

数学・物理通信

12 卷 8 号 2022 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 12 月 16 日

目次 (Contents)

1. 水平面内を回転するばね振子 (1)	世戸 憲治	2
2. 定年退職後大学院に入学して	大槻俊明	9
3. $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $\tan \frac{\theta}{2}$ で表す	矢野 忠	13
4. 因数分解は発見的手法か	矢野 忠	27
5. 編集後記	世戸憲治	33
1. Spring Pendulum Rotating on a Horizontal Plane (1)	Kenji SETO	2
2. Entering a Graduate School after Retirement	Toshiaki OTSUKI	9
3. Expressing $\cos \theta$ and $\sin \theta$ in Terms of $\tan \frac{\theta}{2}$	Tadashi YANO	13
4. Can the Factorization be Heuristic Methods ?	Tadashi YANO	27
5. Editorial Comments	Kenji SETO	33

水平面内を回転するばね振子 (1)

世戸 憲治*

Spring Pendulum Rotating on a Horizontal Plane (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

前々回の「ばねと錘を組み合わせた振動問題 (1)」(『数学・物理通信』12 巻 6 号),あるいは,それより 2 号前に書いた「2 次元的に動くばね振子 (1)」(『数学・物理通信』12 巻 4 号)のところで紹介した「水平面内を回転するばね振子」について議論する. この問題は,ばねに付いた錘を振り回すだけの一見簡単な問題であるが,その厳密解を求めようとする,大変な困難に直面してしまうことがよく分かるはずである.

2 方程式の導入

図 1 に示すように,水平面内に 2 次元座標 (x, y) をとり,ばね定数 k ,自然長 ℓ のばねの一端を,この原点周りに自由に回転できるように固定し,ばねの他端には質量 m の錘を取り付ける. この錘に適当な初速度を与えたときの錘の運動を解析する. このときの運動方程式については,前々回の「おわりに」のところで紹介したが,ここでもう一度引用しておく. ばねが錘に与える張力を T とし,ばねが x 軸となす角を θ としたとき,方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \cos \theta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -T \sin \theta \quad (2.1)$$

で与えられる. この張力 T は錘が動いているときのばねの長さを $r (= \sqrt{x^2 + y^2})$ としたとき, $T = k(r - \ell)$ となるので,この方程式を 2 次元の極座標 (r, θ) を用いて書き直すと, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて,

$$m \frac{d^2(r \cos \theta)}{dt^2} = -k(r - \ell) \cos \theta, \quad m \frac{d^2(r \sin \theta)}{dt^2} = -k(r - \ell) \sin \theta \quad (2.2)$$

となる. さらに,この時間に関する 2 度微分を実行すると,

$$\begin{aligned} m \left[\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta \right] &= -k(r - \ell) \cos \theta \\ m \left[\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta \right] &= -k(r - \ell) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

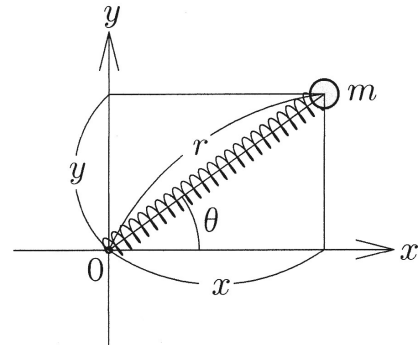


図 1 ばね振子

* 北海学園大学名誉教授

となる．ここでは時間微分を Newton 流のドットで表した．これら 2 式の第 1 式に $\cos \theta$ を，第 2 式に $\sin \theta$ を，それぞれ掛けてから，両辺の和をとると，

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - \ell) \quad (2.4)$$

となり，また，第 1 式に $\sin \theta$ を，第 2 式に $\cos \theta$ を，それぞれ掛けてから，両辺の差を作ると，

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2.5)$$

となる．この (2.4) (2.5) の 2 本の式が極座標で表わしたときの解くべき方程式である．特に，(2.4) 式右辺 1 項目は遠心力を表し，(2.5) 式は角運動量保存則，あるいは同じことであるが，面積速度一定の法則を表わす．

この方程式を解くにあたって，初期条件を

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad r = r_0, \quad \dot{r} = V_{r0}, \quad \theta = 0, \quad r\dot{\theta} = V_{\theta0} \quad (2.6)$$

と設定する．ここに， V_{r0} , $V_{\theta0}$ は，それぞれ， r 方向， θ 方向の初速度である．このとき，(2.5) 式から $r^2 \dot{\theta}$ は定数になるので，

$$r^2 \dot{\theta} = r_0 V_{\theta0} \quad (2.7)$$

と置くことができる．これから $\dot{\theta}$ を求めて，(2.4) 式に代入すると， r のみの方程式

$$m\ddot{r} = \frac{m(r_0 V_{\theta0})^2}{r^3} - k(r - \ell) \quad (2.8)$$

を得る．ここで， r 方向の加速度 $\ddot{r}$ を

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\dot{r}}{dr} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} \quad (2.9)$$

と変形してから，両辺を r で積分すると，

$$\int m \dot{r} d\dot{r} = \int \left[\frac{m(r_0 V_{\theta0})^2}{r^3} - k(r - \ell) \right] dr \quad (2.10)$$

となり，結果としてエネルギー式

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{r_0 V_{\theta0}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} k(r - \ell)^2 = E \quad (2.11)$$

を得る．ここに，左辺 1 項目は r 方向の運動エネルギー，2 項目は θ 方向の運動エネルギー，3 項目はばねの歪みエネルギーを表し，右辺の E がそれらを合わせた全エネルギーを表している．このうち，左辺 2 項目の θ 方向の運動エネルギーについては， $r^2 \dot{\theta}$ が一定値 $r_0 V_{\theta0}$ なので，ばねの長さが r のときの θ 方向の速度 $r\dot{\theta}$ は $r_0 V_{\theta0}/r$ になることに注意する．このエネルギー式に初期条件 (2.6) を適用すると，

$$E = \frac{1}{2} m (V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2) + \frac{1}{2} k(r_0 - \ell)^2 \quad (2.12)$$

と E の値が決まる．この E の値を (2.11) 式に代入して $\dot{r}$ を求めると，

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{V_{r0}^2 r^2 + (r^2 - r_0^2) V_{\theta0}^2 + \omega^2 r^2 [(r_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2]}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

となる．ここで ω は角速度の次元を持つ量で，この第 2 式で定義する．もちろん，この全体の符号を変えたものも存在するが，ここでは $\dot{r}$ を正と仮定して話を進める．この (2.13) 式において， $\dot{r} = dr/dt$ とし，変数分離してから積分形にすると，

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{V_{r0}^2 r^2 + (r^2 - r_0^2) V_{\theta 0}^2 + \omega^2 r^2 [(r_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2]}} = \int dt \quad (2.14)$$

となるが，この左辺の積分の分母の平方根の中は r の 4 次式になるので，これを実行することは容易ではない．

3 ばねの自然長 ℓ がゼロのときの解

前節で求めた (2.14) 式の積分を実行して r を時間 t の関数として求めようとする第 1 種，第 3 種の楕円積分が必要になる．ここでは，初めの試みとして，ばねの自然長 ℓ がゼロの場合を考える．もちろん，自然長がゼロのばねなどというものは存在しないが，理想的に考えたときは不可能というわけではない．すなわち，質量が無視できる筒を用意し，その中にばねを入れてばねの端を筒の中の端に固定する．さらにこのばねの他端に錘を付け，ばねが自然長にあるときの錘の位置が原点周りに自由に回転できるように筒の外側を半固定にしておく．これで仮想的に自然長がゼロのばねができる．

《動径座標 r を時間 t の関数として求める》

この場合は，(2.14) 式で $\ell = 0$ とすると，

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{V_{r0}^2 r^2 + (r^2 - r_0^2)(V_{\theta 0}^2 - \omega^2 r^2)}} = \int dt \quad (3.1)$$

となり，ここで，積分変数を

$$r^2 = \zeta \quad (3.2)$$

と変換すると

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{V_{r0}^2 \zeta + (\zeta - r_0^2)(V_{\theta 0}^2 - \omega^2 \zeta)}} = \int dt \quad (3.3)$$

と分母の平方根の中は ζ の 2 次式になるので，初等関数の範囲内で積分可能となる．実際，この平方根の中を $f(\zeta)$ として，

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= V_{r0}^2 \zeta + (\zeta - r_0^2)(V_{\theta 0}^2 - \omega^2 \zeta) = -\omega^2 \zeta^2 + (V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2) \zeta - r_0^2 V_{\theta 0}^2 \\ &= -\omega^2 \left[\zeta^2 - \frac{V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{\omega^2} \zeta + \frac{r_0^2 V_{\theta 0}^2}{\omega^2} \right] \\ &= -\omega^2 \left[\left(\zeta - \frac{V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{2\omega^2} \right)^2 - \frac{(V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2)^2 - 4r_0^2 \omega^2 V_{\theta 0}^2}{4\omega^4} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

と変形する．ただし，この式は長すぎるので，以下では，長さの次元を持つ 2 個の定数 A, B を用いて

$$\frac{(V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2)^2 - 4r_0^2 \omega^2 V_{\theta 0}^2}{4\omega^4} = A^4, \quad \frac{V_{r0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{2\omega^2} = B^2 \quad (3.5)$$

と定義しておき, (3.4) 式を

$$f(\zeta) = \omega^2 \left[A^4 - (\zeta - B^2)^2 \right] \quad (3.6)$$

と書くことにする. これで (3.3) の積分式は

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{A^4 - (\zeta - B^2)^2}} = 2\omega \int dt \quad (3.7)$$

となる. この積分は, 積分変数を ζ から ψ に

$$\zeta - B^2 = A^2 \sin \psi \quad (3.8)$$

と置き換えると容易に積分され, t_0 を積分定数として,

$$\psi = 2\omega(t + t_0) \quad (3.9)$$

となるので, これを (3.8) に戻し, さらに, (3.2) で ζ を r に戻すと

$$r^2 = A^2 \sin \left[2\omega(t + t_0) \right] + B^2 \quad (3.10)$$

と求められる. この積分定数 t_0 を決めるには, この式で $t = 0$ として,

$$r_0^2 = A^2 \sin(2\omega t_0) + B^2 \quad (3.11)$$

から $\sin(2\omega t_0)$ が決まる. また, $\cos(2\omega t_0)$ を決めるには, (3.10) 式を時間で微分してから $t = 0$ とすると,

$$r_0 V_{r0} = \omega A^2 \cos(2\omega t_0) \quad (3.12)$$

となり, これから $\cos(2\omega t_0)$ が決まる. ただし, (3.11) と (3.12) の 2 式が両立するためには, $\sin^2(2\omega t_0) + \cos^2(2\omega t_0) = 1$ から

$$\left(\frac{r_0^2 - B^2}{A^2} \right)^2 + \left(\frac{r_0 V_{r0}}{\omega A^2} \right)^2 = 1 \quad (3.13)$$

が成立しなければならないが, この式は A^4 , B^2 を定義した (3.5) 式を用いると確かに正しいことが証明される. 以上をまとめると, (3.10) 式の $\sin$ に対し和公式を用いて, 最終的に,

$$r(t) = \sqrt{\frac{r_0 V_{r0}}{\omega} \sin(2\omega t) + (r_0^2 - B^2) \cos(2\omega t) + B^2} \quad (3.14)$$

と求められたことになる. この式は確かに, 初期条件の $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = V_{r0}$ を満たしている.

《動径座標 r を角度 θ の関数として求める》

つぎに, 動径座標 r と角度 θ の関係を求めてみよう. 時間微分の d/dt は (2.7) 式の関係を使うと,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{r_0 V_{\theta 0}}{r^2} \frac{d}{d\theta} \quad (3.15)$$

と θ 微分に変換できる. これを使うと, $\ell = 0$ とした (2.13) 式は,

$$r_0 V_{\theta 0} \frac{dr}{d\theta} = r \sqrt{V_{r0}^2 r^2 + (r^2 - r_0^2)(V_{\theta 0}^2 - \omega^2 r^2)} \quad (3.16)$$

となり，さらに，変数分離してから積分形にすると，

$$r_0 V_{\theta 0} \int \frac{dr}{r \sqrt{V_{r 0}^2 r^2 + (r^2 - r_0^2)(V_{\theta 0}^2 - \omega^2 r^2)}} = \int d\theta \quad (3.17)$$

となる．この積分は変数を r から η に

$$r^2 = \frac{1}{\eta} \quad (3.18)$$

と変換すると，

$$-\frac{r_0 V_{\theta 0}}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{V_{r 0}^2 \eta + (1 - r_0^2 \eta)(V_{\theta 0}^2 \eta - \omega^2)}} = \int d\theta \quad (3.19)$$

となって，被積分関数の分母の平方根の中が η の 2 次式になる．この 2 次式を $g(\eta)$ と書くことにして，

$$\begin{aligned} g(\eta) &= V_{r 0}^2 \eta + (1 - r_0^2 \eta)(V_{\theta 0}^2 \eta - \omega^2) = -(r_0 V_{\theta 0})^2 \eta^2 + (V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2) \eta - \omega^2 \\ &= -(r_0 V_{\theta 0})^2 \left[\eta^2 - \frac{V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{(r_0 V_{\theta 0})^2} \eta + \frac{\omega^2}{(r_0 V_{\theta 0})^2} \right] \\ &= -(r_0 V_{\theta 0})^2 \left[\left(\eta - \frac{V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{2(r_0 V_{\theta 0})^2} \right)^2 - \frac{(V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2)^2 - 4r_0^2 \omega^2 V_{\theta 0}^2}{4(r_0 V_{\theta 0})^4} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

と 2 次式の標準形に変換する．ただし，この式は長すぎるので，以下，長さの逆数の次元を持つ 2 個の定数， C, D を用いて，

$$\frac{(V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2)^2 - 4r_0^2 \omega^2 V_{\theta 0}^2}{4(r_0 V_{\theta 0})^4} = C^4, \quad \frac{V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2 + r_0^2 \omega^2}{2(r_0 V_{\theta 0})^2} = D^2 \quad (3.21)$$

と定義し，この (3.20) 式を

$$g(\eta) = (r_0 V_{\theta 0})^2 [C^4 - (\eta - D^2)^2] \quad (3.22)$$

と書くことにする．これで積分式 (3.19) は

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{C^4 - (\eta - D^2)^2}} = \int d\theta \quad (3.23)$$

となるので，あとは最後の変換

$$\eta - D^2 = C^2 \cos \psi \quad (3.24)$$

を施すとこの積分は容易に実行され，

$$\psi = 2(\theta + \alpha) \quad (3.25)$$

となる．ここで α は積分定数である．これを (3.24) 式に戻し，さらに， η も (3.18) 式で r に戻すと，

$$r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{1 + e \cos [2(\theta + \alpha)]}} \quad (3.26)$$

と求められる．ここに，無次元の e と長さの次元を持つ L を

$$e = \frac{C^2}{D^2} (< 1), \quad L = D^{-1} \quad (3.27)$$

と定義した。また、初期条件として $t = 0$ のとき、 $r = r_0$ 、 $\theta = 0$ としているので、この式で $\theta = 0$ としたときは、 $r = r_0$ でなければならない。したがって、 α と r_0 の関係は

$$r_0 = \frac{L}{\sqrt{1 + e \cos(2\alpha)}} \quad (3.28)$$

となる。

この (3.26) 式は、惑星の軌道を極座標で表わしたときの楕円の方程式 $r = L/(1 + e \cos \theta)$ を思い起こすが、それとは似て非なるものである。この惑星の軌道の場合は、 e は離心率、 L は半直弦を表わす。それに対しこの (3.26) 式は、角度が α だけ傾いた (x, y) 座標での楕円の式に容易に還元できる。まず、この (3.26) 式の両辺を 2 乗してから、両辺に $\cos^2(\theta + \alpha)$ を掛け、 $r \cos(\theta + \alpha) = x$ を用いて、

$$x^2 = \frac{L^2 \cos^2(\theta + \alpha)}{1 + e[2 \cos^2(\theta + \alpha) - 1]} \quad (3.29)$$

となる。ここで分母の $\cos[2(\theta + \alpha)]$ には倍角公式を用いた。これから $\cos^2(\theta + \alpha)$ を求めると

$$\cos^2(\theta + \alpha) = \frac{(1 - e)x^2}{L^2 - 2ex^2} \quad (3.30)$$

となるので、この両辺に $r^2 = x^2 + y^2$ を掛け

$$x^2 = \frac{(1 - e)x^2}{L^2 - 2ex^2}(x^2 + y^2) \quad (3.31)$$

となり、これを整理すると

$$\frac{x^2}{L^2/(1 + e)} + \frac{y^2}{L^2/(1 - e)} = 1 \quad (3.32)$$

と x, y 方向の半径が、それぞれ、 $L/\sqrt{1 + e}$ 、 $L/\sqrt{1 - e}$ の楕円の式になる。

《 角度 θ を時間 t の関数として求める 》

最後に角度 θ を時間 t の関数として求めてみよう。これには、面積速度一定の (2.7) 式を用いて、 $\dot{\theta} = r_0 V_{\theta 0}/r^2$ を時間で積分するとよい。ここでは r^2 として (3.14) 式を 2 乗したものを用いて

$$\theta = r_0 V_{\theta 0} \int \frac{dt}{(r_0 V_{r 0}/\omega) \sin(2\omega t) + (r_0^2 - B^2) \cos(2\omega t) + B^2} \quad (3.33)$$

を計算する。この積分はかなり面倒になるので、つぎの積分公式を用いることにしよう¹⁾。

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \arctan \left[\frac{(c - b) \tan(x/2) + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \right], \quad \text{for } a^2 + b^2 < c^2 \quad (3.34)$$

結果は、

$$\theta(t) = \arctan \left[\frac{[(V_{r 0}^2 + V_{\theta 0}^2)/\omega] \tan(\omega t) + r_0 V_{r 0}}{r_0 V_{\theta 0}} \right] - \arctan \left[\frac{V_{r 0}}{V_{\theta 0}} \right] \quad (3.35)$$

となる。この右辺の 2 項目は $\theta(0) = 0$ とするための積分定数である。また、もう一つの初期条件 $\dot{\theta}(0) = V_{\theta 0}/r_0$ については、元々この式が $\dot{\theta} = r_0 V_{\theta 0}/r^2$ から作られたので、この初期条件が満たされることは当然である。

¹⁾ 『数学公式 I』(岩波全書) P.188

《ここで求めた $r(t)$, $r(\theta)$, $\theta(t)$ が正しいか否かの確かめ》

これまでに求めてきた $r(t)$, $r(\theta)$, $\theta(t)$ が正しいか否かを確かめるために、錘の軌道が完全な円運動になる場合を試してみよう。それは、錘に作用する遠心力 $mr\dot{\theta}^2$ とばねが錘を引く力 kr が釣り合ったときである。すなわち、

$$mr\dot{\theta}^2 = kr \quad (3.36)$$

となり、(2.13) 第2式で定義した ω を用いると $\dot{\theta}^2 = \omega^2$ となり、錘が角度の正方向に回転する場合に限定すると、 $\dot{\theta} = \omega$ となる。ところで先に述べたように、 $\dot{\theta}$ の初期条件は $\dot{\theta}(0) = V_{\theta 0}/r_0$ であり、円運動の場合はこの値がそのまま続くので、常に $\dot{\theta}(t) = V_{\theta 0}/r_0$ とおける。 $\dot{\theta}$ に対する以上の2式から、 $V_{\theta 0} = r_0\omega$ となる。また、円運動のときは r 方向の運動はないので、 $V_{r 0} = 0$ とおける。この $V_{\theta 0}$ と $V_{r 0}$ の値を (3.35) 式に代入すると、

$$\theta(t) = \omega t \quad (3.37)$$

となり、またこのとき、(3.5) 式で定義した B^2 は r_0^2 となるので、(3.14) 式で求めた $r(t)$ は

$$r(t) = r_0 \quad (3.38)$$

となる。さらに (3.21) で定義した C はゼロ、 $D = 1/r_0$ となるので、(3.27) 式の e はゼロ、 $L = r_0$ となり、(3.32) 式は、まさしくここで仮定した円運動の方程式に帰着する。

4 おわりに

ばねに錘を付けて振り回すだけの問題がこんなに難しいとは思ひもしなかった。初めは、ばねの自然長がゼロの場合と、ゼロでない場合の両方をやるつもりで計算を始めたが、自然長がゼロの場合だけでくたびれてしまった。この自然長がゼロの場合は確かに初等関数だけで解けるが、実際にやってみると結構難問で、参考にするものもなく自信はないが、私としては全力をつくしたつもりである。自然長がノンゼロの場合は楕円関数を使わなくてはならず、それも、第1種のみならず第3種のものも関与してくるらしいという予想である。これは実行したとしてもそれだけの価値があるのか、いまのところまったく分からない。少しは頑張ってみるが、うまくできなければボツにし、ある程度の成果がでるようであれば次回に発表するつもりである。

定年退職後大学院に入学して

大槻 俊明^{*1}

Entering a Graduate School after Retirement

Toshiaki OTSUKI^{*2}

1 はじめに

私は、民間企業を 65 歳で定年退職し大学院博士後期課程に入学し、学位取得後も研究生として研究を継続している者（現在 71 歳）である。この「数学・物理通信」の編集者で義兄でもある矢野忠から「企業を定年退職して大学院に入学したいきさつなどをエッセイにしてみませんか」とのご提案をもらった。いつも格調高い論文が掲載されている「数学・物理通信」に私のような者の経験談などを載せていただいていたのか恐縮であるが、ご厚意に甘んじて、寄稿させていただく。

2 定年退職と大学院入学

私は、1976 年に大学院修士課程を修了し、ファナック株式会社（入社当時は富士通ファナック株式会社）に入社した。ファナックは、ロボットや工作機械など生産工場の自動化のための機械装置を製造・販売する企業である。私は、入社後 40 年にわたり工作機械を制御する CNC(数値制御装置) のソフトウェアの研究・開発に従事した。工作機械はマザーマシンとも呼ばれ、航空機、ロケットなど大型装置から、自動車、家電、スマホなど身の回りにあるものまで様々な機械部品を加工する、またそれらを製造するための元となる金型を加工する。CNC が加工用の指令プログラムを読み取り工作機械のモータを制御することで工具での加工が行われる。

ファナックは 65 歳定年制であり、2016 年 6 月に 65 歳で定年退職した。そのとき思ったことは、「企業内ではそれなりに自分の能力をかけて仕事をしてきたが、企業としての業績はあっても（特許など一部の例外を除いて）自分の名前の残る業績はない。何か自分が生きて来た証のような、自分の名前の残る仕事をしたい。それもできれば自分だからできるという仕事をしたい。そのことにより、ささやかでも世の中の役に立てばうれしい」ということだった。

そこで、大学院博士後期課程に入学し、研究し論文を書き博士（工学）の学位を得ることを考えた。入学する大学院研究室としては、過去の論文などを調べて、「この研究室なら自分の経験や知識を生かした研究ができるのではないかと考え、東京農工大学大学院の研究室に 2016 年 10 月入学させていただいた。もちろん自宅から通学できる近くの大学であることも重要だった。

3 研究と学位取得

入学前、40 年の経験から「こういうテーマで研究すれば論文になるのではないか」という 2 件のテーマ（下記 1, 2）は考えていた。そのため、入学後研究は順調に進んだ。実験においてもほぼ自分の考えていた通りの結果が得られ、自分の考えは間違っていないと手応えを感じた。2 件に加え、研究過程で新しく着想した 1 件のテーマ（下記 3）を合わせて 3 件のテーマで研究を進めた。

^{*1} 東京農工大学研究生

^{*2} Tokyo University of Agriculture and Technology

2 編の論文を学術誌に投稿し査読後に受理されて掲載され [1] [2], 1 編の講演論文を国際会議プロシーディングに投稿し査読後講演発表した [3]. それらの論文をベースにして学位論文をまとめ [4], 2018 年 9 月に短縮の 2 年で博士（工学）の学位を授与していただくことができた。

学位論文における 3 テーマは次のものであった。

1. CNC 工作機械の運動誤差をより正確に測定する方法（[4] 第 2 章, [1]）
2. CNC 工作機械の性能（高速, 高精度性）の評価方法（[4] 第 3 章, 第 4 章, [3], [5]）
3. CNC 工作機械によってより高速, 高精度に加工する指令プログラム作成方法（[4] 第 5 章, [2]）

このうちの 1 編の論文 [2] については, 後年私の所属する学会（精密工学会）および業界の財団（工作機械技術振興財団）の論文賞を受賞した。またある大学の研究室にも評価していただき, その研究室で継承発展させた研究も行われている。また, 研究成果の中にはすでにいくつかの企業で採用されている技術もある（上記 1, 2）。評価されること, わずかでも産業界の役に立てることは大変うれしく光栄なことである。

4 研究の楽しさ

研究生活においては, 「定年後こんなに楽しい毎日が待っているとは思わなかった」と思うほど毎日は楽しい。自由に自分のやりたいことができるということほど楽しいことはない。もちろん自分の四肢の届く狭い範囲の自由ではあるが, 自由に考え行動できることはとても楽しいことである。「次はこういう実験をすればいいのではないか」とか, 「この実験結果はこういうことを示しているのではないか」とか, いろいろアイデアやイメージが湧いてくる。

私の研究分野は, 物を対象にした実験系といえる。この「数学・物理通信」に掲載されている論文のレベルにははるかに及ばない即物的レベルであるが, 研究の中で, 「なるほどこういう実験結果が得られるのか」とか, 「この指標とこの指標にはこういう関係があることがわかった」というような新しい知見に遭遇するとうれしい。ごく小さなことであっても, 世界中で自分が一番先に発見したということは喜びである。さらに, 小さな研究成果であっても産業界に役立つことができればより一層うれしい。自分でも少しは世の中の役に立ったかなという満足感がある。

5 研究環境

私のような高齢者を快く受け入れてくださった研究室の教授（東京農工大学, 笹原弘之教授）に感謝である。研究について教授に相談すると必ず良く評価され, 私の意思を尊重していただける。評価されればさらに意欲も湧く。また周りは大部分 20 代の院生, 学生の人たちであるが, 彼らからも暖かく受け入れてもらえている。

学位取得後, 他大学からあるプロジェクトリーダーとして来ませんかというオファーもあったが, 研究生として同じ大学院に残り研究を続けることにした。給料をもらう立場になるといろいろな義務や責任が生じ, 気づかいもしなくてはならない。この年でそんな苦勞はしたくない。学費を払う立場である研究生の方がはるかに自由で気楽である。自分のことだけを考えればいいからである。さいわい年金も生活には困らない程度にいただいているので, 残りの人生は気ままに楽しみたい。

正直言って, 私はディスカッションやプレゼンテーションなどで人を納得させるよう説明することが苦手である。その点, 学術研究や論文においては, 事実（実験結果）が説得力を持ち, 論文を読めば理解してもらえる。これは私には向いている環境であると思っている。

6 現在と今後

2年の博士後期課程のあと研究生としてすでに4年研究生生活を継続している。その間、さらに2編の論文も学術誌に投稿し査読後受理され掲載された[5][6]。[5]は学位論文(上記2)の延長であるが、[6]は新しい研究テーマ(加工面品位の評価方法)での論文である。現在さらに新たな研究中のテーマで少なくともあと1編の論文を学術誌に投稿したいと、毎日無理のない範囲で研究を続けている。

平日は自宅と研究室との往復で毎日ほぼ決まった電車に乗り1時間近くは歩く。規則的な生活を送ることができているのはいいと思っている。研究のために毎日思考することも、多分認知症防止に役立っているのではないかと思う。

私の研究分野では実際の工作機械による検証実験は必須である。実験においては力作業もある。基本的には実験も自分一人で行っている。年々肉体的に厳しくなっていることは実感しているが、一人で行った方が気楽である。

あと何年このような研究生生活を送ることができるかわからないが、実験ができる限り研究ができる限り、一研究者一技術者として研究を続けたいと思っている。体調とも相談しながら、もししばらくは無理のない範囲で研究生生活を続けていくことが、今のささやかな願いである。

7 おわりに

一人の高齢者が定年退職後も大学院研究室で気楽に気ままに研究生生活を送っている経緯について述べた。世の中にはこんな変わった高齢者もいるのだなと思っていただければ十分である。また、もしわずかでも何か皆様のご参考になる点があれば望外の幸せである。

この機会を下さった編集者に厚く感謝申し上げたい。

(注) 引用した下記の文献にご関心があれば、タイトルでGoogle検索すれば出てくる。ただし、学術誌側に著作権がありAbstractなど一部しか見られないものがある。

参考文献

- [1] Toshiaki Otsuki, Hiroyuki Sasahara, Ryuta Sato, A method for the evaluation and magnified representation of two-dimensional contouring error, Precision Engineering (2017) vol: 50 pp: 433-439
- [2] Toshiaki Otsuki, Hiroyuki Sasahara, Ryuta Sato, Method for generating CNC programs based on block-processing time to improve speed and accuracy of machining curved shapes, Precision Engineering (2019) vol: 55 pp: 33-41^{*3}
- [3] Toshiaki Otsuki, Hiroyuki Sasahara, Ryuta Sato, A Method for Evaluating the Speed and Accuracy of CNC Machine Tools, The 9th International Conference on Leading Edge Manufacturing in 21st Century (LEM21), (2017), #034.
- [4] 大槻 俊明, 学位論文「CNC 工作機械の高速高精度性の評価方法と向上手法」, 東京農工大学学術機関リポジトリ (2018.9.19), 12605 甲博工第 1042 号

^{*3} [2] について、掲載年が2019年となっているが、2018年8月の学位論文審査時にはすでに査読後受理されていたので学位論文を裏付ける論文として位置づけられた。

- [5] Toshiaki Otsuki, Hiroyuki Sasahara, Ryuta Sato, Method to evaluate speed and accuracy performance of CNC machine tools by speed-error 2-D representation, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing (2019) Vol.13, No.1
- [6] Toshiaki Otsuki, Kenji Okita, Hiroyuki Sasahara, Evaluating surface quality by luminance and surface roughness, Precision Engineering (2022) vol: 74 pp: 147-162

$\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $\tan \frac{\theta}{2}$ で表す

矢野 忠^{*1}

Expressing $\cos \theta$ and $\sin \theta$ in terms of $\tan \frac{\theta}{2}$

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

このエッセイは前に愛数協の機関誌『研究と実践』に掲載されたものである [1]。この『研究と実践』の読者は多くは小学校の先生方であり、その読者数も多くない。それでより広くの読者が期待できる『数学・物理通信』に投稿した [2]。5 節のグラフによる説明で $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $\tan \frac{\theta}{2}$ で表すわけが直観的にわかればいいと思う。また 6 節と付録 2, 3 を新たに追加した。今回の改訂では 7 節を書き直したり、8 節と付録 4, 5 を付け加えたことと 2, 3 の参考文献を付け加えた。

多くの人の考えの継承を記録することがこの四訂版を出す主な理由である。以下ではすべての敬称を一部を除いてすべて省略した。

1 はじめに

$\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおけば、 $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ と表されることはよく知られている。 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の有理関数 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ を積分するときに、この置き換えと $d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$ を用いて

$$\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad (1.1)$$

とすれば、計算は面倒になるかもしれないが、必ず積分できると微積分の本に出ている^{*3}。ところで、この $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の置き換え

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (1.2)$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (1.3)$$

をどうやって導くのだろうか。いつか自分でもその導出はやってみたことがある^{*4}。その導出をしたときに他にどんな導出があるのかなと思ったのが、このエッセイを書くそもそもの動機である。しかし、インターネットで購入した矢野健太郎の著書『図形と式』 [5] にこの関係のエレガントな導出をみたのが、直接の動機となっている。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 唐突だが、ここでは計算機代数（数式処理）での有理関数の不定積分を求める Risch のアルゴリズムを想起しよう [3]。 $d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$ の導出は付録 1 で行う。

^{*4} このエッセイの前回の再訂のときに私の導出法はあまりにも冗長だと考えて削除した。ところが基本的に同じ導出法が [4] に代表的な解法の一つとして出っていたので、7 節に [4] と [17] を比較して 7 節にその導出法を述べる。

2 矢野健太郎の導出法

このエッセイを書く直接の動機となった矢野健太郎の著書 [5] の導出法から見てみよう^{*5}。この方法はなかなかエレガントでこの導出法を覚えたら、

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

の式を一生忘れないだろう。まずよく知られた恒等式

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad (2.1)$$

を思い出し^{*6}、また倍角の公式を用いれば、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる^{*7}。 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の倍角公式の右辺を分母 1 の分数式とみなすところが難しいが、それさえ思いつけばこんなに自然な導出法はない^{*8}。 $\tan \theta$ は

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。

^{*5} [6] もまったく同じ導出法である。

^{*6} $\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$ でなく、 $\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$ としていることに注意せよ。これは付録 3 に述べるように $\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$ と順序をそろえるためである。

^{*7} このエッセイでは角 $\theta/2$ が基本の角となっている。だから角 θ は $\theta/2$ の倍角である。

^{*8} 標題のテーマとは直接に関係がないが、(2.2) との関連で半角の公式の導出法を付録 3 に述べる。

3 藤森良夫の導出法

昔, 受験数学で一世を風靡した「考え方」で有名な藤森良夫はどのように問題にしている式を導いているのだろうか. そう思って『解析の基礎』(続編) [7] を取り出して調べてみたら,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

と導かれている*9. ここで, もちろん

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}\tag{3.3}$$

を用いている. ここで求めた方法は $\cos \theta, \sin \theta$ の倍角の公式の右辺で $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ の因子をくくり出せば, これが求める関係の分母になっており, 残りの因子が分子になっている. これはさすがに「考え方」を主導していた人にふさわしい導出法であって, これなら誰にでも考えつくことができそうである.

4 黒須康之介の導出法

岩波全書の中にある黒須康之介の『三角法』 [9] によれば,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}\tag{4.1}$$

*9 [8] も [7] と同じ導出法である.

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\
&= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{2t}{1 + t^2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

と導かれている^{*10}。第2, 3節の2つの導出法の折衷した導出法である。ちなみに黒須先生は矢野健太郎先生が旧制東京高校生であった当時の数学の先生の一人である。

5 安藤・山野の導出法

現代数学社発行の『大道を行く高校数学』解析編 [11] によれば、藤森の導出法と同じ導出法に加えて、別の観点からの導出法が出ている。もっともこれは安藤たちの独創ではなくて、もっと古い起源があるらしい [12], [13]。また、これらの文献は直接的には $\sin \theta, \cos \theta$ と $\tan(\theta/2)$ の関係を述べたものではない。

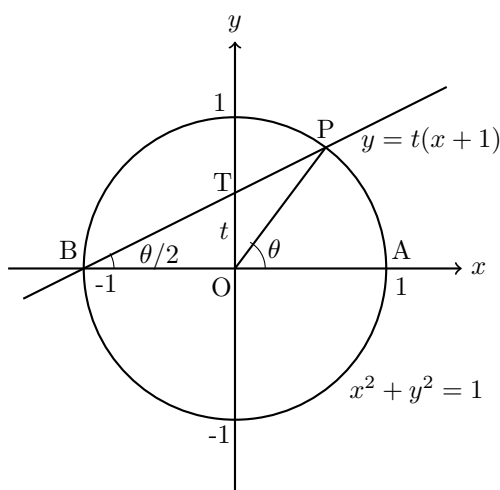


図1 $\cos \theta, \sin \theta$ と $\tan(\theta/2)$ との関係

図1からわかるように $\angle POA = \theta$ とすれば、 $\angle PBO = \theta/2$ である。点Pの座標を (x, y) とする。点Bの座標は $(-1, 0)$ である。また直線BPとy軸との交点をTとし、 $TO = t$ とする。

半径1の円であるから、円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{5.1}$$

であり、直線BPの方程式は

$$y = t(x + 1) \tag{5.2}$$

である。中心角 θ を用いれば、点 $P(x, y)$ の x, y は

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \tag{5.3}$$

と表される。また t は

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \tag{5.4}$$

^{*10} [10] も [9] と同じ導出法である。

と表される^{*11}.

連立方程式 (5.1),(5.2) の $x = -1, y = 0$ でない解を求めれば x, y が t で表される. (5.2) を (5.1) に代入すれば

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

この方程式は $x+1$ という因子をもつから

$$(x+1)[(1+t^2)x - (1-t^2)] = 0$$

と因数分解できる. いま $x \neq -1$ とすれば

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (5.5)$$

と求められる. したがって

$$\begin{aligned} y &= t(x+1) \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる.

(5.5),(5.6) が求めるべき式 (1.2),(1.3) である^{*12}

一松の説明 [15] も, この導出法と同一と考えてもいいだろう. ただ, 図が $-\pi/2$ だけ回転された図がそこには描かれているが, そのことについての説明はあたえられていない.

6 秋山 仁の導出法

この 6 節では秋山 仁の導出を述べよう [16].

秋山は $\tan$ の倍角の公式から出発する. $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおけば

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \quad (6.1)$$

である. この関係から図 2 のように直角三角形の底辺と高さがわかる. 角 θ は図 2 の角である. このときに三角形の斜辺の長さがわかれば, $\cos \theta, \sin \theta$ が求められる.

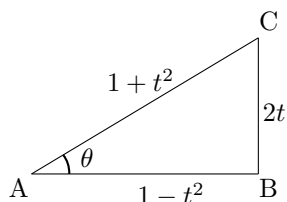


図 2 直角三角形の辺の長さ

斜辺の長さ AC はピタゴラスの定理によって

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= \sqrt{(t^2 + 1)^2} \\ &= 1 + t^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

^{*11} [14] も [11] と同じ導出法である. ただ細かな計算のしかたは異なる. 付録 2 を参照せよ.

^{*12} 世戸憲治さんがこのレポートを査読して, 考案された独自の彼の方法を教示していただいた. この方法を付録 5 に述べる.

である。したがって、図 2 から

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (6.3)$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (6.4)$$

が得られる。

7 戸田宏の導出法と私の導出法

戸田宏の導出法 [4] と私の導出法 [17] とは基本的に同じだが、まず戸田宏の導出法について述べ、その後で私の導出法を述べる。

まず戸田宏の導出法では、 $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおけば、 $\tan \theta$ の半角の公式によって

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \quad (7.1)$$

つぎに

$$1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (7.2)$$

から

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+t^2} \quad (7.3)$$

である。したがって

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (7.4)$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (7.5)$$

が得られる。

私の導出法は戸田宏の導出法と重複するところが多いが、細かな点では異なっている。

まず

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

を導く。つづいて $\tan$ 関数の半角公式から

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \quad (7.7)$$

を導き^{*13}、こうして求められた $\tan \theta$ を用いて $\sin \theta$ を

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos \theta \tan \theta \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \quad (7.8)$$

^{*13} 実はこの $\tan \theta$ の半角公式を私は記憶していない。したがって、8 節の (8.7) のように導く。

と導いている.

ちなみに $\cos \theta$ の導出は

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}\end{aligned}\quad (7.9)$$

から, (7.9) を $\cos \theta$ について解いて,

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

と求めてもよい^{*14}.

8 戸田清の考察

以上で $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ を $\tan(\theta/2)$ で表す導出法を 6 つの方法で述べた. これで行っているのが、これらの方法を [18] にしたがって再度考えてみたい.

まず $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ を求めることは変わらないが、3 つの三角関数をどの順序に三角関数を求めていくか.

(解 1)

$$\sin \theta \rightarrow \cos \theta \rightarrow \tan \theta \quad (8.1)$$

の順に求めれば、まず $\sin \theta$ を

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2}\end{aligned}\quad (8.2)$$

と求め、つぎに $\cos \theta$ を

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}\quad (8.3)$$

を求め、最後に $\tan \theta$ を

$$\tan \theta = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 - t^2} \quad (8.4)$$

を求める.

(解 2)

$$\sin \theta \rightarrow \tan \theta \rightarrow \cos \theta \quad (8.5)$$

^{*14} ここで半角の公式 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$, $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ を用いている.

の順に求めれば、まず $\sin \theta$ を（解 1）の (8.2) のように

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (8.6)$$

と求め、つぎに $\tan \theta$ を

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

と求める。

最後に $\cos \theta$ を求めれば、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sin \theta}{\tan \theta} \\ &= \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

となる。

（解 3）

$$\cos \theta \rightarrow \tan \theta \rightarrow \sin \theta \quad (8.9)$$

の順に求めれば、まず $\cos \theta$ を

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

と求める。

つぎに $\tan \theta$ は（解 2）の (8.7) から

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad (8.11)$$

である。これから

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta \quad (8.12)$$

であるから

$$\sin \theta = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (8.13)$$

が求められる。戸田清は 3 つの求め方の順序では最後の（解 3）がもっともよいのではないかと判断していたようである^{*15}。

^{*15} 上の 3 つの解を比べたときには、（解 3）が特に優れているとは思えない。戸田清の考察の意味するところを付録 4 に述べる。

9 おわりに

このエッセイでは $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ および $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ のいくつかの導出法を説明した。これぐらい簡単なことについてわざわざエッセイを書くことはないのかもしれないが、微積分を現在学んでいる学生にとって導き方の良し悪しを考える余裕などないであろう。だからそれについてエッセイを書くこともそれなりに意義があるかもしれない。

そもそも $\cos \theta, \sin \theta$ を $\tan(\theta/2)$ で表すことをどのようにして考えついたのだろうという根本的な疑問は 5 節のグラフによる説明ではっきりしたと思う。

10 付録

10.1 付録 1 $d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt$ の導出

蛇足であろうが、 $d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt$ を導出しておこう。 $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおけば、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \tan \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)\end{aligned}\tag{10.1}$$

ここで、商の導関数

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\theta} &= \frac{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2}\end{aligned}\tag{10.2}$$

したがって、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{2}{1+t^2}\tag{10.3}$$

となり、

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt\tag{10.4}$$

が導かれた。

10.2 付録 2 ラングの計算

ラング [14] の計算を見ておこう。5 節に示した図 1 と同じ図を用いているが、計算は少しだけちがっている。

図 1 で $x \neq -1$ のとき、直線 BP の傾きを t とすれば

$$t = \frac{y}{x+1}\tag{10.5}$$

である。この傾き t は図 1 からすぐわかるように $t = \tan(\theta/2)$ である。(10.5) から

$$y = t(x + 1) \quad (10.6)$$

$$y^2 = t^2(x + 1)^2 \quad (10.7)$$

が成り立つ。半径 1 の円の方程式は (5.1) から

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (10.8)$$

であるから

$$y^2 = 1 - x^2 = (1 + x)(1 - x) \quad (10.9)$$

となる。

したがって、(10.7) と (10.9) の y^2 の式を等しいとおいて、共通な因数 $1 + x$ でわれば、

$$1 - x = t^2(1 + x) \quad (10.10)$$

が得られる。これを x について解けば、

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (10.11)$$

が得られ、さらにこの x を (10.6) に代入すれば

$$y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (10.12)$$

が得られる。

10.3 付録 3 半角公式の導出法

この付録 3 では三角関数の半角公式の一つの導出法を述べる^{*16}。

加法定理

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \quad (10.13)$$

で $\phi = \theta$ とおけば、 $\cos 0 = 1$ であるから

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad (10.14)$$

が得られる。これはよく知られた恒等式である。加法定理

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \quad (10.15)$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (10.16)$$

で $\phi = \theta$ とおけば、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (10.17)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (10.18)$$

が得られる。(10.17),(10.18) から正接関数 $\tan$ についての倍角公式

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (10.19)$$

が直ちに得られる。(10.17),(10.18),(10.19) は三角関数の倍角公式である。

^{*16} この半角公式の導出法は [19], [20], [21] に述べられている。

(10.14)+(10.17) から

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \quad (10.20)$$

が得られ, また (10.14)-(10.17) から

$$1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \quad (10.21)$$

が得られる. また (10.20),(10.21) から

$$\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan^2 \theta \quad (10.22)$$

も得られる. (10.20),(10.21),(10.22) で

$$\theta \rightarrow \frac{\theta}{2}$$

とおきかえれば, 半角公式

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \quad (10.23)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad (10.24)$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (10.25)$$

が得られる.

大多数の文献では

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

を $\cos^2 \theta$ または $\sin^2 \theta$ について解いて半角公式を求めている.

10.4 付録 4 戸田清の考察の意味

$\sin$ 関数の半角の公式 (8.2) の式の変形を振り返ってみる. いま簡単のために $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とおけば,

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (10.26)$$

と式変形した. この式変形を思いつければ,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (10.27)$$

は誰にでも思いつくであろう. だが, もし (10.26) を思いつかなかったとすると

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ &= \frac{t^2}{1 + t^2} \end{aligned} \quad (10.28)$$

から

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \left(\pm \sqrt{\frac{t^2}{1 + t^2}} \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

となって上の式で符号の吟味が簡単ではない. だから $\cos 2\alpha, \tan 2\alpha, \sin 2\alpha$ の順に計算するのがいいのではないかという意味である.

10.5 付録5 世戸の導出法

世戸の導出法は5節の導出法に基づいているが、三角形の角の二等分線定理を用いているところが独特である。

まず三角形の一つの内角 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき辺の長さ AB と AC との比は D で分割された線分 BD と DC の比に等しい。すなわち、

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad (10.30)$$

である (図3を参照)。このことを使って以下の導出を行う。

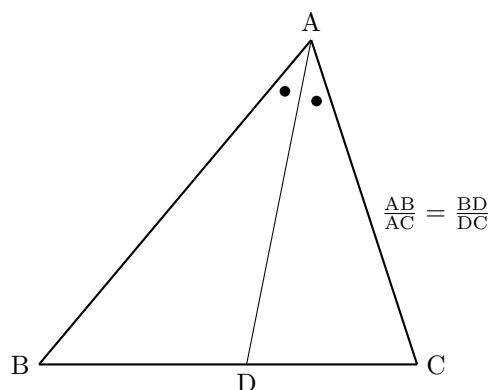


図3 三角形の角の二等分線定理

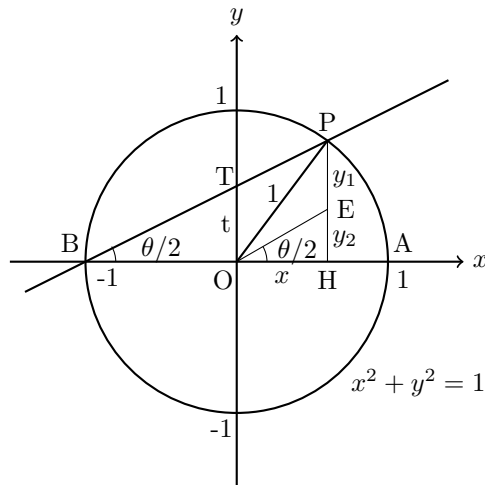


図4 世戸の導出法

実際にこの定理を適用する図4を描く (図4参照)。これはもちろん図1を少しだけ改変したものである。△POHは直角三角形であり、いま $\angle POH$ の二等分線を考える。この二等分線と三角形の辺 PH との交点を E とする。三角形の辺 OP の長さは $OP = 1$ であり、辺 OH の長さ $OH = x$ 、辺 PH の長さは $PH = y$ である。この (x, y) はもちろん点 P の座標でもある。 $\angle EOH$ は $\angle POH$ の二等分線であるから、その角度の大きさは $\theta/2$ である。また線分 PE の長さを $PE = y_1$ 、線分 EH の長さを $EH = y_2$ とする。

図3に示された三角形の角の二等分線の定理によれば、辺 OE は直角三角形 POH の $\angle POH$ の二等分線である

から

$$\frac{1}{x} = \frac{y_1}{y_2} \quad (10.31)$$

が成り立ち、かつ $PH=PE+EH$ であるから

$$y = y_1 + y_2 \quad (10.32)$$

が成り立つ。(10.31), (10.32) を y_1, y_2 について解けば,

$$y_1 = \frac{y}{1+x} \quad (10.33)$$

$$y_2 = \frac{xy}{1+x} \quad (10.34)$$

が求まる。図 4 と (10.34) から

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y_2}{x} = \frac{y}{1+x} \quad (10.35)$$

が得られる。ここで $t = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと (5.2) が求められる。 $\triangle POH$ は直角三角形であるから、ピタゴラスの定理によって (5.1) が成り立つ。後は (5.1) と (5.2) から x, y を求めれば (5.5), (5.6) が得られる。この導出法のいい点は三角関数の半角の公式を用いないことである。

以上、世戸さんの導出法について述べた。上の求め方で何ら問題はないが、図 4 の直角三角形 EOH から $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{y_2}{x}$ であることはすぐわかる。また直線 BP の傾きも $t = \tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{y}{1+x}$ であるから (10.35) が成り立つことは代数的な計算をしないでもわかる。このことを代数的に示したのが世戸の導出法であった。

この導出法をご教示下さった世戸さん、ありがとうございました。

(2005.12.15)(2014.10.17 改訂)(2015.12.29 三訂)(2016.1.15 四訂)(2022.12.18 五訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 研究と実践 (愛数協) 第 94 号 (2007.6) 16-21, 第 116 号 (2011.11) 9-1
- [2] 矢野 忠, 数学・物理通信, 5 巻 11 号 (2015.12.30)
- [3] 一松 信, 『解析学序説』上 (新版) (裳華房, 1981) 227-230
- [4] 戸田 宏, 岩井齊良, 『新訂版 基礎解析』(啓林館, 1989) 60
- [5] 矢野健太郎, 『図形と式』(講談社, 1979) 84
- [6] 遠山 啓, 『三角関数の研究』(山海堂, 1954) 107-108
- [7] 藤森良夫, 『解析の基礎』続編 (考え方研究社, 1954) 759
- [8] 辻 正次, 平野智治, 『新三角法』(共立全書, 1959) 47
- [9] 黒須康之助, 『三角法』(岩波全書, 1955) 69
- [10] 中村芳彦, 『三角法』(培風館, 1957) 65-66
- [11] 安藤洋美, 山野 熙, 『大道を行く高校数学』解析編 (現代数学社, 2001) 107-108
- [12] 松坂和夫, 『数学読本』2 (岩波書店, 1989) 285-291
- [13] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Dover, 2004) 44-46
- [14] S. ラング (松坂和夫, 片山孝次 訳), 『解析入門』(原書第 3 版) (岩波書店, 1978) 156-157
- [15] 一松信, 『解析学序説』上 (新版) (裳華房, 1981) 93
- [16] 秋山 仁, 『数学の計算回避のしかた』(森北出版, 2014) 64
- [17] 矢野 忠, 研究と実践 (愛数協) 第 94 号 (2007.6) 16-21

- [18] 戸田清,『三角関数』(旺文社, 1967) 68
- [19] 藤森良夫,『解析の基礎』続編 (考え方研究社, 1954) 667
- [20] S. ラング (松坂和夫, 片山孝次 訳),『解析入門』(原書第 3 版) (岩波書店, 1978) 268
- [21] 金田数正,『三角関数』(内田老鶴圃, 1984) 146, 182

因数分解は発見的手法か

矢野 忠^{*1}

Can the Factorization be Heuristic Methods ?

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

Pauli 行列の表現を求めるエッセイを前に書いた [1]. このときに他の文献にしたがった別の方法でも Pauli 行列の表現を求めたいと考えて、ノートをつくっていた. 最近そのノートをファイルの中から見つけて読んでみたら、その最後に Clifford 代数という 2 ページのメモが記してあった.

このメモは [2] のサイトの四元数の箇所の抜き書きだと思われるが、最近インターネット検索してもそこには書かれていないこともメモには書かれてあった^{*3}. それでこのレポートを書くことにした.

2 因数分解は発見的手法か

この [2] のサイトには四元数の記述のはじまりのところに「 $x^2 + y^2 + z^2$ は因数分解できるか」という節があった. そこにはまず

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y) \\x^2 + y^2 &= (x + iy)(x - iy)\end{aligned}$$

と因数分解できるとある^{*4}.

つづいて、[2] では $x^2 + y^2 + z^2$ の因数分解へと進む.

$i^2 = -1$ と同じような $j^2 = -1$ をみたとす j を考えれば、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + iy + jz)(x - iy - jz)$$

と因数分解できそうである. もちろんこのときに $ij + ji = 0$ を要請しなくてはならない.

しかし、[2] は積 ij または ji は $1, i, j$ の一次結合で

$$ij = a + bi + cj, \quad (a, b, c : \text{実数}) \quad (2.1)$$

で表せるかという問題を検討している.

そして、結合則が成り立つとして

$$(ii)j = -j \quad (2.2)$$

$$i(ij) = ai - b + cij \quad (2.3)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} この [2] のサイトにない部分は [3] からの抜き書きであるらしい.

^{*4} $x^2 + y^2$ は中学校と高校では因数分解できないと学ぶ. これは因数分解を有理係数に限るからである. この制約があるので、中学校と高校での多項式の大部分は因数分解できない.

から, (2.1) を用いて (2.2) と (2.3) の右辺を等しいとおけば

$$\begin{aligned} ai - b + cij &= -j \\ ai - b + c(ai + bi + cj) &= -j \\ (ac - b) + (a + bc)i + (c^2 + 1)j &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

となり, これから

$$a = b = 0, \quad c^2 = -1 \quad (2.5)$$

が得られる. a, b, c は実数であったから, $c^2 = -1$ から c は実数ではありえないから矛盾が生じたことになる. したがって $x^2 + y^2 + z^2 = (x + iy + jz)(x - iy - jz)$ は首尾一貫した正しい因数分解ではなかったと結論している.

それで [2] では $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ の因数分解へと進み, この場合には四元数を用いて矛盾のない因数分解

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (w + xi + yj + zk)(w - xi - yj - zk) \quad (2.6)$$

を求めることができることを示している.

ここで, i, j, k のみたすべき関係は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (2.7)$$

$$ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0 \quad (2.8)$$

である.

これは Hamilton の実際的な四元数の発見の過程とはちがうが, それでも四元数を導入する一つの方法にはなるであろう.

$x^2 + y^2 + z^2$ を [2] では上に述べたように因数分解できないとされたが, [3] には因数分解する方法が書かれている. それについて述べよう.

いま $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ で表せる 2 行 2 列の行列を考えて,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)^2 \quad (2.9)$$

と表せるとしよう^{*5}.

いま (2.9) の右辺の 2 乗の計算を行ってみよう. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の相互の乗算の順序は交換しないとして, 計算すると

$$\begin{aligned} (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)^2 &= x^2\sigma_x^2 + y^2\sigma_y^2 + z^2\sigma_z^2 \\ &\quad + xy(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) + yz(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y) + zx(\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の関係は

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad (2.11)$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0 \quad (2.12)$$

であればよい. この関係は物理学でよく知られたスピン演算子を表すのに使われる Pauli 行列のみたしている関係である. 数学ではこの (2.11), (2.12) の条件をみたす代数を Clifford 代数という.

Clifford が「Clifford 代数をどのようにして発見したのか」についての歴史的な経緯を私は知らない. しかし, これは Clifford 代数の導出の例の一つではあろう.

^{*5} 記号から推察されるように $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は量子力学での電子のスピンを表す Pauli 行列である.

3 Clifford 代数の別の例

以下で述べることは相対論的波動方程式 (Dirac 方程式) を学んだことのある人なら、だれでもよく知っていることである。

ある粒子のエネルギー E , 運動量 $\mathbf{p}$, その粒子の静止質量 m の間には特殊相対性理論によって

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (3.1)$$

の関係があった。

いま,

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2 \quad (3.2)$$

を因数分解することを考える。

このとき

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2 = \left[\left(\frac{E}{c}\right) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc\right] \left[\left(\frac{E}{c}\right) - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc\right] := P \quad (3.3)$$

と因数分解できるとしよう。ここで, $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は数ではなくて 4 行 4 列の行列である。どのような条件をもった行列かをみるために, 右辺の積をつくってみれば,

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c}\right)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc) + \left(\frac{E}{c}\right)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \\ &\quad - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\beta mc - \beta mc(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - (\beta mc)(\beta mc) \\ &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - mc(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - \beta^2(mc)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。

以下では α, p につけた添字 x, y, z を数字の添字 1, 2, 3 に対応して変えれば, まず

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) &= \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i\right) \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j\right) \\ &= \alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \alpha_3^2 p_3^2 \\ &\quad + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3) p_1 p_3 + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

となるためには

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 \quad (3.6)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0 \quad (3.7)$$

が成り立っている必要がある。

また

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\beta + \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^3 [(\alpha_i p_i)\beta + \beta(\alpha_i p_i)] \\ &= \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

となるためには

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

であればよい。

(3.6), (3.7), (3.9) の条件をみたす α_i ($i = 1, 2, 3$), β は Clifford 代数のもう一つの例となっている。

そして、これらの条件をみたす 4 行 4 列の行列は

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

である。これらはよく 2 行 2 列の行列 $\mathbf{1}$ と Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}$ で

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

と略記されることが多い。

もっとも相対論的な場の量子論では β, α はあまり用いられず γ 行列

$$\gamma = \beta \alpha, \quad \gamma^0 = \beta \quad (3.12)$$

が用いられる。この γ 行列には

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

の交換関係がある。ここで $g^{\mu\nu}$ は計量テンソルであり、Minkowski 計量では

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ととられるのが最近では普通である。しかし、このときは $(\gamma^i)^2 = -1$ となる。

しかし、計量メトリックを

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

ととれば、この交換関係をみたす γ 行列は $(\gamma^i)^2 = 1$ となるので、Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}$ とともに Clifford 代数の一つの表現になっている*6。

4 Dirac 方程式と因数分解

3 節で話を終えるつもりであったが、およそ 60 年ぶりに Dirac 方程式を見る機会をもったので、3 節の補足として Dirac 方程式の復習をしておこう。

Schrödinger 方程式を思い出してみれば、この方程式は位置 $\mathbf{r}$ と時刻 t の関数として波動関数を $\psi(\mathbf{r}, t)$ と表したとき、Hamiltonian H を用いて

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (4.1)$$

*6 $(\gamma^i)^2 = -1$ のときに Clifford 代数との関係をどう考えているのか私にはわからない。物理ではあまり Clifford 代数との関係など言及されないような気がするが定かではない。

であった．このとき Hamiltonian H は非相対論的な粒子のもつ全エネルギーで

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

であったから， $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ とおきかえて，演算子とすれば，Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi \quad (4.3)$$

と求められる．記号の説明は省略したが， $V(\mathbf{r})$ は粒子に働く力のポテンシャルである．

力の働かないときの相対論的エネルギー E と運動量 $\mathbf{p}$ のしたがう関係は (3.1) であり，これは (3.3) のように因数分解できた．それで (3.3) の右辺の 2 番目の因子から

$$\frac{E}{c} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc = 0 \quad (4.4)$$

が得られる．これを

$$E = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (4.5)$$

と書き改め，この式で

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad (4.6)$$

とおきかえた演算子を波動関数 ψ に演算すれば，

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2)\psi \quad (4.7)$$

が得られる．これが自由粒子に対する Dirac 方程式である．

5 波動幾何学の発想

四次元時空（いわゆる Minkowski 時空）では時空の間隔の 2 乗 ds^2 は

$$ds^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (5.1)$$

である．Dirac が彼の方程式を導いたように上の時空間隔 ds を考えて新しい数学や物理学を考えたらどうかと考えた人たちがいた．私は詳しいことは何も知らないのだが，上の式を因数分解したというか，平方根に開いた $ds\psi$ を考えた

$$ds\psi = (\gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2 + \gamma_3 dx_3 + \gamma_4 dx_4)\psi \quad (5.2)$$

が 1935 年以降に一時盛んに研究された広島学派の波動幾何学の基礎のアイディアであつたらしい．

依拠すべき文献等はまったくもっていないのでインターネットを検索してみたら，石原秀樹さんの講演の原稿を見つけたが，他にはあまりはかばかしい文献はない [4]．古い大学の図書館を探せば，古い論文が残っているのであろうが，探してみるまでもないであろう．ただ，私の述べたことに関係があるかと思ったのでここで付加的に述べた．

6 おわりに

因数分解が発見的手法であるかどうか．Dirac 方程式の導出などを見ると発見的手法であるようにも見えるが，四元数とか Pauli 行列の場合にはどうも発見的手法であつたとは思えない．それに複素数におけ虚数単位 i の導入のときも因数分解の手法で考えられたようには思えない．

つまり、単なる後知恵として、このようにも考えられるだけかもしれないが、ちょっと面白いと思ってこのレポートを書いた。

学問的には袋小路になってしまった波動幾何学にもつい言及してしまったが、Dirac 方程式のことを思い出しているうちにあんなことも聞いたなというくらいでしかない。

参考文献

- [1] 矢野 忠, Pauli 行列の導出, 数学・物理通信, 9 巻 10 号 (2020.2.3) 20-30
- [2] http://sammaya.garyoutensei.com/math_phys/math1/index.html
『数学の基礎：実数・虚数・四元数』
- [3] <https://shadowacademy.web.fc2.com/quaternion.html>
速習・物理学＞パウリ行列と四元数
- [4] <https://core.ac.uk/download/pdf>

編集後記

読者の皆様いかがお過ごしでしょうか。このコロナ禍はいつになったら治まるのでしょうか。私が住む札幌では、1日の感染者数がほとんど毎日3000人近くの高止まりで、おまけに12月に入り急に寒くなったので、風邪とコロナが一緒になって流行している状況です。いったい誰がこんなにコロナに罹るのかと思う一方で、そのうち自分にも振りかかってくるのではという恐怖心で、いつも戦々恐々としています。

今回の号には私のも含め4つの記事が載ることになりました。私の『水平面内を回転するばね振子』は、ばねと錘を組み合わせた相変わらずのもので、組み合わせ方を変えればいくらかでも異なるバージョンができると言わんばかりに、最近はこの種の振動解析の虜(とりこ)になってしまいました。

2番目のものは、大槻俊明さんという方の『定年退職後大学院に入学して』で、これは、数式をまったく含まないエッセーなので、誰でも気楽に読むことができます。それにつけても、確かに大学院には年齢制限はないので、歳は幾つになっても入れるわけです。しかし、まさか定年後に入ってその上、博士号まで取るとは驚きで、実際にそんな人がいるなんて思いもしませんでした。こういう人が現実にいるということは、学問というものは年齢に関係なくできるものだ、私のようなご老体の者たちの励みにもなります。

3番目、4番目は、例によって、編集長の矢野さんが書かれた『 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $\tan \theta/2$ で表わす』と『因数分解は発見的手法か』です。この最初の物は、三角関数を含む積分を実行するときに、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を $\tan \theta/2$ で表わしておく、積分するときの変数変換で三角関数をまったく含まない代数関数だけの積分に変換できるというもので、重要性があるものです。矢野さんが書かれたのはこの変換式を導く方法が人によってみな違いがあり、その方法を幾通りも紹介しています。実は、これを読んでいた私も、新しい方法を1つ発見し、矢野さんに報告したところです。

矢野さんのつぎのものは、例えば、 $x^2 + y^2$ を因数分解するためには通常の実数だけでは不可能で、虚数の i を用いて $(x + iy)(x - iy)$ とします。それでは、 $x^2 + y^2 + z^2$ やさらに変数を増やしたものを因数分解するにはどうすればよいか、という疑問から発して、4元数や Pauli の σ 行列、あるいは Dirac の γ 行列が作られてきた訳です。はたしてこの因数分解が新しい数概念の拡張に繋がるのかというのが矢野さんの疑問だったわけで、これをどう考えるかというのが彼の発想点です。確かに虚数の i 等も普段何の疑問も持たないで使っているのですが、現実に存在しない虚の数を使うというのはどういうことなのか、改めて考えると不思議な気がします。

(世戸憲治)