quad (\text{a1.10})$$

$(v_x - V), v_y, v_z$ は任意の値をとれますから, それぞれの係数は両辺で等しくなければなりません. すなわち

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y + V B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z - V B_y)$$

となり, 条件式 (3.32) が得られます.

そして, (a1.9) からは

$$\frac{q}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y) = \frac{q\gamma}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(E_x + v_y B_z - v_z B_y) - \frac{q\gamma V}{c} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

関係式 (a1.5) を使って

$$\xi(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y) = (E_x + v_y B_z - v_z B_y) - \frac{V}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

v'_y, v'_z を v_y, v_z に変換して

$$\xi E'_x + \frac{1}{\gamma}(v_y B'_z - v_z B'_y) = E_x \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) + v_y \left(B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right) - v_z \left(B_y + \frac{V E_z}{c^2} \right) \quad (\text{a1.11})$$

となりますから, v_y, v_z の係数を比較して

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{V E_z}{c^2} \right), \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right)$$

すなわち, 条件式 (3.33) の y, z 成分 が得られます. さらに, 4 元反変ベクトル条件 $G'_y = G_y$ より

$$\frac{q}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}(E'_y + v'_z B'_x - v'_x B'_z) = \frac{q}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(E_y + v_z B_x - v_x B_z)$$

関係式 (a1.5) を使って

$$\xi \gamma \left(\gamma(E_y - V B_z) + \frac{v_z B'_x}{\xi \gamma} - \frac{(v_x - V)\gamma}{\xi} \left(B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right) \right) = E_y + v_z B_x - v_x B_z$$

$\xi + V(v_x - V)/c^2 = 1/\gamma^2, \xi V + v_x - V = v_x/\gamma^2$ に注意して変形すると

$$E_y - v_x B_z + v_z B'_x = E_y + v_z B_x - v_x B_z \quad (\text{a1.12})$$

これより $B'_x = B_x$ が得られます.

ちなみに, 条件 $G'_z = G_z$ を使っても $B'_x = B_x$ を導くことができます. [証明終]

付録2 電磁場のテンソル表示

マクスウェル方程式の一つ $\text{div} \mathbf{B} = 0$ より, ある3成分関数 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ を使って $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ と表せます. これを使えば, もう一つのマクスウェル方程式 $\text{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ は, $\text{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$ となりますから, ある1成分関数 ϕ を用いて $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\text{grad} \phi$ と書けます.

つまり, 微分可能な関数 (ϕ, A_1, A_2, A_3) を用いて, 電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{a2.1})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (\text{a2.2})$$

と表わすことができます.

ここで導入された $(\phi, \mathbf{A})$ を用いて $(A_0, A_1, A_2, A_3) := (-\phi/c, \mathbf{A})$ と定義される4成分の物理量を4元ポテンシャルと呼びます.

4元座標 $(ct, x, y, z) := (x^0, x^1, x^2, x^3)$ を用いれば, (a2.1), (a2.2) は

$$E_x = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \right), \quad B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad (\text{a2.3})$$

$$E_y = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^0} \right), \quad B_y = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \quad (\text{a2.4})$$

$$E_z = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^0} \right), \quad B_z = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \quad (\text{a2.5})$$

となりますから, 4元ポテンシャルの4元回転を用いて

$$f_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (\text{a2.6})$$

と定義すれば, $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ であって, (a2.3)~(a2.5) は

$$E_x = cf_{10}, \quad B_x = f_{23} \quad (\text{a2.7})$$

$$E_y = cf_{20}, \quad B_y = f_{31} \quad (\text{a2.8})$$

$$E_z = cf_{30}, \quad B_z = f_{12} \quad (\text{a2.9})$$

と表されます.

さらに, $\{f^{\mu\nu}\}$ を以下のように定義します.

$$f_{lm} = f^{lm} \quad (l, m = 1, 2, 3) \quad (\text{a2.10})$$

$$f_{\mu 0} = -f^{\mu 0}, \quad f_{0\nu} = -f^{0\nu} \quad (\mu, \nu = 0 \sim 3) \quad (\text{a2.11})$$

この反対称な $\{f^{\mu\nu}\}$ を使えば, 電磁場 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ は

$$(f^{01}, f^{02}, f^{03}) := \frac{\mathbf{E}}{c} \quad (\text{a2.12})$$

$$(f^{23}, f^{31}, f^{12}) := \mathbf{B} \quad (\text{a2.13})$$

と表されます.

この $\{f^{\mu\nu}\}$ および $\{f_{\mu\nu}\}$ によりマクスウェル方程式は, μ_0 を真空の透磁率として

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \quad (\text{a2.14})$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{a2.15})$$

とまとめられます. ここに, $(j^0, j^1, j^2, j^3) := (c\rho, \mathbf{j})$ は4元電流密度です.

「第1節 はじめに」で述べた方法 (1) の議論では, 3 元電磁場 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ の共変条件式 I (§ 3.2 の式 (3.32),(3.33)) が求められていますから, (a2.12),(a2.13) の関係式を使って $\{f^{\mu\nu}\}$ の共変条件式が導かれます. 計算結果は以下のとおりです.

$$(f^{01})' = f^{01} \quad , \quad (f^{23})' = f^{23} \quad (\text{a2.16})$$

$$(f^{02})' = \gamma(f^{02} - \beta f^{12}) \quad , \quad (f^{03})' = \gamma(f^{03} - \beta f^{13}) \quad (\text{a2.17})$$

$$(f^{12})' = \gamma(f^{12} - \beta f^{02}) \quad , \quad (f^{13})' = \gamma(f^{13} - \beta f^{03}) \quad (\text{a2.18})$$

これらは $\{f^{\mu\nu}\}$ の反変テンソル条件

$$(f^{\mu\nu})' = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\sigma}} f^{\rho\sigma} = \partial_{\rho} x^{\mu'} \partial_{\sigma} x^{\nu'} f^{\rho\sigma} \quad (\text{a2.19})$$

にもなっています. (反対称性により, 独立な条件式は 6 個です)

参考文献

- [1] 竹内 淳 著 『高校数学でわかる相対性理論』 講談社 (2013 年)
ローレンツ変換におけるマクスウェル方程式の共変性条件については, 8 章 (p.210~p.217)
- [2] 内山龍雄 訳・解説 『アインシュタイン相対性理論』 岩波書店 (2015 年)
§ 6(p.40~p.43) で, マクスウェル方程式の共変性条件を論じています.
- [3] 内山龍雄 著 『相対性理論』 岩波書店 (1990 年)
III 章 § 11 で, 4 元ポテンシャル (A^{μ}) を導入してマクスウェル方程式を (A^{μ}) で表現しています. この際, ローレンツゲージ条件を課していますから, (A^{μ}) は 4 元ベクトルとして扱われています. (p.67~p.70)
- [4] L. ランダウ/ M. リフシッツ 著 (水戸 巖 ほか訳) 『力学・場の理論』 筑摩書房 (2008 年)
10 章 § 50 で, 4 元ベクトルとしての 4 元ポテンシャルを前提にして, 電磁場テンソルを導入しています (p.250~p.254)
- [5] W. パウリ 著 (内山龍雄 訳) 『相対性理論 上』 筑摩書房 (2007 年)
III 編 § 27(電荷の不変性) で, 4 元電流密度の 4 元ベクトル性を示しています. § 28(電子論の基礎方程式の共変性) で, $\{F_{\mu\nu}\}$ 表示のマクスウェル方程式に共変性を要請すれば, $\{F_{\mu\nu}\}$ は 2 階テンソル (面テンソル) であるべきことを, 証明なしで指摘しています. (p.194~p.204)
- [6] 矢野 健太郎 著 『相対性理論』 至文堂 (1963 年)
4 章 § 2 で, 4 元ベクトル性を前提とした 4 元ポテンシャル (A^{μ}) を用いて電磁場テンソルを導入しています. (p.89~p.91)
- [7] 米谷・岸根 共著 『場と時間空間の物理』 NHK 出版 (2016 年)
4 元ポテンシャル (A_{μ}) については, 2 章 5 節 (p.40~p.44). 10 章 2 節で (A_{μ}) が 4 元ベクトルの場合に限って 16 成分量 $\{F_{\mu\nu}\}$ を導入し, そのテンソル性から 3 元ベクトル場 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ の共変条件を示しています. (p.178~p.184)
- [8] C. メラー 著 (永田・伊藤 共訳) 『相対性理論』 みすず書房 (1959 年)
V 章 § 53 で, $\{f_{\mu\nu}\}$ を天下りのように提示して, $\{f_{\mu\nu}\}$ 表示のマクスウェル方程式が共変的であるべきことから, $\{f_{\mu\nu}\}$ はテンソルでなければならないと, 証明なしで記しています. (p.139)

三角関数の還元公式 3

矢野 忠^{*1}

Reduction Formulae for Trigonometric Functions 3

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

これは以前に書いた「三角関数の還元公式」 [1] [2] の続編である。

そもそも三角関数の還元公式とは何か。これはたとえば、三角関数 $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ のような公式である。他にどんな還元公式があるかは 3 節の三角関数の還元公式の種類を見てほしい。ここでは余角の公式とか補角の公式とかそれに類似の三角関数の公式を指す。

どういう方法で還元公式を導くかについては [1] の 2 節に概要を述べてある。このエッセイではグラフの平行移動による還元公式の導出について述べる。

$\cos x$ とか $\sin x$ の平行移動によって、三角関数の還元公式を導くことができるというアイデアをどこから得たのかはよくわからないが、大学に務めていたときの同僚だった Y. K. さんから、教えられたのではないかと思う。直接に教わったのではなく、彼が誰か学生を指導していたのを傍で見ていて、知ったのではないかと思う。

そのいきさつはともかくとして、グラフの平行移動によって三角関数の還元公式をどうやって導くかを述べる。すでに [1] で三角関数の還元公式が出てきたときにどうすればよいかを how to としてまとめている^{*3}。

一般角の三角関数で偏角 $\frac{\pi}{2} \pm \theta, \pi \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta$ 等を含む三角関数を θ の三角関数で表すには、普通これを公式として記憶することはしないで θ を正の鋭角と仮定して図を描いて変形するのが常道である。結果として

1. $\frac{n\pi}{2} \pm \theta, n$ が奇数のとき $\sin$ は $\cos$ へ、 $\cos$ は $\sin$ へ
2. $n\pi \pm \theta, n$ が整数のとき $\sin$ は $\sin$ へ、 $\cos$ は $\cos$ へ

となることを記憶しておいて、後はその角 $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ または $n\pi \pm \theta$ がどの象限にあるかを見てその象限での $\sin$ または $\cos$ の符号を間違わないようにつけてやればよい。すなわち、 $\cos$ は第 1, 4 象限で正の符号をとり、第 2, 3 象限で負の符号をとる。また $\sin$ は第 1, 2 象限で正の符号をとり、第 3, 4 象限で負の符号をとることにだけ注意すればよい。

2 グラフの平行移動

グラフの平行移動で、いま必要なのは x 軸方向の平行移動である。

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

というグラフがあったときに、

$$y = f(x + a) \tag{2.2}$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} このことは私が高校数学の学習参考書 [3] で学んだことである。

としたとき、 $y = f(x)$ のグラフをどう平行移動するかということは中学校で学ぶが、復習をしておこう*4。いま $a > 0$ としておこう。

$y = f(x + a)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向で左へ a だけ平行移動したグラフである。このことが私たちの直観に反しているように思われるが、まずこのことをしっかりと頭に入れておかななくてはならない*5。この様子を 2 次式のグラフで表せば、図 1 と図 2 のようになる*6。

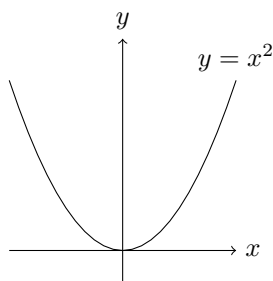


図 1 $y = x^2$ のグラフ

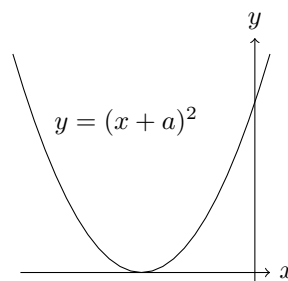


図 2 $y = (x + a)^2$ のグラフ

逆に、 $y = f(x - a)$, $a > 0$ ならば、 x 軸方向に右へ a だけ $y = f(x)$ のグラフを平行移動したグラフとなる（図 3 と図 4 を参照）*7。

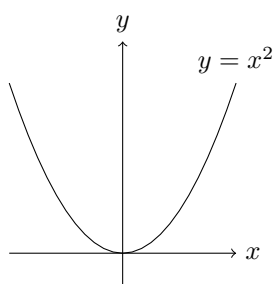


図 3 $y = x^2$ のグラフ

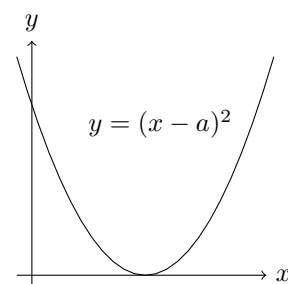


図 4 $y = (x - a)^2$ のグラフ

このエッセイでは対象とする関数は三角関数といっても、余弦関数 $\cos x$ と正弦関数 $\sin x$ とに限定するので、

$$\cos(x + \theta), \quad \sin(x + \theta) \quad (2.3)$$

を考えればよい。いま $\cos$ 関数と $\sin$ 関数の偏角の中の定数 θ は

$$\theta = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2) \text{ または } \theta = \frac{n}{2}\pi, \quad (n = 1, 3) \quad (2.4)$$

に限定される。

3 還元公式の種類

取り扱う対象として還元公式の種類としてどのような公式があるか。まずそれについてあげておく。

*4 グラフ平行移動については [4] を参照せよ。

*5 ある任意の関数 y の値が y_0 をとるとき、独立変数 x の値を x_0 とすれば（すなわち $y_0 = f(x_0)$ ）、 $y = f(x + a) = f(x_0) = y_0$ から、 $x + a = x_0$ となる x の値は $x = x_0 - a$ のところである。すなわち、 $y = f(x + a)$ は $y = f(x)$ を x 軸の左方向に a だけ平行移動したものである。

*6 図 2 の $y = (x + a)^2$ が図 1 の $y = x^2$ を x 軸の左方向に a だけ平行移動したグラフであることは $y = (x + a)^2$ で $y = 0$ となる x の値が $x = -a$ であることからわかる。

*7 $y = 0$ となる、 x の値は $(x - a)^2 = 0$ から $x = a$ のところである。

還元公式の主な対象は三角関数の周期性，負角の公式，余角の公式，補角の公式およびそれらに類似な公式（前に与えた公式の偏角 θ を $-\theta$ と置換して得られる公式）である。

還元公式を具体的に表せば，

[三角関数の周期性]

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta, \quad n = \text{整数} \quad (3.1)$$

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta, \quad n = \text{整数} \quad (3.2)$$

[$2n\pi - \theta$ の公式]

$$\cos(2n\pi - \theta) = \cos \theta, \quad n = \text{整数} \quad (3.3)$$

$$\sin(2n\pi - \theta) = -\sin \theta, \quad n = \text{整数} \quad (3.4)$$

[負角の公式]

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad (3.5)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (3.6)$$

[余角の公式]

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta, \quad (3.7)$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta \quad (3.8)$$

[$\pi/2 + \theta$ の公式]

$$\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta, \quad (3.9)$$

$$\sin(\pi/2 + \theta) = \cos \theta \quad (3.10)$$

[補角の公式]

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad (3.11)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad (3.12)$$

[$\pi + \theta$ の公式]

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \quad (3.13)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad (3.14)$$

[$3\pi/2 - \theta$ の公式]

$$\cos(3\pi/2 - \theta) = -\sin \theta, \quad (3.15)$$

$$\sin(3\pi/2 - \theta) = -\cos \theta \quad (3.16)$$

[$3\pi/2 + \theta$ の公式]

$$\cos(3\pi/2 + \theta) = \sin \theta, \quad (3.17)$$

$$\sin(3\pi/2 + \theta) = -\cos \theta \quad (3.18)$$

である。またこれらの公式に類似な公式がもし他にあれば，それらをすべて含む。

ここでは，グラフの平行移動での還元公式の導出を考えよう。

4 平行移動による $\cos x$ と $\sin x$ との関係

$\cos x$ と $\sin x$ との関係をここで確認しておきたい. $\cos x$ のグラフは, これを $\sin$ の関数で表すとすれば, これは $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ となっている. すなわち, $\sin x$ のグラフを x 軸の左方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである. 図 5 を参照せよ.

逆に $\sin x$ を $\cos$ 関数で表すとすれば, $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ である. これは $\cos x$ のグラフを x 軸の右方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである. 図 6 を参照せよ.

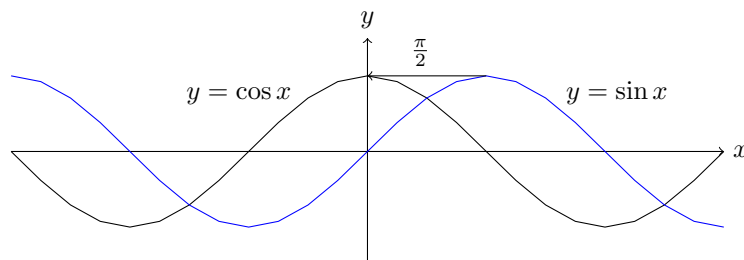


図 5 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ である.

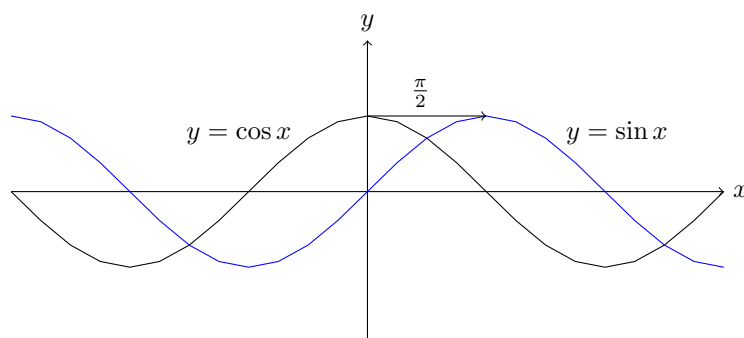


図 6 $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ である.

さらに $\cos x$ も $\sin x$ もそれぞれのグラフを x 軸の左方向に π だけ平行移動すれば, $-\cos x$ と $-\sin x$ となる. すなわち, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ と $\sin(\pi + x) = -\sin x$ である.

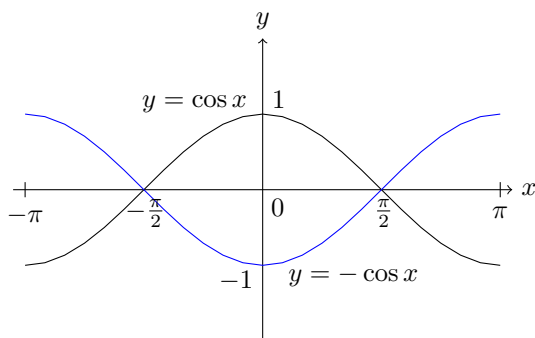


図 7 $\cos x$ と $-\cos x$ グラフの位置関係. 青は $-\cos x$ グラフ

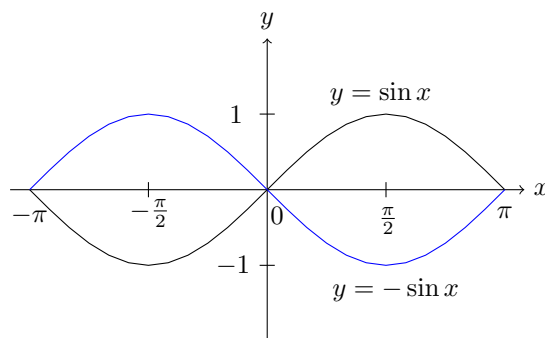


図 8 $\sin x$ と $-\sin x$ のグラフの位置関係. 青は $-\sin x$ のグラフ

このことを了解するために, まず図 7 に $\cos x$ を $-\cos x$ と対比させたグラフを, 図 8 に $\sin x$ と $-\sin x$ とを対

比させたグラフを示した。また、 $\cos(\pi+x)$ を $\cos x$ と対比させたグラフと $\sin(\pi+x)$ を $\sin x$ と対比させたグラフをそれぞれ図 9, 10 に示した。

図 7 と図 9 とを対比すれば、 $\cos(\pi+x) = -\cos x$ であることが、また図 8 と図 10 とを対比すれば、 $\sin(\pi+x) = -\sin x$ であることがわかる。

これらがまず基本となる、 $\cos x$ と $\sin x$ のグラフの平行移動である。ここで青のグラフは図 9 では $\cos(\pi+x)$

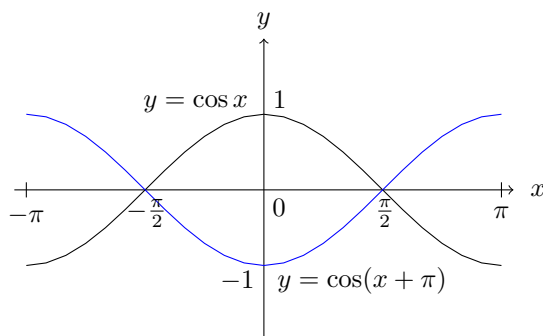


図 9 $\cos x$ と $\cos(\pi+x)$ との位置関係。青は $\cos(\pi+x)$ のグラフ

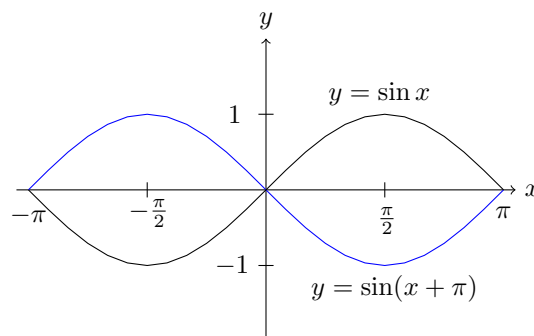


図 10 $\sin x$ と $\sin(\pi+x)$ との位置関係。青は $\sin(\pi+x)$ のグラフ

のグラフであり、図 10 では $\sin(\pi+x)$ のグラフである。これからも $\cos(\pi+x) = -\cos x$ と $\sin(\pi+x) = -\sin x$ であることが確かめられる。

5 負角の還元公式

$\cos(-x)$ と $\sin(-x)$ から考えよう。

x と $-x$ とは y 軸を回転軸として反転したものになっている。すなわち、 $\cos(-x)$ のグラフは $\cos x$ のグラフを y 軸を回転軸として、角度 $\pi = 180^\circ$ 回転させたグラフである。 $\cos x$ のグラフはもともと y 軸に対して線対称なグラフであるから、 $\cos(-x) = \cos x$ であることはすぐにわかる。

つづいて、 $\sin(-x)$ のグラフは $\sin x$ のグラフを y 軸を回転軸として、紙面の前の方向または紙面の裏方向に角度 $\pi = 180^\circ$ 回転させたグラフである。 $\sin x$ は y 軸に対して対称ではない。ここが $\cos x$ のグラフと異なっている。 $\sin x$ のグラフの描かれた紙面上での回転移動で考えれば、原点 O の周りに反時計方向に $\pi = 180^\circ$ 回転すれば、元のグラフと一致する。しかし、そのことはあまり有用ではなく、むしろ $\sin(-x) = -\sin x$ であるという事実の方が役に立つ。すなわち、元の $\sin x$ のグラフを x 軸を回転軸として紙面手前の方向（または反対方向に） $\pi = 180^\circ$ 回転すれば、 $-\sin x$ となる。これは $\sin x$ の y 軸に線対称なグラフが $y = \sin(-x)$ であるが、これは $\sin x$ の x 軸に対称なグラフ $y = -\sin x$ と同一となっている。

まとめれば、

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}$$

となる。これが負角の公式である。

6 $\pi \pm x$ の還元公式

まず取り扱いが簡単な $\pi \pm x$ の還元公式から考えて行こう。

$\pi \pm x$ の還元公式とは

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (6.1)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad (6.2)$$

と

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad (6.3)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad (6.4)$$

のことである.

この $\cos(\pi \pm x), \sin(\pi \pm x)$ の還元公式を導出しよう. ここで, x の前の符号が $+$ であろうが, $-$ であろうが, $\cos$ のグラフも $\sin$ のグラフも, いずれも x 軸の左方向 (すわなち負の方向) に π だけ平行移動する.

$\cos x$ または $\sin x$ をそれぞれ π だけ平行移動すれば,

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad (6.3)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad (6.4)$$

となる.

もし, x が $-x$ となる場合には, 上の公式 (6.3), (6.4) を用いて

$$\cos(\pi - x) = \cos[\pi + (-x)] = -\cos(-x) = -\cos x \quad (6.1)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin[\pi + (-x)] = -\sin(-x) = \sin x \quad (6.2)$$

となる. 上の式の最後の等号では負角の公式が使われている.

7 $\pi/2 \pm x$ の還元公式

続いて, この節では $\pi/2 \pm x$ の還元公式を考える.

すなわち, $\pi/2 \pm x$ の還元公式とは

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \quad (7.1)$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \quad (7.2)$$

と

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x \quad (7.3)$$

$$\sin(\pi/2 + x) = \cos x \quad (7.4)$$

のことである.

この $\cos(\pi/2 \pm x), \sin(\pi/2 \pm x)$ の還元公式を導出しよう. ここで, x の前の符号が $+$ であろうが, $-$ であろうが, $\cos$ のグラフも $\sin$ のグラフも, いずれも x 軸の左方向 (すわなち負の方向) に $\pi/2$ だけ平行移動する.

$\cos x$ または $\sin x$ をそれぞれ $\pi/2$ だけ平行移動すれば,

$$\cos(\pi/2 + x) = \sin(\pi/2 + x + \pi/2) = \sin(\pi + x) = -\sin x \quad (7.3)$$

$$\sin(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2 + x - \pi/2) = \cos x \quad (7.4)$$

となる.

もし, 上の公式で x が $-x$ となる場合には, 上の公式 (7.3), (7.4) を用いて

$$\cos(\pi/2 - x) = \cos[\pi/2 + (-x)] = -\sin(-x) = \sin x \quad (7.1)$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin[\pi/2 + (-x)] = \cos(-x) = \cos x \quad (7.2)$$

となる. 上の式の最後の等号では負角の公式が使われている.

8 $3\pi/2 \pm x$ の還元公式

最後に, $3\pi/2 \pm x$ の還元公式を考える.

すなわち, $3\pi/2 \pm x$ の還元公式とは

$$\cos(3\pi/2 - x) = -\sin x \quad (8.1)$$

$$\sin(3\pi/2 - x) = -\cos x \quad (8.2)$$

と

$$\cos(3\pi/2 + x) = \sin x \quad (8.3)$$

$$\sin(3\pi/2 + x) = -\cos x \quad (8.4)$$

のことである.

この $\cos(3\pi/2 \pm x), \sin(3\pi/2 \pm x)$ の還元公式を導出しよう. ここで, x の前の符号が $+$ であろうが, $-$ であろうが, $\cos$ のグラフも $\sin$ のグラフも, いずれも x 軸の左方向 (すなわち負の方向) に $3\pi/2$ だけ平行移動する.

$\cos x$ または $\sin x$ をそれぞれ $3\pi/2$ だけ平行移動すれば,

$$\cos(3\pi/2 + x) = \sin(3\pi/2 + x + \pi/2) = \sin(2\pi + x) = \sin x \quad (8.3)$$

$$\sin(3\pi/2 + x) = \cos(3\pi/2 + x - \pi/2) = \cos(\pi + x) = -\cos x \quad (8.4)$$

となる. 上の式の最後の等号では, (8.3) では $\sin x$ の周期性が, また (8.4) では $\cos x$ の x 軸の左方向の π の平行移動は $-\cos x$ となることを用いている.

もし, 上の公式で x が $-x$ となる場合には, 上の公式 (8.3), (8.4) を用いて

$$\cos(3\pi/2 - x) = \cos[3\pi/2 + (-x)] = \sin(-x) = -\sin x \quad (8.1)$$

$$\sin(3\pi/2 - x) = \sin[3\pi/2 + (-x)] = -\cos(-x) = -\cos x \quad (8.2)$$

となる. 上の式の最後の等号では負角の公式が使われている.

9 おわりに

以上, グラフの平行移動を用いて $\cos$ 関数と $\sin$ 関数の還元公式を導出した. 基本となる原理は

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

$$\sin x = \cos(x - \pi/2)$$

であることと

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

であることである.

この2つの三角関数の性質は4節で示したように, $\cos$ 関数と $\sin$ 関数のグラフの平行移動からわかることである.

(2022. 5. 25)

参考文献

- [1] 矢野忠, 三角関数の還元公式 1, 数学・物理通信, 6 巻 2 号 (2016.3.7) 7-15
- [2] 矢野忠, 三角関数の還元公式 2, 数学・物理通信, 6 巻 2 号 (2016.3.7) 16-26
- [3] 藤森良夫, 『解析の基礎』(続編)(考え方研究社, 1954) 661
- [4] 矢野忠, グラフの平行移動, 数学・物理通信, 9 巻 6 号 (2019.9.12) 11-18

編集後記

皆さんこんにちは。私が住むここ札幌は、変てこな気候が続いています。と言うのも、4月中旬から5月中旬までは、最高気温が27, 28度もあって、東京、大阪よりも暑い日がありました。こんな暑さが続いたら真夏はどんなことになるのかと暑さに弱い私は心配していました。ところが、5月末から6月に入っただけにかけて、最高気温で15度程度、朝晩の最低気温は10度に満たない寒い日もあります。もう6月だというのに暖房が必要なほどの寒さです。こうも温度変化が激しいと、私のようなご老体にはついて行くのが大変です。

話し変わって、今回の『数学・物理通信』は、私の短い『2次元的に動くばね振子』と、編集長の矢野さんが書かれた『三角関数の還元公式』、および、秋葉さんが書かれた長篇の『電磁気法則の共変性』の論文の3つとなりました。この秋葉さんが書かれたものを読んでいて久方ぶりに電磁気学の方程式を眺めることになりました。ここに書かれているように、電磁気学で使われる量、電場、磁場、電束密度、磁束密度などが、Lorentz 変換に対しどのように変換されるかを直接的に求めることは、大変な計算を強いられることがよくわかり、これはなかなかの力作と思われます。

この Lorentz 変換ですが、これに関して思いだしたことを、コメントとして、少し書き加えておきます。秋葉さんの論文では、Lorentz 変換は、(2.1) (2.2) 式のように、 γ, β を

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c} \quad \text{と定義して,} \quad x' = \gamma(x - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

と書かれています。ここで、 $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$ となることを利用して

$$\gamma = \cosh \phi, \quad \gamma\beta = \sinh \phi$$

と置き直してしまうと、Lorentz 変換は、虚数の i を用いて

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -i \sinh \phi \\ i \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix}$$

と書き直すことができます。これは通常の2次元座標 (ξ, η) における角度 θ の回転による座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

において、角度 θ , 座標 (ξ, η) , (ξ', η') を、それぞれ、虚数単位 i を用いて

$$\theta \rightarrow i\phi, \quad \xi \rightarrow ict, \quad \eta \rightarrow x, \quad \xi' \rightarrow ict', \quad \eta' \rightarrow x'$$

と置き直すと、

$$\sin(i\phi) = i \sinh \phi, \quad \cos(i\phi) = \cosh \phi \quad (0.1)$$

となることを用いて、この置き直された式そのものが Lorentz 変換と等価になることを意味しています。つまり、Lorentz 変換は、実数空間と虚数時間の間の虚数角度の回転ということです。この方が、見た目にもすっきりと Lorentz 変換を書き表すことができます。この表記法を使うと、例えば、相対論的速度の合成則が $\tanh$ の加法公式から簡単にできてしまうことです。具体的には、 $\cosh \phi = \gamma$, $\sinh \phi = \gamma\beta$ という定義から $\tanh \phi = \beta = V/c$ となりますが、いま2つの速度

$v_1 = c \tanh \phi_1$, $v_2 = c \tanh \phi_2$ があり, これら 2 つの速度を合成したものを $v = c \tanh(\phi_1 + \phi_2)$ とすると

$$\tanh \text{ の加法公式 } \tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \text{ から } v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

が簡単に導けます. この式で, 例えば, $v_1 = c$ と置いてしまうと, v_2 が何であっても, $v = c$ となるので, 光速にどんな速度を合成しても光速にしかならないことが分かります.

初めてこの Lorentz 変換を学んだときは, 時間と空間を混ぜて変換するなんて何と不思議な変換, こんなものを思い付いた Lorentz はどんな頭の持ち主なのだろうと思っていました. しかし, この変換が時間と空間座標間の虚数角度の回転になるということを知ってからは, 通常の座標回転と同じ要領で扱えるので, Lorentz 変換が大変身近なものになってきました. という訳で, 秋葉さんの論文もこの虚数角度の回転を用いて書いた方が, 現代人にはすっきりと良く理解できるのではと思った次第です.

(世戸憲治)