

数学・物理通信

13 卷 1 号 2023 年 3 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2023 年 3 月 25 日

目次 (Contents)

1. 水平面内を回転するばね振子 (2)

世戸憲治 2

2. 歩行者のための Gauss 数値積分 (改訂版)

矢野 忠 14

3. 編集後記

矢野 忠 29

1. Spring Pendulum Rotating on a Horizontal Plane (2)

Kenji SETO 2

2. Gaussian Quadrature for Pedestrians (Revised Version)

Tadashi YANO 14

3. Editorial Comments

Tadashi YANO 29

水平面内を回転するばね振子 (2)

世戸 憲治 *

Spring Pendulum Rotating on a Horizontal Plane (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「水平面内を回転するばね振子」(『数学・物理通信』12巻8号)では、ばねの自然長をゼロとしたときの運動を扱った。今回は、ばねの自然長をゼロとしない場合を扱ってみる。しかし、この計算は楕円積分を使わなければならないので、非常に困難をきたすことを覚悟しなければならない。

2 方程式の導入

問題は前回示したとうりであるが、ばね定数 k 、自然長 ℓ のばねを用意し、ばねの一端を水平な2次元座標の原点周りに自由に回転できるように固定し、他端には質量 m の錘を付ける。この錘に適当な初速度を与えたときどのような運動をするかを求めることである。この方程式も前回求めてあるが、ここでは前回とは異なる方法で求めておこう。任意時刻における錘の位置を極座標で (r, θ) とし、その位置ベクトルを $\mathbf{r}$ としたとき、錘の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k(r - \ell) \mathbf{e}_r \quad (2.1)$$

と書ける。この右辺はばねが錘に与える力で、 $\mathbf{e}_r$ は r 方向の単位ベクトルである。同じく θ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ としたとき、これら単位ベクトルは、固定された x, y 方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ とし、

$$\mathbf{e}_r = \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta) \mathbf{e}_x + \cos(\theta) \mathbf{e}_y \quad (2.2)$$

と表わされる。これらベクトルを時間 t で微分すると、Newton 流の記号ドットも併用して、

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = -\sin(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_x + \cos(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_y = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_x - \sin(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_y = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (2.3)$$

と書ける。これらの微分公式を用いると、 $\mathbf{e}_r$ を時間で2度微分したものは、

$$\frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} = \frac{d(\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta)}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \mathbf{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r \quad (2.4)$$

となる。ここで、錘の位置ベクトルは $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ と表されることを用いて、その2階微分である加速度は、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d(r \mathbf{e}_r)}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + r \frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + 2\dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r(\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r) \quad (2.5)$$

* 北海学園大学名誉教授

となるが、これはさらにまとめて、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\mathbf{e}_\theta \quad (2.6)$$

と書き直される．これを運動方程式 (2.1) に代入し、 r 方向、 θ 方向の各成分が独立であることを用いると、

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - \ell), \quad \frac{m}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

という 2 本の方程式を得る．最初の式の右辺 1 項目は r 方向に作用する遠心力、2 項目がばねの力である．また、2 本目の式は面積速度一定の法則、あるいは、角運動量保存の法則と呼ばれるもので、中心力の場合は必ず成立する式である．

3 方程式の解法

《 エネルギー積分 》

この方程式を解くにあたって、初期条件を

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad r = r_0, \quad \dot{r} = V_{r0}, \quad \theta = 0, \quad r\dot{\theta} = V_{\theta0} \quad (3.1)$$

と設定する．ここに、 V_{r0} 、 $V_{\theta0}$ は、それぞれ、 r 方向、 θ 方向の初速度である．このとき、(2.7) の第 2 式から $r^2\dot{\theta}$ は定数になるので、

$$r^2\dot{\theta} = r_0V_{\theta0} \quad (3.2)$$

と置くことができる．これから $\dot{\theta}$ を求めて、(2.7) の第 1 式に代入すると、 r のみの方程式

$$m\ddot{r} = \frac{m(r_0V_{\theta0})^2}{r^3} - k(r - \ell) \quad (3.3)$$

を得る．ここで、 $\ddot{r}$ を

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\dot{r}}{dr} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} \quad (3.4)$$

と変形してから、(3.3) 式の両辺を r で積分すると、

$$\int m \dot{r} d\dot{r} = \int \left[\frac{m(r_0V_{\theta0})^2}{r^3} - k(r - \ell) \right] dr \quad (3.5)$$

となり、結果としてエネルギー式

$$\frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + \left(\frac{r_0V_{\theta0}}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}k(r - \ell)^2 = E \quad (3.6)$$

を得る．ここに、左辺 1 項目は運動エネルギー、2 項目はばねの歪みエネルギーを表わし、右辺の E がそれらを合わせた全エネルギーを表わしている．このうち、左辺 1 項目の大括弧の中の 2 項目については、ばねの長さが r のときの θ 方向の速度 $r\dot{\theta}$ は、 $r^2\dot{\theta}$ が一定値 $r_0V_{\theta0}$ であることを使うと、この θ 方向速度は $r_0V_{\theta0}/r$ になることに注意する．このエネルギー式に初期条件 (3.1) を適用すると、

$$E = \frac{1}{2}m(V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2) + \frac{1}{2}k(r_0 - \ell)^2 \quad (3.7)$$

と E の値が決まる．この E の値を (3.6) 式に代入して $\dot{r}$ を求めると，

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{(V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2)r^2 - r_0^2 V_{\theta0}^2 + \omega^2 r^2 [(r_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2]}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.8)$$

となる．ここで ω は角速度の次元を持つ量で，この第 2 式で定義する．もちろん，この全体の符号を変えたものも存在するが，ここでは $\dot{r}$ を正と仮定して話を進める．この (3.8) 式において， $\dot{r} = dr/dt$ とし，変数分離してから積分形にすると，

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{(V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2)r^2 - r_0^2 V_{\theta0}^2 + \omega^2 r^2 [(r_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2]}} = \int dt \quad (3.9)$$

となるが，この被積分関数の分母の平方根の中は r の 4 次式になるので，これを実行することは容易ではない．

《 4 次式の因数分解 》

以下，この (3.9) 式の積分を楕円積分の標準形にもって行くことを考える．この平方根の中身を $f(r)$ と書くことにして，

$$\begin{aligned} f(r) &= (V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2)r^2 - r_0^2 V_{\theta0}^2 + \omega^2 r^2 [(r_0 - \ell)^2 - (r - \ell)^2] \\ &= -\omega^2 r^4 + 2\ell\omega^2 r^3 + (V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2 + \omega^2 r_0^2 - 2\omega^2 r_0 \ell)r^2 - r_0^2 V_{\theta0}^2 \\ &= -\omega^2 \left[r^4 - 2\ell r^3 - \frac{V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2 + \omega^2 r_0^2 - 2\omega^2 r_0 \ell}{\omega^2} r^2 + \frac{r_0^2 V_{\theta0}^2}{\omega^2} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

と変形する．ただし，このまま計算すると式が長くなるので，以下では，長さの次元を持つ 3 個の定数， A, B, C を用いて，

$$2\ell = 4A, \quad \frac{V_{r0}^2 + V_{\theta0}^2 + \omega^2 r_0^2 - 2\omega^2 r_0 \ell}{\omega^2} = 3B^2, \quad \frac{r_0^2 V_{\theta0}^2}{\omega^2} = 3C^4 \quad (3.11)$$

と定義しておく．これらの式で， B^2, C^4 と，2 乗，4 乗を付けて定義したのは，次元を合わせるためである．したがって， A, C は正の定数と理解されるが， B^2 は正とは限らない．初期条件によっては B^2 は負になることもあり得るので，そのときは B は虚数と考えることにする．また， $4A, 3B^2, 3C^4$ と係数 4, 3, 3 を付けて定義したのは後の計算を見越してのことである．この定義を使って，(3.10) 式を

$$f(r) = -\omega^2 [r^4 - 4Ar^3 - 3B^2 r^2 + 3C^4] \quad (3.12)$$

と書いておく．つぎに，この r の 3 乗項を消去するために r から s への変換

$$r = s + A \quad (3.13)$$

を行う．これ以降は独立変数が r から s に変わるので，これまでの $f(r)$ を $f(s + A)$ と書くことにして，結果は

$$f(s + A) = -\omega^2 \left[s^4 - 3(2A^2 + B^2)s^2 - 2A(4A^2 + 3B^2)s + 3[C^4 - A^2(A^2 + B^2)] \right] \quad (3.14)$$

となる．さらにこの s の 4 次式を (2 次式)×(2 次式) の形にするために，長さの次元を持つ 3 個の定数 a, b, c を用いて¹⁾，

$$f(s + A) = -\omega^2 (s^2 - as + b^2)(s^2 + as + c^2) \quad (3.15)$$

¹⁾ ここで用いる A, B, C と a, b, c はまったく別物である．特に， C と c については，注意されたい．

とおく．前と同じく， b^2, c^2 は次元合わせのためで，これらの量は正とは限らない．この式を展開して (3.14) 式と比べると， a, b, c と A, B, C の間に成立する 3 個の関係式

$$b^2 + c^2 - a^2 = -3(2A^2 + B^2), \quad a(b^2 - c^2) = -2A(4A^2 + 3B^2), \quad b^2 c^2 = 3[C^4 - A^2(A^2 + B^2)] \quad (3.16)$$

を得る．この 3 本の式から a, b, c を決めることになるが，まず，この第 1 式と第 3 式から b^2, c^2 はつぎの χ の 2 次方程式

$$\chi^2 + [3(2A^2 + B^2) - a^2]\chi + 3[C^4 - A^2(A^2 + B^2)] = 0 \quad (3.17)$$

の解となるので，

$$b^2, c^2 = \frac{1}{2} \left[a^2 - 3(2A^2 + B^2) \pm \sqrt{[3(2A^2 + B^2) - a^2]^2 - 12[C^4 - A^2(A^2 + B^2)]} \right] \quad (3.18)$$

となる．ここで，マイナス符号をとったものを b^2 ，プラス符号をとったものを c^2 として， $b^2 - c^2$ は

$$b^2 - c^2 = -\sqrt{[3(2A^2 + B^2) - a^2]^2 - 12[C^4 - A^2(A^2 + B^2)]} \quad (3.19)$$

となり，これを (3.16) 第 2 式に代入すると，

$$a\sqrt{[3(2A^2 + B^2) - a^2]^2 - 12[C^4 - A^2(A^2 + B^2)]} = 2A(4A^2 + 3B^2) \quad (3.20)$$

となり，これを 2 乗すると

$$a^2 \left[[3(2A^2 + B^2) - a^2]^2 - 12[C^4 - A^2(A^2 + B^2)] \right] = 4A^2(4A^2 + 3B^2)^2 \quad (3.21)$$

と a^2 を求めるための 3 次方程式を得る．この式を a^2 の幂で揃えると，

$$a^6 - 6(2A^2 + B^2)a^4 + [3(4A^2 + 3B^2)(4A^2 + B^2) - 12C^4]a^2 - 4A^2(4A^2 + 3B^2)^2 = 0 \quad (3.22)$$

となる．この方程式を解いて a^2 を求めなければならない．まず， a^4 項を消去するため a^2 から p^2 に

$$a^2 = p^2 + 2(2A^2 + B^2) \quad (3.23)$$

と変数変換すると，結果は

$$p^6 - 3(B^4 + 4C^4)p^2 + 2[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4] = 0 \quad (3.24)$$

と，途中の計算が面倒なわりには，簡単な結果となる．ここでさらに， p^2 から 2 変数の u^2, v^2 に

$$p^2 = u^2 + v^2 \quad (3.25)$$

と置き換えると，方程式は

$$u^6 + v^6 + 2[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4] + 3[u^2 v^2 - (B^4 + 4C^4)](u^2 + v^2) = 0 \quad (3.26)$$

となる．未知数は元々 p^2 の 1 個だったものを， u^2, v^2 2 個に増やしたのでこの方程式から 2 本の式を作ることができ，

$$u^6 + v^6 = 2[12(2A^2 + B^2)C^4 - B^6], \quad u^2v^2 = B^4 + 4C^4 \quad (3.27)$$

とおくことにする．この第 2 式の両辺を 3 乗した

$$u^6v^6 = (B^4 + 4C^4)^3 \quad (3.28)$$

と，(3.27) の第 1 式から， u^6, v^6 は，つぎの χ の 2 次方程式の解となる．

$$\chi^2 + 2[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4]\chi + (B^4 + 4C^4)^3 = 0 \quad (3.29)$$

これを解くと， u^6, v^6 は

$$u^6, v^6 = 12(2A^2 + B^2)C^4 - B^6 \pm \sqrt{[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4]^2 - (B^4 + 4C^4)^3} \quad (3.30)$$

となる．ここでは，プラスの方を u^6 ，マイナスの方を v^6 としておく．さらにこれらの量の 3 乗根を取ってから加えると (3.25) 式の p^2 が

$$p^2 = \left[12(2A^2 + B^2)C^4 - B^6 + \sqrt{[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4]^2 - (B^4 + 4C^4)^3} \right]^{1/3} \\ + \left[12(2A^2 + B^2)C^4 - B^6 - \sqrt{[B^6 - 12(2A^2 + B^2)C^4]^2 - (B^4 + 4C^4)^3} \right]^{1/3} \quad (3.31)$$

と求まる．このとき，平方根の中が負になり虚数になることもあるが，これら 2 つの 3 乗根は互いに複素共役になるので，この 2 つの 3 乗根の和は実数になる． p^2 が求まったので，(3.23) 式から a^2 が求まる．このとき， a^2 を求めるための 3 次方程式 (3.22) で，仮に， $a^2 = 0$ と置くと左辺は負になるので， a^2 は正で求まるはずである． a^2 が求まると (3.18) 式から b^2, c^2 も求まる．ただし，求まった a, b, c を A, B, C で表わす式はあまりに長すぎるので，以下では， a, b, c のままで使うことにする．このとき，初期条件によっては b^2 が負になることもあることを注意しておく．このときの (3.15) 式を

$$f(s + A) = \omega^2(as - s^2 - b^2)(s^2 + as + c^2) \quad (3.32)$$

と書いておく．

《 楕円積分の標準形 》

この $f(s + A)$ を (3.9) 式の被積分関数の平方根の中に代入し，(3.13) を用いて積分変数を r から s に変えて書くと，

$$\int \frac{(s + A)ds}{\sqrt{g(s)}} = \omega \int dt, \quad g(s) = (as - s^2 - b^2)(s^2 + as + c^2) \left(= \frac{1}{\omega^2} f(s + A) \right) \quad (3.33)$$

となる．ただし，ここで平方根の中身を，この第 2 式で示すように $g(s)$ と定義した．ここで，この $g(s)$ に含まれる 2 個の 2 次式の中の 1 次の項を消去するため， s から ζ への変換

$$s = \frac{E\zeta + F}{\zeta + 1} \quad (3.34)$$

を実行する．ここで， ζ は無次元変数， E, F は長さの次元を持つ定数とする．この変換で $g(s)$ は

$$g(s) = \frac{1}{(\zeta + 1)^4} \left[(aE - E^2 - b^2)\zeta^2 + (a(E + F) - 2EF - 2b^2)\zeta + aF - F^2 - b^2 \right] \\ \times \left[(E^2 + aE + c^2)\zeta^2 + (a(E + F) + 2EF + 2c^2)\zeta + F^2 + aF + c^2 \right] \quad (3.35)$$

となるが，ここで 2 つある ζ の 2 次式の各 1 次の項をゼロとし，

$$a(E + F) - 2EF - 2b^2 = 0, \quad a(E + F) + 2EF + 2c^2 = 0 \quad (3.36)$$

と置く．この 2 式から

$$E + F = \frac{b^2 - c^2}{a}, \quad EF = -\frac{1}{2}(b^2 + c^2) \quad (3.37)$$

となるので， E, F は χ の 2 次方程式

$$\chi^2 - \frac{b^2 - c^2}{a}\chi - \frac{1}{2}(b^2 + c^2) = 0 \quad (3.38)$$

の解となる．これを解いて， E, F は

$$E, F = \frac{1}{2a} \left[(b^2 - c^2) \pm \sqrt{(b^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 + c^2)} \right] \quad (3.39)$$

と求められるが，ここではプラスの方を E ，マイナスの方を F としておく．

以上から，(3.35) 式の $g(s)$ は

$$g(s) = \frac{(aE - E^2 - b^2)(E^2 + aE + c^2)}{(\zeta + 1)^4} \left[\zeta^2 + \frac{aF - F^2 - b^2}{aE - E^2 - b^2} \right] \left[\zeta^2 + \frac{F^2 + aF + c^2}{E^2 + aE + c^2} \right] \quad (3.40)$$

となるが，この式をもう少しまとめて書くことにする．この右辺の最初の分子に付く E の 4 次式の部分は，関数 $g(s)$ の定義である (3.33) の第 2 式を見ると， $g(E)$ と書け，また，実際の数値を当たってみると，この $g(E)$ の値は正になることが分かる．さらに，最初の ζ の 2 次式部分の定数項は負となり，つぎの 2 次式部分の定数項は正となることが分かるので²⁾，ここでは

$$\frac{aF - F^2 - b^2}{aE - E^2 - b^2} = -\mu^2, \quad \frac{F^2 + aF + c^2}{E^2 + aE + c^2} = \nu^2 \quad (3.41)$$

と置くことにする．この置き換えで (3.40) 式は

$$g(s) = \frac{g(E)}{(\zeta + 1)^4} (\zeta^2 - \mu^2)(\zeta^2 + \nu^2), \quad g(E) = (aE - E^2 - b^2)(E^2 + aE + c^2) \quad (3.42)$$

と書かれる．これを用いて，(3.33) 式の積分を積分変数 ζ を用いて書き直すと，

$$\frac{E - F}{\sqrt{g(E)}} \int \frac{[(E + A)\zeta + F + A]d\zeta}{(\zeta + 1)\sqrt{(\zeta^2 - \mu^2)(\zeta^2 + \nu^2)}} = \omega \int dt \quad (3.43)$$

²⁾ この数値計算については，「付録 1」に記したので参照されたい．

となる．ここで，被積分関数のうち，平方根を除いた部分を

$$\begin{aligned}\frac{(E+A)\zeta+F+A}{\zeta+1} &= (E+A) - (E-F)\frac{1}{\zeta+1} \\ &= -(E-F)\frac{\zeta}{\zeta^2-1} + (E+A) + (E-F)\frac{1}{\zeta^2-1}\end{aligned}\quad (3.44)$$

と分解しておき，(3.43) の左辺の積分を

$$\int \frac{[(E+A)\zeta+F+A]d\zeta}{(\zeta+1)\sqrt{(\zeta^2-\mu^2)(\zeta^2+\nu^2)}} = -(E-F)S_0 + (E+A)S_1 + (E-F)S_2 \quad (3.45)$$

と書いておく．ここに，3 個の積分 S_0, S_1, S_2 を

$$\begin{aligned}S_0 &= \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^2-1)\sqrt{(\zeta^2-\mu^2)(\zeta^2+\nu^2)}}, \\ S_1 &= \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-\mu^2)(\zeta^2+\nu^2)}}, \quad S_2 = \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)\sqrt{(\zeta^2-\mu^2)(\zeta^2+\nu^2)}}\end{aligned}\quad (3.46)$$

と定義する．このうち，最初の S_0 については，変数を ζ から η に

$$\zeta^2 = \eta \quad (3.47)$$

と変換すると，

$$S_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{(\eta-1)\sqrt{(\eta-\mu^2)(\eta+\nu^2)}} \quad (3.48)$$

と平方根の中が η の 2 次式になるので，これは初等関数の範囲内で積分可能となる．つぎの S_1, S_2 に関しては， ζ から u への変数変換

$$\zeta^2 = \frac{\mu^2}{1-u^2} \quad (3.49)$$

を行うと， S_1 は，

$$S_1 = \frac{1}{\rho} \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \rho = \sqrt{\mu^2+\nu^2} \quad (3.50)$$

と，楕円積分に関する Legendre-Jacobi の第 1 種標準形になる．ここに，定数 ρ をこの第 2 式で定義する．また， k は楕円積分の母数で³⁾，

$$k = \frac{\nu}{\rho} \quad (3.51)$$

と定義する． S_2 についても同様に (3.49) の変換式を使うと，

$$S_2 = -S_1 + S_3, \quad S_3 = \frac{\mu^2}{(\mu^2-1)\rho} \int \frac{du}{(1+qu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (3.52)$$

と， S_2 はその一部に $-S_1$ を含み，残りの部分を S_3 とすると，この S_3 は楕円積分の第 3 種標準形で表される．ここに， q はパラメタで，

$$q = \frac{1}{\mu^2-1} \quad (3.53)$$

³⁾ 習慣に従って，楕円積分の母数を k と書くが，これは，ばね定数の k と混同の恐れはないものとする．

と定義する.

S_0 の実際の積分値は⁴⁾,

$$S_0 = \frac{1}{2\lambda} \arcsin \left[\frac{(\nu^2 - \mu^2 + 2)(\eta - 1) - 2\lambda^2}{\rho^2(\eta - 1)} \right], \quad \lambda = \sqrt{(\mu^2 - 1)(\nu^2 + 1)} \quad (3.54)$$

となる. ここに, 定数 λ をこの第 2 式で定義する. また, 第 1 種楕円積分, 第 3 種楕円積分で書かれる S_1, S_3 に関しては, 変数変換

$$u = \sin \phi \quad (3.55)$$

によって, 記号的に,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\rho} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \equiv \frac{1}{\rho} F(\phi, k), \\ S_3 &= \frac{\mu^2}{(\mu^2 - 1)\rho} \int \frac{d\phi}{(1 + q \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \equiv \frac{\mu^2}{(\mu^2 - 1)\rho} \Pi(\phi; q, k) \end{aligned} \quad (3.56)$$

と表される⁵⁾. 特に, $F(\phi, k)$ は Jacobi の楕円関数 sn の逆関数である.

以上をまとめると, 積分式 (3.43) の実行結果は

$$\begin{aligned} \frac{E - F}{\sqrt{g(E)}} \left[-\frac{E - F}{2\lambda} \arcsin \left[\frac{(\nu^2 - \mu^2 + 2)(\eta - 1) - 2\lambda^2}{\rho^2(\eta - 1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{F + A}{\rho} F(\phi, k) + \frac{\mu^2(E - F)}{(\mu^2 - 1)\rho} \Pi(\phi; q, k) \right] = \omega(t + t_0) \end{aligned} \quad (3.57)$$

と表示される. これで一応, 楕円積分の標準形への移行は終わったことになるが, これから実際のばねの長さ r を時間 t の関数として求めるには程遠いことになっている. また, ばねの長さ r を回転角度 θ の関数として求めることも試みたが, 係数が変わるだけで, 計算結果はほとんど同じような数式になる.

4 数値解法によるグラフの作成

何の成果もだせないままに, ここで終わってしまうのはあまりに情けないので, 数値計算によるグラフの作成をしておく. 数値計算をするに当たって, 基礎方程式をどこに置くかが問題になる. エネルギー積分から求まる (3.8) 式から出発すれば 1 階の微分方程式を解くだけですむ. しかし, この方法には問題がある. それは, (3.8) 式にはプラス・マイナスの符号の不定性があるため, それを数値的にどのように判断させるかが問題になる.

ここでは, より基礎的な (2.1) 式に基づいた方法をとる. このベクトル形式の方程式を x, y 成分に分解して書くと, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ を用いて,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \frac{r - \ell}{r} x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 \frac{r - \ell}{r} y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.1)$$

⁴⁾ 『数学公式 I』(岩波全書) P.130

⁵⁾ 『数学公式 I』(岩波全書) P.143

となる．ここで，ばねの長さ r はこの第 3 式で定義し，また， ω は (3.8) の第 2 式で定義するものである．この 2 階の連立微分方程式を数値的に解くに当たって， x, y の 2 階微分を，微小時間 Δt を用いて

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (4.2)$$

と置き換えることで，微分方程式を差分方程式に変換する．あとは初期条件として，

$$t = 0 \text{ のとき} \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = V_{x0}, \quad y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = V_{y0} \quad (4.3)$$

の値を与えるものとしてプログラムを組み， x, y を時間 t の関数として求める．

ここでは，この初期値として

$$V_{x0} = 1 \text{ m/s}, \quad y_0 = 0 \text{ m}, \quad V_{y0} = 1 \text{ m/s}, \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad \omega = 1/\text{s}, \quad \Delta t = 0.03 \text{ s} \quad (4.4)$$

を共通の値として設定し， x_0 については， $x_0 = 1 \text{ m}$ としたものを図 1 に，また， $x_0 = 2 \text{ m}$ としたものを図 2 に示す．

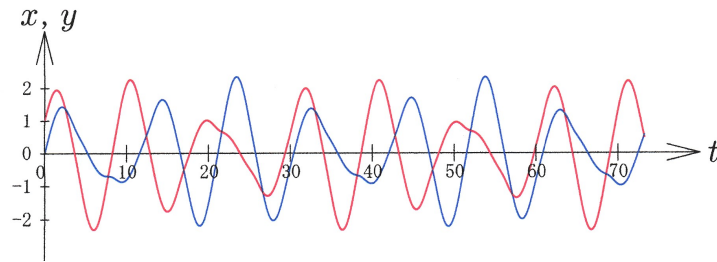


図 1 時間の関数としての x, y ($x_0 = 1 \text{ m}$ のとき) 赤線は x , 青線は y

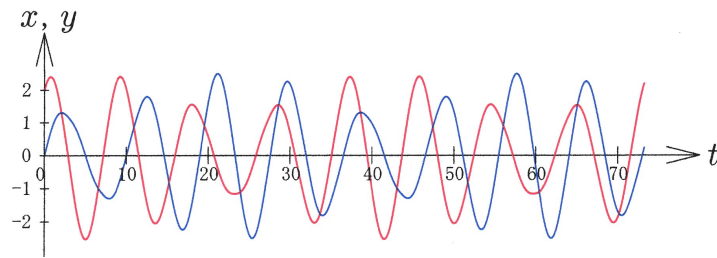


図 2 時間の関数としての x, y ($x_0 = 2 \text{ m}$ のとき) 赤線は x , 青線は y ．

これらのグラフを注意深く見ると，図 1 では， x, y とともに，およそ 30.4 sec の周期を持つ周期関数，また，図 2 の方では， x, y とともに，周期 36.5 sec の周期関数と見てとれる．

ここでさらに，時間の関数として求めた x, y を各時間ごとに (x, y) 平面にプロットし，錘が動いた軌跡として描いたものを，つぎのグラフ図 3，図 4 に示す．これらの図は両方とも，経過時間が 0 から 400 sec までを描いたもので，図 3 は $x_0 = 1 \text{ m}$ の場合，図 4 は $x_0 = 2 \text{ m}$ の場合である．

ここで，理解しやすい図 4 の方から説明すると，錘は出発点 $(x_0, y_0) = (2, 0)$ を出発してから，原点周りを楕円に近い形を描きながら反時計まわりに回転する．しかし，その楕円自体がゆっくりと時計まわりに回転するため，錘は時間とともにずれた楕円上を動いて行くことになり，その結果，錘の軌跡は花びらのような形になる．錘がこの楕円を 9 周して，出発点に戻ったときには，楕円軌道もちょうど 1 回転していて，後は時間がいくら経

過しても同じ軌道上を動くことになる．それに対し、図 3 の方は、錘が出発点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ を出発してから楕円を 7 周し、出発点に戻った時点で、楕円の方は 1 回転を僅かに超えて回転しているため、さらに時間が経過すると、1 回目より僅かにずれた軌道をまわることになる．それ以上に時間が経過すると、このずれ現象が拡大され、ついには、楕円の長半径と短半径にあたる 2 個の同心円に挟まれた部分が塗りつぶされていく形になる．

ちなみに、ばねの自然長 ℓ をゼロとした場合は、前回示したように、軌道は完全に静止した楕円になる．

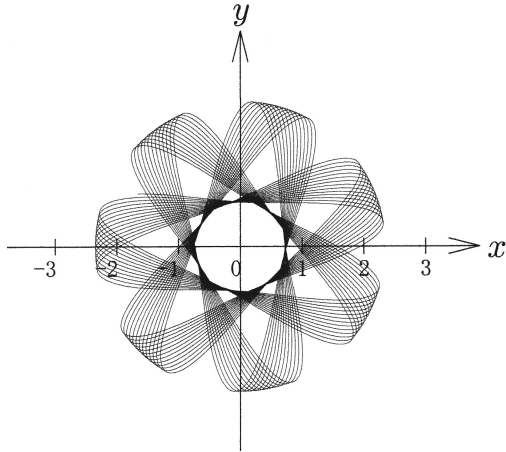


図 3 錘の軌跡 ($x_0 = 1$ m のとき)

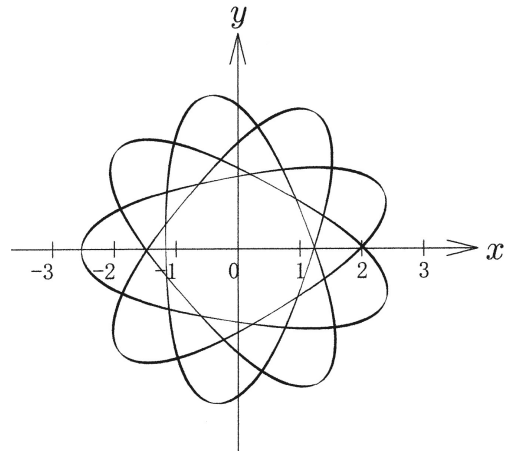


図 4 錘の軌跡 ($x_0 = 2$ m のとき)

先に、 x も y も時間の周期関数のように見てとれると書いたが、これは短い時間内で見たためにそう見えただけと考えられる．これは前節で解析したように、第 3 種の楕円積分が関与してくるために、周期関数からずれてしまうのが原因かもしれない．実際、(3.56) 式で定義される第 3 種楕円積分を規定するパラメータ q の値は、 $x_0 = 2$ の図 4 の場合は $q = 0.0581$ で小さいが、 $x_0 = 1$ の図 3 の場合は、 $q = 0.1518$ と 3 倍近くになっている．もし完全な周期関数ならば、経過時間を長くしたからと言って、図 3 のように、その軌道が少しずつずれていき画面が塗りつぶされてしまうようなことはないはずである．図 4 がそうならなかったのは、たまたま偶然に q の値が小さかったために、周期関数に近い形になったためと考えられる．このように、初期位置を少し変えただけで、まったく異なるパターンになってしまうのは、不思議と言え不思議である．

もう一つ注意が必要なのは、数値計算には数値誤差が付き物で、経過時間を長くするほど、誤差が誤差を生んで誤差が増大していくことである．という訳で、やはり、数値計算をそのまま鵜呑みにするのは危険で、その信憑性がどの程度あるのかを疑ってかかるべきである．

5 おわりに

前回に引き続き、ばねに錘を付けて、水平面内で振り回す問題をやってみた．前回は、ばねの自然長をゼロとして、それなりの解析解を求めることに成功した．今回は、ばねの自然長を有限のままとして、どのような解が求まるかを、遮二無二、無理やり、4 次方程式を丁寧に解いて、実行してみた．しかし、結果は散々たるもので、楕円積分を用いた計算結果からは何も見えてこない．前にも楕円積分を用いた計算をやって、何も見えてこないことがあったが、今回はそれ以上で、あまりに変数変換の回数が多すぎることで、および、結果が、初等関数の複雑なものと、第 1 種、第 3 種の楕円積分の 3 つの項の和になってしまうことで、これから、ばねの長さ r を時間

t の関数として求めることは絶望的になってしまった．そこで，気休めにすぎないが，微分方程式から直接数値的に解くことも試してみた．確かにそれなりの解は求まるが，しかし，この解法からは，すっきり理解できたという気分には，まったくなれない．

古典力学の難問として有名なものに，天体力学における「3 体問題」があるが，今回のような，ばねに錘を付けて振り回すだけのごく有り触れた問題が，3 体問題に劣らぬ難問とはつゆ思いもしなかった．どうりで，普通の教科書には出てこない問題である．通常の教科書にでてくるのは，結果がきれいに求まるものに限られる．しかし，こんなことをするとこんな泥沼に落ち込むという例も知っておくべきと思い，投稿することにした．

以下の「付録 1」には，ここでの解析的計算に対する補助として，初期条件を適当に与えたときの各変数の値を数値的に求めたものを挙げておく．また，「付録 2」では，ここでの楕円積分を用いた結果が，最も簡単な円軌道になる場合を再現できるかどうかについて，検討してみた．

6 付録 1：数値計算による各変数の値

ここでの解析的計算に対し，数値的に各変数の値を求めるプログラムを作成してみた．例として，初期値を

$$\ell = 1 \text{ m}, \quad r_0 = 2 \text{ m}, \quad V_{r0} = 1 \text{ m/s}, \quad V_{\theta 0} = 1 \text{ m/s}, \quad \omega = 1 / \text{s} \quad (6.1)$$

としたときの各変数の値を，小数点以下 4 桁で記すと，

$$\begin{aligned} A &= 0.5000 \text{ m}, \quad B^2 = 0.6666 \text{ m}^2, \quad C^4 = 1.3333 \text{ m}^4, \\ a^2 &= 7.3055 \text{ m}^2, \quad b^2 = 1.3477 \text{ m}^2, \quad c^2 = 2.4577 \text{ m}^2, \quad E = 1.1892 \text{ m}, \quad F = -1.5999 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.2)$$

となる．さらに，これらを組み合わせた変数は，

$$\begin{aligned} aE - E^2 - b^2 &= 0.4522 \text{ m}^2, \quad aF - F^2 - b^2 = -8.2319 \text{ m}^2, \\ E^2 + aE + c^2 &= 7.0865 \text{ m}^2, \quad F^2 + aF + c^2 = 0.6930 \text{ m}^2, \quad \mu^2 = 18.2005, \quad \nu^2 = 9.7803 \times 10^{-2}, \\ g(E) &= 3.2051 \text{ m}^4, \quad \rho = 4.2776, \quad k = 7.3109 \times 10^{-2}, \quad q = 5.8137 \times 10^{-2}, \quad \lambda = 4.3454 \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる．これらの数値は，解析的計算を実行する上で，選択肢の選択を迫られるところで参考にした．

7 付録 2：完全な円運動になる場合

今回の楕円積分を用いた解析はあまりに複雑怪奇な結果になってしまったので，はたしてこの解法で，錘の軌跡が最も簡単な円軌道の場合を再現できるのかが，心配になってきた．それ故ここでは，軌道が完全な円になる場合を考えてみよう．円軌道の半径を r_0 ，回転角速度を $d\theta/dt = \omega_c$ とすると，遠心力とばねの力が釣り合う条件は

$$mr_0\omega_c^2 = k(r_0 - \ell) \quad (7.1)$$

となる．この式は (3.8) 式の ω ，および，回転方向の速度が $r_0\omega_c = V_{\theta 0}$ となることを用いて書き直すと，

$$V_{\theta 0}^2 = \omega^2 r_0(r_0 - \ell) \quad (7.2)$$

となるので，(3.11) 式で定義した定数 A, B, C は，動径方向 (r 方向) の速度 V_{r0} はゼロとして，

$$A = \frac{1}{2}\ell, \quad B^2 = \frac{1}{3}r_0(2r_0 - 3\ell), \quad C^4 = \frac{1}{3}r_0^3(r_0 - \ell) \quad (7.3)$$

となる。つぎに、小文字の a, b, c を求めなければならないが、そのためには、(3.31) 式で定義する p^2 を求めなくてはならない。このときの A, B, C を用いて、(3.31) を計算すると、平方根の中身はゼロとなり、

$$p^2 = \frac{2}{3}r_0(4r_0 - 3\ell) \quad (7.4)$$

となる。これを用いて (3.23) 式の a^2 は

$$a^2 = (2r_0 - \ell)^2 \quad (7.5)$$

となり、さらに、(3.18) 式の b^2, c^2 は

$$b^2 = \frac{1}{4}(2r_0 - \ell)^2, \quad c^2 = \frac{1}{4}(4r_0^2 - 3\ell^2) \quad (7.6)$$

と求められる。これら a^2, b^2, c^2 を用いて、(3.39) 式の E, F を求めると、

$$E = \frac{1}{2}(2r_0 - \ell), \quad F = -\frac{4r_0^2 - 2r_0\ell - \ell^2}{2(2r_0 - \ell)} \quad (7.7)$$

となり、これらの結果を用いて、(3.35) 式に表れる各係数を求めていくと、

$$\begin{aligned} aE - E^2 - b^2 &= 0, & a(E + F) - 2EF - 2b^2 &= 0, & aF - F^2 - b^2 &= -\frac{r_0^2(4r_0 - 3\ell)^2}{(2r_0 - \ell)^2} \\ E^2 + aE + c^2 &= r_0(4r_0 - 3\ell), & a(E + F) + 2EF + 2c^2 &= 0, & F^2 + aF + c^2 &= \frac{r_0\ell(r_0 - \ell)(4r_0 - 3\ell)}{(2r_0 - \ell)^2} \end{aligned} \quad (7.8)$$

という結果になる。この式で、上段、および、下段の各 2 番目の式がゼロになるのは、これを要請したので当然であるが、この上段の最初の式がゼロになることは意外と言えば意外である。

これらの結果を用いて (3.35) 式の $g(s)$ を書き直すと、

$$g(s) = -\frac{1}{(\zeta + 1)^4} \frac{r_0^3(4r_0 - 3\ell)^3}{(2r_0 - \ell)^2} \left[\zeta^2 + \frac{\ell(r_0 - \ell)}{(2r_0 - \ell)^2} \right] \quad (7.9)$$

となって、少なくとも $r_0 > \ell$ のとき、この値は負になってしまう。しかしながら、(3.33) 式で見るとおりこの $g(s)$ は平方根の中に入る量なので、本来、負になることは許されないことである。どこかで計算ミスをしたのではと、何度もやり直してみたが、計算ミスは見つからなかった。数日間悩んだあげく、その理由が見えてきた。これは s から ζ への変換式 (3.34)、すなわち、 $s = (E\zeta + F)/(\zeta + 1)$ がいけなかったのである。この式を逆に ζ について解くと、

$$\zeta = \frac{F - s}{s - E} \quad (7.10)$$

となる。ここで、(3.13) 式から $s = r - A$ であり、(3.11)、あるいは、(7.3) 式から $A = \ell/2$ なので、半径 r_0 の円運動の場合は、

$$s = \frac{1}{2}(2r_0 - \ell) \quad (7.11)$$

となる。この値は (7.7) 式で見るとおり E の値に等しい。つまり、(7.10) 式の ζ は分母がゼロとなり無限大になっている。したがって、ここで用いた楕円積分を使う方法に円運動の場合を当てはめようとすると、 $0 \times \infty$ という不定形の計算を、必然的に余儀なくされてしまい、(7.9) 式のような矛盾した結果に陥るということである。以上から、ここで行なった楕円積分の標準形にもって行く操作は、最も単純な円運動の場合を初めから除外しているということになる。

歩行者のための Gauss 数値積分（改訂版）

矢野 忠^{*1}

Gaussian Quadrature for Pedestrians

Tadashi YANO^{*2}

1. はじめに
2. Lagrange 補間公式
3. Gauss 数値積分公式
4. おわりに
5. 付録 1 (2.11), (2.12) の導出
6. 付録 2 (3.2) の導出
7. 付録 3 (3.12) の導出
8. 付録 4 Gauss 数値積分公式のつくり方

まえおき

このエッセイは愛数協の「研究と実践」に発表したものである [1]。その後、小著『数学散歩』 [2] に収録するにあたり、緒方秀教（現電気通信大学教授）さんに読んでいただき、多くの助言と示唆をいただいた。しかし、その大部分は彼の助言にしたがわず、自説を固執したのでせっかくの有用な助言が活かされていない。一言お断りをしておく。また、今回改訂にあたり、付録 4 以外の付録を新たに付け加えた。ページ数がほぼ 2 倍に増大したが、それだけ自己完結的 (self-contained) になっていると思う。

1 はじめに

もう 20 年以上も前のことだが、研究上で数値積分をしなければならないことがあった。そのときに Gauss 数値積分について少し勉強をしたが、その分点と重みの求め方を非専門家（歩行者）のために [3] の付録に載せておいた。しかし、この文献を見る人はほとんどいないだろうし、ましてやこの文献の付録に歩行者のための Gauss 数値積分の記述があるなどということに注意をする人はいないだろう。

数値積分をするには、日本で開発された数値積分のアルゴリズムとして 2 重指数関数型の数値積分公式や適応型の Newton-Cotes 公式といった優れた数値積分の方法があるので、いまさら Gauss 数値積分でもないかもしれない。

また、数値解析の専門家には Gauss 数値積分公式は直交関数系を用いた一般論があることはよく知られており、Legendre-Gauss, Laguerre-Gauss, Hermite-Gauss 等の数値積分公式を統一的に扱うことができる。それについて述べた書物も現在では少なくはない。だから、学問的には興味はないだろうが、数値解析にあまり縁のない一般の方々にとってはこのような歩行者のためのアプローチは教育的に意味があるかもしれない。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

2 Lagrange 補間公式

まずはじめに Gauss 数値積分の基礎となる Lagrange 補間公式について述べよう [4]. ある未知の関数 $f(x)$ があるとしよう. この関数の n 個の点でその値が知られているときに, この n 点でこの未知の関数 $f(x)$ と値が一致する多項式 $L_n[f](x)$ を考え^{*3}, その具体的な形を求めてみよう.

$n-1$ 次の多項式 $L_n[f](x)$

$$L_n[f](x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (2.1)$$

を n 個の点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ における $f(x)$ の関数値 $f_1, f_2, \dots, f_n$ (ここで, $f_k := f(x_k)$ である) で表すことを考えよう. (2.1) の補間多項式を

$$L_n[f](x) = \sum_{k=1}^n f_k L_k(x) \quad (2.2)$$

の形に仮定する. ここで, $L_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) は $n-1$ 次の多項式とする. いま

$$L_n[f](x_k) = f_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

の条件を満たす (2.2) の $L_k(x)$ を求めよう. (2.3) の表式を用いて (2.2) を書き下せば,

$$\begin{aligned} f_1 L_1(x_1) + f_2 L_2(x_1) + \cdots + f_n L_n(x_1) &= f_1 \\ f_1 L_1(x_2) + f_2 L_2(x_2) + \cdots + f_n L_n(x_2) &= f_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_1 L_1(x_n) + f_2 L_2(x_n) + \cdots + f_n L_n(x_n) &= f_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる. これらの式で $L_k(x)$ が

$$L_k(x_j) = \delta_{kj} \quad (2.5)$$

となるような多項式であれば, (2.4) は満たされる. (2.5) の右辺の δ_{kj} は Kronecker のデルタの記号で $k = j$ のとき $\delta_{kj} = 1$ であり, $k \neq j$ のとき $\delta_{kj} = 0$ である.

(2.5) から $L_k(x)$ は相異なる $(n-1)$ 個の零点 $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ をもつから

$$L_k(x) := K(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) \quad (2.6)$$

と表される. (2.5) から $j = k$ のときには $L_k(x_k) = 1$ であるから,

$$L_k(x_k) = K(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n) = 1 \quad (2.7)$$

となるので

$$K = \frac{1}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (2.8)$$

が得られる. したがって

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (2.9)$$

^{*3} この多項式 $L_n[f](x)$ を関数 $f(x)$ に対する n 点補間多項式という. この記号は一見難しそうな印象を与えるが, 中味が難しいわけではない. $L_n[f](x)$ は $n-1$ 次の多項式であるから, 具体的には (2.1) のように表せる.

となる．ここで

$$F(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (2.10)$$

とすれば，(2.8) からは K は

$$K = \frac{1}{F'(x_k)} \quad (2.11)$$

と表される．ここで，プライム' は x についての微分を表す．したがって，(2.9) の $L_k(x)$ は

$$L_k(x) = \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} \quad (2.12)$$

と表されるから*⁴，(2.12) を (2.2) へ代入して

$$L_n[f](x) = \sum_{k=1}^n \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} f_k \quad (2.13)$$

が得られる．これが $(n - 1)$ 次の Lagrange 補間公式であり*⁵， $f(x)$ が $(n - 1)$ 次の多項式であるときには近似式ではなく， $f(x)$ の関数値を厳密に与えている．

3 Gauss 数値積分公式

表題の Gauss 数値積分公式に限らず，一般に数値積分公式はその被積分関数 $f(x)$ を近似的に表現する補間公式を積分することにより求められる．Gauss 積分公式は被積分関数 $f(x)$ を Lagrange 補間公式 $L_n[f](x)$ で近似し，この Lagrange 補間多項式を積分することによって得られる．

被積分関数を $f(z)$ として，積分

$$I := \int_a^b f(z) dz \quad (3.1)$$

を考えよう．(3.1) の積分区間は $[a, b]$ であるが，この積分区間を Legendre の多項式 $P_n(x)$ の定義域である， $[-1, 1]$ に変換したい．そのためにつぎのような変数変換

$$z = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x \quad (3.2)$$

を行う*⁶．

$$dz = \frac{b-a}{2} dx \quad (3.3)$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(z) dz \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} J \end{aligned} \quad (3.4)$$

*⁴ (2.11),(2.12) の導出は付録 1 に示す．

*⁵ (2.13) は難しそうに見えるので， $L_n[f](x)$ で $n = 3$ のときを具体的に考えてみよう．まず (2.13) を和の記号 Σ を用いないで書き表し，それぞれの項に $F(x)$ の定義を代入して，整理すれば

$$L_3[f](x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f_3 \quad (2.14)$$

が得られる．(2.13) はちょっと手を動かして書き下してみれば，それほど難しくないことが分かる．

*⁶ この変換の導出は付録 2 に示す．ここでは $z = a$ のときに $x = -1$ となり， $z = b$ のときに $x = 1$ となることを確認しておく．

そこで

$$J := \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (3.5)$$

が求められればよい．(3.5) に Lagrange 補間公式 (2.13) を用いれば，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 L_n[f](x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{x - x_k} dx \\ &= \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

で与えられる．ここで w_k は

$$w_k = \frac{1}{F'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{x - x_k} dx \quad (3.7)$$

で表され， x_k ，($k = 1, 2, \dots, n$) は n 次の Legendre の多項式 $P_n(x)$ の零点，すなわち， $P_n(x) = 0$ を満たす n 個の解である．したがって，定積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(z) dz \\ &= \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

で与えられる．ここで，誤差は E_n

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(u), \quad |u| < 1 \quad (3.9)$$

で与えられる．

さて，誤差 E_n の導出は文献 [5] に譲って，ここでは (3.7) で与えられた重み w_k をもっと使いやすい形にしておこう．いま (3.6) の積分中に現れている $F(x)$ が Legendre の多項式 $P_n(x)$ と

$$P_n(x) = a_n F(x) \quad (3.10)$$

の関係にあるとき，(3.7) で表された w_k は

$$w_k = \frac{1}{P'_n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x - x_k} dx \quad (3.11)$$

となる．ここで a_n は $P_n(x)$ の n 次の係数である．ところで

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x_k - x} [P_n(x)P_{n-1}(x_k) - P_{n-1}(x)P_n(x_k)] dx = -\frac{2}{n} \quad (3.12)$$

という恒等式が成立しているが [6]， x_k は $P_n(x)$ の零点であるから， $P_n(x_k) = 0$ であり，(3.12) の積分の中の [] の中の第 2 項=0 である．したがって

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x - x_k} dx = \frac{2}{nP_{n-1}(x_k)} \quad (3.13)$$

であるので*7,

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{P'_n(x_k)} \frac{2}{nP_{n-1}(x_k)} \\ &= \frac{2(1-x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

が得られる．(3.14) の第 2 式を得るために

$$P'_n(x) = \frac{n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]}{1-x^2} \quad (3.15)$$

の関係を用いた [7]．もちろん，(3.14) では $P_n(x_k) = 0$ を用いている．

つぎに分点 x_k の求め方は文献 [8] に詳しく述べられているが，本文が自己完結的 (self-contained) であるように説明を付け加えておこう．

Legendre の多項式 $P_n(x)$ の零点の近似値は n が大きいときの漸近式

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right], \quad (n \geq 1, \epsilon \leq \theta \leq (\pi - \epsilon)) \quad (3.16)$$

によって求められる [9]．(3.16) で ϵ は $\epsilon > 0$ の 0 に近い数である．すなわち，

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] = 0 \quad (3.17)$$

から

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} = k\pi, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.18)$$

を満たす θ の値

$$\theta = \frac{(k - \frac{1}{4})\pi}{n + \frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

が得られ，したがって $P_n(\cos \theta)$ の零点 x_k の近似値 x_k^0 は

$$\begin{aligned} x_k^{(0)} &= \cos \left[\left(\frac{k - \frac{1}{4}}{n + \frac{1}{2}} \right) \pi \right] \\ &= \sin \left[\left(\frac{n + 1 - 2k}{2n + 1} \right) \pi \right], \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

と求められる．

実際の数値積分では，(3.20) の $P_n(x)$ の近似解を Newton 法の反復使用により補正したものを用いる．すなわち， $x_k^{(0)}$ から出発して

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{P_n(x_k^{(i)})}{P'_n(x_k^{(i)})} \quad (3.21)$$

によって近似解の精度を上げていき，与えられた，ある小さな正の数 ϵ に対して

$$|x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)}| = \left| \frac{P_n(x_k^{(i)})}{P'_n(x_k^{(i)})} \right| < \epsilon \quad (3.22)$$

*7 (3.12), (3.13) の導出は付録 2 に述べる．

となったときにこの反復を打ち切って、 $x_k^{(i+1)}$ を $P_n(x)$ の零点の値とする．この反復計算をするときに必要な $P_n(x), P'_n(x)$ の関数の値を求めるにはつぎの式を用いればよい．

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}[(n+1)xP_n(x) + n(xP_n(x) - P_{n-1}(x))] \\ P'_n(x) &= \frac{n}{1-x^2}[P_{n-1}(x) - xP_n(x)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

4 おわりに

以上、Gauss 数値積分公式の重みと分点の計算法について述べたが、Gauss 数値積分公式を用いて数値積分するときには、その重みと分点とは文献に与えられているものをデータとして読み込んで使うのが普通である [8], [10]．

分点数を増やして分点と重みをコンピュータで自動的に計算し、数値積分しようとする全区間を単一の積分区間として Gauss 数値積分することはもちろんできるが、実際には数値積分しようとする区間をいくつかに小区間に再分割して、それぞれの区間に 4 点または 8 点の Gauss の積分公式を用いるのがよい．特に、被積分関数がいくつかのピークを持っているようなときには、そのピークのところで区間を再分割してやると効果的である．

ここでは Gauss 数値積分の公式として Legendre 関数 $P_n(x)$ を用いた、いわゆる Legendre-Gauss 積分について述べたが、積分する区間が $(0, \infty)$ のときには Laguerre-Gauss 積分を、また $(-\infty, \infty)$ のときには Hermite-Gauss 積分を使うことができる．これらの Gauss 積分の一般論は多くの文献、たとえば、[5] に述べられている．

この論文を読んで、緒方秀教（当時愛媛大学講師，現電気通信大学教授）さんには助言と内容がわかりやすくなるようにとの多くの示唆をいただいたが、あまり有効にいかすことができなかった、おそまきながら御礼を申し上げます．

あわてて、付録を書いたので世戸さんからミスをたくさん指摘していただいた．ここで御礼を申し上げます．さらに、コンピュータソフトが進歩したおかげで数値積分や数値微分はソフトが勝手にやってくれるので Legendre 関数や Bessel 関数のような特殊関数をありがたがるのは私たちのような古代人だけだとの寸評までいただいたが、ブラックボックスを開いてみたいという好奇心があるのもわるくはないと思う．

5 付録

5.1 付録 1 (2.11), (2.12) の導出

この付録 1 では

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (2.10)$$

から、(2.11) と (2.12) を導く [11]．

(2.6) で $L_k(x)$ の係数 K を除いた部分を

$$g(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad (5.1)$$

と定義する．しかし、この関数 $g(x)$ には $(x - x_k)$ という因子がなくちょっと対称性がわるい．それでこの因子を付け加えたものを

$$F(x) := (x - x_k)g(x) \quad (5.2)$$

と定義する．これは (2.10) の $F(x)$ ともちろん同じ関数であるが， $F(x)$ は $(x - x_k)$ と $g(x)$ の積と考えるという視点を導入している．

$F'(x_k)$ を求めたいのだが，その前に $F'(x)$ を求める．

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x - x_k)'g(x) + (x - x_k)g'(x) \\ &= g(x) + (x - x_k)g'(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

である．ここで， $(x - x_k)' = 1$ であることを用いた．また $g'(x)$ の具体的な式を求めている．これは実際に求めたいのは $F'(x_k)$ であり，この第 2 項は $x - x_k$ の因子のために寄与しないから求める必要がない．それで $F'(x_k)$ は

$$F'(x_k) = g(x_k) = (x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) \quad (5.4)$$

となる．これで (2.11) が求められ，(2.12) が導出される．

5.2 付録 2 (3.2) の導出

(3.1) では積分区間が $[a, b]$ であるが，積分区間を Legendre の多項式の定義域である $[-1, 1]$ に変換したい．変数 z から変数 x に変数変換したいのだが，この変換の式として z が x の 1 次式であると仮定して，

$$z = \alpha + \beta x, \quad (\alpha, \beta : \text{定数}) \quad (5.5)$$

としよう．この変換で $z = a$ は $x = -1$ に対応し， $z = b$ は $x = 1$ に対応するとして，定数の α, β を求めればよい．

$z = a$ のとき $x = -1$ であるという条件から

$$a = \alpha - \beta \quad (5.6)$$

また $z = b$ のとき $x = 1$ であるという条件から

$$b = \alpha + \beta \quad (5.7)$$

が得られる．これを α, β について解けば，

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2} \\ \beta &= \frac{b-a}{2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

が得られるから，変数変換 (3.2) が求められる．

5.3 付録 3 (3.12) の導出

5.3.1 (3.12) の導出の手順

Gauss 数値積分の重みは (3.11) で与えられ，(3.12) が与えられると (3.11) を用いて定積分 (3.13) が求められる．ところが，このエッセイの元の版では (3.12) は [6] からの引用で証明をしていなかった．また [6] でも証明されていない．そして，うかつなことに私も (3.12) を証明することを考えもしなかった．だから，(3.12) を Christoffel-Darboux の恒等式を用いて導出しなければならない．これが残されていた，このエッセイの問題点であった．

つぎに，では (3.12) を導く手順はどうなるであろうか．そのことを以下にまず述べておく．それぞれの関係式の導出の詳細はその後に行う．

まず最初に，直交多項式の漸化式 (5.9) を導く．つぎに，これを用いて Christoffel-Darboux の恒等式 (5.29) を導く．そして，最後にこの恒等式を用いて (3.12) を導く．

5.3.2 直交多項式の漸化式

この小節は [12] にしたがって説明する.

(定理) $\{p_n(x)\}$ を直交多項式系とすると、漸化式

$$p_n(x) = (\alpha_n x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x), \quad (n \geq 1, p_{-1}(x) \equiv 0) \quad (5.9)$$

が存在して、この漸化式をみたす定数は $\alpha_n \neq 0, \beta_n, \gamma_n \neq 0$ である.

(証明) まず重み関数 $w(x)$ を用いて、内積を

$$(p_k, p_l) := \int_a^b w(x)p_k(x)p_l(x)dx \quad (5.10)$$

で定義する. ここで、もちろん $w(x), p_k(x), p_l(x)$ は区間 $[a, b]$ で定義された関数である.

$p_n(x)$ は n 次の直交多項式で、その最高次の係数を a_n とし、 $a_n \neq 0$ とする. そこで

$$\alpha_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad (\alpha_n \neq 0) \quad (5.11)$$

とおく. ここで、もちろん a_{n-1} は $p_{n-1}(x)$ の最高次の係数である.

このとき、

$$p_n(x) - \alpha_n x p_{n-1}(x) \quad (5.12)$$

をつくると、これは $(n-1)$ 次の直交多項式である. したがって

$$p_n(x) - \alpha_n x p_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k(x), \quad (c_k : \text{定数}) \quad (5.13)$$

と表すことができる.

この式と $p_j(x)$ との内積をつくれば、 $j < n-2$ のとき、右辺は

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k (p_k, p_j) = c_j (p_j, p_j), \quad (j < n-2) \quad (5.14)$$

となり、左辺は $(xp_l, p_j) = (p_l, xp_j)$ に注意すると

$$(p_n, p_j) - \alpha_n (xp_{n-1}, p_j) = -\alpha_n (p_{n-1}, xp_j), \quad (j < n-2) \quad (5.15)$$

となるが、 $xp_j(x)$ は $(j+1)$ 次の多項式であるから、 $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{j+1}(x)$ の線形結合で表され、 $(j+1) < n-1$ であるから、内積は $(p_n, p_j) = 0$ および $(p_{n-1}, xp_j) = 0$ となる. ところが、 $(p_j, p_j) \neq 0$ であるから、 c_j について

$$c_j = 0, \quad (j < n-2) \quad (5.16)$$

である. すなわち、(5.13) の右辺の係数が 0 でないのは $p_{n-1}(x)$ と $p_{n-2}(x)$ の項だけである. したがって、

$$p_n(x) - \alpha_n x p_{n-1}(x) = c_{n-1} p_{n-1}(x) + c_{n-2} p_{n-2}(x) \quad (5.17)$$

となる. $c_{n-1} := -\beta_n, c_{n-2} := -\gamma_n$ とおけば、

$$p_n(x) = (\alpha_n x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x) \quad (5.18)$$

を得る.

つぎに, β_n, γ_n の値を求めよう. まず $p_n(x)$ と $p_{n-1}(x)$ との内積をとれば,

$$0 = (p_n, p_{n-1}) = \alpha_n(xp_{n-1}, p_{n-1}) - \beta_n(p_{n-1}, p_{n-1}) \quad (5.19)$$

であるから

$$\beta_n = \alpha_n \frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} \quad (5.20)$$

と求められる.

また, $p_n(x)$ と $p_{n-2}(x)$ との内積をとれば,

$$0 = (p_n, p_{n-2}) = \alpha_n(xp_{n-1}, p_{n-2}) - \gamma_n(p_{n-2}, p_{n-2}) \quad (5.21)$$

であるから

$$\gamma_n = \alpha_n \frac{(xp_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})} \quad (5.22)$$

と求められる.

元の漸化式 (5.18) で, $n \rightarrow n-1$ とした式が成り立つから

$$p_{n-1}(x) = (\alpha_{n-1}x - \beta_{n-1})p_{n-2}(x) - \gamma_{n-1}p_{n-3}(x) \quad (5.23)$$

である. この式と $p_{n-1}(x)$ との内積をとれば,

$$(p_{n-1}, p_{n-1}) = \alpha_{n-1}(p_{n-1}, xp_{n-2}) = \alpha_{n-1}(xp_{n-1}, p_{n-2}) \quad (5.24)$$

となる. これから

$$(xp_{n-1}, p_{n-2}) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}(p_{n-1}, p_{n-1}) \quad (5.25)$$

が得られる. これを (5.22) の γ_n の右辺に代入すれば,

$$\gamma_n = \alpha_n \frac{(xp_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})} = \frac{\alpha_n(p_{n-1}, p_{n-1})}{\alpha_{n-1}(p_{n-2}, p_{n-2})} \neq 0 \quad (5.26)$$

と求められる.

まとめれば, 関数系 $\{p_n(x)\}$ を直交化するためには, まず $p_0(x)$ を定め ($p_0(x) = 1$ ととればよい), これと $p_{-1}(x) \equiv 0$ とから, 漸化式

$$p_n(x) = (\alpha_n x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x), (n \geq 1, p_{-1}(x) \equiv 0) \quad (5.27)$$

を用いて, $p_n(x)$ を順次求めればよい.

内積 (p_k, p_k) を記号 $\lambda_k := (p_k, p_k)$ を用いて表せば, $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \beta_n &= \frac{\alpha_n(xp_{n-1}, p_{n-1})}{\lambda_{n-1}} \\ \gamma_n &= \frac{\alpha_n \lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1} \lambda_{n-2}} \neq 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

と少しだけコンパクトに表される.

5.3.3 Christoffel-Darboux の恒等式

この小節は [13] にしたがって説明するが, [12] の記号にしたがった細かな変更を行っている.

(Christoffel-Darboux の恒等式)

$p_n(x)$ を直交多項式とすると, $x \neq y$ に対してつぎの式が成立する.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\lambda_k} = \frac{1}{\alpha_n \lambda_{n-1}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x - y} \quad (5.29)$$

ここで, $\lambda_k := (p_k, p_k)$ であり, $\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ である. また a_n は直交多項式 $p_n(x)$ の最高次の係数である.

(証明) 漸化式 (5.9) を用いれば,

$$\begin{aligned} & p_k(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_k(y) \\ &= [(\alpha_k x - \beta_k)p_{k-1}(x) - \gamma_k p_{k-2}(x)]p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)[(\alpha_k y - \beta_k)p_{k-1}(y) - \gamma_k p_{k-2}(y)] \\ &= [(\alpha_k x - \beta_k) - (\alpha_k y - \beta_k)]p_{k-1}(x)p_{k-1}(y) - \gamma_k [p_{k-2}(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_{k-2}(y)] \\ &= \alpha_k (x - y)p_{k-1}(x)p_{k-1}(y) - \gamma_k [p_{k-2}(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_{k-2}(y)] \end{aligned} \quad (5.30)$$

(5.28) の γ_k から

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k \lambda_{k-1}}{\alpha_{k-1} \lambda_{k-2}} \quad (5.31)$$

であるから, (5.30) の左辺に $\frac{1}{\alpha_k \lambda_{k-1}}$ をかけたものを S_k と定義する. すなわち,

$$S_k := \frac{1}{\alpha_k \lambda_{k-1}} [p_k(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_k(y)] \quad (5.32)$$

とする.

(5.30) の右辺の第 2 項を $\alpha_k \lambda_{k-1}$ でわれば, この第 2 項は

$$S_{k-1} := \frac{1}{\alpha_{k-1} \lambda_{k-2}} [p_{k-1}(x)p_{k-2}(y) - p_{k-2}(x)p_{k-1}(y)] \quad (5.33)$$

となる. (5.30) の最右辺では第 2 項の前の負号を用いて [] 中の第 1 項と第 2 項を入れ替えて S_k の定義と一致させている. したがって, この右辺の第 2 項を左辺に移行すれば, 左辺は

$$S_k - S_{k-1} \quad (5.34)$$

となる. このとき右辺の第 1 項は両辺を $\alpha_k \lambda_{k-1}$ でわっているから,

$$\frac{1}{\lambda_{k-1}} (x - y)p_{k-1}(x)p_{k-1}(y) \quad (5.35)$$

となる. したがって

$$S_k - S_{k-1} = \frac{1}{\lambda_{k-1}} (x - y)p_{k-1}(x)p_{k-1}(y) \quad (5.36)$$

が得られる.

(5.36) で $k = 1, 2, \dots, n$ とおけば,

$$\begin{aligned}
k = 1: S_1 - S_0 &= \frac{1}{\lambda_0}(x-y)p_0(x)p_0(y) \\
k = 2: S_2 - S_1 &= \frac{1}{\lambda_1}(x-y)p_1(x)p_1(y) \\
k = 3: S_3 - S_2 &= \frac{1}{\lambda_2}(x-y)p_2(x)p_2(y) \\
&\dots \\
k = n-1: S_{n-1} - S_{n-2} &= \frac{1}{\lambda_{n-2}}(x-y)p_{n-2}(x)p_{n-2}(y) \\
k = n: S_n - S_{n-1} &= \frac{1}{\lambda_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

(5.37) の辺々を加えれば

$$S_n - S_0 = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\lambda_k} \tag{5.38}$$

が得られる．いま $S_0 = 0$ を用いれば,

$$S_n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\lambda_k} \tag{5.39}$$

となる．一方, (5.32) で $k = n$ とおけば,

$$S_n = \frac{1}{\alpha_n \lambda_{n-1}} [p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)] \tag{5.40}$$

である．これは (5.39) の左辺である．

(5.39) と (5.40) のそれぞれの右辺を等しいとおいて、両辺を $x-y$ でわれば、Christoffel-Darboux の恒等式 (5.29) が成立する．

5.3.4 (3.12) の導出

[13] によれば、Gauss 数値積分の一般論が Christoffel-Darboux の恒等式によって説明できる^{*8}．また [14] には Legendre-Gauss 数値積分の重み (3.14) が Christoffel-Darboux の恒等式によって導くことができるとの注釈がある．しかし、詳しい説明はない^{*9}．そこで、この小節では Legendre-Gauss 積分に特化して、説明をしてみよう．

(5.29) から

$$\frac{1}{x-y} [p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)] = \alpha_n \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\lambda_k} \tag{5.41}$$

(5.41) の両辺を積分変数 x について Legendre の多項式の定義域 $[-1, 1]$ で積分すれば,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x-y} [p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)] dx = \alpha_n \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(y)}{\lambda_k} \int_{-1}^1 p_k(x) dx \tag{5.42}$$

となる．ここで y を $p_n(x) = 0$ の零点 x_k にとり、かつ右辺の積分を計算して、右辺全体が $2/n$ となれば、(3.12) が導出できる．

^{*8} [13] の説明はそれほど難しくはないので、いつかその解説をしたい．

^{*9} また [15] にある重みの式 (3.72) は分子にあるべき因子 2 が落ちている．

まず (5.42) の右辺の積分を計算すれば,

$$\int_{-1}^1 p_k(x) dx = \int_{-1}^1 p_0(x) p_k(x) dx = 2\delta_{k0}, \quad (p_0(x) = 1) \quad (5.43)$$

である. ここで直交関数系 $p_n(x)$ として Legendre の多項式 $P_n(x)$ の直交関係

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (5.44)$$

であることを用いた.

(5.43) から, (5.42) の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(y)}{\lambda_k} \int_{-1}^1 p_k(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(y)}{\lambda_k} \cdot 2\delta_{k0} \\ &= \frac{2p_0(y)}{\lambda_0}, \quad (p_0(y) = 1) \\ &= \frac{2}{\lambda_0} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

ここで λ_k は Legendre の多項式 $P_k(x)$ の内積 $\lambda_k := (P_k(x), P_k(x))$ (すなわち (5.44) の δ_{nm} の前の係数) であるから,

$$\lambda_k = \frac{2}{2k+1} \quad (5.46)$$

であり, $\lambda_0 = 2$ となることを用いた.

(5.42) の右辺の和の前の定数を評価しなければならない.

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (5.47)$$

であり, この a_n は Legendre の多項式 $P_n(x)$ の最高次の係数であり,

$$a_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n!} \quad (5.48)$$

であるから,

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{n} \quad (5.49)$$

となり,

$$\alpha_n \lambda_{n-1} = \frac{2}{n} \quad (5.50)$$

となる.

したがって, (5.42) の右辺に (5.50) と (5.45) を代入すれば, (3.12) が導かれる.

5.4 付録 4 Gauss 数値積分公式の作り方

本文では「Gauss 数値積分公式がどういう意図でどのようにつくられるか」を述べていないので, この付録ではその点について述べておこう*10.

*10 この付録は緒方秀教さんのご教示によったと思われるが, 今では定かではない.

数値積分の公式

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E, \quad (w(x) \geq 0, E: \text{誤差}) \quad (5.51)$$

を考えよう。すなわち、重み関数 $w(x)$ を含む関数 $f(x)$ の積分を右辺の $f(x_i)$ の 1 次結合で近似する数値積分公式を考える。(5.51) の右辺に n 個の重み w_i と n 個の分点 x_i とをあわせて、 $2n$ 個のパラメータがある。このパラメータを上手に選んでできるだけ高次の多項式 $f(x)$ の積分が右辺の値と一致するようにしたい。このような考え方でつくられたのが Gauss 数値積分公式であり、最高次の多項式の次数は $(2n-1)$ である^{*11}。

以下では、直交多項式を用いた Gauss 数値積分公式の導き方を述べよう。そのための準備として、いくつかの直交多項式の性質を調べておく。区間 $[a, b]$ で定義される、 $w(x)$ を重み関数とする n 次多項式 $\phi_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad (k \neq n) \quad (5.53)$$

$$\int_a^b w(x)[\phi_k]^2 dx = r_k \quad (5.54)$$

をみたすとき、 $\phi_n(x)$ を n 次直交多項式という。

一般に $m < n$ の m 次多項式 $g_m(x)$ は ϕ_k , $(k = 0, 1, 2, \dots, m)$ の 1 次結合で

$$g_m(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_m\phi_m(x) \quad (5.55)$$

と表せるから、(5.53) から

$$\int_a^b w(x)g_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad (m < n) \quad (5.56)$$

が成り立つ。すなわち、 $n-1$ 次以下の多項式は $\phi_n(x)$ と直交する。

ここで、 $f(x)$ が $(2n-1)$ 次の多項式であるとき、

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (5.57)$$

が近似ではなく厳密に成り立つように、分点 x_i と重み w_i をきめることを考えよう^{*12}。

$w(x)$ を重み関数にもつ n 次の直交多項式を $\phi_n(x)$ として、分点 x_i はこの直交多項式の零点であるとする。すなわち、

$$\phi_n(x_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.58)$$

この直交多項式の n 個の零点 x_i で、 $(2n-1)$ 次の多項式 $f(x)$ と一致する $(n-1)$ 次の多項式を $L_{n-1}[f](x)$ と表せば

$$f(x) - L_{n-1}[f](x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)Q_{n-1}(x) \quad (5.59)$$

と表せる。すなわち、 $f(x) - L_{n-1}[f](x)$ は $\phi_n(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ でわりきれ、商 $Q_{n-1}(x)$ は $(n-1)$ 次の多項式である。(5.59) を $f(x)$ について表せば、

$$f(x) = L_{n-1}[f](x) + \phi_n(x)Q_{n-1}(x) \quad (5.60)$$

^{*11} (5.51) の右辺のパラメータは $2n$ 個あるので、この個のパラメータで決定できる最高次の多項式は $(2n-1)$ 次である。というのは $(2n-1)$ 次の多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-1}x^{2n-1} \quad (5.52)$$

と表すことができ、 $2n$ 個の未定の係数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ をもつからである。

^{*12} もちろん $f(x)$ が $2n-1$ 次の多項式ではない一般の関数であるときに下の (5.61) の数値積分公式を用いるのが普通である。「 $f(x)$ が $(2n-1)$ 次の多項式のときに Gauss 数値積分公式が厳密に成立する」というのは分点 x_i と重み w_i を決めるための条件にすぎない。

となる．この $f(x)$ の式 (5.60) を (5.57) へ代入すれば

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)f(x)dx &= \int_a^b w(x)[L_{n-1}[f](x) + \phi_n(x)Q_{n-1}(x)]dx \\ &= \int_a^b w(x)L_{n-1}[f](x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)\end{aligned}\tag{5.61}$$

となる．ここで，直交関係 (5.56) を用いた．一方， $(n-1)$ 次多項式 $L_{n-1}[f](x)$ は $\phi_n(x) = 0$ をみたす x_i , $(1, 2, \dots, n)$ で $f(x)$ と一致することから Lagrange 補間によって

$$L_{n-1}[f](x) = \sum_{i=1}^n \frac{F(x)}{F'(x_i)(x-x_i)} f(x_i)\tag{5.62}$$

と表せる．ここで

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\tag{5.63}$$

である．(5.62) を (5.61) へ代入すれば

$$\int_a^b w(x) \left[\sum_{i=1}^n \frac{F(x)}{F'(x_i)(x-x_i)} f(x_i) \right] dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)\tag{5.64}$$

となる．(5.64) で両辺の $f(x_i)$ の係数を比較すれば

$$w_i = \frac{1}{F'(x_i)} \int_a^b \frac{w(x)F(x)}{x-x_i} dx, \quad (i=1, 2, \dots, n)\tag{5.65}$$

が得られる．したがって，(5.61) をみたす分点 x_i と重み w_i とはそれぞれ (5.58) と (5.65) から求めることができる．

以上に述べられたところでは (5.61) は $f(x)$ が $(2n-1)$ 次以下の多項式であるとき厳密に成り立つ式であることの理由がはっきりしないので，要点をまとめておこう．

1. 関数 $f(x)$ に対する n 点補間多項式 $L_n[f](x)$ は， $f(x)$ が $(n-1)$ 次以下の多項式の場合には $f(x)$ の厳密な関数値を与える．

$$f(x) = L_n[f](x)\tag{5.66}$$

2. 前項の補間多項式にもとづく数値積分公式

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)\tag{5.67}$$

は $f(x)$ が $(n-1)$ 次以下の多項式の場合には厳密な積分値を与える．

3. 標本点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を零点にもつ多項式 $F(x)$ として，特に n 次の直交多項式系 $\phi_n(x)$ をとると，数値積分公式 (5.67) は $f(x)$ が $2n-1$ 次以下の多項式に対して厳密な積分値を与える．

余話

2005 年，私の退職した年の 1 月に応用数理学会の環瀬戸シンポが愛媛大学で行われたが，そのときに実行委員長だった天野要先生の要請で「計算物理学とともに」というタイトルで話をさせてもらった．これはその中で話したことの記録の一部の再録である．

この研究（ニュートリノによる K 中間子の生成）のために Gauss 数値積分の公式で積分するプログラムを野田（松太郎）さんがつくってくれた．ところが，その重みを与える式がどのようにして導かれたかがわからない．当の野田さんに聞いても昔証明したが，忘れたということでとりつく島がない．

いまだったら，私にでも理解できる適当な数値解析の本があり，その重みの導出も載っている．しかし，そのころにはまだ私の理解できるような本は手元になかった．しかたがないので，式を黒板に書いて 1 週間か 10 日くらい毎日考えた．岩波の『数学公式集 III』の特殊関数の Legendre 関数のところと首っぴきで考えたところ，やっと直交多項式を Legendre 関数にとった，Gauss-Legendre の場合の重みの式を証明できた．

後で山本哲朗先生（数学者；数値解析の専門家）に会ったときに聞いたら「その一般論ができています」と一言のもとに言われてしまったが，でも自分で証明できたときのうれしさは original な仕事ではないが，何物にも代え難い．森口さんの『数値計算工学』（岩波書店）の補注にも出て来る Christoffel-Darboux の恒等式を使って本質的には証明したことになっているのだと思うが，その証明を比較検討したことはまだない．

このエッセイの付録で示したようにようやく Christoffel-Darboux の恒等式を使って Legendre-Gauss 数値積分の公式の重みが導出できたわけである．なんとのおんびりした私であろうか．

(2002.7.11)(2003.6.16 改訂)(2023.3.18 三訂)

参考文献

- [1] 矢野忠，歩行者のための Gauss 数値積分，研究と実践（愛数協）第 82 号（2002.12）29-32
- [2] 矢野忠，『数学散歩』（国土社，2005）179-189
- [3] 塩原正雄，江沢康生，矢野 忠，新居浜工業高等専門学校紀要，第 18 巻（1982.1）18-31
- [4] 森口繁一，高田勝，『数値計算法 I』（岩波講座 現代応用数学 B13.I）（岩波書店，1958）54-58
- [5] 山本哲朗，『数値解析入門』（サイエンス社，1976）94-96
- [6] 森口，宇田川，一松，『数学公式 III』（岩波書店，1960）114
- [7] 森口，宇田川，一松，『数学公式 III』（岩波書店，1960）107
- [8] 山内二郎，宇野利雄，一松 信 『電子計算機のための数値計算法 III』（培風館，1972）280-301
- [9] 森口，宇田川，一松，『数学公式 III』（岩波書店，1960）106
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun ed., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965) 916-918
- [11] 小澤一文，『数値計算法』第 2 版（共立出版，1996）73, 134-135（演習問題 5 章 2 の解答）
- [12] 伏見康治，赤井逸，『直交関数系』増補版（共立出版，1987）40-41
- [13] 森正武，『数値解析』第 2 版（共立出版，2002）140-142
- [14] 森口繁一，『数値計算工学』（岩波書店，1999）95
- [15] 森口繁一，『数値計算工学』（岩波書店，1999）79

編集後記

2023 年もすでに 3 月 15 日となった。ついこの間新年を迎えたと思っていたのに、それであわてて 13 巻 1 号の編集にとりかかった。

今号はいつも通りというべきかどうか、世戸さんと私の二つの寄稿となってしまった。事前の予定では秋葉さんの論文を中にはさんだ編集をするつもりであったが、都合で今号ではなく次号に掲載することにした。これは別に意図したことではなく、たまたまそうなっただけである。

いつもながら、世戸さんの微分方程式を解くときの変数変換のしかたに目を見張っている。こういう才能は私にはないと思うからである。今回は世戸さんのこのような才能にもかかわらず、問題が複雑だったために解の明解な見通しは得られなかったようだが、それでもいつもその才能には目を見張っている。

数値解を見て思ったことは初期値の取り方でカオス現象は起きないのかなということにむしろ関心が生じた。図 3 と図 4 の 2 つの初期値についてはカオス現象は起っていないようだが。

私のレーザー・プリンターに問題が生じたために、3 月発行予定の号の発行が遅れ気味になっている。しかし、2 号も用意ができれば、続けて発行するつもりである。

(矢野 忠)