数学・物理通信

12 巻 7 号　　2022 年 12 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2022 年 12 月 7 日

目次 (Contents)

ばねと錘を組み合わせた振動問題 (2)

世戸 憲治 *

Vibration Problems Combining Spring and Weight (2)

Kenji SETO*

1　はじめに

前回の「ばねと錘を組み合わせた振動問題 (1)」(「数学・物理通信」12 巻 6 号) では，ばねの一端を平面上の任意の点に固定し，ばねの他端に付けられた錘が直線上を自由に動くようにしたときの振動を扱った（モデル 1）．もう一つは，2 個の錘を用意し，これらの錘を 1 本のばねでつなぎ，1 個の錘は x 軸上を，また，他方の錘は y 軸上を動くようにしたときの振動を扱った（モデル 2）．今回はこれら 2 つのモデルを拡張したものを考えてみる．モデル 1 の拡張として，ばねの一端を原点に固定し，他端に付けた錘は任意に設定された曲線上を動く場合を考える．また，モデル 2 の拡張として，3 個の錘の 2 個づつを，3 本のばねでつなぎ，これらの錘のそれぞれが x, y, z 軸上を動くように設定した場合を扱ってみる．ただし，これらの問題はいずれも大変難しい問題で，解くべき方程式は求めたが，それらを解析的に解くことは非常に困難である．ここでは，これら問題の微小振動解，あるいは，特別な場合の解を求めることで満足することにする．

2　モデル 1 の拡張

図 1 に示すように，自然長 ℓ，ばね定数 k のばねの一端を平面上の原点に固定し，ばねの他端には質量 m の錘を付けておく．この錘には中心を通る穴を開けておき，この穴に，任意に設定された曲線 $y = y(x)$ に沿って置かれた曲線状の棒を通しておく．ただし，このときの曲線は尖点などのようなものは存在しなく，この錘がこの曲線に沿って摩擦無しに自由に動くものとする．この錘に適当な初期値を与えたときの振動を解析する．以下では，この曲線のことを「軌道曲線」と呼ぶことにする．

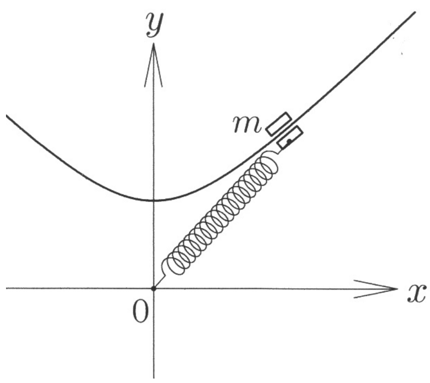

図 1　任意曲線モデル

ここでは，Lagrangian を用いた方法を採用する．まず，錘の運動エネルギー T について，いま錘が曲線上の点 (x, y) にあるものとして，そこからの微小長さ ds 離れた曲線上の点を $(x + dx,\ y + dy)$ とすると，

* 北海学園大学名誉教授

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\ dx$ となるので，この距離を微小時間 dt で動くものとすると，そのときの速度は ds/dt となる．したがって，運動エネルギー T は，

$$T = \frac{1}{2}m(ds/dt)^2 = \frac{1}{2}m(1+y'^2)\dot{x}^2 \tag{2.1}$$

となる．ここでは，時間微分について Newton 流の上付きドットの記号を併用する．また，ばねの歪みエネルギー U は，錘が点 (x,y) の位置にあるときのばねの伸びは $\sqrt{x^2+y^2}-\ell$ となるので，

$$U = \frac{1}{2}k\bigl(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\bigr)^2 \tag{2.2}$$

で与えられる．これから，Lagrangian $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = T - U \tag{2.3}$$

とし，さらに，作用積分 $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}dt \tag{2.4}$$

の変分をとると，Euler-Lagrange 方程式として，錘の運動方程式が

$$m\bigl[(1+y'^2)\ddot{x} + y'y''\dot{x}^2\bigr] = -k\bigl(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\bigr)\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.5}$$

と求められる．この方程式の一つの積分として，エネルギー積分

$$T+U=E, \qquad \text{すなわち，} \qquad \frac{1}{2}m(1+y'^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\bigl(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\bigr)^2 = E \tag{2.6}$$

が得られる．E は全エネルギーで時間に対し一定値をとる．これはこの式の左辺を時間で微分し，運動方程式 (2.5) を用いると，ゼロとなることから容易に分かる．

以下では，初期条件として，

$$t=0 \text{ のとき，} \quad x=0, \qquad \dot{x}=v_0 \tag{2.7}$$

を課すことにする．また，以後の数式を簡単化するため，軌道曲線 $y=y(x)$ に対し，条件

$$y_0 = y(0)\ >\ 0, \qquad y'(0)=0 \tag{2.8}$$

を課す．この条件は，一見，きつい条件のように見えるが，曲線を原点周りに回転させて考えれば，ほとんどの場合で満たされるものと思われる．これら初期条件 (2.7)，および，(2.8) 式を，(2.6) 式に適用すると，全エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k(y_0-\ell)^2 \tag{2.9}$$

と与えられる．これを (2.6) 式に戻し，$\dot{x}$ について解き，変数分離して積分形にすると，

$$\int \frac{\sqrt{1+y'^2}\ dx}{\sqrt{\bigl(v_0/\omega\bigr)^2 + \bigl(y_0-\ell\bigr)^2 - \bigl(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\bigr)^2}} = \omega(t-t_0), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.10}$$

を得る．ここに，ω は時間の逆数の次元を持つ定数で，この第 2 式で定義する．また，t_0 は積分定数である．この左辺の積分は，軌道曲線としてどのようなものを与えるかで変わってくるが，一般には煩雑な積分式になってしまう．

2.1　軌道曲線を円にした場合

この積分が最も簡単にできるのは，軌道曲線を原点中心の円とした場合である．このときは，

$$x^2 + y^2 = {y_0}^2 \tag{2.11}$$

として，(2.10) 式は

$$\int \frac{y_0\,dx}{(v_0/\omega)\sqrt{{y_0}^2 - x^2}} = \omega(t - t_0) \tag{2.12}$$

となって，これは容易に積分され，初期条件を満たす解は，

$$x = y_0 \sin\left(\frac{v_0}{y_0} t\right) \tag{2.13}$$

と与えられる．最も，この場合，ばねはまったく長さを変えないで，等速円運動をするだけなので，簡単に解けるのは当然である．

2.2　軌道曲線を双曲線にした場合

はじめに与える軌道曲線を，図 1 で示したような双曲線にして，

$$y^2 - x^2 = {y_0}^2 \tag{2.14}$$

とした場合を扱ってみる．このとき (2.10) 式は，

$$\int \frac{\sqrt{{y_0}^2 + 2x^2}\ dx}{\sqrt{({y_0}^2 + x^2)\Big[\big(v_0/\omega\big)^2 + \big(y_0 - \ell\big)^2 - \big(\sqrt{{y_0}^2 + 2x^2} - \ell\big)^2\Big]}} = \omega(t - t_0) \tag{2.15}$$

と大変な積分式になってしまう．これは楕円積分以上のもので，解析的な方法では歯が立たない．一つ分かることは，分母の平方根の中の大括弧で括った部分は正でなければならない．以下，ばねの自然長 ℓ は

$$\ell < y_0 \tag{2.16}$$

と仮定し，この大括弧の中身が正という条件は

$$\sqrt{(v_0/\omega)^2 + (y_0 - \ell)^2} + \ell \geq \sqrt{{y_0}^2 + 2x^2} \tag{2.17}$$

となる．これは，x の動き得る範囲が限定されることを意味する．特に，$v_0 = 0$ のときは $x = 0$ となることに注意する．ここでは x のとり得る範囲は y_0 に比べ小さいものとして，近似方法をとることにしよう．まず，(2.15) 式の分母の大括弧中にある x 依存部分について，x^2 の項まで Taylor 展開し，

$$\left(\sqrt{{y_0}^2 + 2x^2} - \ell\right)^2 \cong (y_0 - \ell)^2 + 2y_0(y_0 - \ell)(x/y_0)^2 \tag{2.18}$$

とし，また，残りの x 依存部分について，

$$\frac{{y_0}^2 + 2x^2}{{y_0}^2 + x^2} \cong \frac{1}{1 - (x/y_0)^2} \tag{2.19}$$

と近似する．この結果，(2.15) 式の被積分関数を x^2 項までの近似にすると，

$$\int \frac{dx}{(v_0/\omega)\sqrt{1-\alpha^2(x/y_0)^2}} = \omega(t-t_0), \qquad \alpha = \sqrt{1+\frac{2y_0(y_0-\ell)}{(v_0/\omega)^2}} > 1 \tag{2.20}$$

と表される．ここに，無次元数 α をこの第 2 式で定義する．この積分は容易に実行され，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{y_0}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha v_0}{y_0}t\right) \tag{2.21}$$

と求められる．この解は (2.13) 式の解と似ていて，α が余計に付くだけである．

3　モデル 2 の拡張

ここでは，前回に扱った「モデル 2」の 3 次元化を考察してみる．図 2 に示すように，3 次元座標 x, y, z の各軸をとる．質点とみなせる質量 m の錘が 3 個あり，これら錘には中心を通る穴を開けておく．これら錘の各穴に，x, y, z の各軸上に置かれた細い棒を通し，各錘がこれら棒に沿って摩擦無しに自由に動けるようにしておく．さらに，これらの錘には，自然長 ℓ，ばね定数 k のばねを 3 本用意し，図に示すように各錘同士を結びつける．これらの錘に以下に示すような初期値を与えたときの振動を解析する．

ただし，これら錘は原点のところで衝突しないように立体的に交差するように作っておくものとする．

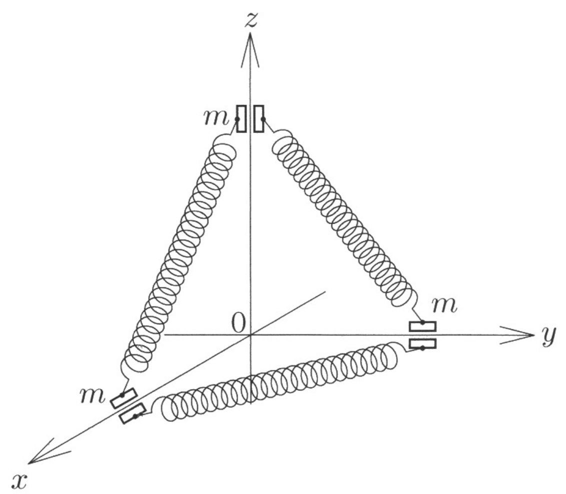

図 2　ばねと錘の 3 次元モデル

はじめに，これら錘の運動方程式を作らなければならないが，前節同様，Lagrangian を用いた方法を採用する．これら錘が運動しているときの時刻 t における各錘の座標を $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$ とする．以下，これら座標の時間微分を Newton 流の上付きドットで表すことにして，各錘の運動エネルギーの和 T は，

$$T = \frac{1}{2}m\bigl(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\bigr) \tag{3.1}$$

となり，また，3 個のばねの歪みエネルギーの和 U は，

$$U = \frac{1}{2}k\Bigl[\bigl(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\bigr)^2+\bigl(\sqrt{y^2+z^2}-\ell\bigr)^2+\bigl(\sqrt{z^2+x^2}-\ell\bigr)^2\Bigr] \tag{3.2}$$

となる．これら運動エネルギー T，ばね歪みエネルギー U を基にして，Lagrangian $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = T - U \tag{3.3}$$

と作り，さらに，前節同様，作用積分 $\mathcal{I}$ を作ってから，各変数 x, y, z 毎に $\mathcal{I}$ の変分をとると，これら 3 個の錘

の運動方程式が，

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k\Big[\big(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\big)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \big(\sqrt{z^2+x^2}-\ell\big)\frac{x}{\sqrt{z^2+x^2}}\Big],\\
m\ddot{y} &= -k\Big[\big(\sqrt{y^2+z^2}-\ell\big)\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + \big(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\big)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big],\\
m\ddot{z} &= -k\Big[\big(\sqrt{z^2+x^2}-\ell\big)\frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}} + \big(\sqrt{y^2+z^2}-\ell\big)\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

と連立した非線形の微分方程式の形で得られる．

この方程式から得られる 1 つの積分として，エネルギー積分

$$
\begin{aligned}
&T+U=E, \qquad \text{すなわち，}\\
&\frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\big)+\frac{1}{2}k\Big[\big(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\big)^2+\big(\sqrt{y^2+z^2}-\ell\big)^2+\big(\sqrt{z^2+x^2}-\ell\big)^2\Big]=E
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

がある．ここに E は全エネルギーであるが，これが一定値であることは，方程式を積分するより，逆に，この式を時間 t で微分し，方程式 (3.4) を用いると，容易に両辺がゼロとなることから分かる．

前回の 2 次元モデルでは，方程式を極座標で表すことで，変数分離形にすることができた．しかし，3 次元モデルの今回は，極座標を用いても益はなく，この方程式を解析的に解くことは大変難しいと思われる．ここでは，この方程式の特殊な場合に限定して解くことにする．

3.1 ばねの自然長 ℓ をゼロとした場合

はじめに，ばねの自然長 ℓ をゼロとした極限で考える．このときの方程式は (3.4) 式より，

$$
m\ddot{x}=-2kx, \qquad m\ddot{y}=-2ky, \qquad m\ddot{z}=-2kz \tag{3.6}
$$

と連立しない線形の方程式となるので，簡単に解ける．例として，初期条件

$$
t=0 \quad \text{のとき，} \quad x=0, \quad \dot{x}=v_0, \qquad y=0, \quad \dot{y}=v_0, \qquad z=z_0, \quad \dot{z}=0 \tag{3.7}
$$

を持たす解は，

$$
x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad y=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad z=z_0\cos(\omega t), \qquad \omega=\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{3.8}
$$

と求められる．ここに，ω は時間の逆数の次元を持つ定数で，この最後の式で定義する．前節の (2.10) 式の定義とは異なることに注意．

3.2 $\ell \neq 0$ のときの平衡点まわりの振動

3 本のばねの長さが自然長 ℓ になるときの錘の位置を求めるため，

$$
\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{z^2+x^2}=\ell \tag{3.9}
$$

と置いてみる．この方程式の x,y,z を正としたときの解は，

$$
x=y=z=\frac{\ell}{\sqrt{2}}\equiv\ell_0 \tag{3.10}
$$

である．ここで $\ell/\sqrt{2}$ を，以後，ℓ_0 と書くことにする．これが平衡位置である．比較のために述べると，前回の 2 次元モデルでは，$\sqrt{x^2+y^2}=\ell$ という 1 本の式しかないため，これから x, y を求めることはできず，平衡位置は求められなかった．

この平衡点まわりの微小振動を解こうとしたが，3 個の錘がばらばらに動くのでは，やはり，方程式は連立してしまい簡単には解けなくなってしまう．いっそのこと，ここで，変数 x, y, z の時間変化はすべて等しく

$$x(t)=y(t)=z(t)\equiv f(t) \tag{3.11}$$

となる場合を考える．この最後の式のようにこれらの変数を $f(t)$ と書くことにして，方程式 (3.4) は，このとき，

$$m\ddot{f}=-2k(f-\ell_0) \tag{3.12}$$

と線形になってしまう．これは簡単に解けて，初期条件

$$t=0 \text{ のとき，} \qquad f=\ell_0, \quad \dot{f}=v_0 \tag{3.13}$$

を満たす解は，

$$f(t)-\ell_0=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad \omega=\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{3.14}$$

と求められる．これは近似なしの解である．ただし，$f(t)$ が常に正となるように，$\ell_0>v_0/\omega$ とする．

もう一つ，平衡点まわりの解として，方程式 (3.4) の右辺を，点 $x=y=z=\ell_0$ のまわりに 1 次の項まで展開すると，

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=-\frac{k}{2}\Big[2(x-\ell_0)+(y-\ell_0)+(z-\ell_0)\Big],\\ m\ddot{y}&=-\frac{k}{2}\Big[(x-\ell_0)+2(y-\ell_0)+(z-\ell_0)\Big],\\ m\ddot{z}&=-\frac{k}{2}\Big[(x-\ell_0)+(y-\ell_0)+2(z-\ell_0)\Big]\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる．これは連立方程式であるが，特別な場合として，$A,\ t_0$ を，それぞれ，長さ，時間の次元を持つ任意定数として，

$$x-\ell_0=A\sin\Big[\omega(t-t_0)\Big], \quad y-\ell_0=A\sin\Big[\omega(t-t_0)+2\pi/3\Big], \quad z-\ell_0=A\sin\Big[\omega(t-t_0)+4\pi/3\Big],$$
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{3.16}$$

が解となる．これが解となることは，$x-\ell_0,\ y-\ell_0,\ z-\ell_0$ の sine 関数の中身の位相が 120 度ずつずれているために，

$$(x-\ell_0)+(y-\ell_0)+(z-\ell_0)=0 \tag{3.17}$$

となるからである．また，ω の定義は (3.14) 式と異なることに注意．

4　おわりに

今回ほど，構想をつかんでから時間をかけてしまったものはない．方程式はすぐにできたが，まったく解けそうもなく，いくら眺めても時間ばかりが過ぎてゆく．結局のところ，厳密解を求めることはすべて諦めてしまい，近似解，および，特殊解のみで我慢せざるを得なかった．

自著『日本数学教育史研究』を語る

上垣渉[*1]

My Book "A Historical Research of Mathematics Education in Japan"

Wataru UEGAKI[*2]

1　はじめに

私は，日本の数学教育の歴史研究を専門としていて，2021 年 10 月に，日本学術振興会令和 3 年度科学研究費助成事業・科学研究費補助金（研究成果公開促進費）の交付を受けて，風間書房から『日本数学教育史研究　上巻』を上梓することができた．また，その続編としての下巻を令和 4 年度の科学研究費補助金の交付によって，2022 年 9 月に風間書房から刊行することができた．このたび，編集者の矢野忠先生からのお勧めがあって，『日本数学教育史研究』についてのエッセイを書く機会を与えていただいた．

はじめに，『日本数学教育史研究』の全容を知っていただくため，全 43 章の題目を下記に掲げておくことにしたい．

【上巻】

(第 I 部) 草創期の数学教育
- 第 1 章 学制期の数学教育（1）
- 第 2 章 学制期の数学教育（2）
- 第 3 章 教育令期の初等数学教育
- 第 4 章 西洋数学の輸入
- 第 5 章 明治前期における中学校の数学教育
- 第 6 章 幕末・明治期における数学訳語・数学記号の様相
- 第 7 章 明治期における数学訳語統一の動き
- 第 8 章 明治検定期における初等数学教育
- 第 9 章 菊池大麓における教育と数学
- 第 10 章 明治中期における中等数学教育
- 第 11 章 藤沢利喜太郎の数学教育論

(第 II 部) 盛創期の数学教育
- 第 12 章 黒表紙教科書の編纂・概要と特徴
- 第 13 章 文部省内の数学教科書担当官たち
- 第 14 章 高等小学校の数学教育
- 第 15 章 中等学校数学教育の定型化
- 第 16 章 数学教科調査報告について
- 第 17 章 明治後期における中等学校数学教科書の様相
- 第 18 章 数学教育改造運動の勃興
- 第 19 章 日本における数学教育改造運動の受容
- 第 20 章 算術改造運動の源流

[*1] 三重大学名誉教授

[*2] Professor Emeritus, Mie University

この目次からわかるように，本書は幕末・明治期に我が国が西洋数学を輸入・摂取し，明治 5 年の「学制」公布によって近代公教育が始まってから昭和 30 年代までの約一世紀にわたる日本の初等中等数学教育を一望したものである．

本書の序文に書いたことであるが，本書は上述した約一世紀にわたる算数・数学教育の形成をそれぞれの時代状況における社会的・教育的思想及び数学文化の表出として切り取りながらも，連続した一つの《数学と教育》に関する文化形態の変遷として把握しようとした試みと言える．また，下巻のあとがきに記したように，本書は長年にわたる数学教育史研究の集大成であるが，同時に，今後の数学教育史研究のための基礎工事でもある．

本書では，従来の数学教育史研究における誤った見解をただすとともに，不詳とされてきた事項に光をあて，見逃されてきた史実を掘りおこすことによって，我が国の数学教育史研究に一定の貢献ができたと考えている．以下では，それらの内容について概説することとする．なお，このエッセイでは，著書・論文などの詳しい書誌情報を省略することをお許し願いたい．

2　和算全廃・洋算専用について

明治 5 年の学制及び小学教則の公布によって，数学教育では和算を全廃して洋算を専用する方針が採用されたことはよく知られた史実である．しかし，この史実の経緯についての従来の解釈は明瞭さを欠いていた．たとえ

ば，小倉金之助は『数学史研究　第二輯』において，「文部当局は最初先ず和算の採用に決した」と述べているが，その根拠は中小学係の諸葛信澄，吉川孝友が和算家である高久守静に教科書の編輯を依頼したことにある．しかし，中小学係は文部省の方針を決定できる立場にはなく，当時の学制改革のための実験学校を管理する部署にすぎなかった．その実験学校において使用する教科書を高久守静に依頼したにすぎない．

学制及び小学教則の立案は，文部卿・大木喬任のブレーンであった長三洲，辻新次などによってなされたのであり，その背後には大隈重信，江藤新平などがいた．そして，彼らは文部省設置にあたって事実上の最高顧問として学制の諮問に応じたフェルベックの強い影響下にあり，新教育の骨格を西洋式に組み立てることは学制制定当初からの大方針であった．したがって，近代科学技術の基礎である西洋数学（洋算）を学校教育の基幹に据えることはその気宇壮大な枠組みの中の一つだったのである．したがって，小倉の言う「文部当局は最初和算の採用に決した」というのは明らかに誤りであって，文部当局は最初から洋算専用の方針だったのである．

3　『小学算術書』の種本について

学制及び小学教則の制定によって，洋算専用の方針を採用した文部省であったが，6，7 歳児の小学生に洋算を教えるための教科書はなかった．そこで，文部省は明治 5 年 9 月開校の師範学校に洋算教授のための教科書編纂を命じたのである．師範学校が米人 M.M. スコットの指導を得て編纂した教科書が『小学算術書』である．

この教科書がスコットの指導の下に編纂されたことからもわかるように，『小学算術書』はアメリカナイズされたペスタロッチ流の直観主義的な教授思想にもとづく教科書であった．そして，この教科書の種本がコルバーンの教科書であることを主張したのが小倉金之助であった．

小倉は『明治時代の数学』において，「この教科書はペスタロッチの直観主義に基いたアメリカのコールバーン流の書物の翻案で，絵も豊富であり，相当に直観的であり，また教育的であります」と述べている．それ以後，ほとんどの数学教育史書は何の疑いもなく，『小学算術書』の種本がコルバーンの算術書であることを記述している．しかし，これは誤りである．

その誤りを詳細に実証的に論述したのが『日本数学教育史研究　上巻』の第 2 章である．結論的に言えば，『小学算術書』の種本はアメリカの C. デヴィス，H.N. ロビンソンの算術書である．そのことはコルバーン，デヴィス，ロビンソンの算術書を比較してみれば明らかである．

4　数学記号一覧表の原本について

我が国における蘭和辞書，英和辞書の変遷をたどると，数学記号を一覧表にして掲載した最初の辞書は堀越亀之助によって編纂された慶応 2 年の『改正増補英和対訳袖珍辞書』であり，その後，薩摩藩士・高橋新吉らの『和訳英辞書』（明治 2 年）及び『大正増補和訳英辞林』（明治 4 年），荒井郁之助の『英和対訳辞書』（明治 5 年）などに継承されてきた．そして，本邦初の英和数学辞書と言える山田昌邦の『英和数学辞書』（明治 11 年）にも数学記号一覧表が掲載されている．しかし，従来の数学史研究に関する論文では，この数学記号一覧表の出所は不明とされてきた．

この懸案については，『日本数学教育史研究　上巻』の第 6 章において，原本は 1859 年版のウェブスター大辞典すなわちノア・ウェブスターの娘婿で当時イェール大学教授であったグッドリッチを編集主幹として編纂された下記の英語辞書であることを明らかにして解決した．

“An American dictionary of the English language”

さらに，第 6 章では，ウェブスター大辞典，『改正増補英和対訳袖珍辞書』，『和訳英辞書』，『大正増補和訳英辞

林』,『英和対訳辞書』,『英和数学辞書』などに付けられた数学記号一覧表に見られる数学記号についての比較研究の結果も詳細に述べておいた.

5 数学教科書における左起横書き

我が国では，書物を著するに,「右に起こし縦に書く」という習慣が長く続き，明治になっても継承された．いわゆる「右起縦書き」である．しかし，数式を多く用いる数学書では，右起縦書きはきわめて不便であり，現在のように「左起横書き」が採用されるようになった.

この左起横書き数学書については,『東洋学芸雑誌』第 409 号に掲載された菊池大麓の「横書きの初まり」に回顧談が見られる．菊池は明治 19 年，文部省から幾何学教科書の編纂を依頼されたのであるが，そのとき，当時の文部大臣・森有礼に「教科書はローマ字で書くことにしたい，それが許されぬなら，せめて横書きにしたい」と申し入れた．さすがの森文部大臣もローマ字は許されなかったが，横書きは承諾されたとのことである．こうして，明治 21 年，左起横書きの『初等幾何学教科書』が出版されたのである．これが数学教科書における横書きの初まりであると菊池は述べている．しかし，菊池の幾何学教科書が左起横書きの最初ではない.

一方，小倉金之助は『明治時代の数学』において，明治 12 年に出版された荒川重平・中川将行の『幾何問題解式』が日本における最初の左起横書き数学書であったと述べている．確かに，この書は左起横書きであるが，しかし，この書は英人ロバート・ポッツが 1872 年に刊行した幾何学書である“Euclid’s Elements with Geometrical Exercises”を荒川及び中川が抄訳した『幾何問題』の解答集なのである．数学問題の解答には数式が多用されるから“やむなく”左起横書きにしたのであって，もともとの数学書である『幾何問題』の抄訳は右起縦書きになっているのである．したがって,『幾何問題解式』は数学書というよりは“数学解答集”というべきである.

上記の荒川・中川の解答集を含めて，明治 21 年の菊池の幾何学教科書までの期間における数学関係書で左起横書きの書を調査した結果を整理すると以下のようになる.

1. 荒川重平・中川将行共著
   『幾何問題解式』明治 12 年 8 月……最初の「数学解答集」
2. 長沢亀之助訳
   『英国ウーリッチ陸軍大学校数学試験問題集』明治 19 年 7 月……最初の「数学問題集」
3. 長沢亀之助・宮田耀之助共訳
   『チャーレス・スミス氏代数学』明治 20 年 7 月……最初の「数学翻訳書」
4. 長沢亀之助編纂
   『理論及び応用算術中等教科書　巻之壹』明治 21 年 6 月 21 日……最初の「数学編纂書」
5. 多々羅恕平編著
   『平面幾何学』明治 21 年 6 月 30 日……2 番目の「数学編纂書」
6. 菊池大麓編纂
   『初等幾何学教科書　巻壹』明治 21 年 9 月 20 日……3 番目の「数学編纂書」

なお，菊池の幾何学教科書は文部省のお墨付きであったことから，これ以後，左起横書きの数学教科書が広く普及していったのである.

6 数学教育における形式陶冶の発生

数学教育の目的に関わって“実質陶冶”と“形式陶冶”の問題がある[*3]．特に，菊池大麓は幾何教育における論理的思考力の錬磨という形式陶冶的目的を強調した人物として知られている．では，菊池以前はどうであったか．

明治初期においては，たとえば，中村六三郎の『小学幾何用法』（明治 6 年) では，「幾何学は線，面，体の性質を図上において測り知る事を教えるもの」と規定されていたし，関口開の『幾何初学』（明治 7 年）や宮川保全の『幾何新論』（明治 9 年）などでも，幾何学は度量学，測量学とみなされていて，ユークリッド流の論証の意義はほとんど重視されていなかった．

我が国の幾何教育の目的の中に論理的思考力の意義を取り入れた最初はおそらく大阪中学校であったと思われる．明治 15 年の大阪中学校規則には，「幾何では線，面，角，体の性質，関係及び測度法を推究すること」と並んで，「思想を緻密にし，推理判断等の力を養成すること」が説かれていて，幾何教育における陶冶的意義が述べられている．この大阪中学校規則に見られる幾何の陶冶的意義は当時使用されていた『幾何学原礎』（明治 11 年）に由来すると思われる．

この『幾何学原礎』（全 7 巻）は米人 E.W. クラーク（札幌農学校のクラークとは別人）の静岡学問所におけるユークリッド幾何の講義を聴講した山本正至・川北朝鄰の手になる訳書であり，その首巻にはクラークの序文（英文）が掲載されている．この序文の中に「幾何学的証明の価値は，最も高度な精神的鍛錬を与えるものにして，特に論理的能力に活力と強靭さを与えるものとして，長きにわたって評価されてきている」という一文が見られる．大阪中学校規則に見られた幾何の陶冶的意義はこのクラークの序文に依拠したものだと思われる．

7 数学教育改造運動の評価

1901 年のペリー講演に端を発した数学教育改造運動の波は我が国にも波及してきた．日本における数学教育改造運動に対しての評価はさまざまである．『日本数学教育史研究』では，上巻の第 18 章でペリー，ムーア，クラインの数学教育改造論を解説し，第 19 章において日本における改造運動受容の時期を 3 期に区分し，第 1 期（明治 44 年頃～大正 7 年頃）の特徴を論述した．第 23 章では第 2 期（大正 8 年頃～大正 13 年頃）の特徴を概説し，第 3 期（大正 14 年頃～昭和 6 年頃）に至って，日本における改造運動の受容は挫折し終焉を迎えたことを論述した．

第 1 期は改造運動の新鮮な摂取期であり，大正 7 年末の全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会の開催を実現し，大正 8 年の日本中等教育数学会の設立へと導いた．第 2 期は改造運動の進展期であるが，その成果を実現するための数学教授要目の改定は種々の事情により見送られ，改造運動は最初の挫折を余儀なくされた．第 3 期は第 2 期の継続期であり，再び数学教授要目改定が試みられた．しかし，その昭和 6 年の改定は鵺的であり，我が国の改造運動は終焉を迎えたのである．戦後，小倉金之助は「科学教育の反省」（『新世代』昭和 21 年 4 月号に所載）において，数学教育改造運動は不成功に終わったと回顧している．

8 算術改造運動の源流と緑表紙教科書

中等学校における数学教育改造運動に少しだけ遅れて小学校にも算術改造運動が広がりをみせるようになる．この算術改造運動は，黒表紙教科書と決別した緑表紙教科書を実現させたのであるが，その源流が京都帝国大学教授・谷本富の教育思想にあることは，従来の日本の算術教育史において，比較的軽視されてきた．谷本は西欧に留学して，西欧の新教育新学校運動の影響を強く受け，その教育思想を日本に敷衍したのであり，谷本教育学の影響

[*3] 形式陶冶とは，個別分野における知識等の習得よりも，思考力・推理力・論理的能力などの精神的能力の練磨を重視する教育の立場を意味するのに対して，実質陶冶とは，有用な知識・技能等の習得を第一義とする実学主義的な教育の立場を意味する．

を受けた算術教育者は岡千賀衛，及川平治，清水甚吾，香取良範など多数にのぼっている．

また，算術改造運動が大正デモクラシー運動を背景とした大正自由教育思想の影響を大きく受けていることも見逃してはならない．大正自由教育の基調には“人間の感性の尊重”という価値観があり，それに連接した“子どもの生活の重視”があった．

このような算術改造運動を背景として昭和 10 年に緑表紙教科書は登場したのであるが，この時期，すでに日本は“15 年戦争”に突入していて，八紘一宇の国体思想にもとづく日本精神の高揚が時代を主導していた．と同時に，経済的にも日本的生産性向上運動が台頭していたのである．この時期に誕生したのが緑表紙教科書であった．したがって，緑表紙は“日本精神の高揚”と“日本的生産性向上運動”に寄与する算術教科書としての責務を担わされたのである．

9　在米史料にもとづく数学教育史研究

戦後日本の教育改革は，連合国軍最高司令官総司令部（GHQ/SCAP）内に設置された民間情報教育局（CI&E）の指導によって進められた．教育制度は戦前の複線型の制度が廃止され，単線型の 6-3-3 制に改められ，教科課程や教科内容については，戦前にはなかった“学習指導要領”が作成されて，新教育が出発したのである．教科書については，墨塗り教科書から暫定教科書を経て，昭和 22 年度から新教科書が使用されるようになった．こうした一連の教育改革の詳しい実態を解明するためには，日本に残されている史料だけでは不十分であり，占領解除後，占領軍がアメリカに持ち帰った史料を見なければならない．

昭和 60 年度から昭和 62 年度にかけて文部省科学研究費・海外学術研究の交付を受けて実施された「占領期日本教育に関する在米史料の調査研究」（研究代表者，佐藤秀夫＜国立教育研究所＞）によって占領期の日本教育に関するアメリカ合衆国側の史料が収集され，昭和 63 年 3 月に「戦後教育改革資料 6 海外学術研究：報告書占領期日本教育に関する在米史料の調査研究」が公刊されたことによって，戦後の教育改革に関する研究は日本側の史料だけでなくアメリカ側の史料によって行うことが可能になったのである．これが「在米史料」と呼ばれるものである．

『日本数学教育史研究』の下巻（第 32 章～第 37 章）では，この在米史料を駆使することによって，戦後の数学教育がどのような道筋を経て改革されたのかを明らかにした．第 32 章では，墨塗り教科書，暫定教科書について論述し，第 33 章では，小学校及び中学校の教科課程の成立を明らかにした．また，第 34～35 章では，昭和 22 年学習指導要領（算数・数学科編）の成立と新教科書に光をあてた．そして，第 36～37 章では，新制高等学校数学科の教科課程及び教科書の成立過程を詳細に論じた．

10　生活単元学習と系統学習

戦後の昭和 20 年代の算数・数学教育は生活単元学習と呼ばれる学習形態が導入されて，学力低下が大きな社会問題となり，多方面からの批判を受けた．久保舜一，日本教育学会，日本教職員組合は学力調査を実施して，その学力低下の実態を明らかにしたのである．その生活単元学習を最も厳しく批判したのは遠山啓らによって設立された数学教育協議会であり，遠山啓編『新しい数学教室』（新評論社，昭和 28 年 11 月）によって生活単元学習批判の内容が公表された．

多方面からの生活単元学習批判を受けて，文部省は昭和 33 年に学習指導要領を改訂して，系統学習へと方向転換したのである．しかし，この学習指導要領も算数・数学教育においては，内容的に多くの問題点を孕んでいて，数学教育協議会によって批判されることとなった．

11 数学教育協議会の歴史

前述の数学教育協議会（略称，数教協）は生活単元学習批判を契機として設立された．有志が集まり，初めての研究会が開催されたのは昭和 26 年 4 月 16 日であった．昭和 26 年 12 月には「数学教育協議会趣旨（草案）」が公表され，昭和 28 年 11 月 29 日に第 1 回全国大会が開催された．初代会長（後に，委員長制となる）は遠山啓であった．

数教協は小学校の数計算の指導方法である水道方式を提唱したことで知られている．この水道方式は全国的に大きな波紋を引き起こしたが，それを快く思わない人々によって攻撃された．その筆頭であったのは塩野直道であり，塩野の死去にあたって，劔木亨弘（当時，参議院議員，前文部大臣）は弔辞の中で「かの水道方式数学理論撲滅のための先生の御奮闘は，今もなお私共の記憶に新たなるものがあります」と述べるほどであった．

数教協の研究成果は水道方式にとどまらず，量の理論，折れ線の幾何など多方面におよび，数学教育の現代化を推し進めたのである．『日本数学教育史研究』の下巻（第 40 章〜第 42 章）では，数学教育協議会の歴史を詳細に論述した．

12 藤沢利喜太郎と遠山啓

『日本数学教育史研究』の最終章（第 43 章）は「遠山啓における数学教育の改革と創造」であり，遠山啓の数学教育論及び教育論を全面的に展開した．また，遠山が数学教育に関わりを持つようになった 40 歳から死去する 70 歳までの詳しい年譜も作成・収録した．

遠山の活動時期を 5 つに区分し，それぞれの時期における遠山の特徴的な活動を論述するとともに，さらに詳述すべきテーマとして，「数学教育の近代化と現代化」「現代化から数学教育一貫カリキュラムの創造」「遠山啓の授業論・学校論」などを取り上げて論述した．

そして，最後を，明治期において数学教育を切り拓いた藤沢利喜太郎との比較人物論で締めくくった．明治以後の長い数学教育の歴史において，最大級の貢献をなしたのは，藤沢利喜太郎と遠山啓であり，両人を「日本数学教育史における二大巨人」として位置づけたのである．藤沢は“数学教育の開拓者”であり，遠山は“数学教育の改革者”であると評し，

藤沢：「量の放逐」と「数え主義」そして《国家主義》
遠山：「量の定礎」と「水道方式」そして《人間主義》

と特徴づけた．そして，これが『日本数学教育史研究』の結びである

13 おわりに

下巻を書き終えてから「日本数学教育史における二大巨人」と位置づけた藤沢利喜太郎と遠山啓の比較教育論，比較人物論に物足りなさを感じるようになった．余韻がさめやらないうちに書いておきたいと思い，『藤沢利喜太郎と遠山啓 －日本数学教育史における二大巨人－』（仮題）の執筆にとりかかった．2 ヶ月ほどで A4 で 170 頁を書き終えた．書名はもう少し一般向きに変更されると思うが，ともかく出版されるものと思う．ご期待ください．

一般角の三角関数の加法定理

矢野　忠[*1]

Addition Theorem of Trigonometric Functions for General Angles

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

私が高校生のときには，いまでは一般的となっている余弦定理と距離の公式にもとづいた三角関数の加法定理の証明を学ばなかった．

幾何学的な図形を用いて 2 つの角が正の鋭角である場合の証明が一般的であった．それでその証明を読んで理解はしたが，それを覚えて自分でも証明ができるというまでにはならなかった．そのためかどうかはわからないが，一般角での三角関数の加法定理の証明をきちんとしておかなくてはいけないという意識をずっともちつづけてきた．しかし，そのことをすることがないままできた．今回初めてそのことに挑戦をしたい．

2　教科書の証明方針

私が高校 2 年生のときに学んだ教科書にも一般角に対する加法定理の完全な証明は与えられていない [1]．しかし，その証明の方針は述べられている．まず，2 つの角 α, β が正の鋭角であり，$\alpha+\beta$ が鋭角の場合と鈍角の場合の幾何学的な証明がされており，その後に [研究] という項目があり，つぎのように書かれている．

たとえば

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

の公式が一般角 α, β でも成り立つことを証明するには，つぎのような方針でやればよい．

(i)　α, β のいずれか一方，あるいは両方ともが負の鋭角となっても (1) が成り立つことを上と同様な方法で図の上から証明して，結局 α, β が正，負いずれの鋭角でも (1) が成り立つことを認める．

(ii)　つぎに一般角の α, β は必ず

$$\alpha = m\pi + \alpha_1, \quad \beta = n\pi + \beta_1$$
$$(m, n \text{ は整数で，} \quad \alpha_1, \beta_1 \text{は正または負の鋭角})$$

の形に表すことができ，しかも

$$\sin\alpha = (-1)^m \sin\alpha_1, \quad \sin\beta = (-1)^n \sin\beta_1$$
$$\cos\alpha = (-1)^m \cos\alpha_1, \quad \cos\beta = (-1)^n \cos\beta_1$$

また

$$\alpha+\beta = (m+n)\pi + (\alpha_1+\beta_1)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = (-1)^{m+n}\sin(\alpha_1+\beta_1)$$

であることを利用して，(1) を証明する．

[*1] 元愛媛大学工学部
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

と書かれている．

このように書かれていることは知っていたが，いままで一度も証明したことはないし，証明しようと思ったこともなかった．

3 (ii) の証明

2 節に引用した手順にしたがえば，(i) を証明した後に (ii) を証明するべきであろうが，ここでは (ii) の証明を先にすることにしよう．すなわち，

> 一般角の α, β が
>
> $$\alpha = m\pi + \alpha_1, \quad \beta = n\pi + \beta_1$$
> $$(m, n \text{ は整数で，} \quad \alpha_1, \beta_1 \text{は正または負の鋭角})$$
>
> の形に表すことができる．

ということからはじめよう．

α, β の 2 つの正，負の角があるが，どちらか一方だけ示せば十分である．いま α について考えてみよう．

まず，α が第 1 象限の角であるときには

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

である．このとき α_1 を正の鋭角 $0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ にとり，かつ $m = 0$ ととれば，

$$\alpha = \alpha_1 \tag{3.2}$$

と表すことができる．すなわち，一般式

$$\alpha = m\pi + \alpha_1, \quad (m = 0) \tag{3.3}$$

で $m = 0$ ととれば表現できる．

つぎに α が第 2 象限の角であるときには

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi \tag{3.4}$$

である．このとき α_1 が負の鋭角 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < 0$ のとき，$m = 1$ にとれば

$$\alpha = \pi + \alpha_1, \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < 0\right) \tag{3.5}$$

すればよい．すなわち，一般式

$$\alpha = m\pi + \alpha_1, \quad (m = 1) \tag{3.6}$$

と $m = 1$ ととれば表現できる．

念のために，(3.5) を

$$\alpha_1 = \alpha - \pi \tag{3.7}$$

と書き換えて，α_1 の変域を示す不等式 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \alpha - \pi < 0 \\ \frac{\pi}{2} &\leq \alpha < \pi \end{aligned} \tag{3.8}$$

となるので，確かに α が第 2 象限の角であるという前提条件が成り立っている．

つづいて，α が第 3 象限の角であるときには

$$\pi \leq \alpha < \frac{3}{2}\pi \tag{3.9}$$

である．このとき α_1 を正の鋭角とすれば，$m = 1$ ととれば，

$$\alpha = \pi + \alpha_1, \left(0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.10}$$

となる．

(3.10) を

$$\alpha_1 = \alpha - \pi \tag{3.11}$$

と書き換えて，α_1 の変域を示す不等式 $0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ に代入すると

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha - \pi &< \frac{\pi}{2} \\ \pi \leq \alpha &< \frac{3}{2}\pi \end{aligned} \tag{3.12}$$

となるので，確かに α は第 3 象限の角である．これで第 3 象限の角 α は (3.10) のように表現できる．

最後に，α が第 4 象限の角であるときには

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 \tag{3.13}$$

である．このとき α_1 を負の鋭角ととり，$m = 0$ ととれば，

$$\alpha = \alpha_1, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < 0\right) \tag{3.14}$$

と表すことができる．

以上をまとめると $m = 0$ のときは $m = 2n, n =$ 整数 と一般化し，$m = 1$ のときは $m = (2n+1), n =$ 整数 と一般化すればよい．したがって，一般角の α は

$$\alpha = m\pi + \alpha_1, (m = \text{整数}) \tag{3.15}$$

と表すことができる．β も同様な議論ができるが，ここでくりかえす必要はないだろう．

このようにして表された一般角 α, β に対して

$$\sin\alpha = (-1)^m \sin\alpha_1, \quad \sin\beta = (-1)^n \sin\beta_1 \tag{3.16}$$

$$\cos\alpha = (-1)^m \cos\alpha_1, \quad \cos\beta = (-1)^n \cos\beta_1 \tag{3.17}$$

であることを示すことにしよう．これはもちろん

$$\sin\alpha = (-1)^m \sin\alpha_1 \tag{3.18}$$

$$\cos\alpha = (-1)^m \cos\alpha_1 \tag{3.19}$$

であることを示せばよい．β の方は同様であるから．

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(m\pi + \alpha_1) \\ &= \begin{cases} \sin\alpha_1, & m = 2n \text{ のとき } (n \text{ は整数}) \\ -\sin\alpha_1, & m = 2n+1 \text{ のとき } (n \text{ は整数}) \end{cases} \\ &= (-1)^m \sin\alpha_1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(m\pi+\alpha_1)\\ &= \begin{cases}\cos\alpha_1, & m=2n \text{ のとき } (n \text{ は整数})\\ -\cos\alpha_1, & m=2n+1 \text{ のとき } (n \text{ は整数})\end{cases}\\ &= (-1)^m\cos\alpha_1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

が成り立つ[*3]．

したがって，

$$\alpha+\beta=(m+n)\pi+(\alpha_1+\beta_1) \tag{3.22}$$

のとき，

$$\sin(\alpha+\beta)=(-1)^{m+n}\sin(\alpha_1+\beta_1) \tag{3.23}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=(-1)^{m+n}\cos(\alpha_1+\beta_1) \tag{3.24}$$

も成り立っている．これらから

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= (-1)^{m+n}\sin(\alpha_1+\beta_1)\\ &= (-1)^{m+n}(\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1)\\ &= (-1)^m\sin\alpha_1(-1)^n\cos\beta_1+(-1)^m\cos\alpha_1(-1)^n\sin\beta_1)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{3.25}$$

が成り立ち，また

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= (-1)^{m+n}\cos(\alpha_1+\beta_1)\\ &= (-1)^{m+n}(\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1)\\ &= (-1)^m\cos\alpha_1(-1)^n\cos\beta_1-(-1)^m\sin\alpha_1(-1)^n\sin\beta_1)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{3.26}$$

も成り立っている．

これで (ii) はすべて証明された．

4　α, β が正の鋭角のときの証明

この 4 節では α, β が正の鋭角であるときの加法定理の証明をする[*4]．この場合には，$\alpha+\beta$ が第 1 象限にある場合，すなわち，$0 \leq \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ のときと，$\alpha+\beta$ が第 2 象限にある場合，すなわち，$\frac{\pi}{2} \leq \alpha+\beta < \pi$ のときとに分けて証明する．

まず，$\alpha+\beta$ が第 1 象限にある場合の証明をしよう．

図 1 で $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$ とする．また $\angle\mathrm{PO}x=\alpha, \angle\mathrm{QOP}=\beta$ とする．Q から x 軸に垂線を下ろし，その足を R, OP に垂線を下ろし，足を S とする．S から QR に垂線を下ろし，その足を T, x 軸に垂線を下ろし，その足を U とする．$\triangle\mathrm{QOR}$ は直角三角形であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\mathrm{OR} \tag{4.1}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{OQ}}=\mathrm{QR} \tag{4.2}$$

[*3] (3.20), (3.21) で α_1 は正の鋭角と仮定しているように見えるが，負の鋭角であってもそのまま成り立つ．α_1 が負の鋭角であったときには，$\alpha_1=-\theta$ $(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$ とおいて，θ で表せば，(3.20), (3.21) の式は変わってくる．ここではそこまでふみこんでいない．

[*4] 元の [1] にも証明がされているが，ここでは [2] にしたがって証明している．

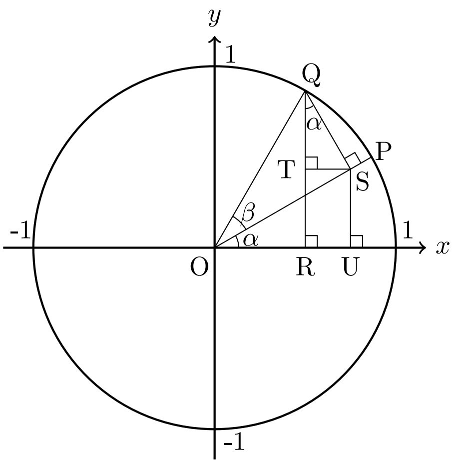

図 1　円は半径 1 の円であり，$\alpha+\beta$ が第 1 象限にあるとき．

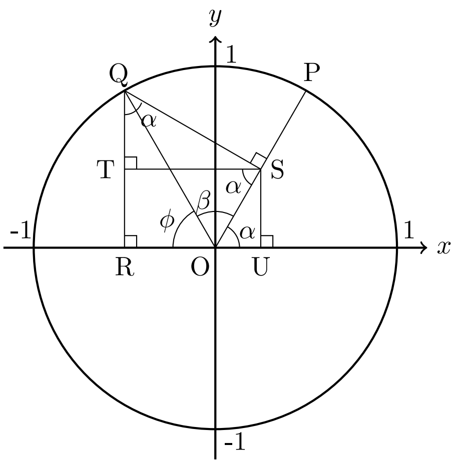

図 2　円は半径 1 の円であり，$\alpha+\beta$ が第 2 象限にあるとき．

OR, QR を三角形の他の辺で表すことを考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{OR} &= \mathrm{OU} - \mathrm{RU} \\ &= \mathrm{OU} - \mathrm{TS} \qquad (4.3) \\ \mathrm{QR} &= \mathrm{QT} + \mathrm{TR} \\ &= \mathrm{QT} + \mathrm{SU} \qquad (4.4) \end{aligned}$$

である．

まず，OS と QS とは $\mathrm{OQ}=1$ であるから，

$$\mathrm{OS} = \mathrm{OQ}\cos\beta = \cos\beta \tag{4.5}$$

$$\mathrm{QS} = \mathrm{OQ}\sin\beta = \sin\beta \tag{4.6}$$

である．

つぎに OU と SU の長さを求めれば，

$$\mathrm{OU} = \mathrm{OS}\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta \tag{4.7}$$

$$\mathrm{SU} = \mathrm{OS}\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta \tag{4.8}$$

となる．

つづいて TS と QT の長さを求めれば，

$$\mathrm{TS} = \mathrm{QS}\sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta \tag{4.9}$$

$$\mathrm{QT} = \mathrm{QS}\cos\alpha = \cos\alpha\sin\beta \tag{4.10}$$

である．

(4.7)-(4.10) を (4.3),(4.4) に代入すれば，

$$\mathrm{OR} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4.11}$$

$$\mathrm{QR} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{4.12}$$

となる．この (4.11),(4.12) を (4.1),(4.2) に代入すれば，

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4.13}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{4.14}$$

が得られる．これで $\alpha+\beta$ が第 1 象限にあるときの加法定理が証明された．

つぎに $\alpha+\beta$ が第 2 象限のときの証明をしよう．

図 2 を参照しながら証明を見てみよう．前の場合と同じように $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$ である．また $\triangle\mathrm{QOR}$ は直角三角形である．$\phi=\pi-(\alpha+\beta)$ であるから

$$\cos\phi=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta) \tag{4.15}$$
$$\sin\phi=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta) \tag{4.16}$$

図 2 のように垂線を下ろし，その足に記号 S, T, R, U をつける．$\triangle\mathrm{QOR}$ は直角三角形であるから，

$$\cos(\alpha+\beta)=-\mathrm{RO} \tag{4.17}$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\mathrm{QR} \tag{4.18}$$

である．ここで RO, QR を三角形の他の辺で表すことを考える．

$$\begin{aligned}\mathrm{RO}&=\mathrm{RU}-\mathrm{OU}\\&=\mathrm{TS}-\mathrm{OU}\end{aligned} \tag{4.19}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\mathrm{QT}+\mathrm{TR}\\&=\mathrm{QT}+\mathrm{SU}\end{aligned} \tag{4.20}$$

と表される．

$\mathrm{OQ}=1$ であるから，

$$\mathrm{OS}=\mathrm{OQ}\cos\beta=\cos\beta \tag{4.21}$$
$$\mathrm{QS}=\mathrm{OQ}\sin\beta=\sin\beta \tag{4.22}$$

となり，これらを用いれば，

$$\mathrm{OU}=\mathrm{OS}\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta \tag{4.23}$$
$$\mathrm{SU}=\mathrm{OS}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta \tag{4.24}$$
$$\mathrm{TS}=\mathrm{QS}\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta \tag{4.25}$$
$$\mathrm{QT}=\mathrm{QS}\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta \tag{4.26}$$

が得られる．

したがって，(4.23)-(4.26) を (4.19),(4.20) に代入して

$$\mathrm{RO}=\mathrm{TS}-\mathrm{OU}=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta \tag{4.27}$$
$$\mathrm{QR}=\mathrm{QT}+\mathrm{SU}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{4.28}$$

となり，(4.27),(4.28) を (4.17),(4.18) に代入して

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{4.29}$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{4.30}$$

が求められる．したがって $\alpha+\beta$ が第 2 象限にあるときも加法定理が成り立つ．

5 (i) の証明

[1] の (i) では，

α, β のいずれか一方，あるいは両方ともが負の鋭角になっても

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

が成り立つことを 4 節と同様な方法で図の上で証明して，結局 α, β が正負いずれの鋭角でも成り立つことを示せ．

とあるが，4 節ですでに α, β が正の鋭角のときには加法定理が成り立つことを示したので，この 5 節では [2] にしたがって，その結果を用いることにしよう．

（角の一方が負の場合）

いま，一方の角 β が負であるとして，これを $-\theta$ $(\theta > 0)$ とおこう．このとき $-\theta$ は負の鋭角であるとすれば，$-\frac{\pi}{2} \leq -\theta < 0$ である．このとき，$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ とおけば $-\theta = \beta - \frac{\pi}{2}$ なるので，β の変域は

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \beta - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{5.1}$$

となる．このとき β は正の鋭角であるから，正の鋭角の α, β に対しては加法定理が成り立つことが示されている．

したがって

$$\begin{aligned} \cos[\alpha + (-\theta)] &= \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] \\ &= \sin(\alpha+\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \\ &= \cos\alpha\cos(-\theta) - \sin\alpha\sin(-\theta) \end{aligned} \tag{5.2}$$

と

$$\begin{aligned} \sin[\alpha + (-\theta)] &= \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] \\ &= -\cos(\alpha+\beta) \\ &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= -\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta \\ &= \sin\alpha\cos(-\theta) + \sin\alpha\sin(-\theta) \end{aligned} \tag{5.3}$$

が得られる．

以上から $\beta = -\theta, (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$ に対して加法定理は成り立っている．

（2 つの角が共に負の場合）

α, β が共に負の鋭角の場合には

$$\alpha = -\alpha', \beta = -\beta', \left(0 \leq \alpha' < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta' < \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.4}$$

とする．このとき

$$\alpha+\beta=-(\alpha'+\beta') \tag{5.5}$$

となり，

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[-(\alpha'+\beta')]\\&=\cos(\alpha'+\beta')\\&=\cos\alpha'\cos\beta'-\sin\alpha'\sin\beta'\\&=\cos(-\alpha')\cos(-\beta')-\sin(-\alpha')\sin(-\beta')\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{5.6}$$

が成り立ち，また

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin[-(\alpha'+\beta')]\\&=-\sin(\alpha'+\beta')\\&=-\sin\alpha'\cos\beta'-\cos\alpha'\sin\beta'\\&=\sin(-\alpha')\cos(-\beta')+\cos(-\alpha')\sin(-\beta')\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{5.7}$$

が成り立つ．

したがって，α,β が共に負の鋭角の場合も cos 関数と sin 関数の加法定理が成り立つ．

6　おわりに

一般角の三角関数の加法定理の証明を述べたが，読者の納得が得られたかどうかはわからない．他の方法での証明も今後いくつか試みてみるつもりである．

ここで述べた証明とは異なった証明が [2] に一般角での加法定理が述べられているのだが，まだ納得できていない．

7　補遺　(3.18),(3.19) の検討

(3.18),(3.19) は還元公式の一部を表す見事な統一性をもった表記であるが，あまりこういう表し方を見たことがない．他には [3] で

> x が大きい場合，x を円周率 π で割って，整数商を m，余りを x' とすると，
>
> $$x=m\pi+x',\quad (0\le x'<\pi)$$
>
> となり，
>
> $$\sin x=(-1)^m\sin x',$$

ということが書かれているのを見たくらいで，他には見たことがない．

ここでは，(3.18),(3.19) の妥当性を検討しておく．

偏角に $\frac{n\pi}{2}$，$(n=\text{奇数})$ を含まない還元公式をまずまとめておく．

$$\cos(\pi+x)=-\cos x \tag{7.1}$$

$$\sin(\pi+x)=-\sin x \tag{7.2}$$

$$\cos(2\pi+x)=\cos x \tag{7.3}$$

$$\sin(2\pi+x)=\sin x \tag{7.4}$$

三角関数の還元公式としては x が正の鋭角 $(0 \leq x < \frac{\pi}{2})$ のときに，

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - x) &= -\cos x \\
\sin(\pi - x) &= \sin x \\
\cos(2\pi - x) &= \cos(-x) \\
\sin(2\pi - x) &= \sin(-x)
\end{aligned}$$

もあるが，$u = -x$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\cos(\pi + u) &= -\cos(-u) = -\cos u \\
\sin(\pi + u) &= \sin(-u) = -\sin u \\
\cos(2\pi + u) &= \cos u \\
\sin(2\pi + u) &= \sin u
\end{aligned}$$

と表されるので (7.1)-(7.4) だけがあれば，十分である．

cos 関数も sin 関数も周期 2π の周期関数であるから，上の還元公式 (7.1)-(7.4) から直ちに一般化された

$$\begin{aligned}
\cos[(2n+1)\pi + x] &= -\cos x \\
\sin[(2n+1)\pi + x] &= -\sin x \\
\cos(2n\pi + x) &= \cos x \\
\sin(2n\pi + x) &= \sin x
\end{aligned}$$

が得られる．これらをまとめれば，m を整数として (3.18),(3.19) が得られる．

還元公式としては (3.18),(3.19) の他には負角の公式の他に偏角が $\frac{n\pi}{2} + x, (n =$ 奇数$)$ に対する公式を知っている必要がある．

（2022.11.29）

参考文献

[1] 田島一郎，『解析 II』（好学社，1955）101-103

[2] 黒田孝郎，新初等数学講座『三角法』（ダイヤモンド社，1962） 35-37

[3] 森口繁一，『数値計算工学』（岩波書店，1989）6

編集後記

12 月になった．今年もあと 1 か月もしないで終わりとなる．私も 12 月初めに 3 年ぶりに数日だが，東京に出かけた．ここ数年はコロナ禍で旅行をひかえていた．もちろんコロナの流行が止まったわけではないのだが，自粛にみんな少し疲れてきた．それで息抜きという意味が私たちにもあった．

旅行など自粛したほうがいいとはわかっていても気分が疲れてくるということは否定できない．それでということではないのだが，今号には上垣渉さん（三重大学名誉教授）の「自著を語る」というエッセイを載せた[*1]．私もちょっとしたご縁で上垣さんの著書の下巻をいただいたが，この書にはおおいに関心をもっている．

上垣渉著『日本数学教育史研究』上，下（風間書房）は各巻が定価（税込み）で 22,000 円と誰にでも購入できる価格ではないが，図書館では見ることができると思うので，一般の研究者の方を含めて関心をもっていただけると幸いである．

今後の方針として，これからは数学と物理という分野を少しひろくとってこういう寄稿エッセイを載せることも行っていきたい．とはいうものの，この「数学・物理通信」は個人的な色彩の強い通信誌であり，世間一般に必ずしも開かれているわけではない．完全にクローズしたつもりはないが，編集者個人の意識が反映してくるのは避けられない．この点はある程度仕方がないことだと思っている．

もっとも一般の読者からの問題提起があれば，それについて考慮したり，編集委員等の間で議論したりすることはあろうが，それでも最終的な判断は編集者によるだろうことは前もってお断りをしておかねばならない．

（矢野　忠）

[*1] 上垣先生と敬称をつけないのは一部の物理研究者の間での慣習に単にしたがっているためであるから，お許しをいただきたい．