

数学・物理通信

12 卷 5 号 2022 年 9 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 9 月 9 日

目次 (Contents)

1.	2 次元的に動くばね振子 (2)		
		世戸 憲治	2
2.	球面線形補間の導出 - 金谷の導出法 -		
		矢野 忠	8
3.	三角関数の還元公式 4		
		矢野 忠	15
4.	編集後記		
		矢野 忠	28
1.	Spring Pendulum with Two Degrees of Freedom (2)		
		Kenji SETO	2
2.	Derivation of Spherical Linear Interpolation - Kanaya's Method -		
		Tadashi YANO	8
3.	Reduction Formulae for Trigonometric Functions 4		
		Tadashi YANO	15
4.	Editorial Comments		
		Tadashi YANO	28

2 次元的に動くばね振子 (2)

世戸 憲治 *

Spring Pendulum with 2 Degrees of Freedom (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「2次元的に動くばね振子 (1)」(『数学・物理通信』12 巻 4 号) では錘が上下方向のみならず水平方向にも振動するばね振子を扱った。しかしそこでは初期条件の与え方が単純すぎたせいで実際に錘が動く軌跡も単純なものばかりになってしまった。今回は、扱う方程式は同じであるが、初期条件の与え方をさらに一般化することで複雑な動きをするようにした場合を扱ってみる。

2 方程式の導入

方程式の導入方法はほぼ前回と同じであるが、一部変更点もあるので繰り返すことになるが述べておく。図 1 に示すように、自然長 ℓ , ばね定数 k のばねがあり、このばねの一端は固定し、他端に質量 m の錘をつける。このばねの固定端を原点とし、鉛直下向きに x 軸、水平右向きに y 軸を取り、このばね振子が振動しているときの錘の位置座標を (x, y) とする。また、図に示すように、振動しているときのばね全体の長さを r , ばねの傾き角を θ とする。もちろんこれらの変数の間には $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の関係がある。また、振動しているときのばねが錘に作用する張力を T とすると x, y 方向の錘の運動方程式は、重力加速度を g として、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - T \cos \theta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -T \sin \theta \quad (2.1)$$

となる。ここで、張力 T はばねの伸び $r - \ell$ から $T = k(r - \ell)$ と決まること、および座標 (x, y) を極座標 (r, θ) にして運動方程式を書き直すと

$$m \frac{d^2(r \cos \theta)}{dt^2} = mg - k(r - \ell) \cos \theta, \quad m \frac{d^2(r \sin \theta)}{dt^2} = -k(r - \ell) \sin \theta \quad (2.2)$$

となり、これは 2 変数 r, θ に関する連立微分方程式となる。しかし、この方程式を解析的に扱うのはあまりに難しすぎる。ここではばねの傾き角 θ は小さいものとして線形近似

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1 \quad (2.3)$$

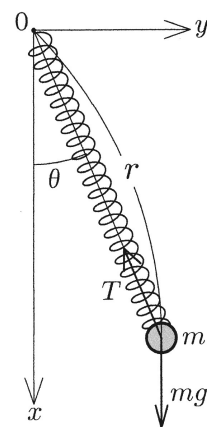


図 1 ばね振子

* 北海学園大学名誉教授

を用いることにする．このとき方程式 (2.2) は

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg - k(r - \ell), \quad m \frac{d^2(r\theta)}{dt^2} = -k(r - \ell)\theta \quad (2.4)$$

となり，この第 1 式は r だけの方程式となる．この第 1 式の非同次方程式には静的な解 r として，

$$L \equiv \ell + \frac{mg}{k} \quad (2.5)$$

が存在する．この長さ L は，ばねに重さ mg を付けたときのばね全体の長さを意味する．これを用いると，この非同次方程式は

$$m \frac{d^2(r - L)}{dt^2} = -k(r - L) \quad (2.6)$$

と $r - L$ に関する同次方程式に変形される．この方程式は三角関数を用いて簡単に解かれ，解は， A, α を，それぞれ，長さ，無次元の任意定数として，

$$r = A \cos(\omega t - \alpha) + L, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

と求められる¹⁾．ここに角振動数 ω をこの第 2 式で定義する．これを (2.4) の第 2 式に代入すると，

$$[A \cos(\omega t - \alpha) + L] \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2A\omega \sin(\omega t - \alpha) \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \quad (2.8)$$

となる．これは θ に関する線形 2 階の微分方程式であるが三角関数を 2 ヲ所に含むもので，Mathieu 方程式をさらに難しくしたものである．

3 方程式の解法

前節で求めた方程式を解くにあたって，初期条件として，錘を原点の真下距離 r_0 の位置に置き，この錘に x 軸となす角 ϕ の方向に初速度 v_0 を与えるものとする．式で表すと，

$$t = 0 \text{ のとき } r = r_0, \quad \dot{r} = v_0 \cos \phi, \quad \theta = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{v_0 \sin \phi}{r_0} \quad (3.1)$$

となる．ここで， r_0 と ℓ あるいは L との大小関係は問わないものとする．また，角度 ϕ の範囲は $[0, \pi]$ とする．この r に関する 2 つの条件を (2.7) 式の r に適用すると

$$A \cos \alpha = r_0 - L, \quad A \sin \alpha = \frac{v_0 \cos \phi}{\omega} \quad (3.2)$$

となるので，これから， A, α は

$$A = \pm \sqrt{(r_0 - L)^2 + (v_0 \cos \phi / \omega)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{v_0 \cos \phi}{(r_0 - L)\omega} \quad (3.3)$$

と求められる．ただし， α の範囲は， $[-\pi/2, \pi/2]$ とし， A の符号は $r_0 - L$ の符号に合わせるものとする．以下，この意味で A, α という文字をそのまま使うことにする．

¹⁾ 前回の論文では，この式は $r = A \sin(\omega t - \alpha) + L$ となっていたが，今回は sine 関数ではなく cosine 関数にする．

ここで、方程式 (2.8) を解析的に扱うために、独立変数を t から p へ

$$p = \sin\left(\frac{\omega t - \alpha}{2}\right) \quad (3.4)$$

と変数変換する。このとき時間 t の 1 階微分, 2 回微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{dp}{dt} \frac{d}{dp} = \frac{\omega}{2} \cos\left(\frac{\omega t - \alpha}{2}\right) \frac{d}{dp}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2 p}{dt^2} \frac{d}{dp} + \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{dp^2} = \frac{\omega^2}{4} \left[(1-p^2) \frac{d^2}{dp^2} - p \frac{d}{dp}\right] \quad (3.5)$$

と変換されるので、これを用いて方程式 (2.8) を書き直すと、

$$(A + L - 2Ap^2)(1-p^2) \frac{d^2 \theta}{dp^2} - (9A + L - 10Ap^2)p \frac{d\theta}{dp} + 4(L - \ell)\theta = 0 \quad (3.6)$$

となる。これで微分の前の係数はすべて p の多項式になる。ここで仮に $\theta = p^\gamma$ と置くとその決定方程式は $\gamma(\gamma-1) = 0$ となるので、この解は定数項から始まる級数か、あるいは p の 1 乗から始まる級数で解ける。そこで、この θ を

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n \quad (3.7)$$

と置いて、方程式に代入し、 p の冪を揃えてからその係数をゼロとして、 C_n が満たすべき漸化式を求めると、 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$(A + L)(n+2)(n+1)C_{n+2} - [3A(n^2 + 2n) + Ln^2 - 4(L - \ell)]C_n + 2A(n^2 - 4)C_{n-2} = 0 \quad (3.8)$$

となる。ここで、添え字 n の値が負のときの係数 C_n はゼロとする。この式から C_0 の値を適当に決めると $C_2, C_4, C_6, \dots$ と偶数番号の C_n の値が決まり、また、 C_1 の値を適当に決めると、 $C_3, C_5, C_7, \dots$ と奇数番号の C_n の値が決まる。ただし、これら C_n の値を解析的にコンパクトな形で求めることは不可能と考えられる。ここでは、 $C_0 = 1, C_1 = 0$ としてこれら係数を決めたときの関数 θ を $F_0(p)$ と書き、同じく、 $C_0 = 0, C_1 = 1$ として係数を決めたときの θ を $F_1(p)$ と書く。これら関数 $F_0(p), F_1(p)$ は、それぞれ、変数 p の偶関数、奇関数となる。元の時間 t と変数 p とは (3.4) 式の関係があるので、以下では、これら関数 $F_0(p(t)), F_1(p(t))$ を単に $F_0(t), F_1(t)$ と書くことにする。ただし、このように書いたときは、 $F_0(p), F_1(p)$ の p に関する偶奇性は、そのままでは $F_0(t), F_1(t)$ の t に関する偶奇性には繋がらないことに注意する。ここで、これら関数 $F_0(t), F_1(t)$ の初めの 2 項だけを求めておくと

$$\begin{aligned} F_0(t) &= 1 - \frac{2(L - \ell)}{A + L} \sin^2\left(\frac{\omega t - \alpha}{2}\right) + \dots, \\ F_1(t) &= \sin\left(\frac{\omega t - \alpha}{2}\right) + \frac{9A - 3L + 4\ell}{6(A + L)} \sin^3\left(\frac{\omega t - \alpha}{2}\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。

かくて、方程式 (2.8) の一般解 $\theta(t)$ は、 C, D を任意定数として、

$$\theta(t) = CF_0(t) + DF_1(t) \quad (3.10)$$

と書かれる。これに (3.1) 式の θ に関する初期条件 $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = v_0 \sin \phi / r_0$ を適用すると、

$$CF_0(0) + DF_1(0) = 0, \quad C\dot{F}_0(0) + D\dot{F}_1(0) = \frac{v_0 \sin \phi}{r_0} \quad (3.11)$$

となり、これら 2 式から、

$$C = \frac{-v_0 \sin \phi}{r_0(F_0(0)\dot{F}_1(0) - \dot{F}_0(0)F_1(0))}F_1(0), \quad D = \frac{v_0 \sin \phi}{r_0(F_0(0)\dot{F}_1(0) - \dot{F}_0(0)F_1(0))}F_0(0) \quad (3.12)$$

と求められる。ただし、この分母にある Wronskian の部分については、もし、時間 t が $t = \alpha/\omega$ であれば、(3.9) 式を用いて簡単に

$$(F_0\dot{F}_1 - \dot{F}_0F_1)\Big|_{t=\alpha/\omega} = \frac{\omega}{2} \quad (3.13)$$

と計算される。しかし、 $t = 0$ のときはそうはいかない。そこでもう少し一般的に考えてみよう。すなわち、一般の時間 t における Wronskian を

$$W(t) = \begin{vmatrix} F_0(t) & F_1(t) \\ \dot{F}_0(t) & \dot{F}_1(t) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

と定義しておく。ここで使われている関数 $F_0(t)$, $F_1(t)$ は方程式 (2.8) の解なので、

$$\frac{d^2F_0}{dt^2} + P(t)\frac{dF_0}{dt} + Q(t)F_0 = 0, \quad \frac{d^2F_1}{dt^2} + P(t)\frac{dF_1}{dt} + Q(t)F_1 = 0 \quad (3.15)$$

を満たす。ただし、ここで、関数 $P(t)$, $Q(t)$ を

$$P(t) = \frac{-2A\omega \sin(\omega t - \alpha)}{A \cos(\omega t - \alpha) + L}, \quad Q(t) = \frac{g}{A \cos(\omega t - \alpha) + L} \quad (3.16)$$

と定義する。これらの式を用いると (3.14) 式で定義した $W(t)$ の時間微分は (3.15) 式を用いて、また、時間 t の表示は省略して、

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 \\ \dot{F}_0 & \dot{F}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 \\ -P\dot{F}_0 - QF_0 & -P\dot{F}_1 - QF_1 \end{vmatrix} = -PW \quad (3.17)$$

と変形され、結果として、 W の微分方程式

$$\frac{dW(t)}{dt} = -P(t)W(t) \quad (3.18)$$

が得られる。これを変数分離してから積分形にすると、(3.16) 式の $P(t)$ を用いて

$$\int \frac{dW}{W} = \int \frac{2A\omega \sin(\omega t - \alpha)}{A \cos(\omega t - \alpha) + L} dt \quad (3.19)$$

となる。この積分は容易に実行され、 R を積分定数として、

$$\log W(t) = -2 \log [A \cos(\omega t - \alpha) + L] + \log R, \quad \text{or} \quad W(t) = \frac{R}{[A \cos(\omega t - \alpha) + L]^2} \quad (3.20)$$

と求められる。ここで、 $t = \alpha/\omega$ のときの W は (3.13) 式ですでに $\omega/2$ と分かっているので、 R は

$$R = \frac{\omega}{2}(A + L)^2 \quad (3.21)$$

でなければならない。結果として時間の関数としての Wronskian は

$$W(t) = \frac{\omega (A + L)^2}{2[A \cos(\omega t - \alpha) + L]^2} \quad (3.22)$$

と求められたことになる．これから (3.12) 式の分母に表れる $t = 0$ の Wronskian は

$$W(0) = \frac{\omega(A+L)^2}{2(A\cos\alpha+L)^2} = \frac{\omega(A+L)^2}{2r_0^2} \quad (3.23)$$

となる．ここで，(3.2) の第 1 式 $A\cos\alpha = r_0 - L$ を用いた．これを用いて (3.12) 式の C, D をもう一度

$$C = \frac{-2r_0v_0\sin\phi}{\omega(A+L)^2}F_1(0), \quad D = \frac{2r_0v_0\sin\phi}{\omega(A+L)^2}F_0(0) \quad (3.24)$$

と書き直しておく．

以上の結果から，(3.1) 式の初期条件を満たす解 $\theta(t)$ は，(3.10)，(3.24) 式より，

$$\theta(t) = \frac{2r_0v_0\sin\phi}{\omega(A+L)^2}[F_0(0)F_1(t) - F_1(0)F_0(t)] \quad (3.25)$$

と求められたことになる．

4 数値計算

ここでは，前節の解析に基づいた数値解析を実行してみる．錘の質量 m ，ばねの自然長 ℓ とばね定数 k ，重力加速度 g ，および，錘の初速度 v_0 とその角度 ϕ の各パラメータについて，適当ではあるが，

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad k = 30 \text{ N/m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = 2 \text{ m/s}, \quad \phi = 135 \text{ 度} (= 3\pi/4) \quad (4.1)$$

と設定する．前回の論文では錘の初期位置を原点から真下の距離がばねの自然長のところに限定していた．今回はこの制限がなくなったので，錘の初期位置 r_0 については，ばねの自然長と同じ $r_0 = 1 \text{ m}$ の場合と $r_0 = 1.5 \text{ m}$ の 2 通りについて試してみる．この $r_0 = 1.5 \text{ m}$ というのは，錘を付けてばねが伸びたときの長さ $L = 1.326 \text{ m}$ より大きいところである．また，前回は錘に与える初速度の方向は水平方向に限定していたが今回はこの制限もなくなったので，初速度の打ち出し角を図 1 の Ox から反時計方向に測って 135 度 の方向として試してみた．これらのパラメータを設定したうえで， r と θ を時間の関数として求めた (2.7) 式，および，(3.25) 式に従って数値計算を実行する．なお，ここでは，ばねの傾き角 θ を求めるための級数展開 (3.7) 式について $n = 61$ までの和を求めた．以下の図 2，図 3 に，錘の初期位置を $r_0 = 1 \text{ m}$ としたときの r, θ を時間の関数として求めたもの，および，それに基づいて錘の軌跡を求めたものを図示する．

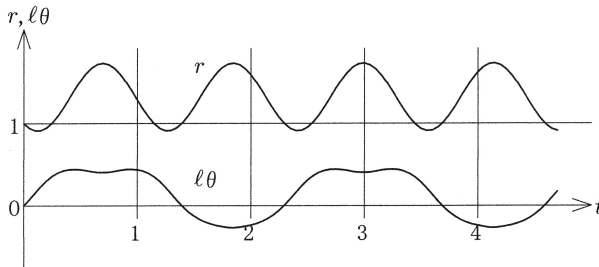


図 2 時間の関数としての $r, \ell\theta$, ($r_0 = 1 \text{ m}$)

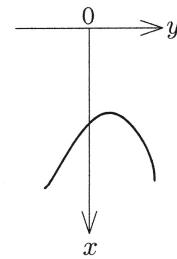


図 3 錘の軌跡 ($r_0 = 1 \text{ m}$)

前回のときと同じく， θ の振動周期は r の周期の 2 倍になっている．また，錘を打ち出す角度を Ox から反時計方向に測って 135 度 という斜め上方向にしたため，錘の軌跡は左右が非対称の図形になっている．

つぎの図 4, 図 5 には錘の初期位置を $r_0 = 1.5 \text{ m}$ としたときの図を示す.

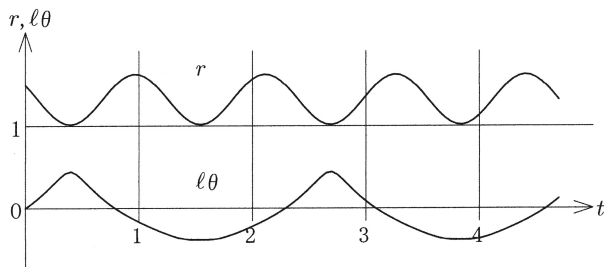


図 4 時間の関数としての $r, l\theta$, ($r_0 = 1.5 \text{ m}$)

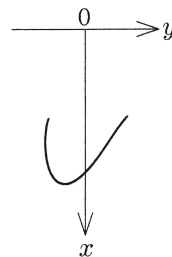


図 5 錘の軌跡 ($r_0 = 1.5 \text{ m}$)

図 3 に示す錘の軌跡は上に凸であるが, 図 5 では下に凸になっている. これは, 錘の初期位置 r_0 が, 錘を付けて垂れ下がったときのばねの長さ L より大きいのか小さいかで変わるためである.

5 おわりに

この計算を始める前は, 錘の軌跡は一般のリサージュ曲線のような複雑怪奇なものになるだろうと思っていた. ところが実際に求めてみるとそうはならず, 意外にも単純な曲線の上を往復するだけのものになってしまった. これは (2.7) 式の r , および, (3.4) (3.7) 式の θ , すなわち,

$$r = A \cos(\omega t - \alpha) + L, \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin^n \left(\frac{\omega t - \alpha}{2} \right) \quad (5.1)$$

から分かるように, 両方ともに三角関数から構成された周期関数で, θ の方の周期は r の方の周期の 2 倍になっているからと考えられる. あるいは, より具体的な書き方をすると, 三角関数の倍角公式を用いて, r の式から $\sin[(\omega t - \alpha)/2]$ を求めて,

$$\sin \left(\frac{\omega t - \alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{A + L - r}{2A}} \quad (5.2)$$

となり, これを θ の式に代入すると

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n C_n \left(\frac{A + L - r}{2A} \right)^{n/2} \quad (5.3)$$

となって, θ は r の高々 2 価関数になるにすぎない. したがって, 一般のリサージュ曲線のような複雑怪奇なものにはなり得ないということである.

球面線形補間の導出

- 金谷の導出法 -

矢野 忠^{*1}

Derivation of Spherical Linear Interpolation

- Kanaya's Method -

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

『3D-CG プログラマーのためのクォータニオン入門』 [1] には球面線形補間について述べられている。しかし、これが理解できなかった。私がこの書を読もうとしたのは多分 2014 年かそれよりも前のことである。さらに、同じ金谷（かなや）さんの書かれたインターネット上の文書『ベクトル・複素数・クォータニオン』 [2] があり、ここにも球面線形補間の説明があり、これも読んだのだが、こちらも理解できなかった^{*3}。

もっとも今考えてみると、そのときでもこれらの球面線形補間の説明を理解できるだけの知識はすでに十分持っていたはずである。だから、私にこれをどうしても理解するぞという気力が足りなかったかと思われる。

最近になってたまたま [1] [2] の当該の箇所を読む機会があり、以前理解できないと思っていたところを考えてみようと思つた。以下はその解説の結果である^{*4}。

2 金谷の方法

金谷の方法などといふような名前をつけるべきではないかもしれないが、簡単のためにそう呼んでおこう。

ここで述べることは、すでに『四元数の発見』 [3] の第 10 章「球面線形補間」に球面線形補間 3 として書いた内容とほとんど同じであるが、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが直交していないベクトルであるときに、 $\mathbf{x}$ に直交するベクトルをどうやって求めるか。

一つの解答は『四元数の発見』に示したように Gram-Schmidt の直交化法を使うということである。他に方法はないのかといえ、他にも Gram-Schmidt の直交化法以外にもある。ここでは、その求め方を述べよう。金谷はその方法について述べているのだが、その考えを徹底して使っていないように思える。ここでは『四元数の発見』に用いた記号等を使う。

いま、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが直交していないベクトルであるとき、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に直交するベクトルは、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のベクトル積 $\mathbf{u}$ をつくれば、求めることができる。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (2.1)$$

である（図 1 を参照せよ）。

このベクトル $\mathbf{u}$ はベクトル $\mathbf{x}$ にも $\mathbf{y}$ にも垂直なベクトルである。このことは $\mathbf{u}$ とベクトル $\mathbf{x}$ または $\mathbf{y}$ とのス

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 金谷を（かなや）とフリガナをつけたのは同じ金谷で（かなたに）と読む名誉教授の方が別におられるから、その方と区別するためである。他に他意はない。

^{*4} 疑問点について単刀直入に書きたかったので、球面線形補間について本文では述べていない。それについて知らない方は付録 1 の部分を先に読んでください。

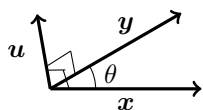


図1 x と y に垂直なベクトル u

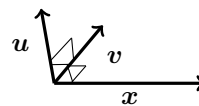


図2 x と u に垂直なベクトル v

カラー積をとってみると

$$\begin{aligned}
 x \cdot u &= x \cdot (x \times y) \\
 &= y \cdot (x \times x) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 y \cdot u &= y \cdot (x \times y) \\
 &= x \cdot (y \times y) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

となることからわかる。

ところで求めたいベクトルは x と y がつくる平面上で x に垂直なベクトル v である。そして、そのベクトル v をどのように簡便にベクトル y と x で表すかが問題である。

上に述べた条件のついた、 x に垂直なベクトル v はすでにつくられたベクトル u とベクトル x に垂直なベクトルとしてつぎのように表すことができる。

$$v = u \times x \tag{2.4}$$

ベクトル積の定義から v はベクトル u とベクトル x に垂直なベクトルである（図2を参照せよ）。

このことを確かめるために v と x または u とのスカラー積をとってみると

$$\begin{aligned}
 x \cdot v &= x \cdot (u \times x) \\
 &= u \cdot (x \times x) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 u \cdot v &= u \cdot (u \times x) \\
 &= x \cdot (u \times u) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

がベクトルのスカラー三重積の性質からわかる。

すなわち、ベクトル v は x と直交している。ではベクトル v はベクトル x と y でどのように表されるのだろうか。そのことを3節で考えることにしよう。

3 ベクトル v を x と y で表す

ベクトル v はベクトル x と y でどのように表されるのか。そのことをこの3節では考えよう。それにはまずベクトル v の定義にもどることにしよう。

$$\begin{aligned}
 v &= u \times x \\
 &= -x \times u \\
 &= -x \times (x \times y)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

この形になるとベクトル三重積の公式，いわゆる bac-cab ルールが[§]

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

使える．

この公式を使えば，

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \quad (3.3)$$

となる．ここで

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 = r^2 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \theta = r^2 \cos \theta \quad (3.5)$$

である．

いま

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = r, \quad (r > 0) \quad (3.6)$$

とそれぞれベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の大きさは任意の正の数 r であると仮定している．この r の値を $r = 1$ とするのが普通である．

そうすれば，

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x} \quad (3.7)$$

となる．実はこれは Gram-Schmidt の直交化法で求められていた， $\mathbf{x}$ に垂直なベクトルでもあった．

ただし，注意すべきことが一つある．それはこのベクトル $\mathbf{v}$ はこのままでは $\mathbf{x}$ や $\mathbf{y}$ とちがって $\mathbf{v}$ の大きさ $|\mathbf{v}|$ は 1 ではないことである．

4 $\mathbf{v}$ の正規化

この 4 節ではベクトル $\mathbf{v}$ の正規化を行う．3 節で求めたところでは，このベクトル $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x} \quad (3.7)$$

であった．それでこの $|\mathbf{v}|^2$ を計算しよう．

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= [\mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x}] \cdot [\mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x}] \\ &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (2 \cos \theta) \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\cos^2 \theta) \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \\ &= |\mathbf{y}|^2 + (\cos^2 \theta) |\mathbf{x}|^2 - 2 |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| (\cos^2 \theta) \\ &= 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \\ &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

であるから， $\mathbf{v}$ の大きさ $|\mathbf{v}| = \sin \theta$ である．上の式で $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$ であることを用いた．

ベクトル $\mathbf{v}$ を $|\mathbf{v}| = 1$ に正規化するためには， $\mathbf{v}$ を $|\mathbf{v}|$ で割っておけばよい．すなわち，

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sin \theta} [\mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x}] \quad (4.2)$$

が求めたいと思っていたベクトルである．このベクトルを $\mathbf{w}$ と表すことにすれば，

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sin \theta} [\mathbf{y} - (\cos \theta) \mathbf{x}] \quad (4.3)$$

となる．

5 付録 1 球面線形補間とは何か

球面線形補間 (Spherical Linear Interpolation) とは何か^{*5}.

ある平面上に大きさの等しい一次独立なベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とがあるとしよう. このとき, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の中間に同じ大きさのベクトル $\mathbf{z}$ を求めたい. すなわち, ベクトル $\mathbf{z}$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とで表す式を求めたい. ただし, ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とベクトル $\mathbf{z}$ がすべて同じ大きさであるとする条件をつけた上で求めたい.

半径 $r = 1$ の球を考え, その球の中心からその球面上のいずれかの点に向かうベクトルを考えればよい. ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とがあるとき, それらのベクトルの終点の球面上の 2 点と球の中心を通る平面を考えれば, その平面と球面との交線は球の大円となる. この大円上のベクトル $\mathbf{z}$ はベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とでどのように表されるかという問題である. そのときにベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とのなす角を θ とし, またベクトル $\mathbf{x}$ とベクトル $\mathbf{z}$ とのなす角を $t\theta$ とする.

この問題は 1985 年に Shoemake によって解かれている [5]. それをここに示すと

$$\mathbf{z} = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \mathbf{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \mathbf{y} \quad (5.1)$$

である. しかし, Shoemake はこの導出法を示してはいない.

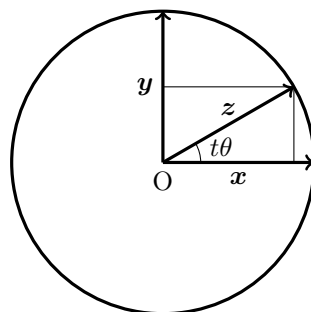
それで, このいわゆる球面線形補間の式をどうやって導くかが多くの人によって議論されている. 日本ではかなり早い時期に金谷もそれに取り組んだ一人であろう. そして, 彼がその導出法を書いた書籍とかインターネットのサイトがある. ところが私には彼の説明が理解できなかった. これがこのエッセイを書く理由となった.

そのいきさつをここで説明をしておこう.

もし, ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが直交していれば, その中間のベクトル $\mathbf{z}$ は, $\mathbf{z}$ と $\mathbf{x}$ とのなす角を $t\theta$ とすれば,

$$\mathbf{z} = (\cos t\theta) \mathbf{x} + (\sin t\theta) \mathbf{y}, \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (5.2)$$

と表すことが図 3 からすぐにわかる^{*6}. では, ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが直交していないときには, どのようにベクトル



$$\mathbf{z} = (\cos t\theta) \mathbf{x} + (\sin t\theta) \mathbf{y}$$

図 3 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが垂直な場合の球面線形補間ベクトル $\mathbf{z}$

ル $\mathbf{z}$ は表されるか. 答えは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とから, $\mathbf{x}$ に直交した正規化されたベクトル $\mathbf{w}$ をつくれば, $\mathbf{z}$ は

$$\mathbf{z} = (\cos t\theta) \mathbf{x} + (\sin t\theta) \mathbf{w}, \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (5.3)$$

^{*5} 四元数の球面線形補間については [4] を参照せよ.

^{*6} (5.2) を補外 (extrapolation) に使うときには, パラメータ t の $0 \leq t \leq 1$ の条件をはずす必要がある. すなわち, パラメータ t の値として負の値や 1 よりも大きな値をとる必要がある.

と表すことができる．それで問題は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とから， $\boldsymbol{x}$ に直交したベクトル $\boldsymbol{v}$ をどのようにしてつくるかである．このようなベクトル $\boldsymbol{v}$ をつくることができれば，それを正規化することはたやすいし，そのやり方は 4 節で述べた．

すでにベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とから， $\boldsymbol{x}$ に直交したベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める方法として，Gram-Schmidt の方法を用いることをすでに小著『四元数の発見』 [6] で示したが，ここで示したような金谷の方法もあることがわかった．

6 付録 2 (5.3) を用いた (5.1) の導出

(5.3) に (4.3) を導入すれば，(5.1) が得られる．難しい計算ではないが，その導出を行う．

まず $\boldsymbol{z}$ を表す式 (5.3) の右辺の第 2 項を計算する．

$$\begin{aligned} (\sin t\theta)\boldsymbol{w} &= \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} [\boldsymbol{y} - (\cos \theta)\boldsymbol{x}] \\ &= -\frac{\sin t\theta \cos \theta}{\sin \theta} \boldsymbol{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる．

したがって， $\boldsymbol{x}$ の係数は (5.3) の第 1 項の係数 $\cos t\theta$ と上の式の $\boldsymbol{x}$ の係数の和であるから

$$\begin{aligned} \cos t\theta - \frac{\sin t\theta \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \cos t\theta - \cos \theta \sin t\theta) \\ &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

である．

これらから

$$\boldsymbol{z} = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \boldsymbol{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \boldsymbol{y}$$

が求められる．これが (5.1) である．

7 付録 3 金谷の導出の検討

このエッセイで用いたベクトルの記号で [1] の導出の検討をしよう．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直交しないときには，この 2 つのベクトルから (2.1) の新しいベクトル $\boldsymbol{u}$ をつくり，それからベクトル $\boldsymbol{x}$ に (2.4) の垂直なベクトル $\boldsymbol{v}$ をつくるところも同じである．また， $\boldsymbol{v}$ の大きさで正規化することまで同じである．

しかし， $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とで (3.7) のように表していない．したがって (5.3) に $\boldsymbol{w}$ の式 (4.3) を代入して (5.1) を導出する過程の記述がない．

それに (5.1) の導出についての論理は類似性による推理であり，厳密な論理ではないと思われる．もちろん結果の式はその導出の論理のあいまいさにもかかわらず，正しい．

また [2] の導出も [1] と同様であるが， $\boldsymbol{v}$ の定義を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{u} \tag{7.1}$$

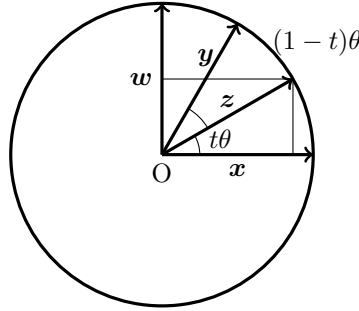
とまちがえている．この方式にしたがうと正しい球面線形補間の式は導出できないはずだが，実際にはこの方式によっては式を導出していないので，この後の記述はほとんど [1] と同じである．もちろん，結果の式は正しい式が与えられている．

ついでに『3D グラフィックスのための数学入門』 [7] のベクトルの球面線形補間の箇所を見てみよう．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直交しているときの説明は正しいが、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直交しないときの導出がベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直交しているとの式との類似性を根拠にしているように思われる。金谷の説明を参照して、この部分を書かれたのではないかと推測される。球面線形補間の導出の論理はあまりはっきりしないが、結果の式は正しい。

8 付録 4 世戸の導出法

このエッセイを査読をしてもらったときに、世戸憲治氏のご教示くださった球面線形補間の導出法について述べておく。



$$\boldsymbol{z} = (\cos t\theta)\boldsymbol{x} + (\sin t\theta)\boldsymbol{w}$$

図 4 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ とが垂直な場合の球面線形補間ベクトル $\boldsymbol{z}$

図 4 のようにベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向に座標軸の x 軸をとる。またベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ でつくる平面上で、ベクトル $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{x}$ に垂直なベクトルとする。このとき 4 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ はそれぞれのベクトルの大きさが 1 であり、またベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とし、ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{z}$ のなす角を $t\theta$ とすれば、これらのベクトルを 2 次元の座標成分で表せば、

$$\boldsymbol{x} = (1, 0) \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{y} = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta(1, 0) + \sin \theta(0, 1) \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{z} = (\cos t\theta, \sin t\theta) = \cos t\theta(1, 0) + \sin t\theta(0, 1) \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{w} = (0, 1) \tag{8.4}$$

と表される。(8.2) を $(0, 1)$ について解けば、

$$\boldsymbol{w} = (0, 1) = \frac{1}{\sin \theta}[\boldsymbol{y} - (\cos \theta)\boldsymbol{x}] \tag{8.5}$$

となる。ここで、ベクトルを解析幾何的な表示にしたことと、 $\boldsymbol{x}$ に垂直な正規ベクトル $\boldsymbol{w}$ を導入すれば、ベクトル $\boldsymbol{z}$ と同様にベクトル $\boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ で (8.2) のように表される。

それで、ベクトル $\boldsymbol{y}$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ で (8.2) と表せることに気がつけば、(8.2) をベクトル $\boldsymbol{w}$ について解けば、 $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ で表した式 (8.5) が求められる。

この導出法では Gram-Schmidt の正規直交化の方法も、2 回もベクトル積をつくる必要もなかった。

(2022.9.7)

参考文献

- [1] 金谷一朗, 『3D-CG プログラマーのためのクォータニオン入門』(工学社, 2004) 135-140
- [2] 金谷一朗, 『ベクトル・複素数・クォータニオン』 www.nishilab.sys.es.osaka-u.ac.jp (2002) 60-62
- [3] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 152-186
- [4] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 162-165
- [5] K. Shoemake, Animating Rotations with Quarternion Curves, Computer Graphics 19(3) (1985) 245-254
- [6] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 168-170, 174-175
- [7] 郡山彬, 原正雄, 峯崎俊哉, 『3D グラフィックスのための数学入門』(森北出版, 2015) 129-138

三角関数の還元公式 4

矢野 忠^{*1}

Reduction Formulae for Trigonometric Functions 4

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

これは以前に書いた「三角関数の還元公式」 [1]-[3] の続編である。

三角関数の還元公式とは、たとえば、三角関数 $\sin(\pi/2 - \theta)$ を $\cos \theta$ に還元するような公式である。三角関数の還元公式としてどんなものがあるかは 2 節にまとめている。

まず、三角関数の還元公式を用いる必要があるときにどうすればよいかを以下に know-how としてまとめている^{*3}。

一般角の三角関数で偏角 $\pi/2 \pm \theta, \pi \pm \theta, 3\pi/2 \pm \theta$ 等を含む三角関数を θ の三角関数で表すには、普通これらを公式として記憶することはしないで、 θ を正の鋭角と仮定して図を描いて変形するのが常道である。結果として

1. $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$, n が奇数のとき $\sin$ は $\cos$ へ, $\cos$ は $\sin$ へ

2. $n\pi \pm \theta$, n が整数のとき $\sin$ は $\sin$ へ, $\cos$ は $\cos$ へ

となることを記憶しておいて、 θ を鋭角として、後はどの象限に角 $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ または $n\pi \pm \theta$ があるかを見て、その象限での $\sin$ または $\cos$ の符号を間違わないようにつけてやればよい。すなわち、 $\cos$ は第 1, 4 象限で正の符号をとり、第 2, 3 象限で負の符号をとる。また $\sin$ は第 1, 2 象限で正の符号をとり、第 3, 4 象限で負の符号をとることにだけ注意すればよい。

三角関数の還元公式への変換の know-how としてはこれだけ知っておけば、十分なのだが、これらの還元公式をいくつかの方法で導出してみようというのが、このエッセイの目的である。

2 還元公式の種類とその導出方法

取り扱う対象としてどのような公式があるか。またその還元公式を導出する方法としてどのようなものが考えられるか。まずそれについてあげておく。

還元公式の主な対象は三角関数の周期性、負角の公式、余角の公式、補角の公式およびそれらに類似な公式（前に与えた公式の偏角 θ を $-\theta$ と置換して得られる公式）である。

取り扱う対象を具体的に表せば、

[三角関数の周期性]

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta, \quad (2.1)$$

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta \quad (2.2)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} これは私が高校数学の学習参考書 [4] で学んだことである。しかし、文章の表現は少し変更してある。

[$2n\pi - \theta$ の公式]

$$\cos(2n\pi - \theta) = \cos \theta, \quad (2.3)$$

$$\sin(2n\pi - \theta) = -\sin \theta \quad (2.4)$$

[負角の公式]

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad (2.5)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (2.6)$$

[余角の公式]

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta, \quad (2.7)$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta \quad (2.8)$$

[$\pi/2 + \theta$ の公式]

$$\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta, \quad (2.9)$$

$$\sin(\pi/2 + \theta) = \cos \theta \quad (2.10)$$

[補角の公式]

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad (2.11)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad (2.12)$$

[$\pi + \theta$ の公式]

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \quad (2.13)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad (2.14)$$

[$3\pi/2 - \theta$ の公式]

$$\cos(3\pi/2 - \theta) = -\sin \theta, \quad (2.15)$$

$$\sin(3\pi/2 - \theta) = -\cos \theta \quad (2.16)$$

[$3\pi/2 + \theta$ の公式]

$$\cos(3\pi/2 + \theta) = \sin \theta, \quad (2.17)$$

$$\sin(3\pi/2 + \theta) = -\cos \theta \quad (2.18)$$

がある。またこれらの公式に類似な公式がもし他にあれば、それらをすべて含む。

では、これらの還元公式を導く方法としてどんなもの考えたらいだろうか。つぎのような方法が思いつかれるであろう。

1. 円の対称性
2. グラフの移動
3. Euler の公式
4. 回転行列
5. Maclaurin 展開
6. 三角関数の加法公式 (定理)
7. 偏角の置換 $\theta \leftrightarrow -\theta$ (または $x \leftrightarrow -x$)

8. その他

(1) 直角三角形の余角の公式

(2) $\cos(\pi/2 \pm \theta)$, $\sin(\pi/2 \pm \theta)$ を 2 回用いる

といった方法が考えられる．[1][2] では円の対称性を用いての導出を行った．また [3] ではグラフの移動による導出をした．このエッセイでは 3-7 の方法による導出について述べる．

3 Euler の公式を用いた導出

もし Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1)$$

を知っているならば，三角関数の還元公式は簡単に導くことができる．その導出に必要な知識を先ず与えておこう*4．それは

$$e^{i(\pi/2)} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i(3\pi/2)} = -i$$

$$e^{2i\pi} = 1$$

である．これは Euler の公式の偏角 x をそれぞれ $x = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ とおいても得られるが，それよりも Euler の公式の幾何学的意味， e^{ix} は単位円周上の点 A を原点のまわりの反時計回りの角度 x の 2 次元回転を与えることから直接に得られる（図 1 参照）．この知識があれば， n を整数とするととき $e^{i(2n\pi+x)} = e^{ix}$ が成り立つから

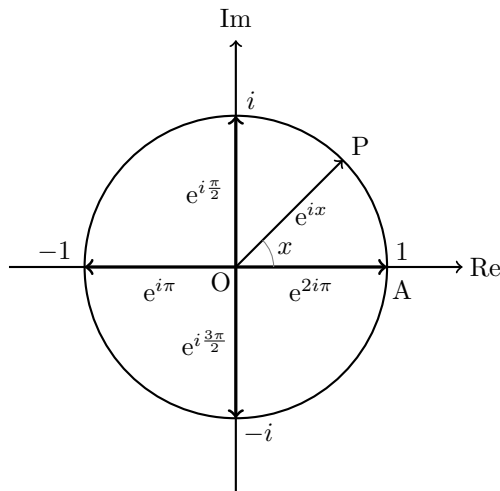


図 1 $e^{i(\pi/2)} = i, \dots$ の図

$$\cos(2n\pi + x) + i \sin(2n\pi + x) = \cos x + i \sin x$$

*4 この節以降では 1-2 節で θ で表した角度を x で表す．

において、この両辺の実数部と虚数部とはそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(2n\pi + x) &= \cos x \\ \sin(2n\pi + x) &= \sin x\end{aligned}$$

と三角関数の周期性が得られる。

さらに $e^{i(2n\pi - x)} = e^{-ix}$ から、

$$\cos(2n\pi - x) + i \sin(2n\pi - x) = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(2n\pi - x) &= \cos(-x) \\ \sin(2n\pi - x) &= \sin(-x)\end{aligned}$$

と負角の三角関数の周期性が得られる。

つづいて $e^{i(-x)} = e^{-ix}$ から

$$\cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}$$

と負角の公式が求められる。

さらに、 $e^{i(\pi/2 - x)} = ie^{-ix}$ から

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - x) + i \sin(\pi/2 - x) &= i(\cos x - i \sin x) \\ &= \sin x + i \cos x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - x) &= \sin x \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos x\end{aligned}$$

と余角の公式が求められる。

$e^{i(\pi/2 + x)} = ie^{ix}$ から

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + x) + i \sin(\pi/2 + x) &= i(\cos x + i \sin x) \\ &= -\sin x + i \cos x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + x) &= -\sin x \\ \sin(\pi/2 + x) &= \cos x\end{aligned}$$

と $\pi/2 + x$ の公式が求められる。

$e^{i(\pi - x)} = -e^{-ix}$ から

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) + i \sin(\pi - x) &= -(\cos x - i \sin x) \\ &= -\cos x + i \sin x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

と補角の公式が求められる.

$$e^{i(\pi+x)} = -e^{ix} \text{ から}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) + i \sin(\pi + x) &= -(\cos x + i \sin x) \\ &= -\cos x - i \sin x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x\end{aligned}$$

と $\pi + x$ の公式が求められる.

$$e^{i(3\pi/2-x)} = -ie^{-ix} \text{ から}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 - x) + i \sin(3\pi/2 - x) &= -i(\cos x - i \sin x) \\ &= -\sin x - i \cos x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 - x) &= -\sin x \\ \sin(3\pi/2 - x) &= -\cos x\end{aligned}$$

と $3\pi/2 - x$ の公式が求められる.

$$e^{i(3\pi/2+x)} = -ie^{ix} \text{ から}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 + x) + i \sin(3\pi/2 + x) &= -i(\cos x + i \sin x) \\ &= \sin x - i \cos x\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいから、

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 + x) &= \sin x \\ \sin(3\pi/2 + x) &= -\cos x\end{aligned}$$

と $3\pi/2 + x$ の公式が求められる.

4 回転公式による導出

原点 O のまわりの角度 α の回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

である. つづいて角度 β の回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

である。この2つの回転をこの順序で行えば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta + \alpha) & -\sin(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

が成り立つ。したがって、三角関数の加法定理

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \quad (4.4)$$

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \quad (4.5)$$

が得られた*5

この2つの三角関数の加法定理が求まると、これから6節の加法定理による三角関数の還元公式と同じ手続きで還元公式を導出することができる。

またはほとんど同じことだが、つぎのようにも考えることができる。(4.3)の β に $\beta = \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$ を代入して、還元公式を導いてもよい。

まず $\beta = \pi$ のとき、 $\alpha = x$ とおけば、 $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\pi + x) & -\sin(\pi + x) \\ \sin(\pi + x) & \cos(\pi + x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos x & \sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となり、

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad (4.7)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad (4.8)$$

が得られる。

また、 $\beta = \pi, \alpha = -x$ とおけば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\pi - x) & -\sin(\pi - x) \\ \sin(\pi - x) & \cos(\pi - x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(-x) & \sin(-x) \\ -\sin(-x) & -\cos(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos x & -\sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となり、

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (4.10)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad (4.11)$$

が得られる。これは(4.7), (4.8)で $x \rightarrow -x$ としてもよい。こちらの方が簡単であろう。

つぎに、 $\beta = \frac{3}{2}\pi, \alpha = x$ とおけば、 $\cos \frac{3}{2}\pi = 0, \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{2}\pi + x) & -\sin(\frac{3}{2}\pi + x) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi + x) & \cos(\frac{3}{2}\pi + x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

*5 この行列の回転公式は加法定理からも導かれるので、加法定理からの独立性がないという考えもあるが、Eulerの公式を2次元の行列に書き変えたとの立場をとれば、加法定理とは独立である。付録2を参照せよ。

となるので,

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin x \quad (4.13)$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x \quad (4.14)$$

が得られる.

また, $\beta = \frac{3}{2}\pi, \alpha = -x$ とおけば, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0, \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ から,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) & -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) & \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(-x) & \cos(-x) \\ -\cos(-x) & \sin(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となるので,

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x \quad (4.16)$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x \quad (4.17)$$

が得られる. これは (4.13), (4.14) で $x \rightarrow -x$ とした方が簡単に求められる.

最後に, $\beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = x$ とおけば, $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

であるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad (4.19)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad (4.20)$$

が得られる.

$\beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = -x$ とおけば, $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(-x) & -\cos(-x) \\ \cos(-x) & -\sin(-x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

であるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (4.22)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (4.23)$$

が求められる. これは (4.19), (4.20) で $x \rightarrow -x$ とおきかえたほうが簡単に求められる.

5 Maclaurin 展開による導出

Maclaurin 展開を知っているか、またはその求め方を知っていれば、還元公式を導くことができる。

$\cos x$ の Maclaurin 展開は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (5.1)$$

であるから、この式に $-x$ を代入すれば、右辺は x の偶数べき乗の項しか現れないから、直ちに

$$\cos(-x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x \quad (5.2)$$

と $\cos$ の負角の公式が得られる。

また $\sin x$ の Maclaurin 展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (5.3)$$

であるから、この式に $-x$ を代入すれば、右辺は x の奇数べき乗の項しか現れないから、直ちに

$$\sin(-x) = - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right] = -\sin x \quad (5.4)$$

と $\sin$ の負角の公式が得られる。

しかし、他の還元公式は上の $\cos x, \sin x$ の Maclaurin 展開の式に代入したのではちょっとそれをどうまとめたらいいかわからなくなる。しかし、もともとの Maclaurin 展開を求めた方法を思い出して、それぞれの Maclaurin 展開の係数を決めてやれば、手間はかかるが、問題は起こらない。

すべての公式をこの方法でここで求める必要はないだろうが、一つだけ余角公式の例を挙げておこう。証明したい式は

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

である。

$$\cos(\pi/2 - x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (5.5)$$

と x^n , ($n = 0, 1, 2, \dots$) の無限級数で表されたとする。ここで、 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ は未定係数である。次のような手順で係数を決めて行こう。いま、 $x = 0$ を (5.5) に代入すれば、

$$a_0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (5.6)$$

が得られる。(5.5) の両辺を x で微分すれば、 $[\cos(\pi/2 - x)]' = \sin(\pi/2 - x)$ であるから

$$\sin(\pi/2 - x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots \quad (5.7)$$

となる。 $x = 0$ を (5.7) に代入すれば、

$$a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (5.8)$$

が得られる。(5.7) の両辺を x で微分すれば、

$$-\cos(\pi/2 - x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots \quad (5.9)$$

となる。 $x = 0$ を (5.9) に代入すれば、

$$a_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (5.10)$$

が得られる。(5.9)の両辺を x で微分すれば,

$$-\sin(\pi/2 - x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \cdots \quad (5.11)$$

となる。 $x = 0$ を (5.11) に代入すれば,

$$a_3 = -\frac{1}{3!} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{3!} \quad (5.12)$$

となる。このようにして $a_4, a_5, \dots$ を求めれば

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{5!}, \dots$$

が得られ, これを (5.5) に代入すれば,

$$\cos(\pi/2 - x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sin x$$

が得られる。これは $\cos$ の余角の公式である。同じ方法で $\sin$ の余角の公式も同様にして求めることができる。

もっともこの方法で三角関数の還元公式を求めるのは手間がかかってしかたがない。それであまり実用的観点からはお勧めできる方法ではない。こうやっても求められるということを知っておいた方がいいというくらいのことであろう。

6 加法定理による導出

三角関数の加法定理は三角関数の還元公式を得るためにも役立つ*6。加法定理を思い出しておく

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (6.1)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (6.2)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad (6.3)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (6.4)$$

である。加法定理としては (6.1),(6.2) だけをしっかり覚えておけば, (6.3),(6.4) はすぐに (6.1),(6.2) から導くことができるので, (6.1),(6.2) だけを加法定理として記憶しているのが普通だろう。

この加法定理を用いて還元公式を得るにはつぎの表に与えられた三角関数の値を知っておかねばならない。またもちろんのことだが, 三角関数の $\cos, \sin$ は 2π の周期をもっていること, および, $\tan$ の周期は π であることを用いる。

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

それを知ってさえいればすぐに導くことができる。

はじめに負角の公式を加法定理 (6.3),(6.4) から導いてみよう*7。(6.3),(6.4) で $x = 0, y = x$ とおけば,

$$\cos(-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x, \quad (6.5)$$

$$\sin(-x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = -\sin x \quad (6.6)$$

*6 [5] [6] に加法定理から還元公式を導くことが述べられている。

*7 (6.1),(6.2) からは負角の公式を導くことはできない。

と負角の公式を導くことができる*⁸.

残りの還元公式をここで導くまでもないだろうが, 導いておこう.

まずはじめに (6.1),(6.2) で $x = 2n\pi, y = x$ とおけば,

$$\cos(2n\pi + x) = \cos 2n\pi \cos x - \sin 2n\pi \sin x = \cos x \quad (6.7)$$

$$\sin(2n\pi + x) = \sin 2n\pi \cos x + \cos 2n\pi \sin x = \sin x \quad (6.8)$$

となり, これは三角関数の周期性である.

つぎに (6.1), (6.2) で $x = 2n\pi, y = -x$ とおき, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos(2n\pi - x) &= \cos 2n\pi \cos(-x) - \sin 2n\pi \sin(-x) \\ &= \cos 2n\pi \cos(-x) \\ &= \cos(-x) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi - x) &= \sin 2n\pi \cos(-x) + \cos 2n\pi \sin(-x) \\ &= \cos 2n\pi \sin(-x) \\ &= \sin(-x) \end{aligned} \quad (6.10)$$

となり, これは負角の三角関数の周期性である.

さらに (6.1),(6.2) で $x = \pi/2, y = -x$ とおき, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - x) &= \cos(\pi/2) \cos(-x) - \sin(\pi/2) \sin(-x) \\ &= -\sin(\pi/2) \sin(-x) \\ &= \sin x \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - x) &= \sin(\pi/2) \cos(-x) + \cos(\pi/2) \sin(-x) \\ &= \sin(\pi/2) \cos(-x) \\ &= \cos x \end{aligned} \quad (6.12)$$

となり, 余角の公式が得られる.

(6.1),(6.2) で $x = \pi/2, y = x$ とおけば,

$$\cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2) \cos x - \sin(\pi/2) \sin x = -\sin x \quad (6.13)$$

$$\sin(\pi/2 + x) = \sin(\pi/2) \cos x + \cos(\pi/2) \sin x = \cos x \quad (6.14)$$

となり, $\pi/2 + x$ の公式が得られる.

つづいて, (6.1),(6.2) で $x = \pi, y = -x$ とおき, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= \cos \pi \cos(-x) + \sin \pi \sin(-x) \\ &= \cos \pi \cos(-x) \\ &= -\cos x \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin \pi \cos(-x) + \cos \pi \sin(-x) \\ &= \cos \pi \sin(-x) \\ &= \sin x \end{aligned} \quad (6.16)$$

となり, 補角の公式が得られる.

さらに, (6.1),(6.2) で $x = \pi, y = x$ とおけば,

$$\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \sin \pi \sin x = -\cos x \quad (6.17)$$

$$\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = -\sin x \quad (6.18)$$

*⁸ [6] を参照せよ.

となり, $\pi + x$ の公式が得られる.

(6.1),(6.2) で $x = 3\pi/2, y = -x$ とおき, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 - x) &= \cos(3\pi/2) \cos(-x) - \sin(3\pi/2) \sin(-x) \\ &= -\sin(3\pi/2) \sin(-x) \\ &= -\sin x\end{aligned}\tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}\sin(3\pi/2 - x) &= \sin(3\pi/2) \cos(-x) + \cos(3\pi/2) \sin(-x) \\ &= \sin(3\pi/2) \cos(-x) \\ &= -\cos x\end{aligned}\tag{6.20}$$

と $3\pi/2 - x$ の公式が得られる.

最後に, この (6.1),(6.1) で $x = 3\pi/2, y = x$ とおけば,

$$\cos(3\pi/2 + x) = \cos(3\pi/2) \cos x - \sin(3\pi/2) \sin x = \sin x\tag{6.21}$$

$$\sin(3\pi/2 + x) = \sin(3\pi/2) \cos x + \cos(3\pi/2) \sin x = -\cos x\tag{6.22}$$

となり, $3\pi/2 + x$ の公式が得られる.

7 偏角の置換

偏角の置換による還元公式の導出では周期性の公式 (6.7),(6.8) で $x \rightarrow -x$ とし, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos(2n\pi - x) &= \cos(-x) = \cos x \\ \sin(2n\pi - x) &= \sin(-x) = -\sin x\end{aligned}$$

と (6.9),(6.10) を導くこともできる.

余角公式 (6.11),(6.12) で $x \rightarrow -x$ とし, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + x) &= \sin(-x) = -\sin x \\ \sin(\pi/2 + x) &= \cos(-x) = \cos x\end{aligned}$$

と (6.13), (6.14) を導くこともできる.

補角の公式 (6.15), (6.16) で $x \rightarrow -x$ とし, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos(-x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= \sin(-x) = -\sin x\end{aligned}$$

と (6.17), (6.18) を導くこともできる.

$3\pi/2 - x$ の公式 (6.19),(6.20) で $x \rightarrow -x$ とし, 負角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/2 + x) &= -\sin(-x) = \sin x \\ \sin(3\pi/2 + x) &= -\cos(-x) = -\cos x\end{aligned}$$

と (6.21), (6.22) を導くこともできる.

もちろん, ここで得られた公式を既知として, 逆に偏角を置換して元の還元公式を導くこともできる.

8 おわりに

2 節に述べた還元公式の導出法のうち 3-7 による導出について述べた. その他の場合の導出法については別の機会に述べることにしたい.

9 付録 1 三角関数の微分の巡回性と高階微分

三角関数の還元公式に付随してここで三角関数の高階微分について述べたい．1 回微分はすでに

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (9.1)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (9.2)$$

である．さらに 3 回微分を続けると $\cos x, \sin x$ はそれぞれもとの関数にもどる (図 2 参照)．

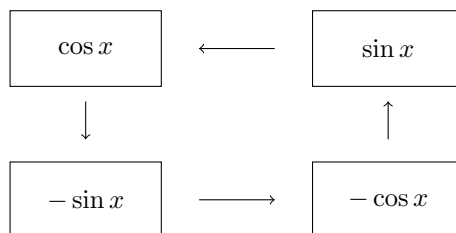


図 2 三角関数の微分の巡回性

具体的に $\sin x$ を x で微分すると $\cos x$ となる．それをさらに x で微分すると $-\sin x$ となる．続けてもう一度微分すると $-\cos x$ となる．もう一度微分すると $\sin x$ となり，元の $\sin x$ にもどる．このことを図 2 に示した．

これはどうしてなのか．この理由を考えてみよう． $\sin x$ の微分公式を還元公式を用いてつぎのように書き直してみよう．

$$(\sin x)' = \cos x = \sin(\pi/2 + x) \quad (9.3)$$

つぎに $\cos x$ の代わりに $\sin(\pi/2 + x)$ を x で微分すると

$$(\sin(\pi/2 + x))' = \cos(\pi/2 + x) = \sin(\pi + x) \quad (9.4)$$

と一度微分するたびに偏角は $\pi/2$ だけ増加する．したがって，

$$((\sin(\pi + x))' = \cos(\pi + x) = \sin(3\pi/2 + x) \quad (9.5)$$

最後にもう一度微分すると

$$\begin{aligned} (\sin(3\pi/2 + x))' &= \cos(3\pi/2 + x) \\ &= \sin(2\pi + x) \\ &= \sin x \end{aligned} \quad (9.6)$$

とはじめの関数 $\sin x$ にもどってくる．だから 4 回微分することによって $\sin x$ 関数が元の $\sin x$ 関数にもどるのは実は $\sin x$ の周期が 2π であったことによっている．これははじめの関数を $\cos x$ にとっても同じである．

ついでに一言付け加えれば， $\sin x$ と $\cos x$ をそれぞれ n 回微分すれば， n 階の導関数は

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2) \quad (9.7)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \quad (9.8)$$

で与えられる．ただし， $(\sin x)^{(n)}, (\cos x)^{(n)}$ はそれぞれの三角関数の n 階の導関数を示している．そして，(9.7)，(9.8) を数学的帰納法で証明することができる [7]．

10 付録 2 Euler の公式から回転公式を導く

Euler の公式を 2 行 2 列の行列に翻訳するという方法を述べておく [8].

Euler の公式 $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ を用いれば, これを回転公式に書き変えることができる.

$$\cos \alpha + i \sin \alpha \rightarrow 1 \cdot \cos \theta + i \cdot \sin \theta$$

と考えると, 1 と i とを 2 行 2 列の行列

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

にそれぞれ対応させる. そうすれば, $1 \cdot \cos \theta + i \cdot \sin \theta$ は回転行列

$$\cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる.

$i^2 = -1$ であるが, これに対応した行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. また $1^2 = 1$ に対応した行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

も成り立つ. これは 2 つの行列を実際に計算してみても確かめられるが,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はもともと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

成り立つ, 単位行列であることからわかる.

(2022. 9. 7)

参考文献

- [1] 矢野忠, 三角関数の還元公式 1, 数学・物理通信, 6 巻 2 号 (2016.3.7) 7-15
- [2] 矢野忠, 三角関数の還元公式 2, 数学・物理通信, 6 巻 2 号 (2016.3.7) 16-26
- [3] 矢野忠, 三角関数の還元公式 3, 数学・物理通信, 12 巻 4 号 (2022.6.17) 22-29
- [4] 藤森良夫, 『解析の基礎』(続編) (考え方研究社, 1954) 661
- [5] L. オイラー (高瀬正仁 訳), 『オイラーの無限解析』(海鳴社, 2001) 109-111
- [6] L. ホグベン (今野武雄 訳), 『百万人の数学』下 (筑摩書房, 1971) 119
- [7] 矢野健太郎, 『微分積分学』(裳華房, 1956) 51
- [8] W. W. ソーヤー (宮本敏雄, 田中勇 訳), 『数学へのプレリュード』(みすず書房, 1978) 158-160

編集後記

ようやく9月になったと思ったのに日時が過ぎるのは早い。中旬もすぐそこである。それにいま、この原稿を書いている現在私のインターネットのメールが昨日から不通である。それで編集委員の世戸さんとの連絡が不本意ながら、とれなくなった。

不思議なことにインターネットを見ることができ、私は自分のブログを書くことができる。しかし、この12巻5号はメールが復旧しないと送付することができない。こういう状態で編集後記を書くなどという体験は実ははじめてである。

もともと、この「数学・物理通信」の発行はひとえにメールに依存している。郵送料がまったくいらないというのが、この「数学・物理通信」が比較的長く続けられている秘訣の一つなのである。もし、なにがしかの会費を集めて、この「通信」が発行されているとしたら、このように長くは続けられたかどうかはわからない。たぶん続かなかったであろう*1。

もちろん、意識的にこういう「通信」を読まないから送ってくるなど言われた方も一人二人いないわけではないが、そういうことをあからさまにいう人はそれでもごくまれである。それは「数学・物理通信」の購読が無料だからである。もし自分にまったく関心がなければ、「通信」ごと黙ってメールそのものを削除してゴミ箱に直行すればよいだけだから。

そうではあるが、この「通信」は発表の場所としての機能があるので、発表の場所として使いたいと秘かに思っている方もおられるかもしれない。

これは今後どうしたらよいかを読者の皆様にお尋ねする機会としたいが、N. ウィナーの歴史的論文を日本語に訳した原稿を送ってこられた方があった。その翻訳を投稿したいという意志表示もなかったのだが、ひょっとして掲載してほしいのかと考えた。「通信」の一つの号を全部使ってその翻訳を掲載する方法もあったのかもしれないが、そのときにはそういう考えも思いつかなかったので、その翻訳の掲載はできないとお断りした。それでかどうかはわからないが、「通信」を送ってこないでと、その後にその翻訳者から連絡があった。

かなり以前の話なので、もうその翻訳はどこかに掲載されたか、あるいは本として出版されたかもしれないので、そのときの判断はもう取り返しはつかないのだが、こういう場合にはどうしたらよかったかというアイデアをいただけたらありがたい。これは世戸さんが編集委員に就任される、ずっと以前のことである。今だったら、彼の判断を仰ぐこともできるだろう。

(矢野 忠)

*1 名古屋大学の谷村先生のご尽力により、彼のホームページにも「数学・物理通信」は掲載されている。谷村先生のご尽力にいつもながら感謝をしたい。