

数学・物理通信

12 卷 6 号 2022 年 10 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 10 月 15 日

目次 (Contents)

1. ばねと錘を組み合わせた振動問題 (1)

世戸 憲治 2

2. 四元数

矢野 忠 12

3. 四元数の学習の私的な歴史

矢野 忠 19

4. 編集後記

世戸憲治 27

1. Vibration Problems Combining Spring and Weight (1)

Kenji SETO 2

2. Quaternions

Tadashi YANO 12

3. The Private History of Study for Quaternions

Tadashi YANO 19

4. Editorial Comments

Kenji SETO 27

ばねと錘を組み合わせた振動問題 (1)

世戸 憲治 *

Vibration Problems Combining Spring and Weight (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

ばねと錘の振動系というと、高校の物理でも習うように、ばねに繋がれた錘がばねの長さ方向に振動するばね振子がある。これは、数学的には線形の問題で、三角関数を用いて簡単に解ける。また、複数個のばねと錘を交互に繋ぎばねの長さ方向に錘を振動させるいわゆる 1 次元格子の問題があるが、これも線形の問題で、ばねと錘が有限個、または、無限個の場合も含めて Bessel 関数を用いて解くことができる (『Bessel 関数と 1 次元格子振動』「数学・物理通信」6 巻 6 号, 6 巻 7 号, 8 巻 6 号, 8 巻 7 号)。

しかし、錘が動く方向を、一たび、ばねの長さ方向とは異なる方向に設定してしまうと、たちまち複雑怪奇な難問になってしまう。ここでは、そのような例を 2 つ述べることにする。

2 モデル 1

図 1 に示すように、水平面内に x 軸, y 軸をとる。質点とみなせる質量 m の錘があり、この錘に中心を通る穴を開けておく。この穴を、 x 軸上におかれた細い棒に通し、錘がこの棒に沿って摩擦無しに自由に動けるようにしておく。さらに、この錘には、自然長 ℓ , ばね定数 k のばねを結びつけ、そのばねの他端は、 y 軸上の点 $(0, y_0)$ に固定しておく。初期条件として、この錘が原点にあるときに x 方向の初速度 v_0 を与えたとき、この錘がどのような動きをするかを解析する。ただし、図には示していないが、ばねの中心には細い棒が通してあり、ばねは動いているときも曲がらないようになっているものとする。

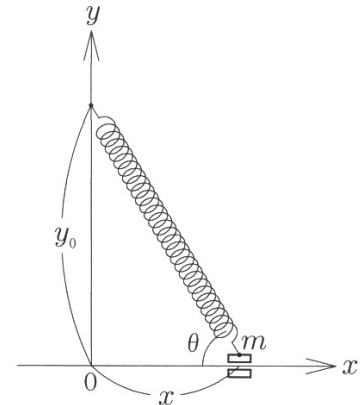


図 1 ばねと錘のモデル 1

いま、振動しているときの錘の座標を $(x, 0)$ とすると、ばねの伸びは $\sqrt{y_0^2 + x^2} - \ell$ となり、ばねが錘を引く力は、この伸びにばね定数 k を掛けたものになる。さらにこの力の x 成分は、ばねと x 軸がなす角を θ として、 $-\cos \theta$ を掛けたものになる。これらのことから、錘の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left[\sqrt{y_0^2 + x^2} - \ell \right] \frac{x}{\sqrt{y_0^2 + x^2}} \quad (2.1)$$

* 北海学園大学名誉教授

となる。ここで、

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{y_0^2 + x^2}} \quad (2.2)$$

となることを用いた。もし、ばねの自然長 ℓ がゼロとみなせる極限では、この方程式 (2.1) は通常の線形のものとなり、簡単に解が求められる。しかし、これ以外の一般の場合は、この方程式は非線形の微分方程式で、これを解くことは、かなりの困難を伴う。ここで、速度 dx/dt を

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2.3)$$

とおき、加速度を

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} \quad (2.4)$$

とおき直してから、方程式 (2.1) を変数分離して積分形にすると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = -k \int \left[x - \frac{\ell x}{\sqrt{y_0^2 + x^2}} \right] dx \quad (2.5)$$

となる。この積分は容易に実行され、後の式がうまくまとまるように、積分定数を $E - \frac{1}{2}k(y_0^2 + \ell^2)$ として、

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k \left[x^2 - 2\ell \sqrt{y_0^2 + x^2} \right] + E - \frac{1}{2}k(y_0^2 + \ell^2) \quad (2.6)$$

あるいは、書き直して

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E \quad (2.7)$$

となる。ここに、 U を

$$U = \frac{1}{2}k \left[\sqrt{y_0^2 + x^2} - \ell \right]^2 \quad (2.8)$$

と定義する。この (2.7) 式はエネルギー積分で、右辺の全エネルギー E は、左辺 1 項目の錘の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ と、2 項目のばねの歪みエネルギー U との和になることを意味する。

初めに、この U がどのような振る舞いをするかを調べておこう。ここでは、 $\ell < y_0$, $\ell = y_0$, $\ell > y_0$ の 3 通りの場合に分けて、この U をグラフ化したものを図 2 に示す。

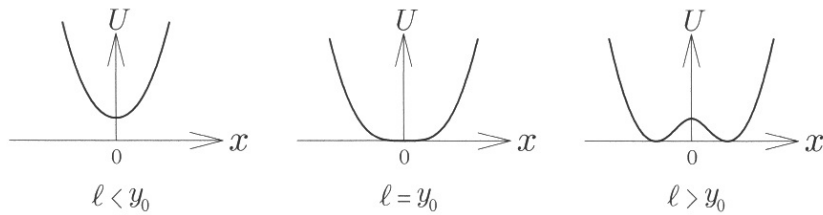


図 2 ばねの歪みエネルギー

これから分かるとおり、 $\ell < y_0$ のときは、 $x = 0$ が極小点になるが、 $\ell = y_0$ になると U の 1 階微分のみならず、2 階微分も $x = 0$ でゼロとなる。また、 $\ell > y_0$ では、 $x = 0$ の点は極大点になり、この両側に極小となる点が 2 重井戸型ポテンシャルの形でできる。このときの極小となる点の座標を、以下、

$$x_0 = \sqrt{\ell^2 - y_0^2} \quad (2.9)$$

と定義して、極小点は $x = \pm x_0$ にできる．これは、ばねがちょうど自然長にあるときの x の値である．

ここで、初期条件、 $t = 0$ で $x = 0$, $v = v_0$ を用いて E を決めると、

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(y_0 - \ell)^2 \quad (2.10)$$

となる．問題はここからで、この E を用いて、(2.7) (2.8) 式から、 v を求め、さらに変数分離して x を時間の関数として求めようとする、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(v_0/\omega)^2 + (y_0 - \ell)^2 - (\sqrt{y_0^2 + x^2} - \ell)^2}} = \omega(t - t_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

と複雑怪奇な積分式になってしまう．ここに、 ω は時間の逆数の次元を持つ量で、この第 2 式で定義する．また、 t_0 は積分定数である．この積分を実行しようとして、

$$\sqrt{y_0^2 + x^2} = p \quad (2.12)$$

と変数変換すると、

$$\text{左辺} = \int \frac{p dp}{\sqrt{[p^2 - y_0^2][(v_0/\omega)^2 + (y_0 - \ell)^2 - (p - \ell)^2]}} \quad (2.13)$$

となって、分母の平方根の中は p の 4 次式となるが、分子にも余計に p が 1 個付いてしまう．この積分を正直に実行しようすると、Jacobi の第 1 種、第 3 種の楕円積分を用いて実行されるが、その計算過程は非常に冗長なものになってしまう．ここでは、これ以上、厳密解を求めることはやめにして、微小振動したときの近似解を求めることにしよう．

ここで、このばねの歪みエネルギー U を $x = 0$ の近傍で x^4 の項まで Taylor 展開すると

$$U \cong \frac{1}{2}k(y_0 - \ell)^2 + \frac{1}{2}k\frac{y_0 - \ell}{y_0}x^2 + \frac{1}{8}k\frac{\ell}{y_0^3}x^4 + \dots \quad (2.14)$$

となる．また、 $\ell > y_0$ のときは、2 重井戸型ポテンシャルとなるので、 U が極小になる点 $x = x_0$ で 2 次のオーダーまで展開すると

$$U \cong \frac{1}{2}k\gamma^2(x - x_0)^2, \quad \gamma = \frac{x_0}{\ell} \quad (2.15)$$

となる．ここに、無次元量 γ はこの第 2 式で定義する．これは $x = x_0$ のとき、ばねの長さは自然長の ℓ なので、この γ の値は、(2.2) 式で定義した $\cos \theta$ に当たる．錘が x_0 から x まで微小距離 $x - x_0$ 移動したとき、ばねはこれに $\cos \theta$ を掛けた長さしか伸びていないというのがこの γ が付く理由である．

以下、これらの近似式を用いて、振動の様子を解析する．

《 $\ell < y_0$ の場合 》

この場合は、ばねの歪みエネルギー U として、(2.14) 式の x^2 の項までとることで十分である．このときの U 、および、(2.10) 式の E を (2.7) 式に代入し、 v を求めてから変数分離して積分形にすると、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(v_0/\omega)^2 - \alpha^2 x^2}} = \omega(t - t_0), \quad \alpha = \sqrt{(y_0 - \ell)/y_0} \quad (2.16)$$

となる．ここに無次元数 α をこの第 2 式で定義する．この積分は三角関数の範囲内で簡単に実行され， $t = 0$ で $x = 0$ ， $v = v_0$ となる解は，

$$x = \frac{(v_0/\omega)}{\alpha} \sin(\alpha \omega t) \quad (2.17)$$

と求められる．

《 $\ell = y_0$ の場合 》

この場合， U の近似式 (2.14) は，定数項も， x^2 の項も消えてしまい x^4 の項しか残らない．(2.16) 式のとおり同様に積分式を作ると，

$$\int \frac{2\ell dx}{\sqrt{(2\ell v_0/\omega)^2 - x^4}} = \omega(t - t_0) \quad (2.18)$$

となる．これは楕円積分になるので，標準形にするために， x から u へ

$$x^2 = (2\ell v_0/\omega)(1 - u^2) \quad (2.19)$$

と変換すると，

$$-\frac{1}{\beta} \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \omega(t - t_0), \quad \beta = \sqrt{\frac{v_0/\omega}{\ell}} \quad (2.20)$$

となる．ここに，無次元数 β をこの第 2 式で定義し，また，楕円積分の母数 k は

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

である¹⁾．これから，Jacobi の楕円関数 sn を用いて，

$$u = -\text{sn}[\beta\omega(t - t_0)] \quad (2.22)$$

となるので，これを (2.19) 式に戻すと， sn が cn に替わって，

$$x = \sqrt{2} \beta \ell \text{cn}[\beta\omega(t - t_0)] \quad (2.23)$$

となる．いまは，初期条件として $t = 0$ で $x = 0$ としているので，これに合うように t_0 を決めなければならない．このためには， K を第 1 種完全楕円積分

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (2.24)$$

として，これを用いた楕円関数 cn の加法定理

$$\text{cn}(u \pm K) = \mp k' \frac{\text{sn}(u)}{\text{dn}(u)}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{補母数}) \quad (2.25)$$

を使う．いまの場合は初速度 v_0 を正としているので，当然のことながら，初めは x 正の方向に動き出すはずである．そこでこの式の下符号の方を取って，(2.23) 式の t_0 を

$$\beta\omega t_0 = K \quad (2.26)$$

¹⁾ ばね定数の k は，ここでは， ω の中に隠れているので，この楕円積分の母数 k と混同することはないはずである．

となるようにとると、楕円積分の母数 $k = k' = 1/\sqrt{2}$ を用いて、(2.23) 式は、

$$x = \beta \ell \frac{\operatorname{sn}(\beta \omega t)}{\operatorname{dn}(\beta \omega t)} \quad (2.27)$$

と求められたことになる．この解はもう一つの初期条件である、 $t = 0$ のとき、 $v = v_0$ の方も満たしている．

《 $\ell > y_0$ の場合 》

この場合は、極小となる点が $x = 0$ ではなく $x = \pm x_0$ に移ってしまうので、微小振動を扱う場合、初期条件として $t = 0$ で $x = 0$ としてしまうとこれは微小振動にはならない．ここでは、 x が正の方にある極小点まわりの微小振動を扱うことにして、初期条件を $t = 0$ のとき $x = x_0$ とし、そこでの初速度を v_0 としておく．この点では、ばねの歪みエネルギーがないので、全エネルギー E を

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2.28)$$

とし、(2.15) 式の U を用いてエネルギー保存の式を書くと、

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \gamma^2 (x - x_0)^2 = E \quad (2.29)$$

となる．これら 2 式から v を求め、変数分離して積分形にすると、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(v_0/\omega)^2 - \gamma^2 (x - x_0)^2}} = \omega(t - t_0) \quad (2.30)$$

となる．この積分も簡単に実行され、 $t = 0$ で $x = x_0$ 、 $v = v_0$ となる解は、

$$x - x_0 = \frac{(v_0/\omega)}{\gamma} \sin(\gamma \omega t) \quad (2.31)$$

と求められる．

3 モデル 2

前節では、錘に繋がっていない方のばねの端を y 軸上に固定した場合を扱った．ここでは、図 3 に示すように、同じ質量 m の 2 個の錘を用意し、そのうち 1 個は x 軸上を、他の 1 個は y 軸上を自由に動くようにしておく．これら 2 個の錘をばね定数 k 、自然長 ℓ のばねで結んだときの振動を考える．ただし、これら 2 個の錘が原点で衝突することがないように、原点のところでは、立体交差するように作っておくこととする．

初期条件として、初め、 y 軸上を動く錘は $(0, y_0)$ の位置に置いておき、 x 軸上の錘は原点におき、この錘に初速度 v_0 を与えたとき、どのような振動をするかを解析する．

いま、振動しているときのこれら 2 個の錘の座標を、それぞれ、 $(x, 0)$ 、 $(0, y)$ として、このときのばねの伸びは $\sqrt{x^2 + y^2} - \ell$ であり、ばねが錘を引く力は、この伸びにばね定数 k を掛けたものになる．さらに、この力が

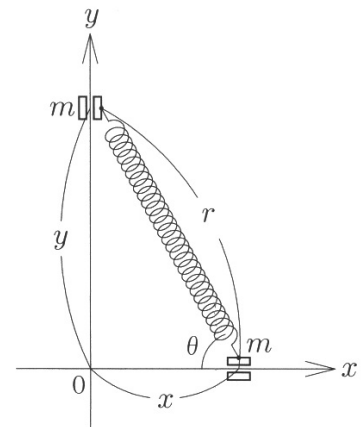


図 3 ばねと錘のモデル 2

錘に作用したときの x 成分, y 成分は, ばねと x 軸がなす角を θ として, それぞれ, $\cos \theta$, $\sin \theta$ を掛けたものになるので, これらの錘, それぞれの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.1)$$

となる. ここで,

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.2)$$

となることを用いた. これは一般に, 連立した非線形微分方程式であるが²⁾, ばねの自然長 ℓ がゼロの極限では連立しない線形の方程式となる.

《 $\ell = 0$ の場合 》

初めに, この方程式で $\ell = 0$ とした場合を解析しておく²⁾. このときの方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (3.3)$$

となり, これは良く知られたように三角関数を用いて,

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad y = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.4)$$

と解かれる. ここに, A, B, C, D は長さの次元を持つ任意定数, ω は, 前節の (2.11) 式と同じく, 時間の逆数の次元を持つ定数で, この第 3 式で定義する. この場合の初期条件は,

$$t = 0 \text{ のとき}, \quad x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0, \quad y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

となるので, この条件を満たす解は,

$$x = (v_0/\omega) \sin(\omega t), \quad y = y_0 \cos(\omega t) \quad (3.6)$$

と求められる. これら 2 式から時間 t を消去すると,

$$\frac{x^2}{(v_0/\omega)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \quad (3.7)$$

と楕円の式となる. さらに, この (3.6) 式からばねの長さを r として, また, ばねと x 軸がなす角を θ として, これらを時間 t の関数として表すと,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0/\omega)^2 \sin^2(\omega t) + y_0^2 \cos^2(\omega t)} = \sqrt{A_{(+)} - A_{(-)} \cos(2\omega t)} \quad (3.8)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{A_{(-)} - A_{(+)} \cos(2\omega t)}{A_{(+)} - A_{(-)} \cos(2\omega t)}$$

となる. ここに, $A_{(\pm)}$ を

$$A_{(\pm)} = \frac{1}{2} [(v_0/\omega)^2 \pm y_0^2] \quad (3.9)$$

²⁾ 通常, ばねの質量はゼロとして扱われるが, 現実には質量がゼロのばねなどというものは存在しない. それと同じように, 自然長がゼロのばねも存在しないが, 理想的な極限として考えても良いだろう.

と定義する．この式から，特に， $A_{(-)} = 0$ ，すなわち， $v_0/\omega = y_0$ のときは，ばねの長さ r はまったく変化しないで，角度 θ のみが $\theta = (\pi/2) - \omega t$ と変化することになる．

《 $\ell \neq 0$ の場合 》

以下，ばねの自然長 ℓ をゼロでないものとして扱う．この方程式 (3.1) からエネルギー積分を作ることは簡単である．

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad (3.10)$$

と書くことにして，それは

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell)^2 = E \quad (3.11)$$

となる．実際，この式を時間 t で微分してみると，運動方程式を用いて，左辺の微分がゼロとなることは簡単に証明される．ただし，この式ができたからと言って，このままでは，問題解決には繋がらない．

この問題を解くには， (x, y) 座標系よりも極座標表示にして，

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.12)$$

と r, θ を用いて解析した方がよい．このとき方程式 (3.1) は，以後，時間微分を Newton 流の上付きドットで表すことにして，

$$\begin{aligned} m \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta \right] &= -k(r - \ell) \cos \theta \\ m \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \right] &= -k(r - \ell) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる．この第 1 式に $\cos \theta$ を掛け，第 2 式に $\sin \theta$ を掛けてから辺々を加えると，

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - \ell) \quad (3.14)$$

となり，また，第 1 式に $\sin \theta$ を掛け，第 2 式に $\cos \theta$ を掛けてから辺々の差を作ると，

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3.15)$$

が得られる．これらの式は，2 次元平面において，大きさが $-k(r - \ell)$ の中心力が作用するときの 1 体問題を極座標表示にしたときの運動方程式とまったく同じになる．つまり，ばねの一端を原点に，自由に回転できるように固定し，他端に錘を付けて振り廻したときの運動である．ここでは，これを「中心力モデル」と呼ぶことにする．このとき，(3.14) 式の左辺 2 項目は遠心力を表し，また，(3.15) 式は，角運動量保存の式，あるいは，面積速度一定の式になっている．この考えで，(3.1) 式を見ると，これは 2 個の錘，それぞれの運動方程式を書いたつもりであったが，「中心力モデル」の立場でみると，これは 1 個の錘の運動方程式の x 成分， y 成分を書いたものとみなせる．これは，2 個の錘を同じ質量にしたためにできたことで，もし，異なる質量にしてみようとうはいかない．

(3.15) 式から $r^2\dot{\theta}$ は一定値となるので，この値を見積もるために，(3.12) の第 1 式 $x = r \cos \theta$ を時間で微分すると， $\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}$ となる．この式から，(3.5) 式の初期条件，および， $t = 0$ のとき， $\theta = \pi/2$ を

適用すると、 $r\dot{\theta}$ の初期値は $-v_0$ となる．ここで、マイナスが付くのは、 v_0 が正のとき角度 θ が減る方向に動くからである．したがって、 $r^2\dot{\theta}$ はこの初期値と、 $t = 0$ で $r = y_0$ を用いると、

$$r^2\dot{\theta} = -y_0v_0 \quad (3.16)$$

と置くことができる．これを用いて (3.14) 式を書き直すと、

$$m\ddot{r} = m\frac{(y_0v_0)^2}{r^3} - k(r - \ell) \quad (3.17)$$

となる．ここで、(2.4) 式のときと同じく、

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\dot{r}}{dr} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} \quad (3.18)$$

と変形してから、変数分離し、積分すると、 E を積分定数として、

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{(y_0v_0)^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}k(r - \ell)^2 = E \quad (3.19)$$

となる．実はこの式は、先に求めたエネルギー積分の (3.11) 式と同じものである．なぜなら、 $v_x^2 + v_y^2$ を極座標で表すと

$$v_x^2 + v_y^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{(y_0v_0)^2}{r^2} \quad (3.20)$$

となるからである．つぎに、この (3.19) 式の E を決めるため、初期条件の $t = 0$ のとき、 $r = y_0$ 、 $\dot{r} = 0$ を適用すると、

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(y_0 - \ell)^2 \quad (3.21)$$

となる．これを (3.19) 式に代入し、前節と同じように、 $\dot{r}$ を求め、積分して r を時間の関数として求めようとする、

$$\int \frac{rdr}{\sqrt{\left[(v_0/\omega)^2 + (y_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2\right]r^2 - (y_0v_0/\omega)^2}} = \omega(t - t_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.22)$$

と大変面倒な積分式になってしまう．ここに、 ω は (2.11) (3.4) 式と同じく時間の逆数の次元を持つ定数である．この積分は (2.13) 式と同じタイプで、Jacobi の第 1 種、第 3 種楕円積分の形にもっていくことはできるが、その過程は大変に冗長なものになってしまう．したがって、この積分を正直に実行することはやめて、近似計算のみで満足することにしよう．とは言っても、このモデルの場合は、前節と違って、錘の振動は、小振幅という訳にはいかない． x 軸上の錘を動かすと、 y 軸上の錘も動いてしまい、これら 2 個の錘が連携しあって、両方の錘ともに大きな振幅の振動になるはずである．また、「中心力モデル」で考えても、一度、錘に角度方向の速度を与えてしまうと、必ずや、錘は原点の周りを回転しだすはずである．したがって、以下では、錘の振幅は大きくなっても、ばねの長さ r の振幅は小さいものとして、 r に関して線形近似の方程式を解析していくことにしよう．

方程式 (3.17) に戻って、右辺 1 項目の遠心力と 2 項目のばねの張力が釣り合うときの r は、方程式

$$(r - \ell)r^3 - (y_0v_0/\omega)^2 = 0 \quad (3.23)$$

の解として求まる．ここに、 ω は (3.22) 式で定義するものである．これは r に関して 4 次の方程式であり、ここではその具体的形を求めないが、 r が正となる解は 1 個だけ存在するので、これを r_0 としておく．ばねの長さ r はこの r_0 を中心として微小振動するものとし、この方程式 (3.17) の右辺を線形近似し、

$$m \frac{(y_0 v_0)^2}{r^3} - k(r - \ell) \cong -m\alpha^2 \omega^2 (r - r_0), \quad \alpha = \sqrt{\frac{4r_0 - 3\ell}{r_0}} \quad (3.24)$$

としておく．ここに、無次元数 α をこの第 2 式で定義する．これで方程式は

$$\ddot{r} = -\alpha^2 \omega^2 (r - r_0) \quad (3.25)$$

となる．これは三角関数の範囲で簡単に解け、初期条件 $t = 0$ のとき、

$$r = y_0, \quad \dot{r} = 0 \quad (3.26)$$

を満たす解は、

$$r = r_0 + (y_0 - r_0) \cos(\alpha \omega t) \quad (3.27)$$

と求められる．この r の振動振幅は十分に小さいものとしているので、 $|y_0 - r_0|$ は r_0 に比べて十分に小さいものとする．

角度 θ を時間の関数として求めるには、(3.16) 式を積分して、

$$\theta = -y_0 v_0 \int \frac{dt}{r^2} = -y_0 v_0 \int \frac{dt}{[r_0 + (y_0 - r_0) \cos(\alpha \omega t)]^2} \quad (3.28)$$

を計算するとよい．この積分には、微分公式

$$\frac{1}{(c + b \cos x)^2} = \frac{1}{b^2 - c^2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{b \sin x}{c + b \cos x} \right) - \frac{c}{c + b \cos x} \right] \quad (3.29)$$

および、積分公式、(岩波「数学公式 I」 P.189)

$$\int \frac{dx}{c + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{c^2 - b^2} \sin x}{c + b \cos x} \right), \quad c^2 > b^2 \quad (3.30)$$

を利用する．結果は長い式になるが、

$$\theta = \frac{(v_0/\omega)}{\alpha(2r_0 - y_0)} \left[\frac{(y_0 - r_0) \sin(\alpha \omega t)}{r_0 + (y_0 - r_0) \cos(\alpha \omega t)} - \frac{r_0}{\sqrt{y_0(2r_0 - y_0)}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{y_0(2r_0 - y_0)} \sin(\alpha \omega t)}{r_0 + (y_0 - r_0) \cos(\alpha \omega t)} \right) \right] + \frac{\pi}{2} \quad (3.31)$$

となる．最後に付けた $\pi/2$ は積分定数である．この式の大括弧中の 1 項目は振動項であるが、2 項目は時間 t の減少関数なので、 θ は $\pi/2$ から始まり、時間とともに減少していく関数となる．これは「中心力モデル」でいうと、錘は、原点を時計まわりに回転することになる．

4 おわりに

2 体問題としての「モデル 2」が、1 体問題の「中心力モデル」とまったく等価になるということは、(3.14) (3.15) 式のところまできて、初めて気が付いた．こんなことは、私にとって初めての経験だったので、自分で計

算していながら、自分に驚いてしまった。このようなことは他にもあり得るのであろうか。例えば、3 体問題が 1 体問題と等価になるとか、ちょっと、頭を捻ってみたが、そう簡単には思いつかない。また、ばねに錘を付けて振り回すだけの問題がこんなに難しい問題だったとは、これも今回初めて気が付いた。

もう一つ、ここでは、「モデル 1」「モデル 2」ともに厳密解を求めることを諦めてしまった。これは、第 1 種、第 3 種の楕円積分が複雑に絡み合った解を求めたとして、数学的にはそれなりの意味があるのかもしれないが、物理的には何も見えてこないと思ったからである。少なくとも私にとっては、楕円関数を使うとしても、それは第 1 種までで、第 2 種、第 3 種となると、参考とするものもほとんどなく、その形すら見えてこない。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、いろいろとご注意をいただきました。特に、「この問題設定では力は保存力であることは明らかなので、運動方程式の段階からポテンシャルを導入したほうが（とくにモデル 2 のとき）すっきり定式化できます。」というご意見をいただきました。確かにこの問題は、初めから、Lagrange 形式で方程式を導入した方が分かりやすかったかもしれません。その他にもたくさんのコメントをいただきました。先生に心から感謝いたします。

四元数

矢野 忠^{*1}

Quaternion

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

このエッセイは愛数協の「研究と実践」に以前に発表したものである [1]。このたび、私の四元数とのかかわりを振り返る機会に、この「数学・物理通信」に転載する。面倒な計算をするだけの能のないエッセイであるが、これ以後、四元数とかかわるきっかけとなったもので、私には思い出が深い^{*3}。

1 はじめに

Cauchy-Lagrange の恒等式の四元数を用いた証明を以前に「研究と実践」で報告した [2]。このとき現在知られている四元数の性質を使ったが、どうやってこの四元数の性質が導かれたかについては触れなかった。このエッセイではかなり強引に四元数の積の結合則から四元数の積が交換しないことを導いてみる。

四元数を考案したのは Hamilton というアイルランドの数学者である。四元数はこのエッセイで示すような力まかせの方法で計算によって導入されたのではなくもっと自然な推論から導かれたものである。Hamilton がどのようにして四元数を導入したかについては別の機会に述べよう^{*4}。

2 数の性質

複素数までの数の性質はつぎのような性質をもっている。 L, M, N を複素数とすれば、和と積について

$$(1) \text{ 結合則 } L + (N + M) = (L + N) + M, L(MN) = (LM)N$$

$$(2) \text{ 交換則 } M + N = N + M, MN = NM$$

$$(3) \text{ 分配則 } L(M + N) = LM + LN$$

$$(4) \text{ 除算が一意的にできる } MX = N \text{ となる } X \text{ が一意的に存在する。ただし, } M \neq 0 \text{ とする。}$$

等の性質をみたと [4]。

これらの性質は実数や複素数をもつ性質なので、特になぜこのような性質があるということをわざわざ述べるのが自明ではない。しかし、いろいろな数学的対象を考えていくと、これらの性質を全部満たす数学的対象ばかりではないことがわかってくる。実はそのときになってやっとこれらの性質を述べる意味がわかってくるのである。例えば、行列の積ではその積の順序は一般には交換しないし、またベクトルのベクトル積でもその順序は交換しない。また、量子力学ではその正準共役な量、例えば座標 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ は交換しないことがわかっている。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} このエッセイをはじめに書いた、2007 年 11 月の段階では四元数についてのある重要な性質に気がついていなかった。そのために文章にちぐはぐな箇所が残っている。その後の認識についてはできるだけ、脚注とか（ ）の中の文章で補正をした。

^{*4} その後 [3] を書いた。

3 四元数

四元数は2つの複素数 $t + xi$, $y + zi$ からつぎのように定義される． t, x, y, z はいずれも実数として

$$a = (t + xi) + (y + zi)j \quad (3.1)$$

$$= t + xi + yj + zk, \quad ij \equiv k \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

で定義される．ここで, $j^2 = -1$ とする．この j は2乗すれば -1 になるという意味で $i = \sqrt{-1}$ に似ているが, $i \neq j$ であり, i とは独立の単位とする [5]．ここで, $k = ij$ はこれからその性質を決めることにする．

このような四元数の積を考えると $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2$ に加えて ij, ji, jk, kj, ki, ik のような積が現れる．本来 ij, ji, jk, kj, ki, ik はすべて i, j, k の一次結合として $\alpha i + \beta j + \gamma k$, (α, β, γ は実数) のように表されるはずだが, この合計 18 個の係数を決めることは多分できないと思うので, ここでは Hamilton の知見を先取りして, $ij = k, ik = \alpha j, ji = \beta k, jk = \gamma i, ki = \delta j, kj = \epsilon i$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ は実数) とおこう．また, k^2 はいまはそのままにしておく (後で $k^2 = 1$ と $k^2 = -1$ のいずれかであることがわかる)^{*5}．すなわち, 積の表はつぎのようになると仮定しよう．

	i	j	k
i	-1	k	αj
j	βk	-1	γi
k	δj	ϵi	k^2

さらに, Hamilton [5] によれば上に述べた数の性質のうちで交換則は成り立たないことがわかっているのです, この積表の i, j, k の前の係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ を四元数の積の結合則 $a(bc) = (ab)c$ から決めることを試みよう．そのためには少なくとも3つの四元数があるが, それらを

$$a = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k \quad (3.4)$$

$$b = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k \quad (3.5)$$

$$c = t_3 + x_3i + y_3j + z_3k \quad (3.6)$$

とする．ここで, (t_i, x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$ はすべて実数値をとる．

ab の積を考えるとき上の積表を考慮すれば,

$$\begin{aligned} ab &= (t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2k^2) + (t_1x_2 + x_1t_2 + \gamma y_1z_2 + \epsilon z_1y_2)i \\ &\quad + (t_1y_2 + \alpha x_1z_2 + y_1t_2 + \delta z_1x_2)j + (t_1z_2 + x_1y_2 + \beta y_1x_2 + z_1t_2)k \\ &= A + Bi + Cj + Dk \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる．ここで, A, B, C, D は

$$A = t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2k^2 \quad (3.8)$$

$$B = t_1x_2 + x_1t_2 + \gamma y_1z_2 + \epsilon z_1y_2 \quad (3.9)$$

$$C = t_1y_2 + \alpha x_1z_2 + y_1t_2 + \delta z_1x_2 \quad (3.10)$$

$$D = t_1z_2 + x_1y_2 + \beta y_1x_2 + z_1t_2 \quad (3.11)$$

^{*5} k^2 を未知数とした理由の説明は補遺を参照せよ．

である。また bc の積は

$$\begin{aligned}
bc &= (t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2) + (t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3)i \\
&+ (t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3)j + (t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3)k \\
&= A' + B'i + C'j + D'k
\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。ここで、 A', B', C', D' は

$$A' = t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2 \tag{3.13}$$

$$B' = t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3 \tag{3.14}$$

$$C' = t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3 \tag{3.15}$$

$$D' = t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3 \tag{3.16}$$

である。

したがって $a(bc)$ は

$$\begin{aligned}
a(bc) &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(A' + B'i + C'j + D'k) \\
&= (t_1A' - x_1B' - y_1C' + z_1D'k^2) + (t_1B' + x_1A' + \gamma y_1D' + \epsilon z_1C')i \\
&+ (t_1C' + \alpha x_1D' + y_1A' + \delta z_1B')j + (t_1D' + x_1C' + \beta y_1B' + z_1A')k
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となり、また $(ab)c$ は

$$\begin{aligned}
(ab)c &= (A + Bi + Cj + Dk)(t_3 + x_3i + y_3j + z_3k) \\
&= (At_3 - Bx_3 - Cy_3 + Dz_3k^2) + (Ax_3 + Bt_3 + \gamma Cz_3 + \epsilon Dy_3)i \\
&+ (Ay_3 + \alpha Bz_3 + Ct_3 + \delta Dx_3)j + (Az_3 + By_3 + \beta Cx_3 + Dt_3)k
\end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。

ところで結合則が成り立つとすれば、 $a(bc) = (ab)c$ であるから、この式の左辺と右辺の $1, i, j, k$ の係数が等しくなくてはならない。したがって、

$$t_1A' - x_1B' - y_1C' + z_1D'k^2 = At_3 - Bx_3 - Cy_3 + Dz_3k^2 \tag{3.19}$$

$$t_1B' + x_1A' + \gamma y_1D' + \epsilon z_1C' = Ax_3 + Bt_3 + \gamma Cz_3 + \epsilon Dy_3 \tag{3.20}$$

$$t_1C' + \alpha x_1D' + y_1A' + \delta z_1B' = Ay_3 + \alpha Bz_3 + Ct_3 + \delta Dx_3 \tag{3.21}$$

$$t_1D' + x_1C' + \beta y_1B' + z_1A' = Az_3 + By_3 + \beta Cx_3 + Dt_3 \tag{3.22}$$

が成立する。

つぎにこの 4 つの式の左辺と右辺を $1, i, j, k$ の係数に分けて計算する。

最初に $a(bc)$ と $(ab)c$ との 1 の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&t_1A' - x_1B' - y_1C' + z_1D'k^2 \\
&= t_1(t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2) - x_1(t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3) \\
&- y_1(t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3) + z_1(t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3)k^2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

および

$$\begin{aligned}
& At_3 - Bx_3 - Cy_3 + Dz_3k^2 \\
& = t_1(t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2) - x_1(t_2x_3 + x_2t_3 - y_2z_3k^2 + \alpha z_2y_3) \\
& - y_1(t_2y_3 - \beta x_2z_3k^2 + y_2t_3 + \gamma z_2x_3) + z_1(t_2z_3k^2 - \delta x_2y_3 - \epsilon y_2x_3 + z_2t_3k^2)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

である。両辺の同じ項の係数からつぎの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& x_1y_2z_3 \text{の係数から} & \gamma &= -k^2 \\
& x_1z_2y_3 \text{の係数から} & \epsilon &= \alpha \\
& y_1x_2z_3 \text{の係数から} & \alpha &= -\beta k^2 \\
& y_1z_2x_3 \text{の係数から} & \gamma &= \delta \\
& z_1x_2y_3 \text{の係数から} & \delta &= -k^2 \\
& z_1y_2x_3 \text{の係数から} & \beta k^2 &= -\epsilon
\end{aligned} \tag{3.25}$$

つぎに $a(bc)$ と $(ab)c$ との i の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
& t_1B' + x_1A' + \gamma y_1D' + \epsilon z_1C' \\
& = t_1(t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3) + x_1(t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2) \\
& + \gamma y_1(t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3) + \epsilon z_1(t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

および

$$\begin{aligned}
& Ax_3 + Bt_3 + \gamma Cx_3 + \epsilon Dz_3 \\
& = t_1(t_2t_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3) + x_1(t_2t_3 - x_2x_3 + \epsilon y_2y_3 + \alpha \gamma z_2z_3) \\
& + y_1(\gamma t_2z_3 + \beta \epsilon x_2y_3 - y_2x_3 + \gamma z_2t_3) + z_1(\epsilon t_2y_3 + \gamma \delta x_2z_3 + \epsilon y_2t_3 + z_2x_3k^2)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

である。両辺の同じ項の係数からつぎの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& x_1y_2y_3 \text{の係数から} & \epsilon &= -1 \\
& x_1z_2z_3 \text{の係数から} & \alpha \gamma &= k^2 \\
& y_1x_2y_3 \text{の係数から} & \beta \epsilon &= \gamma \\
& y_1y_2x_3 \text{の係数から} & \beta \gamma &= -1 \\
& z_1x_2z_3 \text{の係数から} & \alpha \epsilon &= \gamma \delta \\
& z_1z_2x_3 \text{の係数から} & \delta \epsilon &= k^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

さらに $a(bc)$ と $(ab)c$ との j の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
& t_1C' + \alpha x_1D' + y_1A' + \delta z_1B' \\
& = t_1(t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3) + \alpha x_1(t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3) \\
& + y_1(t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2) + \delta z_1(t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

および

$$\begin{aligned}
& Ay_3 + \alpha Bz_3 + Ct_3 + \delta Dx_3 \\
& = t_1(t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3) + x_1(\alpha t_2z_3 - x_2y_3 + \delta y_2x_3 + \alpha z_2t_3) \\
& + y_1(t_2t_3 + \beta \delta x_2x_3 - y_2y_3 + \alpha \gamma z_2z_3) + z_1(\delta t_2x_3 + \delta x_2t_3 + \alpha \epsilon y_2z_3 + z_2y_3k^2)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

である。両辺の同じ項の係数からつぎの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
x_1x_2y_3 \text{ の係数から } & \alpha = -1 \\
x_1y_2x_3 \text{ の係数から } & \alpha\beta = \delta \\
y_1x_2x_3 \text{ の係数から } & \beta\delta = -1 \\
y_1z_2z_3 \text{ の係数から } & \alpha\gamma = k^2 \\
z_1y_2z_3 \text{ の係数から } & \alpha\epsilon = \gamma\delta \\
z_1z_2y_3 \text{ の係数から } & \delta\epsilon = k^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

最後に $a(bc)$ と $(ab)c$ との k の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
& t_1D' + x_1C' + \beta y_1B' + z_1A' \\
& = t_1(t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3) + x_1(t_2y_3 + \alpha x_2z_3 + y_2t_3 + \delta z_2x_3) \\
& + \beta y_1(t_2x_3 + x_2t_3 + \gamma y_2z_3 + \epsilon z_2y_3) + z_1(t_2t_3 - x_2x_3 - y_2y_3 + z_2z_3k^2)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

および

$$\begin{aligned}
& Az_3 + By_3 + \beta Cx_3 + Dt_3 \\
& = t_1(t_2z_3 + x_2y_3 + \beta y_2x_3 + z_2t_3) + x_1(t_2y_3 - x_2z_3 + y_2t_3 + \alpha\beta z_2x_3) \\
& + y_1(\beta t_2x_3 + \beta x_2t_3 - y_2z_3 + \gamma z_2y_3) + z_1(t_2t_3 + \beta\delta x_2x_3 + \epsilon y_2y_3 + z_2z_3k^2)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

である。両辺の同じ項の係数からつぎの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
x_1x_2z_3 \text{ の係数から } & \alpha = -1 \\
x_1z_2x_3 \text{ の係数から } & \alpha\beta = \delta \\
y_1y_2z_3 \text{ の係数から } & \beta\gamma = -1 \\
y_1z_2y_3 \text{ の係数から } & \beta\epsilon = \gamma \\
z_1x_2x_3 \text{ の係数から } & \beta\delta = -1 \\
z_1y_2y_3 \text{ の係数から } & \epsilon = -1
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(3.25), (3.28), (3.31), (3.34) で得られた式をまとめると

$$\alpha = \epsilon = -1 \tag{3.35}$$

$$\gamma = \delta = -k^2 \tag{3.36}$$

$$\beta = -\gamma \tag{3.37}$$

$$\beta = -\delta \tag{3.38}$$

$$\beta\gamma = -1 \tag{3.39}$$

$$\beta\delta = -1 \tag{3.40}$$

となる。ここで、求めたいのは係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ と k^2 の 6 個である。(3.37), (3.38) から β と γ, δ とは異符号、また (3.36) から γ, δ と k^2 とは異符号であることがわかる。さらに (3.37), (3.39) から $\gamma^2 = 1$ 、したがって $\gamma = \pm 1$ であることがわかる。(3.36) から $k^2 = \pm 1$ となる。ただし、 $\gamma = 1$ のときは $k^2 = -1$ であり、 $\gamma = -1$ のときは $k^2 = 1$ である。

(3.36), (3.37) から $k^2 = -1$ であれば、 $\gamma = \delta = 1, \beta = -1$ となり、 $k^2 = 1$ であれば、 $\gamma = \delta = -1, \beta = 1$ となる。まとめればつぎの 2 つの場合がある。

$k^2 = -1$ のとき

$$\alpha = \epsilon = -1 \tag{3.41}$$

$$\beta = -1 \tag{3.42}$$

$$\gamma = \delta = 1 \tag{3.43}$$

この場合の積表はつぎのようになる。

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

$k^2 = 1$ のとき

$$\alpha = \epsilon = -1 \quad (3.44)$$

$$\beta = 1 \quad (3.45)$$

$$\gamma = \delta = -1 \quad (3.46)$$

この場合の積表はつぎのようになる。

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	k	-1	$-i$
k	$-j$	$-i$	1

$k^2 = -1$ の場合を Hamilton は採用している*6。このときは四元数の積が交換しないことは積 $ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$ が成立することから明らかであろう。 $k^2 = 1$ の場合には積 $ij = ji = k, ki = ik = -j, jk = kj = -i$ が成立するからこの場合の“四元数”は交換する。

ここで, Hamilton が採用した $k^2 = -1$ の場合に四元数の交換則が成り立つかみてみよう。まず ab は

$$\begin{aligned} ab = & (t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (t_1 x_2 + x_1 t_2 + \underline{y_1 z_2} - z_1 y_2)i \\ & + (t_1 y_2 - \underline{x_1 z_2} + y_1 t_2 + \underline{z_1 x_2})j + (t_1 z_2 + \underline{x_1 y_2} - y_1 x_2 + z_1 t_2)k \end{aligned} \quad (3.47)$$

であり, また ba は

$$\begin{aligned} ba = & (t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (t_1 x_2 + x_1 t_2 - \underline{y_1 z_2} + z_1 y_2)i \\ & + (t_1 y_2 + \underline{x_1 z_2} + y_1 t_2 - \underline{z_1 x_2})j + (t_1 z_2 - \underline{x_1 y_2} + y_1 x_2 + z_1 t_2)k \end{aligned} \quad (3.48)$$

ab と ba の下線の部分が負号だけちがっているので, $ab \neq ba$ である。

つぎに分配則をみてみよう。

$$\begin{aligned} a(b+c) = & [t_1(t_2+t_3) - x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3) - z_1(z_2+z_3)] \\ & + [t_1(x_2+x_3) + x_1(t_2+t_3) + y_1(z_2+z_3) - z_1(y_2+y_3)]i \\ & + [t_1(y_2+y_3) - x_1(z_2+z_3) + y_1(t_2+t_3) + z_1(x_2+x_3)]j \\ & + [t_1(z_2+z_3) + x_1(y_2+y_3) - y_1(x_2+x_3) + z_1(t_2+t_3)]k \\ = & ab + ac \end{aligned} \quad (3.49)$$

となり, 分配則は成り立っている。

$k^2 = 1$ の場合には i, j, k から任意に 2 つとった積はいずれも交換可能なので $ab = ba$ が成り立つ。結合則と分配則が成り立つのはいうまでもない*7。

*6 この考察ではなぜ Hamilton が $k^2 = -1$ を採用し, $k^2 = 1$ の場合を採用しなかったのかはわからない。実は $k^2 = 1$ の場合には絶対値の法則 $|ab| = |a||b|$ が成り立たない。

*7 このエッセイを書いたときには $k^2 = 1$ の場合には, 2 つの四元数の積に対して成り立つべき絶対値の法則 $|ab| = |a||b|$ を満たさないで合理的な数としての取り扱えないということを知らなかったので, こういう間抜けな文章を書いた。絶対値の法則の 2 乗の $|ab|^2 = |a|^2|b|^2$ は Cauchy-Lagrange の恒等式である。すなわち, $k^2 = 1$ の場合は Cauchy-Lagrange の恒等式を満たさない。詳しくは [3] を参照せよ。

4 おわりに

前節で見たようにいささか強引に結合則からそのしたがう代数を導いてみると、交換しない数と交換する数との両方が現れてくることがわかる。ところが3節末の脚注でも述べたような理由で Hamilton は交換則を満たさない四元数へと導かれたその推論の道筋が知りたくなってくる。しかし、その推論をたどることは別の機会に譲ることにしよう*8。

このエッセイでした議論はこういう風な面倒な計算をしなくても $i(jk) = (ij)k, (ik)j = i(kj), \dots$ を調べただけでできるのではないかとのコメントを査読者の世戸さんからいただいた。その検討をしてこのエッセイに補遺をつけることも考えたが、すでにおこなわれている 12 巻 6 号の発行がさらにおこなわれるので、その検討を今回はあきらめた。そのうちにその検討をするつもりである。

5 補遺 k^2 を未知数とした理由

査読者の世戸さんから $k^2 = -1$ とおかないで k^2 を未知数としているのは理解できないから、説明を加えるべきだとのコメントをもらった。このエッセイを書いたときに私が参考文献 [5] を十分に読んでいたとは思えないが、 k^2 の値は数の性質のところであげた 4 つの法則からは決まらない。 $k^2 = \pm 1$ のみが求められる。 $k^2 = -1$ と決定されるのは絶対値の法則 $|ab| = |a||b|$ によってである。それでわざと k^2 を未知数としたのである。歴史的にも Hamilton は同じような検討をしている*9。

さらに、ではなぜ $j^2 = -1$ としたのかという点が論点になってくるであろうが、これは [3] に述べてあるように複素平面に直交する平面上での i に対応するものを j と表したので、 $j^2 = -1$ は自明である。

四元数のそもそものはじまりは、この j の発見に起源がある。それで Hamilton は $1, i, j$ を元とする三元数が存在するのではないかと考えて三元数を探求し、その結果として、四元数の発見に導かれたのであった。

(2007. 11. 8)(2022.10.15 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数, 研究と実践 (愛数協) 第 99 号 (2008.10) 20-25
- [2] 矢野 忠, Cauchy-Lagrange の恒等式再論 2, 研究と実践 (愛数協) 第 93 号 (2007.3) 9-13
- [3] 矢野 忠, 四元数の発見, 数学・物理通信 11 巻 5 号 (2021.9.11) 12-23
- [4] M. J. Crowe, A History of Vector Analysis, (Dover, 1994) 28
- [5] W. R. Hamilton, Philosophical Magazine, 3rd series 25 (1844), 489-495
- [6] 矢野 忠, 四元数の発見へ 2, 数学・物理通信 2 巻 1 号 (2012.3.21) 12-24

*8 このエッセイを書いた後で、「四元数の発見」というエッセイを何回か書いた。最新のものは [3] である。

*9 [6] に詳しく解説されている。

四元数の学習の私的な歴史

矢野 忠^{*1}

The Private History of Study for Quaternions

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

小著『四元数の発見』（海鳴社）の初刷は 2,000 部であり，2014 年 10 月に発行された．四元数は数学でもマイナーな分野であり，初刷で絶版だろうと思っていたが，ここ 1, 2 年比較的よく売れたらしく，版元の海鳴社から増刷の要望が著者のところに届いた．

すでに一度「自著『四元数の発見』を語る」で本を執筆中に会った疑問について述べたが，この機会にもっと広く四元数の私的な学習の歴史を振り返ってみたい．その上でなお，さらに学びたいことがあれば，その点についても言及したい．

2 四元数に関心をもつまで

大学の教養部のころ「代数学と幾何学」の講義担当であった光藤先生から四元数というものがあるとは教わったが，それ以上のことはまったく知らなかった．

後で四元数に関心をもつきっかけになる，Cauchy-Lagrange の恒等式の証明について，エッセイを書いたのは 1994 年のことであり，これが文献 1 であった．このときにはそれが四元数につながるとはまったく思ってもみなかった．その後，Cauchy-Lagrange の恒等式について関心をもつようになり，「Cauchy-Lagrange の恒等式再論」1-5 というエッセイを 2006 年から 2012 年にかけて書いた^{*3}．この中の文献 3 で四元数を用いて Cauchy-Lagrange の恒等式を証明していた．これが私が四元数に触れた最初であった．

3 四元数を知ったころ

四元数に関心をもったごく初期に，四元数を用いて Cauchy-Lagrange の恒等式を証明できるということで，それで四元数について理解したくなり，やみくもに計算して，ごり押しのエッセイを書いた．これが文献 5 である．このときにもっと合理的な推論から Hamilton は四元数を導入したのであろうと推測した．ほぼ 1 年を経て，Hamilton の初期の論文を読んで，2009 年に文献 6 の「四元数の発見」を発表した．もっともこの発表は 2009 年 9 月であったが，脱稿は 2008 年 2 月末であり，Hamilton の当該の論文を読んだのは 2007 年後半から 2008 年の 1, 2 月だと思われる．

2007 年 11 月に堀源一郎『ハミルトンと四元数』が発行されている．その書の第 2 章「四元数の発見」を読んだが，まったくわからず私の書いた「四元数の発見」の方がわかりやすいのではないかと海鳴社に送ったら，『ハミルトンと四元数』の編集に携わった木幡さんも同意してくれたとのメールを海鳴社の辻さんからもらった．

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} これらは文献 2-4, 7, 10 である．

このときに私の文献 6 の原稿がすでに完成していたのか、それとも『ハミルトンと四元数』を読んでから自分の原稿を書いたのかはいまではわからない。たぶん『ハミルトンと四元数』を読む前に書いていたような気がするけれども確かではない。

少なくとも『ハミルトンと四元数』の第 2 章は私には読んでもそのときにはまったくわからず、解読できたのはずっと後の 2012 年 2 月末になる。もともとこの第 2 章は、Hamilton の論文の翻訳であり、解説ではなかった。その論文は Hamilton が四元数を発見した当日の夜に書かれたものであり、理解が難しかった。

ともかく、この第 2 章は 2012 年 2 月末にはなんとか解読ができた。これが文献 11 である。これで四元数の誕生の秘密はようやくわかった。

4 四元数と空間回転

四元数の導入のいきさつが分かった後で、問題になったのは空間回転が

$$u = qv\bar{q}, \quad (4.1)$$

u, v = 実部をもたない四元数, q = 単位四元数, $\bar{q} = q$ の共役四元数

と表されることだった。四元数の解説書を見ても、たいていの本はすべてベクトルの回転の式と等値であることを示すとか、行列での回転と等値であることを示すしかされていない。

インターネットで見つけたのは、鏡映変換を 2 度行ってそれが回転と同じになっているとの説明であったが、あまりピンとは来なかった。結局そのインターネットで引用されていた河野俊丈さんの『新版 くみひもの数理』を購入して読んでようやくわかって文献 13 を書いた。四元数による説明としては Kuipers の本の説明でようやく納得して文献 12 を書いた。また同形写像による説明としてはポントリャーギンの『数の概念の拡張』を読んで、それをすこし発見的に説明する工夫をして、文献 14 を書いた。

5 四元数と球面線形補間

ベクトルの球面線形補間の概念自身は線形補間の概念を知っている人には難しくはない。しかし、これを数式として導出するのはまた別である。

長さが一定のベクトルの線形補間の式、すなわち、球面線形補間の導出はもともとこのことを提唱した Shoemake は論文の中でその導出法を彼の論文には記していない。彼自身も同僚にこの式を導出してもらったらしい。それでこの球面線形補間の式の導出は問題であった。インターネットに説明があったのだが、よくわからなかった。また、『ゲーム 3D 数学』にも説明が載っていたのだが、もうひとつわからなかった。そのうちに義弟の大槻俊明から、インターネットの説明をわかりやすく説明した、初等幾何学的な導出法を私信で送ってもらったのでようやくわかった。その考え方で『ゲーム 3D 数学』を読んだら、この説明もわかった。

そうこうしている間に Buss の著書 “3D Computer Graphics” のインターネットの公開部分を読んで、2 つのベクトルが互いに直交している場合には、その 2 つのベクトルと同じ大きさの、中間のベクトルを求めることは簡単だと知った。もし 2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が直交していないならば、その 2 つのベクトルからベクトル $\mathbf{x}$ に直交するベクトル $\mathbf{w}$ をつくればよい。

このベクトル $\mathbf{w}$ をどうつくるかはすぐに Gram-Schmidt の直交化法で求めることは自分ですぐに思いついたという気がしているが、Buss の本から学んだのかもしれない。Buss の本のインターネット公開部分のプリントを持っているはずだと思って探したが、そのコピーがでて来ないので真相はわからないままである。

最近になって、この球面線形補間の導出を金谷は途中までしか行っていないのを最後まで導出して文献 33 に書いたが、この原稿を読んで、編集委員の世戸さんがもっと簡明な導出法を示してくれたのでびっくりした。

6 『四元数の発見』の発行以後

2014 年 4 月に文献 19 を発表した後で、前に四元数について本を書きませんかとお誘いをいただいていた海鳴社にメールを出して意向を伺ったところ、もちろん出したいとの返事をもって、2014 年の夏は原稿の整理にばかりきりであった。本には 10 月 1 日発行となっているが、9 月 20 日ころには印刷されて私の手元にも 10 冊くらいが届いた。

本が発行された後で、「自著『四元数の発見』を語る」というエッセイを書いた（文献 21）。本を発行してそれで四元数への関心が萎えたということではなく、まだいくつもよくわかっていないところがあったので、「四元数（補遺）」1-4 を書いた（文献 23-26）。文献 26 は改訂版を文献 28 として書いた*4。

これで一応終わりであったが、その後は元々『四元数の発見』にあった不満なところを直す作業の一環として、「ベクトルの空間回転」の改訂版を文献 29 に書いた。これは元の文献 16 で空間回転の回転方向が時計まわりとなっていたのを反時計まわりに修正をした。

さらに、文献 30 で Pauli 行列の導出を朝永さんの本にしたがって行っただけで、また文献 6 または 9 の改訂を文献 31 で行った。これは査読者の川崎守氏（岐阜大学名誉教授）の注意で補注に入れていた $\sqrt{-1}$ の定義とベクトルのスカラー積とベクトル積の解説をこの改訂版の付録につけた。

Cauchy-Lagrange の恒等式

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + (bz - cy)^2 \quad (6.1)$$

の証明が四元数ではできないと思っていたのが、実部のない 2 つの四元数の $ai + bj + ck$ と $xi + yj + zk$ との積

$$(ai + bj + ck)(xi + yj + zk) = -(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k \quad (6.2)$$

からできることを松岡学『数の世界』（講談社ブルーバックス）を読んで知ったので補足説明を文献 32 でした。

さらに、これはまだエッセイをどこにも書いていないが、複素数とか四元数を計量ベクトル空間として考えるときにスカラー積を定義するが、このスカラー積は複素数の演算とか四元数の演算とは無関係に定義しなくてはならないと思っていた。だが、これらのスカラー積は実は複素数や四元数の演算として

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) \quad (6.3)$$

と定義できることも『数の世界』で知った。

7 『四元数の発見』の改訂

増刷をしたいとの要望を版元からされたが、増刷においては明らかなミスプリントとか不具合を修正することであろう。すくなくとも現段階では『四元数の発見』の改訂をするという話ではまだない。

しかし、将来に向けて改訂の方針を考えておいたほうがいだろう。だから、改訂をするためにはどのような改訂の方針をもっているかを全部ではないが、ここで述べておきたい。

『四元数の発見』では、もうほぼ原稿ができ上がった段階で査読をお願いしたので、それにともなって大幅に原稿を書き換えるということをしなないという方針で、第 12 章に補注をつけた*5。これは一時的な処置としてしかたがなかったが、本来査読者の意見にしたがって書き換えるべきであった。

*4 この「四元数（補遺）」1-4 でどのような点を取り扱ったのかを付録 1 にまとめた。

*5 インターネットを見ていると、この査読者と著者のやりとりが、おもしろかったという意見を述べている人もおられた。

だから、改訂版が出すときにはこれらの意見を本文に取り込んだ修正を行うべきであろう。それに『数の世界』で示された上の2点は修正をしておきたい。

さらに球面線形補間の章は金谷の導出法と世戸の導出法を付録に追加すべきである。これは球面線形補間の章は比較的良好とまとまっているにもかかわらずである。

また、「四元数」補遺 1-4 は改訂の際には補遺として付加すべきものである。また、「Pauli 行列の導出」(文献 30) も第 7 章に付加すべきであるし、また「オイラー角による回転の疑問」(文献 19) は第 9 章に付加すべきである。

だが、もっとも改訂に困難を覚えているのは第 6 章「四元数と空間回転 3」である。この章ではベクトル空間の知識を補足すべきであるが、いまのところベクトル空間の知識としてはポントリャーギンの『数概念の拡張』を参照することでスキップしているが、本を self-contained にするならば、どうしてもこの説明を欠かすことはできないであろう。

今回自分の書いた四元数とその関連のエッセイのファイルを調べていると、実は書きかけで完成していない原稿もあることを見つけた。

それは数論との四元数との関連である。この関連はまったく述べないことにして無視をしたのだが、それについても取り上げて見たら興味深いかもしれない。さらに、私自身の四元数への関心はそちらに向かなかったが、多項式の因数分解からの四元数のアプローチである。Clifford 代数などからの四元数へのアプローチも一度は概観しておくべきかと思う。これは本のなかでは第 11 章「四元数の広がり」に一言だが触れている。

なお、この第 11 章と第 12 章は『四元数の発見』での書下ろしの部分であり、「数学・物理通信」には該当のエッセイは存在しない。

8 おわりに

『四元数の発見』の版元・海鳴社からの増刷の要望が届いたのを機会として、四元数その関連のエッセイのリストを作成して見る機会があったので、四元数の学習の私的な歴史を振り返ってみた。すでに文献 21 でふりかえりをしている。それと矛盾することもあるかもしれないが、人間の記憶はそんなにしっかりしたものではないので、お許しをお願いしたい。なお、付録 2 として私の発表した「四元数と関連エッセイのリスト」をつけておく。

9 付録 1 四元数(補遺) 1-4 でのテーマ

「四元数(補遺) 1-4」は『四元数の発見』発行以後になお四元数について私がよくわからなかったことを調べて書いた。

補遺 1 (文献 23) は四元数の単位 i, j, k を $SU(2)$ の Pauli 行列と対応させるが、このときの $SU(2)$ の行列の一般形は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b: \text{複素数} \quad (9.1)$$

と表される。まずこれがどういう風に導けるのかを示した。

具体的には 4 つの実数 x^0, x^1, x^2, x^3 を用いて

$$\begin{pmatrix} x^0 + ix^3 & ix^1 + x^2 \\ ix^1 - x^2 & x^0 - ix^3 \end{pmatrix} = x^0 + x^1(i\sigma_1) + x^2(i\sigma_2) + x^3(i\sigma_3) \quad (9.2)$$

と表すことができる。ここで $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はよく知られた Pauli の行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

と単位行列

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

で $SU(2)$ の行列を表すことができる。

さらに、実数の組として、1 行 4 列の行列、いわゆるベクトルで四元数 $1, i, j, k$ を表すことも示した。すなわち、

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1) \quad (9.5)$$

とも対応づけられる。

補遺 2 (文献 24) は四元数を計量ベクトル空間としてみたときのスカラー積の定義と四元数の積との関係についての私の理解が混乱した経験を述べてある。

まず 2 つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = x + yi$ としてスカラー積を

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = ax + by \quad (9.6)$$

として定義できると知ったので、同様に 2 つの四元数 $\alpha = d + ai + bj + ck, \beta = w + xi + yj + zk$ の場合にもスカラー積を

$$\alpha \cdot \beta = dw + ax + by + cz \quad (9.7)$$

とできるとわかった。

もっともこのことを明示した文献は私が『四元数の発見』の元になる原稿を書いていたときにはあまりなかった。そしていまでは、このスカラー積は

$$\alpha \cdot \beta = dw + ax + by + cz = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) \quad (9.8)$$

と上の式の最後のように四元数の積の和としても表すことも『数の世界』には示されている。もちろん、四元数を計量ベクトル空間の 4 次元ベクトルとして扱うといっても普通の 4 次元ベクトルとは幾何学的な性質はちがっていることは当然である。これは 2 次元のベクトルと複素数とが幾何学的に類似の点と異なった側面をもつことと同様である。

補遺 3 (文献 25) は四元数の元 i, j, k を 2 次の行列でどのように表すかについて述べた。このことについては『組みひもの数理』(遊星社) に述べられているのだが、なかなか私にはわかりにくかった。それを読み解いたつもりだが、こうして求められた四元数 i, j, k に対応した 2 次の行列は Pauli 行列そのものではなかった。四元数 i, j, k に対応した 2 次の行列が求められれば、Pauli 行列との対応は求められるが、その対応のさせ方は一義的ではない。

その対応のさせ方をかなり広範に調べたが、その中にももちろん

$$i \rightarrow -i\sigma_1, j \rightarrow -i\sigma_2, k \rightarrow -i\sigma_3 \quad (9.9)$$

の対応も入っている。

補遺 4 (文献 26, 28) は有名なオランダの数学者ファン・デア・ヴェルデンの書いた『代数学の歴史』(訳書)(現代数学社)の四元数に関係した箇所を読んで検討したものである。この書は私の読んだことのある他の書籍よりも突っ込んで書かれているけれども、私の手前勝手な判断ではあるが、私の著書の第 2, 3 章の方がわかりやすいと思っている。もっとも論文としてはもっと突っ込んだ内容の論文が私の知らないところにある可能性はある。

10 付録 2 四元数と関連のエッセイ

1994 年

1. Lagrange の恒等式
研究と実践（愛数協）No. 50 (1994.6) 9-12
（『数学散歩』に所収）

2006 年

2. Cauchy-Lagrange の恒等式再論 1
研究と実践（愛数協）No. 92 (2006.10) 14-17

2007 年

3. Cauchy-Lagrange の恒等式再論 2
研究と実践（愛数協）No. 93 (2007.3) 9-13
4. Cauchy-Lagrange の恒等式再論 3
研究と実践（愛数協）No. 94 (2007.6) 8-12

2008 年

5. 四元数
研究と実践（愛数協）No. 99 (2008.10) 20-25

2009 年

6. 四元数の発見
研究と実践（愛数協）No. 101 (2009.9) 24-31

2010 年

7. Cauchy-Lagrange の恒等式再論 4
研究と実践（愛数協）No. 105 (2010.7) 12-17

2011 年

8. 四元数に近づく
数学・物理通信 1 巻 9 号 (2011.9.6) 18-23
（『四元数の発見』に所収）
9. 四元数の発見へ
数学・物理通信 1 巻 11 号 (2011.12.19) 16-23
（「四元数の発見」と改題して『四元数の発見』に所収）

2012 年

10. Cauchy-Lagrange の恒等式再論 5
研究と実践（愛数協）No. 110 (2012.1) 30-33
11. 四元数の発見へ 2
数学・物理通信 2 巻 1 号 (2012.3.21) 12-24
（「Hamilton のノート of 解説」と改題して『四元数の発見』に所収）
12. 四元数と空間回転 1
数学・物理通信 2 巻 2 号 (2012.6.28) 19-29
（『四元数の発見』に所収）
13. 四元数と空間回転 2
数学・物理通信 2 巻 5 号 (2012.10.8) 20-27

(『四元数の発見』に所収)

2013 年

14. 四元数と空間回転 3
数学・物理通信 3 巻 1 号 (2013.3.8) 20-24
(『四元数の発見』に所収)
15. 四元数と空間回転 4
数学・物理通信 3 巻 2 号 (2013.3.29) 19-28
(「空間回転と $SU(2)$ 」と改題して『四元数の発見』に所収)
16. 四元数と空間回転 5
数学・物理通信 3 巻 5 号 (2013.9.4) 16-20
(「ベクトルの空間回転」と改題して『四元数の発見』に所収)
17. オイラー角による回転の疑問
数学・物理通信 3 巻 6 号 (2013.9.17) 22-27
18. 四元数と空間回転 6
-Euler 角による回転の表現-
数学・物理通信 3 巻 8 号 (2013.12.26) 20-31
(「Euler 角と空間回転」と改題して『四元数の発見』に所収)

2014 年

19. 四元数と球面線形補間
数学・物理通信 4 巻 2 号 (2014.4.21) 4-22
(『四元数の発見』に所収)
20. 空間回転と $SU(2)$
数学・物理通信 4 巻 4 号 (2014.6.23) 18-28
(『四元数の発見』に所収)
(エッセイ 15 の改訂版)
21. 自著『四元数の発見』を語る
数学・物理通信 4 巻 7 号 (2014.12.2) 17-21
22. 四元数の発見
徳島科学史雑誌 No.23 (2014) 14-20

2015 年

23. 四元数 (補遺 1)
-四元数と $SU(2)$ -
数学・物理通信 5 巻 2 号 (2015.3.9) 3-9
24. 四元数 (補遺 2)
-四元数とベクトル空間-
数学・物理通信 5 巻 5 号 (2015.6.1) 2-6

2016 年

25. 四元数 (補遺 3)
-四元数とパウリ行列-
数学・物理通信 6 巻 5 号 (2016.6.2) 15-26
26. 四元数 (補遺 4)

- 『代数学の歴史』を読む -

数学・物理通信 6 巻 10 号 (2016.12.2) 14-20

2018 年

27. 四元数と Euler の恒等式

数学・物理通信 8 巻 6 号 (2018.9.11) 21-28

28. 四元数 (補遺 4) (改訂版)

- 『代数学の歴史』を読む -

数学・物理通信 8 巻 9 号 (2018.12.13) 14-22

(エッセイ 26 の改訂版)

2020 年

29. ベクトルの空間回転 (改訂版)

数学・物理通信 9 巻 9 号 (2020.1.9) 13-18

(エッセイ 16 の改訂版)

30. Pauli 行列の導出

数学・物理通信 9 巻 10 号 (2020.2.3) 20-30

2021 年

31. 四元数の発見

数学・物理通信 11 巻 5 号 (2021.9.11) 12-23

(エッセイ 9 の改訂版)

2022 年

32. 四元数と Cauchy-Lagrange の恒等式

数学・物理通信 12 巻 1 号 (2022.3.12) 16-22

(エッセイ 8 の Cauchy-Lagrange の恒等式の補足)

33. 球面線形補間の導出

- 金谷の導出法 -

数学・物理通信 12 巻 5 号 (2022.9.9) 8-14

(エッセイ 19 の補足)

34. 四元数

数学・物理通信 12 巻 6 号 (2022.10.22) 12-18

(エッセイ 5 の改訂版)

35. 四元数の学習の私的な歴史

数学・物理通信 12 巻 6 号 (2022.10.22) 19-26

(2021.9.6)(2022.10.15 改訂)

編集後記

編集後記を書く順がまた私に廻ってきました。私が住む札幌は、まだ10月の初めだというのに、11月並みの寒い日が続いています。最高気温が15度に届かず、最低気温は一桁です。そう言えば、今年の夏はほぼ平年並みの気温が続き、暑がりの私にとっては、快適とまではいかないまでも、過ごしやすい夏を久しぶりに経験することができました。もしかするとこれは、コロナ禍のため人間活動が減ったせいかもしれません。

話し変わって、私事で恐縮ですが、二つのことを報告しておきます。一つは、『数学・物理通信』に投稿して掲載されたものが、今回の号でちょうど100編目になります。この通信誌が通巻100号を迎えたのは昨年(2021年)の9月のことでしたから、私の投稿したものが、ちょうど1年遅れで100編を達成したことになります。この100編という投稿数は、編集長の矢野忠さんには、はるかに及ばないのですが、ほぼ毎号に近い投稿数だったことになります。自分でもよくこれだけ頑張れたものと感慨ひとしおです。もちろん、論文などとは言えないものもたくさんありますが、それはそれで、見逃していただきたいと思っています。ただし、私も歳のせいか計算能力が落ちてきたのと、おまけに、書く種もそろそろ尽きてきたので、この先どうしたものかと、案ずること頻ります。

それともう一つの報告は、中西襄先生と共著で書いた英文の本“Differential Equations and Their Applications: Analysis from a Physicist's Viewpoint”(World Scientific Publishing Co.)が、作成開始からおよそ2年半がかりで、ようやくこの6月にできあがってきたことです。この本の作成にあたっては、私の下手な英語のため、中西先生はじめ、本の編集者の方々に多大な迷惑をかけてしまいました。特に編集者との数十回にもおよぶ英文でのメールのやり取りには大変な苦勞をしてしまいました。もうこんなことは2度と御免だと思うくらいでした。しかし、出来上がってみると、物理屋の端くれにすぎない私が、英文の専門書が書けたのは一生の宝物になると、しみじみ感激している次第です。私が書いた部分は『数学・物理通信』に書いたもののうち、面白そうなものをまとめたもので、これも編集長の矢野さんがこの通信誌を続けてくれたおかげです。この場を借りて、中西先生と矢野さんに感謝を申し上げる次第です。

(世戸憲治)

「数学・物理通信」に連載の記事が英文の書籍になる。これは編集者としてもとても喜ばしいことです。連載の記事が書籍になった例としては日本語では小著『四元数の発見』(海鳴社)がありますが、それよりもはるかにすばらしいことです。

世戸さんは中西先生の共著者としてこの「数学・物理通信」にまずは控えめに現れたのですが、そのうちに独立を果たされ、それからは怒涛のごとき投稿となりました。その投稿数が100編にも達したとはすばらしいです。それに最近は編集委員としても活躍をいただいています。

今後も投稿と編集をよろしくお願いします。

(矢野忠)