

数学・物理通信

13 卷 2 号 2023 年 3 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2023 年 3 月 31 日

目次 (Contents)

1. 3次元空間内を動くばね振子	世戸憲治	2
2. 電磁気法則の共変性 — 4元ポテンシャル表示 —	秋葉 敏男	11
3. Gauss 数値積分への補遺	矢野 忠	21
4. 編集後記	世戸憲治	27
1. Spring Pendulum Moving in a Three-Dimensional Space	Kenji SETO	2
2. Covariant Property of Electromagnetic Law — Four-Potential Representation —	Toshio AKIBA	11
3. Addendum to Gaussian Quadrature	Tadashi YANO	21
4. Editorial Comments	Kenji SETO	27

3 次元空間内を動くばね振子

世戸 憲治 *

Spring Pendulum Moving in a Three-Dimensional Space

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「水平面内を回転するばね振子 (2)」(『数学・物理通信』13 巻 1 号) では錘が水平面内で振動する 2 自由度のばね振子を扱った。今回はこれをさらに拡張して空間内を 3 次的に動くばね振子を考える。しかし、方程式が難しくなりすぎて、実際に解析的に解けたのは、ばねの自然長がゼロという特別の場合だけである。この問題がいかに難解な問題であるかを検討していく。

2 方程式の導入

図 1 に示すように、自然長 ℓ , ばね定数 k のばねがあり、このばねの一端は固定し、他端に質量 m の錘 M をつける。このばねの固定点を原点として、水平面内に x, y 軸をとる。また錘に作用する重力は通常下向きにとるが、ここでは座標の取り方が分かりやすいよう z 軸を上向きにとるので、錘の重力は z 軸の正方向、つまり、上向き方向にとることにする。このばね振子が振動しているときの錘の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$, またその大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。このときばねが錘に作用する力は $-k(r - \ell)$ となるので、錘の運動方程式は、重力加速度を g , また、 $\mathbf{r}$ 方向, z 方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ として、

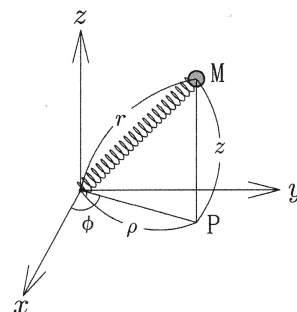


図 1 3 次元のばね振子

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k(r - \ell) \mathbf{e}_r + mg \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

と書かれる。これは成分で表すと、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ として、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{r - \ell}{r} x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{r - \ell}{r} y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k \frac{r - \ell}{r} z + mg \quad (2.2)$$

となる。先に述べたとおり、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ なので、これは 3 変数 x, y, z に関する 3 元連立微分方程式となる。しかし、この方程式を一般的に扱うのはあまりに難しすぎる。

* 北海学園大学名誉教授

運動方程式を表すもう一つの方法として、円筒座標を用いる方法を考えてみる．図 1 に示すように質点の位置 M から xy -面に下ろした垂線の足を点 P とし、MP の長さを z 、原点 O から P までの距離を $\rho (= \sqrt{x^2 + y^2})$ 、直線 OP と x 軸がなす角を $\phi (= \arctan(y/x))$ とする．また、OP 方向、 ϕ が増加する方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ と書くことにする．このとき錘の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

と表せる．ここで挙げた単位ベクトルのうち、 $\mathbf{e}_z$ は一定のベクトルであるが、 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ は質点の動きに合わせて動くベクトルなので、これらの時間微分がどうなるかを調べておく必要がある． x, y 方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ とすると、 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ は

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \quad (2.4)$$

と表される．これを時間 t で微分すると、

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = -\sin \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_x + \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_y = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\cos \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_x - \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_y = -\frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\rho \quad (2.5)$$

となる．これを用いて、 $\mathbf{e}_\rho$ の 2 階微分は、

$$\frac{d^2\mathbf{e}_\rho}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \mathbf{e}_\phi - \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \mathbf{e}_\rho \quad (2.6)$$

と表される．これらの結果から、(2.3) 式の $\mathbf{r}$ を時間で 2 度微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2\rho}{dt^2} \mathbf{e}_\rho + 2\frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi + \rho \left[\frac{d^2\phi}{dt^2} \mathbf{e}_\phi - \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \mathbf{e}_\rho \right] + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z \\ &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) \right] \mathbf{e}_\phi + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる．また、方程式 (2.1) に表れる $\mathbf{e}_r$ は (2.3) 式を用いると、

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\rho}{r} \mathbf{e}_\rho + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z \quad (2.8)$$

となるので、方程式 (2.1) をこの円筒座標の成分に分解すると、

$$m \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] = -k \frac{r-\ell}{r} \rho, \quad \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -k \frac{r-\ell}{r} z + mg \quad (2.9)$$

となる．この第 1 式左辺の括弧中の第 2 項は xy -平面での遠心力を表す項である．また、この第 2 式の右辺がゼロになることは円筒座標を用いた効果で、これは xy -平面で見た面積速度一定、あるいは、角運動量保存の法則に相当し、以後、

$$\rho^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{Const.} \equiv \frac{v_0^2}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

と置くことにする．ここに、 v_0 は速度の次元を持つ定数、また、 ω_0 は角速度の次元を持つ定数で、この第 2 式で定義する．わざわざ、分母にこの ω_0 を付けたのは後の式をきれいにするためである．これを用いると (2.9) 第 1 式に含まれる $d\phi/dt$ は ρ を用いて表され、この第 1 式と第 3 式は

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{v_0^4}{\omega_0^2 \rho^3} = -\omega_0^2 \frac{r-\ell}{r} \rho, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_0^2 \frac{r-\ell}{r} z + g, \quad (2.11)$$

となる。さらにここでの r は、

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.12)$$

となるので、この (2.11) 式は ρ と z に関する 2 元連立微分方程式となる。 (2.2) 式の 3 元連立微分方程式よりは少し簡単になるが解析的に解くにはまだ難しいところがある。

3 ばねの自然長 ℓ がゼロのときの解

方程式 (2.11) が最も解きやすくなるのは、 $\ell = 0$ の場合である。このときは方程式から r が消えてしまうので、連立しない方程式になるからである。しかし、ばねの自然長がゼロのばねなどというものは現実には存在しないが、理想的に考えるとまったく不可能という訳でもない。すなわち、質量が無視できる一端が閉じた筒を用意し、この中にばねを入れ、ばねの一端を筒の閉じた方に固定し、ばねの他端に錘を付ける。ばねが自然長にあるときの筒の位置を原点周りに自由に回転できるように、筒を固定する。これで形式的に自然長ゼロのばねができる。このときの方程式は、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{v_0^4}{\omega_0^2\rho^3} = -\omega_0^2\rho, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_0^2z + g \quad (3.1)$$

と、分離した 2 本の方程式となる。

簡単な z の方から解くと、

$$z(t) = z_0 \sin(\omega_0 t + \delta_z) + \frac{g}{\omega_0^2} \quad (3.2)$$

となる。ここに、 z_0, δ_z は積分定数である。

一方、 ρ の方程式は、時間微分に Newton 流の記号も動員して、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} = \dot{\rho} \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} \quad (3.3)$$

と変形してから方程式に代入し、変数分離して積分形にすると、

$$\int \dot{\rho} d\dot{\rho} = \int \left(\frac{v_0^4}{\omega_0^2\rho^3} - \omega_0^2\rho \right) d\rho \quad (3.4)$$

となり、この積分を実行すると、

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{v_0^4}{\omega_0^2\rho^2} + \omega_0^2\rho^2\right] + V_0^2 \quad (3.5)$$

となる。ここに、最後に付く項 V_0^2 は積分定数で、 V_0 は速度の次元を持つ。なお、この V_0 は (2.10) 式のところで定義した小文字の v_0 とは異なるもので、[相加平均] $\geq$ [相乗平均] を用いると、 $[v_0^4/(\omega_0^2\rho^2) + \omega_0^2\rho^2]/2 \geq v_0^2$ となるので、この式の右辺が正定値になるためには、この V_0 は v_0 に等しいか、それより大きくなければならない。これから $\dot{\rho}$ を求め、さらに変数分離して積分形にすると、

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{-\frac{v_0^4}{\omega_0^2\rho^2} - \omega_0^2\rho^2 + 2V_0^2}} = \int dt \quad (3.6)$$

となる。この左辺の積分は、分母分子に ρ を掛けてから、積分変数を ρ から $\xi = \rho^2$ に変換すると積分が実行可能となり、結果として

$$\rho(t) = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{V_0^2 + \sqrt{V_0^4 - v_0^4} \sin(2(\omega_0 t + \delta_\rho))} \quad (3.7)$$

という解が得られる．ここに， δ_ρ は積分定数で，(3.2) 式に含まれる δ_z とは一般に異なる．

最後に， ϕ を時間の関数として求めておく．これは，(2.10) 式と (3.7) 式から，

$$\phi = \frac{v_0^2}{\omega_0} \int \frac{dt}{\rho^2} = v_0^2 \omega_0 \int \frac{dt}{V_0^2 + \sqrt{V_0^4 - v_0^4} \sin(2(\omega_0 t + \delta_\rho))} \quad (3.8)$$

となり，この積分を実行すると，

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{V_0^2 \tan(\omega_0 t + \delta_\rho) + \sqrt{V_0^4 - v_0^4}}{v_0^2}\right) + \delta_\phi \quad (3.9)$$

と求められる． δ_ϕ は積分定数である．特に， $V_0 = v_0$ のときは，(3.7) とこの式から

$$\rho(t) \equiv \frac{V_0}{\omega_0}, \quad \phi(t) = \omega_0 t + \delta_\rho + \delta_\phi \quad (3.10)$$

となる．これは半径 V_0/ω_0 の円筒上を，(3.2) 式の z にしたがって上下方向に振動しながら一定角速度 ω_0 で回転していく運動になる．

4 $\ell = 0$ の場合を (x, y, z) 座標系で見ると

これまで，円筒座標を用いて解析してきたが， $\ell = 0$ の場合を解析するのであれば，わざわざ円筒座標を用いるまでもなく，(2.2) 式の (x, y, z) 座標系で解析する方が簡単にできる．このときの方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz + mg \quad (4.1)$$

となる．これは分離した方程式なので簡単に解け，(2.10) 式の ω_0 を用いて，

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \delta_x), \quad y(t) = y_0 \sin(\omega_0 t + \delta_y), \quad z(t) = z_0 \sin(\omega_0 t + \delta_z) + \frac{g}{\omega_0^2} \quad (4.2)$$

と解かれる．ここに， $x_0, y_0, z_0, \delta_x, \delta_y, \delta_z$ は積分定数である．この式で $\rho^2 = x^2 + y^2$ を計算してみると，

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta_x) + y_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta_y) \\ &= x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha + \beta) + y_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha - \beta), \quad \alpha = \frac{\delta_x + \delta_y}{2}, \quad \beta = \frac{\delta_x - \delta_y}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

と α, β を定義しておき，さらに，三角関数の加法定理を使って，

$$\begin{aligned} &= x_0^2 \left[\sin(\omega_0 t + \alpha) \cos \beta + \cos(\omega_0 t + \alpha) \sin \beta \right]^2 + y_0^2 \left[\sin(\omega_0 t + \alpha) \cos \beta - \cos(\omega_0 t + \alpha) \sin \beta \right]^2 \\ &= (x_0^2 + y_0^2) \left[\cos^2 \beta \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2 \beta \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \right] \\ &\quad + 2(x_0^2 - y_0^2) \sin \beta \cos \beta \sin(\omega_0 t + \alpha) \cos(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (4.4)$$

となり，さらに倍角公式を用いて，

$$= \frac{1}{2} \left[(x_0^2 + y_0^2) + (x_0^2 - y_0^2) \sin(2\beta) \sin(2(\omega_0 t + \alpha)) - (x_0^2 + y_0^2) \cos(2\beta) \cos(2(\omega_0 t + \alpha)) \right] \quad (4.5)$$

となって、最後に三角関数の合成則を使用し、 ρ を求めると、

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{2}[(x_0^2 + y_0^2) + L^2 \sin(2(\omega_0 t + \alpha - \gamma))]} \quad (4.6)$$

という結果になる．ここに、 L^2 , γ を

$$L^2 = \sqrt{(x_0^2 - y_0^2)^2 \sin^2(2\beta) + (x_0^2 + y_0^2)^2 \cos^2(2\beta)} = \sqrt{x_0^4 + y_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 \cos(4\beta)} \quad (\leq x_0^2 + y_0^2),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{(x_0^2 + y_0^2) \cos(2\beta)}{(x_0^2 - y_0^2) \sin(2\beta)} \right] \quad (4.7)$$

と定義する．この (4.6) 式で求めた ρ は、(3.7) 式で求めた ρ と、パラメーターのとり方の違いはあるが、本質的に同じものである．ただし、円筒座標を用いた方が、物理的意味が理解しやすい．

5 ばねの自然長がゼロでない特別の場合

ばねの自然長 ℓ がゼロでない場合の方程式を一般的に解くことは、ほぼ不可能と考えられる．ここでは $\ell \neq 0$ の特別な場合として、 z 軸回りの角速度 $d\phi/dt$ が一定となる

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{Const.} \equiv \omega \quad (5.1)$$

の場合を考えてみよう．ただし、この ω はこれまで使ってきた (2.10) の ω_0 とは別物であるが、この (2.10) 式から ρ も一定値となるので、(2.9) の第 1 式は

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{r - \ell}{r} \quad (5.2)$$

となる．これから、 r が

$$r = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \ell \quad (5.3)$$

と決まる．ただし、この r が正で決まるために $\omega_0 > \omega$ を仮定する．また、このときの z は、(5.2) 式と (2.9) の第 3 式から

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z + g \quad (5.4)$$

となる．しかし、(2.12) 式の $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ から、 r と ρ が一定なら z も一定でなければならない．これから

$$z = \frac{g}{\omega^2} \quad (5.5)$$

と決まる．これは、ばねのできる円錐振子であるが、ばね自体は伸び縮みしないので、ばねを使った効果がまったくでない．

6 3次元の極座標を用いた場合の方程式

ここでは 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) を用いて方程式を表すとどのようなになるかを考えてみる．これら、 r, θ, ϕ 方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ とし、これらと、 x, y, z 系での単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ との関

係は

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y\end{aligned}\tag{6.1}$$

と表せる。これらを時間 t で微分すると,

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r + \cos \theta \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\rho\tag{6.2}$$

となる。ここに, $\mathbf{e}_\rho$ は (2.4) 式で定義するもので, x, y 系, および, r, θ 系で,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r\tag{6.3}$$

と表示される。これらを用いて, 単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ の 2 階微分を求めると,

$$\frac{d^2\mathbf{e}_r}{dt^2} = \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_\theta - \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[2 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \sin \theta \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] \mathbf{e}_\phi\tag{6.4}$$

を得る。これから, 質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の 2 階微分は,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2(r\mathbf{e}_r)}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + r \frac{d^2\mathbf{e}_r}{dt^2} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left((r \sin \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) \right] \mathbf{e}_\phi\end{aligned}\tag{6.5}$$

となる。これからばね振子の運動方程式

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k(r - \ell) \mathbf{e}_r + mg \mathbf{e}_z\tag{6.6}$$

は, 両辺を m で割ってから, (2.10) 式の $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, および, $\mathbf{e}_z$ を極座標系で表示した

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta\tag{6.7}$$

を用いて, 極座標系の成分に分解した形で書くと,

$$\begin{aligned}r \text{ 方向: } & \frac{d^2r}{dt^2} - r \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = -\omega_0^2(r - \ell) + g \cos \theta \\ \theta \text{ 方向: } & \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = -g \sin \theta \\ \phi \text{ 方向: } & \frac{d}{dt} \left((r \sin \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = 0\end{aligned}\tag{6.8}$$

となる。これは r, θ, ϕ に関する複雑怪奇な 3 元連立微分方程式で, 一般解を求めることはほとんど不可能であろう。このうち, r 方向左辺の $r(d\theta/dt)^2$ は θ 方向の回転に対する遠心力に由来するもの, $r \sin^2 \theta (d\phi/dt)^2$ は ϕ 方向の回転に対する遠心力の r 方向成分に由来するものである。また, θ 方向左辺の $r^2(d\theta/dt)$ は θ 方向回転の面積速度に関するもの, $r \sin \theta \cos \theta (d\phi/dt)^2$ は ϕ 方向回転における遠心力の θ 方向成分に関するものであ

る．さらに，最後の ϕ 方向左辺の $(r \sin \theta)^2 (d\phi/dt)$ は ϕ 方向回転の面積速度に関するものである．もっとも，これら 3 本の式は，(6.1) から (6.7) 式までの経過をたどらなくても，(2.9) 式で， $\rho = r \sin \theta$ ， $z = r \cos \theta$ と置き換えることで導くこともできる．

せっかく求めた方程式ではあるが，ここでは何の役にも立ちそうもない．しかし，問題の設定を変えることで将来何かの役に立つこともあるかもしれない．

《円錐振子の場合》

ここでは，この 3 次元極座標で表わした方程式の解として円錐振子が存在することを確認しておこう．初めに，

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{Const} = \omega \quad (6.9)$$

と仮定する．このとき，(6.8) の第 3 式から

$$r \sin \theta = \text{Const} \quad (6.10)$$

となるので，これを時間で 2 度微分すると，

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + r \left[-\sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0 \quad (6.11)$$

一方，(6.8) の第 1 式に $\sin \theta$ ，第 2 式に $\cos \theta$ を，それぞれ掛けてから，辺々を加えると，

$$\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \right] \sin \theta + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \cos \theta = -\omega_0^2 (r - \ell) \sin \theta \quad (6.12)$$

となるが，(6.11) 式を用いて，これを整理すると，

$$r \sin \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 (r - \ell) \sin \theta \quad (6.13)$$

という簡潔な式を得る．これは z 軸周りの半径 $r \sin \theta$ ，角速度 $d\phi/dt = \omega$ の回転運動による遠心力とばねの張力の水平成分が釣り合うという式である．この式の両辺を $\sin \theta$ 割ってから r を求めると

$$r = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \ell \quad (6.14)$$

と得られる．これは確かに，(5.3) 式で得た解を再現している．この例で見るように，3 次元の極座標を用いた解析は円筒座標を用いる解析に比べかなり面倒な計算になるだけで、『労多くして功少なし』と言うほかない．

《ばねではなく通常の糸振子の場合》

ばねの問題は難しすぎるので，もう一つ，ばねではなく通常の糸振子にして解析してみる．糸振子として知られているのは，単振子と円錐振子の 2 つだけである．実際は，これら 2 つを組み合わせた振子もあり得るが，通常の本で見かけることはない．この問題に挑戦してみよう．ばね振子として作った方程式 (6.8) を糸振子の方程式にするために，極限

$$k \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \ell \quad (6.15)$$

をとる．元はばねの自然長であった ℓ を，ここでは，糸の長さとする．このとき，(6.8) 第 1 式の右辺にでてくる $\omega_0^2(r - \ell)$ ，すなわち， $\frac{k(r - \ell)}{m}$ を

$$\lim_{k \rightarrow \infty, r \rightarrow \ell} \frac{k(r - \ell)}{m} = \frac{T}{m} \quad (6.16)$$

とおく．ここに， T は糸が錘を引く張力である．この修正を基にして，(6.8) 式を書き直すと，解くべき方程式は

$$\begin{aligned} r \text{ 方向: } & -\ell \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{T}{m} + g \cos \theta \\ \theta \text{ 方向: } & \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \ell \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = -g \sin \theta \\ \phi \text{ 方向: } & \frac{d}{dt} \left(\sin^2 \theta \frac{d\phi}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる．この 3 本のうち，実際の振子の運動を決めるのは第 2，第 3 式で，第 1 式は糸が錘を引く張力 T を決めるにすぎない．これら第 2，第 3 式から，近似なしの厳密解を求めようとするとき，面倒な楕円積分の計算が必要になる．これは次回に議論することにして，ここでは，通常円錐振子の周りを微小に振動する解を求めることにする．そのための予備段階として，初めに，角度 θ ，および，角度 ϕ の回転速度 $d\phi/dt$ を一定値として，

$$\theta = \theta_S, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega_S \quad (6.18)$$

とおく．これを (6.17) の第 2 式に代入すると，

$$\ell \omega_S^2 \cos \theta_S = g \quad (6.19)$$

となる．この式は，両辺に $m \sin \theta_S$ を掛けてみると，重力 mg の θ 方向成分 $mg \sin \theta_S$ と， z 軸周りの回転による遠心力 $m \ell \sin \theta_S \omega_S^2$ の θ 方向成分 $m \ell \sin \theta_S \omega_S^2 \cos \theta_S$ が釣り合っていることを示す．この式から θ_S の値を範囲 $0 < \theta_S < \pi/2$ 内で任意に決めたとき，その値に応じて， ω_S の値が決まることになる．

ここまでは通常円錐振子であるが，この先は，この円錐振子の周りの微小振動を扱う．そのため，

$$\theta(t) = \theta_S + \Delta\theta(t), \quad \phi(t) = \omega_S t + \Delta\phi(t) \quad (6.20)$$

と置いて，これを (6.17) の第 2，第 3 式に代入し， $\Delta\theta$ ， $\Delta\phi$ の 1 次の項までを捨てることにすると，

$$\begin{aligned} \ell \frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} - \left[\ell \cos(2\theta_S) \omega_S^2 - g \cos \theta_S \right] \Delta\theta - \ell \omega_S \sin(2\theta_S) \frac{d\Delta\phi}{dt} &= 0. \\ \frac{d}{dt} \left[\sin \theta_S \frac{d\Delta\phi}{dt} + 2\omega_S \cos \theta_S \Delta\theta \right] &= 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

となる．この第 2 式から

$$\sin \theta_S \frac{d\Delta\phi}{dt} + 2\omega_S \cos \theta_S \Delta\theta = \text{Const.} \equiv C \quad (6.22)$$

となるが， $\Delta\theta$ も $\Delta\phi$ も微小量としているので，ここでは $C = 0$ と取ることにする．これから， $d\Delta\phi/dt$ を求め，(6.21) の第 1 式に代入すると， $\Delta\theta$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2 \Delta\theta}{dt^2} + \left[\frac{g}{\ell} \cos \theta_S + (2 \cos^2 \theta_S + 1) \omega_S^2 \right] \Delta\theta = 0 \quad (6.23)$$

を得る．これから， A を微小振幅として，

$$\Delta\theta(t) = A \sin(\omega_T t), \quad \omega_T = \sqrt{\frac{g}{\ell} \cos \theta_S + (2 \cos^2 \theta_S + 1) \omega_S^2} \quad (6.24)$$

と求まる．ここに，角振動数 ω_T をこの第 2 式で定義するが，この ω_T は一般に ω_S より大きな値をとる．

$\Delta\phi$ の方は， $C = 0$ とした (6.22) 式から，

$$\Delta\phi(t) = -2\omega_S \cot \theta_S \int \Delta\theta(t) dt = 2A \cot \theta_S \frac{\omega_S}{\omega_T} \cos(\omega_T t) \quad (6.25)$$

と求められる．これは， θ ， ϕ ともに，通常の間錐振子の周りに角振動数 ω_T で微小振動する解である．

7 おわりに

ここでは 3 次元的に動くばね振子の問題を円筒座標を用いて解析してみた．初めは，こんなことはすでに誰かがやっているだろうと思いつながら，実際に計算してみると以外に難しい問題で，解析的に一般解を求めようという試みはすぐに打ち破られてしまった．もちろん，数値的に解くことはできるだろうが，それでは，何の意味もないような気がして，実行はしていない．また，ばね振子では難しすぎたので，通常糸振子も考えてみたが，これも 3 次元的に解こうとすると，非常に難問であった．古典力学にもこんな難しい問題があったのかと改めて認識した次第である．

電磁気法則の共変性

— 4 元ポテンシャル表示 —

秋葉 敏男

Covariant Property of Electromagnetic Law

— Four-Potential Representation —

Toshio AKIBA¹

1 はじめに

本通信第 12 巻 4 号掲載の論文「電磁気法則の共変性」[1] においては, 3 元ベクトル場で表示された電磁場のマクスウェル方程式に対して, 特殊ローレンツ変換の下での共変性を要請して, 3 元ベクトル場の変換式 (共変条件式) を求め, さらに電磁場のテンソル場表示を導入して, 電磁場の共変性がテンソル場のテンソル性に他ならないことを確認しました.

このテンソル場は, 4 元ポテンシャルを仲介して導入されており, 電磁場は 4 元ポテンシャルによっても表現できます. したがって, 4 元ポテンシャルにも共変条件が課せられます.

そこで, この 4 元ポテンシャルと電磁気法則の共変性との関係について考察してみます.

2 4 元ポテンシャルの導入

まず, 上記論文の付録 2 の考察を振り返ります. マクスウェル方程式の一つである $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ より, ある 3 成分関数 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ を使って $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ と表せます. これを使えば, もう一つのマクスウェル方程式 $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ は, $\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$ となりますから, ある 1 成分関数 ϕ を用いて $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\operatorname{grad} \phi$ と書けます. つまり, 微分可能な関数 $\{\phi, A_1, A_2, A_3\}$ を用いて, 電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (2.1)$$

と表わすことができます. ここで導入された $\{\phi, \mathbf{A}\}$ を用いて $(A_0, A_1, A_2, A_3) := (-\phi/c, \mathbf{A})$ で定義される 4 成分の物理量が 4 元ポテンシャルです. 4 元座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$ を用いれば, (2.1) は

$$E_x = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \right), \quad B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad (2.2)$$

$$E_y = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^0} \right), \quad B_y = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \quad (2.3)$$

$$E_z = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^0} \right), \quad B_z = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

となりますから, 4 元ポテンシャルの 4 元回転を用いて

$$f_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.5)$$

と定義すれば $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ であり, (2.2)~(2.4) は

$$E_x = cf_{10}, \quad B_x = f_{23} \quad (2.6)$$

$$E_y = cf_{20}, \quad B_y = f_{31} \quad (2.7)$$

$$E_z = cf_{30}, \quad B_z = f_{12} \quad (2.8)$$

¹ta106365@gmail.com

と表されます。一方、慣性系 $S(x, y, z, t)$ に対して一定の相対速度 $(V, 0, 0)$ をもつ慣性系 $S'(x', y', z', t')$ においては、 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ はローレンツ変換

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\y' &= y, \quad z' = z \\ct' &= \gamma(ct - \beta x)\end{aligned}$$

により²

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{VE_z}{c^2}\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{VE_y}{c^2}\right) \quad (2.9)$$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \quad (2.10)$$

のように変換されます。ここに、 c は真空内の光の速さであり、 $\gamma := 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$, $\beta := V/c$ としています。

これらに (2.6)~(2.8) を代入すれば

$$(f_{10})' = f_{10}, \quad (f_{23})' = f_{23} \quad (2.11)$$

$$(f_{20})' = \gamma(f_{20} - \beta f_{12}), \quad (f_{30})' = \gamma(f_{30} - \beta f_{13}) \quad (2.12)$$

$$(f_{12})' = \gamma(f_{12} - \beta f_{20}), \quad (f_{13})' = \gamma(f_{13} - \beta f_{30}) \quad (2.13)$$

この変換式は、 $\{f_{\mu\nu}\}$ の共変テンソル性

$$(f_{\mu\nu})' = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} f_{\rho\sigma} \quad (2.14)$$

を意味しています。(反対称性により、独立な条件式は 6 個です)

つぎに、これらの変換式 (2.11)~(2.13) に $\{f_{\mu\nu}\}$ の表式 (2.5) を代入して、 (A_μ) の変換式を計算してみます。

3 4 元ポテンシャルのローレンツ変換式

(2.5) を変換式 (2.11)~(2.13) に代入して (A_μ) のローレンツ変換式を求めます。まず、(2.11) の第一式から

$$\partial'_1 A'_0 - \partial'_0 A'_1 = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 \quad (3.1)$$

ローレンツ変換により、 $\partial'_1 = \gamma(\partial_1 + \beta\partial_0)$ および $\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)$ となりますから

$$\partial_0(\gamma\beta A'_0 - \gamma A'_1 + A_1) + \partial_1(\gamma A'_0 - \gamma\beta A'_1 - A_0) = 0 \quad (3.2)$$

同様の計算で (2.11) の第 2 式および (2.12),(2.13) の各式から、以下の微分方程式が得られます。

$$\partial_2(A'_3 - A_3) - \partial_3(A'_2 - A_2) = 0 \quad (3.3)$$

$$-\gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)(A'_2 - A_2) + \partial_2(A'_0 - \gamma A_0 - \gamma\beta A_1) = 0 \quad (3.4)$$

$$-\gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)(A'_3 - A_3) + \partial_3(A'_0 - \gamma A_0 - \gamma\beta A_1) = 0 \quad (3.5)$$

$$\gamma(\partial_1 + \beta\partial_0)(A'_2 - A_2) + \partial_2(-A'_1 + \gamma A_1 + \gamma\beta A_0) = 0 \quad (3.6)$$

$$\gamma(\partial_1 + \beta\partial_0)(A'_3 - A_3) + \partial_3(-A'_1 + \gamma A_1 + \gamma\beta A_0) = 0 \quad (3.7)$$

ここで φ_μ を任意関数として、関数 $\phi_\mu := \beta\varphi_\mu$ を以下のように定義します。³

$$A'_k - A_k := \phi_k \quad (k = 2, 3) \quad (3.8)$$

$$A'_0 - \gamma(A_0 + \beta A_1) := \phi_0 \quad (3.9)$$

$$A'_1 - \gamma(A_1 + \beta A_0) := \phi_1 \quad (3.10)$$

²文献 [1] § 3.2 式 (3.32),(3.33) 参照

³ $\phi_\mu = \beta\varphi_\mu$ とするのは、 $V = 0$ の場合の関係式 $A'_\mu = A_\mu$ との整合性のためです

これらを使えば, 共変条件 (3.3)~(3.7) は

$$\partial_2 \phi_3 = \partial_3 \phi_2 \quad (3.11)$$

$$\partial_k \phi_0 = \partial'_0 \phi_k \quad (k = 2, 3) \quad (3.12)$$

$$\partial_k \phi_1 = \partial'_1 \phi_k \quad (k = 2, 3) \quad (3.13)$$

(3.2), (3.9) および (3.10) から A'_0, A'_1 を消去すると, A_0, A_1 を含む項も打ち消されて

$$\partial_1(\phi_0 - \beta \phi_1) = \partial_0(\phi_1 - \beta \phi_0) \quad (3.14)$$

そして, (3.12), (3.13) を $\partial_0 \phi_k, \partial_1 \phi_k$ の連立方程式として解けば

$$\partial_0 \phi_k = \gamma \partial_k(\phi_0 - \beta \phi_1) \quad (3.15)$$

$$\partial_1 \phi_k = \gamma \partial_k(\phi_1 - \beta \phi_0) \quad (3.16)$$

と表されます. (3.11), (3.14)~(3.16) が, 4 元ポテンシャルに対する共変条件ということになります.

ローレンツ変換後のポテンシャルは, これらの共変条件付きの関数 ϕ_μ を用いて

$$A'_0 = \gamma(A_0 + \beta A_1) + \phi_0 \quad (3.17)$$

$$A'_1 = \gamma(A_1 + \beta A_0) + \phi_1 \quad (3.18)$$

$$A'_2 = A_2 + \phi_2 \quad (3.19)$$

$$A'_3 = A_3 + \phi_3 \quad (3.20)$$

となり, 逆変換式は以下のようになります.

$$A_0 = \gamma(A'_0 - \beta A'_1 + \beta \phi_1 - \phi_0) \quad (3.21)$$

$$A_1 = \gamma(A'_1 - \beta A'_0 + \beta \phi_0 - \phi_1) \quad (3.22)$$

$$A_2 = A'_2 - \phi_2 \quad (3.23)$$

$$A_3 = A'_3 - \phi_3 \quad (3.24)$$

4 ポテンシャル方程式の共変性

4.1 ポテンシャル方程式の導出

4 元ポテンシャル (A_μ) は, (2.1) により導入されました. そこで, $(A^\mu) := (-A_0, A_1, A_2, A_3) = (\phi/c, \mathbf{A})$ により上付き添字の量を導入すると, $\mathbf{E} = -c(\text{grad} A^0 + \partial_0 \mathbf{A})$, $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ と表されますから, これらをマクスウェル方程式の残りの二式

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.1)$$

に代入して, (A^μ) についての方程式を求めます. まず (4.1) の第 2 式に $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ を代入して

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \frac{1}{c} \partial_0 \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}$$

左辺は $\text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ と変形され, 右辺は $-\partial_0 \text{grad} A^0 - \partial_0^2 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j}$ となりますから, $\square := \Delta - \partial_0^2$ として

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \partial_0 A^0) &= \square \mathbf{A} - \partial_0^2 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} \\ \text{i.e. } \text{grad}(\partial_\mu A^\mu) &= \square \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで導入された $\square := \Delta - \partial_0^2 = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 - \partial_0^2$ はダランベールシヤンと呼ばれ, $\square' = \square$ であることは容易に示されます. つぎに, (4.1) の第 1 式に $\mathbf{E} = -c(\text{grad}A^0 + \partial_0\mathbf{A})$ を代入して

$$-\text{div}(\text{grad}A^0 + \partial_0\mathbf{A}) = \frac{\rho}{c\epsilon_0}$$

$\text{div}(\text{grad}) = \Delta = \square + \partial_0^2$ ですから

$$\begin{aligned} \square A^0 + \partial_0^2 A^0 + \text{div}\partial_0\mathbf{A} &= -\frac{\rho}{c\epsilon_0} = -\mu_0 c\rho \quad (\because c^2\epsilon_0\mu_0 = 1) \\ \text{i.e. } \square A^0 + \partial_0(\partial_\mu A^\mu) &= -\mu_0 j^0 \quad (\because j^0 = c\rho) \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.2),(4.3) を変形すると

$$\square A^0 + \mu_0 j^0 = -\partial_0(\partial_\mu A^\mu) \quad (4.4)$$

$$\square A^k + \mu_0 j^k = \partial_k(\partial_\mu A^\mu) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

これが, 4 元ポテンシャル表示の電磁場方程式です.

4.2 ポテンシャル方程式の共変性

ポテンシャル方程式 (4.4),(4.5) が, ローレンツ変換によっていかに変換されるかをみるために, まず $\partial_\mu A^\mu - (\partial_\mu A^\mu)'$ を変形すると

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu - (\partial_\mu A^\mu)' &= -\partial_0 A_0 + \gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)A'_0 + \partial_1 A_1 - \gamma(\partial_1 + \beta\partial_0)A'_1 + \sum_{k=2}^3 \partial_k(A_k - A'_k) \\ &= \partial_0(-A_0 + \gamma A'_0 - \beta\gamma A'_1) + \partial_1(A_1 - \gamma A'_1 + \beta\gamma A'_0) - \sum_{k=2}^3 \partial_k\phi_k \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで逆変換式 (3.21),(3.22) を用いて, (4.6) の第 1 項および第 2 項の被微分関数を変形すると

$$\begin{aligned} -A_0 + \gamma A'_0 - \beta\gamma A'_1 &= \gamma(\phi_0 - \beta\phi_1) \\ A_1 - \gamma A'_1 + \beta\gamma A'_0 &= \gamma(\beta\phi_0 - \phi_1) \end{aligned}$$

よって, (4.6) は $\gamma\partial_0(\phi_0 - \beta\phi_1) - \gamma\partial_1(\phi_1 - \beta\phi_0) - \sum_{k=2}^3 \partial_k\phi_k$ となりますから

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)' + \gamma\partial_0(\phi_0 - \beta\phi_1) - \gamma\partial_1(\phi_1 - \beta\phi_0) - \sum_{k=2}^3 \partial_k\phi_k \quad (4.7)$$

(4.7) とともに, 4 元電流密度ベクトル (j^μ) の変換式

$$j^0 = \gamma(j'^0 + \beta j'^1) \quad (4.8)$$

$$j^1 = \gamma(j'^1 + \beta j'^0) \quad (4.9)$$

$$j^k = j'^k \quad (k = 2, 3) \quad (4.10)$$

も以後の計算で用いられます.

さらに (3.21)~(3.24) も考慮して (4.5) の $k = 2, 3$ の場合を計算してみると, 左辺は

$$\square A^k + \mu_0 j^k = \square' A'^k - \square\phi_k + \mu_0 j'^k \quad (4.11)$$

一方, 右辺では $\partial'_k = \partial_k$ に注意して (4.7) を用いると

$$\partial_k(\partial_\mu A^\mu) = \partial'_k(\partial_\mu A^\mu)' + \gamma\partial_0\partial_k(\phi_0 - \beta\phi_1) - \gamma\partial_1\partial_k(\phi_1 - \beta\phi_0) - \sum_{l=2}^3 \partial_l\partial_k\phi_l \quad (4.12)$$

(4.12) の右辺の第 2,3 項を (3.12),(3.13) により変形すると

$$\begin{aligned} \gamma\partial_0\partial_k(\phi_0 - \beta\phi_1) &= \gamma\partial_0(\partial'_0\phi_k - \beta\partial'_1\phi_k) \\ &= \gamma^2\partial_0(\partial_0 + \beta\partial_1 - \beta\partial_1 - \beta^2\partial_0)\phi_k \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)\partial_0^2\phi_k = \partial_0^2\phi_k \\ \gamma\partial_1\partial_k(\phi_1 - \beta\phi_0) &= \gamma\partial_1(\partial'_1\phi_k - \beta\partial'_0\phi_k) \\ &= \gamma^2\partial_1(\partial_1 + \beta\partial_0 - \beta\partial_0 - \beta^2\partial_1)\phi_k = \partial_1^2\phi_k \end{aligned}$$

そして, 第 4 項は

$$\sum_{l=2}^3 \partial_l\partial_k\phi_l = \partial_2\partial_k\phi_2 + \partial_3\partial_k\phi_3$$

となりますが, (3.11) を用いると $k = 2, 3$ のいずれの場合でも $\partial_2^2\phi_k + \partial_3^2\phi_k$ に等しくなります. これらの計算結果を (4.12) に代入すると

$$\partial_k(\partial_\mu A^\mu) = \partial'_k(\partial_\mu A^\mu)' + \partial_0^2\phi_k - \Delta\phi_k = \partial'_k(\partial_\mu A^\mu)' - \square\phi_k \quad (4.13)$$

これと (4.11) とを比較すると, $\square\phi_k$ の項は打ち消されて

$$\square'A'^k + \mu_0 j'^k = \partial'_k(\partial_\mu A^\mu)' \quad (4.14)$$

つぎに, (4.4) の場合と (4.5) における $k = 1$ の場合を考えます.

変換前の方程式は

$$\square A^0 + \mu_0 j^0 = -\partial_0(\partial_\mu A^\mu) \quad (4.15)$$

$$\square A^1 + \mu_0 j^1 = \partial_1(\partial_\mu A^\mu) \quad (4.16)$$

です. (4.15) の場合, $A^0 = -A_0$ に注意して (3.21) を用いれば

$$\begin{aligned} -\gamma\square'(A'_0 - \beta A'_1) - \gamma\square(\beta\phi_1 - \phi_0) + \mu_0 j^0 &= -\partial_0(\partial_\mu A^\mu)' - \gamma\partial_0^2(\phi_0 - \beta\phi_1) \\ &\quad + \gamma\partial_0\partial_1(\phi_1 - \beta\phi_0) + \sum_{l=2}^3 \partial_0\partial_l\phi_l \end{aligned} \quad (4.17)$$

そこで, (3.14) の関係を用いて, (4.17) の右辺第 3 項を変形すると

$$\gamma\partial_0\partial_1(\phi_1 - \beta\phi_0) = \gamma\partial_1^2(\phi_0 - \beta\phi_1) \quad (4.18)$$

さらに, 3 節で示した (3.15) を使うと, (4.17) の右辺第 4 項は

$$\sum_{l=2}^3 \partial_l\partial_0\phi_l = \gamma(\partial_2^2 + \partial_3^2)(\phi_0 - \beta\phi_1) \quad (4.19)$$

よって (4.17) の右辺は $-\partial_0(\partial_\mu A^\mu)' + \gamma(-\partial_0^2 + \Delta)(\phi_0 - \beta\phi_1) = -\partial_0(\partial_\mu A^\mu)' + \gamma\square(\phi_0 - \beta\phi_1)$ となり, $(\phi_0 - \beta\phi_1)$ を含む項は両辺で打ち消されますから

$$-\gamma\square'(A'_0 - \beta A'_1) + \mu_0 j^0 = -\partial_0(\partial_\mu A^\mu)' \quad (4.20)$$

(4.16) の場合も同様にして

$$\gamma \square' (A'_1 - \beta A'_0) + \mu_0 j^1 = \partial_1 (\partial_\mu A^\mu)' \quad (4.21)$$

(4.20), (4.21) を $\square' A'_0$ および $\square' A'_1$ の連立方程式として解けば

$$\square' A'_0 + \mu_0 j'^0 = -\partial'_0 (\partial_\mu A^\mu)' \quad (4.22)$$

$$\square' A'_1 + \mu_0 j'^1 = \partial'_1 (\partial_\mu A^\mu)' \quad (4.23)$$

なお, この計算では (j^μ) のローレンツ変換式 (4.8)~(4.10) を用いています.

(4.14), (4.22) および (4.23) より, ポテンシャル方程式は共変的であることがわかります.

5 ゲージ変換と共変性

ポテンシャル A_μ について, $\bar{A}_\mu := A_\mu + \partial_\mu \lambda$ なる変換をゲージ変換とよびます. この変換後のポテンシャル $\bar{A}_\mu$ は, 第2節の (2.1) により同一の電磁場を表しますから, $\bar{A}_\mu$ も共変的なものでなければなりません.

そこでまず, ゲージ変換関数 λ の共変条件を解明します.

5.1 ゲージ変換関数 λ の共変条件

ゲージ変換後の4元ポテンシャル $\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$ が共変性を有するなら, $\bar{A}_\mu$ は条件式 (3.17)~(3.20) を満たしますから, $\phi_\mu = \beta \varphi_\mu$ を共変条件を満たす任意関数として

$$\bar{A}'_0 = \gamma(\bar{A}_0 + \beta \bar{A}_1) + \phi_0 \quad (5.1)$$

$$\bar{A}'_1 = \gamma(\bar{A}_1 + \beta \bar{A}_0) + \phi_1 \quad (5.2)$$

$$\bar{A}'_k = \bar{A}_k + \phi_k \quad (k = 2, 3) \quad (5.3)$$

$\bar{A}'_\mu = A'_\mu + \partial'_\mu \lambda(x'^\sigma) := A'_\mu + \partial'_\mu \lambda'$ と表せますから, 条件式 (5.1), (5.2) より

$$A'_0 = \gamma(A_0 + \beta A_1) + \phi_0 - \partial'_0 (\lambda' - \lambda) \quad (5.4)$$

$$A'_1 = \gamma(A_1 + \beta A_0) + \phi_1 - \partial'_1 (\lambda' - \lambda) \quad (5.5)$$

そして (5.3) より, $A'_k + \partial'_k \lambda' = A_k + \partial_k \lambda + \phi_k$ ですから, $\partial'_k = \partial_k$ に注意すると

$$\partial_k (\lambda' - \lambda) = -A'_k + A_k + \phi_k \quad (k = 2, 3) \quad (5.6)$$

が得られます.

そこで, $\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \beta \partial_1)$, $\partial'_1 = \gamma(\partial_1 + \beta \partial_0)$ を用いて, (5.4), (5.5) から $\partial_0 (\lambda' - \lambda)$ および $\partial_1 (\lambda' - \lambda)$ を求めると

$$\partial_0 (\lambda' - \lambda) = \gamma(\beta A'_1 - A'_0 + \phi_0 - \beta \phi_1) + A_0 \quad (5.7)$$

$$\partial_1 (\lambda' - \lambda) = \gamma(\beta A'_0 - A'_1 + \phi_1 - \beta \phi_0) + A_1 \quad (5.8)$$

仮定により, (A_μ) は共変的ですから $p_\mu = \beta \sigma_\mu$ を共変条件を満たす任意関数として

$$A'_0 = \gamma(A_0 + \beta A_1) + p_0 \quad (5.9)$$

$$A'_1 = \gamma(A_1 + \beta A_0) + p_1 \quad (5.10)$$

$$A'_k = A_k + p_k \quad (k = 2, 3) \quad (5.11)$$

これらを用いると $\gamma(\beta A'_1 - A'_0) = -A_0 + \gamma(\beta p_1 - p_0)$, $\gamma(\beta A'_0 - A'_1) = -A_1 + \gamma(\beta p_0 - p_1)$ と変形できますから, (5.6)~(5.8) は下記のようになります.

$$\partial_0(\lambda' - \lambda) = \gamma(\beta(p_1 - \phi_1) - (p_0 - \phi_0)) := \gamma(\beta\psi_1 - \psi_0) \quad (5.12)$$

$$\partial_1(\lambda' - \lambda) = \gamma(\beta(p_0 - \phi_0) - (p_1 - \phi_1)) = \gamma(\beta\psi_0 - \psi_1) \quad (5.13)$$

$$\partial_k(\lambda' - \lambda) = \phi_k - p_k := -\psi_k \quad (k = 2, 3) \quad (5.14)$$

ここでは, $\psi_\mu := p_\mu - \phi_\mu = \beta(\sigma_\mu - \varphi_\mu)$ と定義しています.

これらの両辺に偏微分演算子を作用させると

$$\partial_0^2(\lambda' - \lambda) = \gamma\partial_0(\beta\psi_1 - \psi_0) \quad (5.15)$$

$$\partial_1^2(\lambda' - \lambda) = \gamma\partial_1(\beta\psi_0 - \psi_1) \quad (5.16)$$

$$\partial_k^2(\lambda' - \lambda) = -\partial_k\psi_k \quad (k = 2, 3) \quad (5.17)$$

従って,

$$(\Delta - \partial_0^2)(\lambda' - \lambda) = -\gamma\partial_0(\beta\psi_1 - \psi_0) + \gamma\partial_1(\beta\psi_0 - \psi_1) - \sum_{k=2}^3 \partial_k\psi_k \quad (5.18)$$

これと 4.2 節の式 (4.7) を比較すると, (ψ_μ) と (ϕ_μ) とはまったく同一の共変条件を満たしていますから, (5.18) の右辺は $\partial_\mu A^\mu - (\partial_\mu A^\mu)' = D - D'$ に等しくなります. (ただし, $\partial_\mu A^\mu := D$ と表しています)

よって, λ の共変条件は

$$\square(\lambda' - \lambda) = D - D' \quad (5.19)$$

なお $\square' = \square$ を用いて, 条件式 (5.19) を変形すれば $\square'\lambda' + D' = \square\lambda + D$ となりますから, $\square\lambda + D$ がローレンツ変換で不変であることがわかります.

特に, 4 元ポテンシャルが 4 元ベクトルの場合には, (5.12)~(5.14) より $\partial_\mu(\lambda' - \lambda) = 0$ となりますから, $\lambda' - \lambda = \text{const.}$ となり, (5.19) により $D' = D$ が得られます.

5.2 ゲージ条件

まず, 4 元ポテンシャルの 4 元発散および 4 元回転が, ゲージ変換により いかに変換されるかを考えます. (A_μ) の 4 元回転を $f_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ とすると, ゲージ変換後の回転 $\bar{f}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \lambda) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = f_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.20)$$

これは, 電磁場がゲージ変換で不変であることを示しています. (式 (2.6)~(2.8) 参照)

次に, (A^μ) の 4 元発散を $D := \partial_\mu A^\mu$ として, ゲージ変換後の発散を $\bar{D}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \bar{D} &= -\partial_0 \bar{A}_0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k \bar{A}_k = -\partial_0(A_0 + \partial_0 \lambda) + \sum_{k=1}^3 \partial_k(A_k + \partial_k \lambda) \\ &= \partial_\mu A^\mu + (\Delta - \partial_0^2)\lambda = D + \square\lambda \end{aligned} \quad (5.21)$$

特に, $\bar{D} = 0$ を要請する条件がローレンツ・ゲージ条件で, この場合は $\square\lambda + D = 0$ でなければなりません. このとき, 前節の共変条件 (5.19) よりローレンツ変換後もローレンツ・ゲージ条件が成り立ちます. つまり, 共変的なゲージ変換においては, すべての慣性系でローレンツ・ゲージ条件を適用することができることになります.

なお、ローレンツ・ゲージ条件を満足するポテンシャルの場合は、ゲージ変換後の方程式 (4.4), (4.5) の右辺は 0 となります。

また、 $\sum_{k=1}^3 \partial_k \bar{A}^k = 0$ を要請するクーロン・ゲージ条件の場合には、 $\Delta \lambda = -\text{div} \mathbf{A}$ となります。この場合には、条件式 $\Delta \lambda = -\text{div} \mathbf{A}$ がローレンツ変換に対して共变的ではありませんから、すべての共变的なゲージ変換が無条件にクーロン・ゲージ条件を満足するわけではありません。

6 おわりに

電磁場 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ の共変条件はポテンシャル場へも反映されますが、それは共変条件を満たす任意関数の付随した形のものであり、4 元ポテンシャル場は 4 元ベクトル場とは限らないことが、第 3 節で明らかになりました。

しかし、ポテンシャル (A^μ) のベクトル性に関わりなく、ポテンシャル方程式は共变的であることが 4 節で示されました。文献 [1] の考察も含めると、電磁気法則はベクトル場、テンソル場、ポテンシャル場によって表示され、それぞれの場に対応する共変条件の下で共変性を有することがわかります。

今回の論考についても編集者の配慮により、ていねいな査読をいただき、正しく分かりやすいものにまとめることができました。編集者・査読者に厚く御礼申し上げます。

最後に、文献 [1] には誤りがありましたので、訂正文を付録に記しておきます。

付録 4 元電流密度の 4 元ベクトル性

[A.1] はじめに

本通信第 12 巻 4 号掲載の論文「電磁気法則の共変性」[1] の中の § 4 において、「4 元電流密度 (j^μ) が 4 元ベクトルならば、電荷保存則は共变的であり、逆も成り立ちます」と法則 1 で述べています。この法則 1 について、「逆命題の証明の誤り」について指摘を受け、確認したところ確かに推論に飛躍がありました。

4 元電流密度を $(j^\mu) = (\rho c, \rho \mathbf{v})$ とすれば、電荷保存則は $D := \partial_\mu j^\mu = 0$ と表されます。法則 1 では、電荷保存則はすべての慣性系で成り立つと仮定して、「 $D = 0, D' = 0$ を前提として (j^μ) の 4 元ベクトル性が示される」と主張していますが、この逆命題そのものが誤りです。

その反例として、定数 $a_\mu (\neq 0)$ を含むつぎのような変換関係で結ばれた 4 元電流密度をあげることができます。 ($\beta := V/c$ については次節参照)

$$j^0 = \gamma(j'^0 + \beta j'^1) + \beta a_0 \quad (\text{a1.1})$$

$$j^1 = \gamma(j'^1 + \beta j'^0) + \beta a_1 \quad (\text{a1.2})$$

$$j^k = j'^k + \beta a_k \quad (k = 2, 3) \quad (\text{a1.3})$$

この場合には $D' = 0$ の仮定の下で $D = 0$ を導くことができます。しかし、 (j^μ) は 4 元ベクトルとして変換されていません。

そこで、文献 [2] の § 27 の考え方 (ゾンマーフェルトのアイデア) を借用して、まづ 4 元電流密度 (j^μ) の 4 元ベクトル性を証明したいと思います。そして、 (j^μ) の 4 元ベクトル性を用いれば $D' = D$ が示されます。

[A.2] 4 元電流密度の 4 元ベクトル性

文献 [2] で紹介されているゾンマーフェルトの考え方に習って、4 元電流密度 (j^μ) が 4 元ベクトルであることを示します。

[証明] 慣性系 $S(x^\mu)$ から慣性系 $S'(x'^\mu)$ への特殊ローレンツ変換を

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (\text{a1.4})$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (\text{a1.5})$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (\text{a1.6})$$

とします. ここに, 一定の相対速度を $(V, 0, 0)$ とし, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = V/c$ としています. このとき, S' 系での相対運動方向の長さ dx' を S 系で観測すると $dx = dx' \sqrt{1 - \beta^2}$ となります.(ローレンツ収縮) 一方, 相対運動方向に垂直な方向の長さの収縮はありませんから, 体積素片 $dV = dxdydz$ については, 次の関係が成り立ちます.

$$dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2} = dV' / \gamma \quad (\text{a1.7})$$

つぎに, 光速 c でこの体積素片が時間間隔 dt の間に 4 元時空の中で通過する 4 元体積 d_4V は, $cdVdt$ ですが, これはスカラー量です. これを示すために, S' 系の時間軸上の 2 点 $P(ct'_1, 0, 0, 0), Q(ct'_2, 0, 0, 0)$ を想定します. このとき, S' 系における 4 元体積は $dt' := t'_2 - t'_1$ として $d_4V' = cdV'dt'$ と表されます. 一方, P, Q を S 系から観測したときの座標は $x' = 0$ を (a1.4) に代入して $x = c\beta t$ です. これを (a1.6) に代入すれば, $ct'_i = \gamma(ct_i - c\beta^2 t_i)$ となりますから, $cdt' := c\gamma(1 - \beta^2)dt = cdt\sqrt{1 - \beta^2}$ となります. よって,

$$\begin{aligned} d_4V' &= cdt\sqrt{1 - \beta^2}dV/\sqrt{1 - \beta^2} = cdt dV = d_4V \\ \text{i.e. } cdV'dt' &= cdVdt \end{aligned} \quad (\text{a1.8})$$

以上で, 4 元体積素片の不変性 (スカラー性) が示されました.

つぎに, 慣性系に存在する電気量を両系から観測した場合の関係を解析します.

S' 系で静止している体積素片 dV' の中で静止している電気量を q' とすれば, 静止条件から q' は保存量です. つまり

$$\partial'_0 q' = 0 \quad (\text{a1.9})$$

これを S 系から観測すると, 電荷密度を ρ として, $q = \rho dV$ なる電気量が速度 $(V, 0, 0)$ で進行していることになります. したがって, S 系での電荷保存則により⁴

$$\partial_0(c\rho) + \partial_1(V\rho) = 0$$

これを変形して

$$\begin{aligned} \partial_0(c\rho) + \partial_1(c\beta\rho) &= 0 \\ \text{i.e. } (\partial_0 + \beta\partial_1)\rho &= 0 \end{aligned} \quad (\text{a1.10})$$

$\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)$ ですから, (a1.10) はつぎのように変形できます.

$$\partial'_0(\rho/\gamma) = 0 \quad (\text{a1.11})$$

(a1.11) の両辺に静止している dV' を掛けると, 左辺の被微分関数は (a1.7) を使って

$$\rho dV' / \gamma = \rho \gamma dV / \gamma = \rho dV = q$$

となりますから (a1.11) は

$$\partial'_0 q = 0 \quad (\text{a1.12})$$

⁴電荷保存則はマクスウェル方程式から導かれます

(a1.9),(a1.12) より, S' 系においては q', q はともに保存量です. 特に, 相対速度が 0 の場合には $q' = q$ ですから, 常に $q' = q$ であることになります.⁵これは $\rho' dV' = \rho dV$ を意味しますから, 両辺を c 倍して

$$c\rho' dV' = c\rho dV \quad (\text{a1.13})$$

も不変量であり, (a1.13) を (a1.8) で除した $\sigma := \rho/dt$ も不変量です.

ところで, 4 元電流密度は $(j^\mu) = (\rho c, \rho \mathbf{v}) = \rho(c, d\mathbf{x}/dt) = \sigma(cdt, d\mathbf{x})$ と変形できますが, $(cdt, d\mathbf{x})$ は周知の 4 元ベクトルですから, そのスカラー (σ) 倍である (j^μ) も 4 元ベクトルです. [証明終]

[A.3] おわりに

電荷保存則と特殊ローレンツ変換の性質を用いて, 「4 元電流密度 (j^μ) の 4 元ベクトル性」を導きました. ここまでの推論では「電荷保存則の共変性」は考慮されていません.

一般に, 4 成分の量 (Q^μ) がローレンツ変換で 4 元反変ベクトルとして変換されるならば, その 4 元発散 $D := \partial_\mu Q^\mu$ は不変量 (スカラー) です.⁶

特に 4 元ベクトルである (j^μ) の場合は, $D = \partial_\mu j^\mu = 0$ は電荷保存則ですから, D が不変量であることは「電荷保存則の共変性」を意味します. これは, 相対性原理に適合するものです

文献 [1] では, マクスウェル方程式の共変性を支える基礎法則として,

[1] 電荷保存則の共変性

[2] 4 元ローレンツ力の 4 元ベクトル性

をあげています.⁷

しかし, これまでの議論から [1] の代わりに「4 元電流密度の 4 元ベクトル性」を基礎法則とすべきです.

参考文献

[1] 秋葉敏男, 電磁気法則の共変性, 数学・物理通信 12 巻 4 号 (2022 年 6 月) 8-21

この文献 [1] において, § 4 の法則 1 の逆の証明は誤りであり, 法則の逆命題そのものも誤りです. 正しい法則とその証明は, 付録に示しました.

[2] W. パウリ (内山龍雄 訳), 『相対性理論』 講談社 (1979 年)

§ 27 「電荷の不変性, 4 元電流密度」(135-137) において, 4 元電流密度の 4 元ベクトル性についてのゾンマーフェルトの証明が紹介されています.

⁵ S' 系の電気量が移動している場合は, 無限小の時間間隔における無限小領域の電気量は時間的に一定とみなして, 各瞬間において両系の電気量は一致していると考えられます

⁶ $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$ とすると, $D' = \partial'_\mu Q'^\mu = \partial_\sigma Q'^\mu \partial'_\mu x^\sigma = \partial_\sigma (L^\mu_\rho Q^\rho) (L^{-1})^\sigma_\mu = \partial_\sigma Q^\rho \delta^\sigma_\rho = \partial_\sigma Q^\sigma = D$

⁷ 文献 [1] の § 5 参照

Gauss 数値積分への補遺

矢野 忠^{*1}

Addendum to Gaussian Quadrature

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

このエッセイは [1] を書いている途中で知ったこととか気になったことをまとめた。

1 はじめに

前号に Gauss 数値積分についてエッセイを載せた [1]。この数値積分法は Lagrange 補間多項式に大いに依存していた。

関数 $f(x)$ を補間する、 $n-1$ 次の Lagrange の補間多項式 $L_n[f](x)$ は

$$F(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{k=1}^n (x - x_k) \quad (1.1)$$

を用い、 $L_k(x)$ を

$$L_k(x) := K(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad (1.2)$$

で定義し、

$$L_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \text{ のとき} \\ 0 & k \neq i \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.3)$$

を要請すれば、 K は

$$K = \frac{1}{F'(x_k)} \quad (1.4)$$

と表され、また $L_k(x)$ は

$$L_k(x) = \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} \quad (1.5)$$

となる。これを用いると $n-1$ 次の Lagrange 補間多項式 $L_n[f](x)$ は

$$L_n[f](x) := \sum_{k=1}^n L_k(x) f_k, \quad (f_k := f(x_k)) \quad (1.6)$$

と表される。

前のエッセイにも (1.4), (1.5) の導出を述べたが、その分母の $F'(x_k)$ の導出はあまりにも見事であった。もっと泥臭く導く方法がないと安心できない。というのはあまりに見事な導出を私には思いつくことができないと思うからである。これがこのエッセイを書く動機である。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

2 Lagrange 補間多項式の導出

Lagrange 補間多項式 (1.6) は簡潔でいい表現だが、私が大学に勤め始めたころ [3] で学んだ $n-1$ 次の Lagrange 補間多項式の表現はもっと素朴で

$$\begin{aligned} L_n[f](x) := & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}f_2 + \cdots \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}f_n, \quad (f_k := f(x_k)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

というような式であったような気がする。それも上に書いたような n 個の点を通る $n-1$ 次の補間多項式ではなく 3 個の点を通る 2 次の補間多項式であったような気がする。そして (1.5) で分母に $F'(x_k)$ が現れるのが不思議であった。その不思議を解明したいというのがこのエッセイの目的である。

まず前のエッセイでの導出を復習のために書いておこう。これはいくつかの導き方を比較検討することが簡単にできたほうがいいからである。

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = \prod_{k=1}^n (x-x_k) \quad (1.1)$$

から、係数 (1.4) と (1.5) を導く [2].

(1.2) で $L_k(x)$ の係数 K を除いた部分を

$$g(x) := (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) \quad (2.2)$$

と定義する。しかし、この関数 $g(x)$ には $(x-x_k)$ という因子がなくちょっと対称性がわるい。それでこの因子を付け加えたものを

$$F(x) := (x-x_k)g(x) \quad (2.3)$$

と定義する。これは (1.1) の $F(x)$ ともちろん同じ関数であるが、 $F(x)$ は $(x-x_k)$ と $g(x)$ の積と考えるという視点を導入している。

$F'(x_k)$ を求めたいのだが、その前に $F'(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x-x_k)'g(x) + (x-x_k)g'(x) \\ &= g(x) + (x-x_k)g'(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

である。ここで、 $(x-x_k)' = 1$ であることを用いた。また $g'(x)$ の具体的な式を求めている。これは実際に求めたいのは $F'(x_k)$ であり、この第 2 項は $x-x_k$ の因子のために寄与しないから求める必要がない。それで $F'(x_k)$ は

$$F'(x_k) = g(x_k) = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n) \quad (2.5)$$

となる。これで (1.4) が求められ、(1.5) が導出される。以上が前のエッセイで述べた求め方であった。

ここからは別の方法についてのべよう。その方法として対数微分を用いてこの分母を求めて見よう。

(2.3) の $F(x)$ の自然対数をとれば、

$$\ln F(x) = \ln(x-x_k) + \ln g(x) \quad (2.6)$$

である。この両辺を x で微分すれば、

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-x_k} + \frac{g'(x)}{g(x)} \quad (2.7)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x)}{x - x_k} + \frac{F(x)g'(x)}{g(x)} \\ &= g(x) + (x - x_k)g'(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。(2.8) に $x = x_k$ を代入すれば

$$F'(x_k) = g(x_k) = \prod_{i \neq k} (x_k - x_i) = \frac{1}{K} \quad (1.4)$$

が得られる。これは (1.4) であった。

(1.2) で (2.2) の $g(x)$ の定義を用いると

$$L_k(x) := Kg(x) \quad (2.9)$$

と簡潔に表されるから、(1.4) から

$$L_k(x) = Kg(x) = \frac{g(x)}{F'(x_k)} \quad (2.10)$$

である。

(2.3) で $F(x)$ の定義が $F(x) = (x - x_k)g(x)$ であったから

$$g(x) = \frac{F(x)}{x - x_k} \quad (2.11)$$

と表される。この $g(x)$ の表示を (2.10) の $L_k(x)$ に代入すれば、

$$L_k(x) = \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)}, \quad (1.5)$$

が求められる。これを (1.6) に代入すれば、 $n - 1$ 次の Lagrange 補間多項式 $L_n[f](x)$ が求められる。

ここでもまた $g'(x)$ の具体的な式を求められなかった。この場合にはそれでもよかったのだが、 $g'(x)$ を具体的に求めておきたいという気がする。

それでちょっと寄り道になるが、 $g'(x)$ を求めて見よう。 $g(x)$ は

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad (2.2)$$

であったから、この両辺の自然対数をとれば、

$$\ln g(x) = \ln(x - x_1) + \ln(x - x_2) + \cdots + \ln(x - x_{k-1}) + \ln(x - x_{k+1}) + \cdots + \ln(x - x_n) \quad (2.12)$$

となり、これを x で微分すれば、

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} \quad (2.13)$$

である。したがって $g'(x)$ は

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x) \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} \right) \\ &= \frac{F(x)}{x - x_k} \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。

こうして、具体的には求める必要がなかった $g'(x)$ を求めることができた。これは $g'(x)$ がどういう形になるのかという好奇心にかられて求めてはみたが、その形はそれほど興味深いものでもなかった。

3 別の導出

2節でともかく Lagrange 補間多項式を求めたのだから、それで話をお終いにしてもいいのだが、別の求め方を示しておこう [4].

$x = x_1$ のときに 1 となり, $x = x_2, \dots, x_n$ では 0 となるような多項式を考えて, それを $L_1(x)$ と表せば, これは

$$L_1(x) = K(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) \quad (3.1)$$

である. この式では

$$L_1(x_2) = L_1(x_3) = \cdots = L_1(x_n) = 0 \quad (3.2)$$

であることは自明だろう. つぎに $L_1(x_1) = 1$ となるように, 係数 K を求めよう.

$$L_1(x_1) = K(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) = 1 \quad (3.3)$$

という条件から K は

$$K = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \quad (3.4)$$

したがって,

$$L_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \quad (3.5)$$

$L_1(x)$ を少し対称な形にするために, すでに

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) \quad (1.1)$$

とおいた. $F(x)$ は n 次の多項式である.

上に (3.4) で決めた K の具体的な式を用いてもよいが, むしろ K のままでおいた方がコンパクトでわかりやすいだろう. この $F(x)$ で $L_1(x)$ を表せば,

$$L_1(x) = \frac{KF(x)}{x - x_1} \quad (3.6)$$

と表される. $F(x_1) = 0$ であるから (3.6) の分子から引いても値は変わらない. そうすると

$$L_1(x) = \frac{K(F(x) - F(x_1))}{x - x_1} \quad (3.7)$$

この式で x を x_1 に近づけると

$$L_1(x_1) = K \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = KF'(x_1) \quad (3.8)$$

となる. ここで $L_1(x_1) = 1$ であったから,

$$KF'(x_1) = 1 \quad (3.9)$$

であり,

$$F'(x_1) = \frac{1}{K} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \quad (3.10)$$

が求まる. したがって

$$L_1(x) = \frac{F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} \quad (3.11)$$

と表される.

同様に

$$L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = \cdots = L_2(x_n) = 0 \quad (3.12)$$

であるから,

$$L_2(x) = \frac{F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} \quad (3.13)$$

と求められる.

一般的には $x = x_k, (k = 1, 2, \cdots, n)$ で 1 となり, 他の点ではすべて 0 となる, $n - 1$ 次多項式は

$$L_k(x) = \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \quad (3.14)$$

であることがわかる.

(3.14) に $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ を代入して具体的に書き表せば,

$$\begin{aligned} L_1(x_1) &= 1, L_2(x_1) = 0, \cdots, L_n(x_1) = 0 \\ L_1(x_2) &= 0, L_2(x_2) = 1, \cdots, L_n(x_2) = 0 \\ &\quad \cdots \\ L_n(x_n) &= 0, L_2(x_n) = 0, \cdots, L_n(x_n) = 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

である.

したがって, $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ で $f(x)$ と一致する, $n - 1$ 次の Lagrange 補間多項式は

$$L_n[f](x) = \frac{f_1 F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} + \frac{f_2 F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} + \cdots + \frac{f_n F(x)}{(x - x_n)F'(x_n)} \quad (3.16)$$

この式をコンパクトに

$$L_n[f](x) = \sum_{k=1}^n \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} f_k, \quad (f_k := f(x_k)) \quad (1.6)$$

と表したのが (1.6) であった.

4 おわりに

いつものように二つの方法で Lagrange の補間多項式を導いてみた. [4] の導出はひょっとしたら, [5] にしたがったものかもしれないが, 真偽のほどはわからない.

なお, [4] には分数式の練習問題としてよく使われている

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)(c-a)} + \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(c-a)(b-c)} &= 0 \\ \frac{b+c}{(a-b)(c-a)} + \frac{c+a}{(b-c)(a-b)} + \frac{a+b}{(c-a)(b-c)} &= 0 \\ \frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ca}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(c-a)(b-c)} &= -1 \end{aligned}$$

が 2 次の Lagrange 補間多項式からの由来のものだという言及がある. これらは Euler の公式と呼ばれているという. またこの Euler の恒等式を Lagrange の補間多項式の話題としてではなく, 「分数式の計算の練習問題?」というタイトルのエッセイを書いたことがある [6].

(2023.3.31)

参考文献

- [1] 矢野忠, 歩行者のための Gauss 数値積分, 数学・物理通信 第 13 巻第 1 号 (2023.3.25) 14-28
- [2] 小澤一文, 『数値計算法』第 2 版 (共立出版, 1996) 73, 134-135 (演習問題 5 章 2 の解答)
- [3] 森口繁一, 高田勝, 『数値計算法 I』(岩波講座 現代応用数学 B13.I) (岩波書店, 1958) 54-58
- [4] 遠山啓, 『微分と積分』(日本評論社, 1970) 151-156
- [5] 高木貞治, 『解析概論』改訂第三版 (岩波書店, 1983) 244
- [6] 矢野忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) 35-42

編集後記

読者の皆さんこんにちは。右の写真は、今年2月に、家の近くの雪山の前で写した私の写真です。私の顔は見ないで、と言っても、帽子にサングラス、マスク姿では、見ようにも見えないと思いますが、後ろの雪山を見てください。高さは3メートル以上はあるでしょうか。もっとも、こんなに雪が積もった訳ではなく、これは、道路に積もった雪を除雪機で積み上げて出来た雪山です。私が抱えているのは、我が家の愛犬チャーリー君です。実はこのあと、この犬君と一緒に散歩していて、ひどい目に遭いました。この犬が大好きな近所の小母ちゃんを見つけ、急に走り出したのです。そのため、私の方が雪道に滑って、思い切り頭から転んでしまい、目の周りを強打してしまいました。眼鏡の蔓がひん曲がり、眼の中の白目から出血、上下の脛も真っ赤に腫れてしまいました。幸いにも治ることは治ったのですが、全治3週間もの大怪我を負ってしまいました。若いときならこんなことにはならなかったと思うのですが、歳をとるということは、致し方ないものです。



雪山の私の前

話は変わって、今号には、私の「3次元空間内を動くばね振子」、秋葉敏男さんの「電磁気法則の共変性－4元ポテンシャル表示－」と、編集長矢野忠さんの「Gauss 数値積分への補遺」の3つが掲載されることになりました。私が書いたものは、相変わらずのばねと錘を組み合わせたものです。ばねと錘を使えばいくらでも記事が書けると言わんばかりのもので、この話はこの先も続くはずで、飽きあきしているかもしれませんが、お許し下さい。

2番目の秋葉さんのものは、12巻4号からの続きもので、電磁気法則を空間と時間の4次元座標形式でうまくまとめたものです。このMaxwellが作った電磁気学の法則というものは生まれながらにして、4次元座標を内包していたわけで、これがEinsteinの相対性理論が生まれるきっかけになった訳です。そのきっかけを作ったのは、Lorentz変換ですが、この空間と時間を混ぜて変換するなどということを思い付いたLorentzという人は、いま考えてみると不思議な気がします。

最後の矢野忠さんのものは、前号からの続きで、Gaussの数値積分を扱ったものです。そう言えば、この前号に矢野さんが書かれたものに、Christoffel-Darbouxの恒等式というのがあります。これを私は知らなかったのですが、初めに読んだときは、どこかで騙されたのかと思いました。ちょっと中身を言うと、 $p_n(x)$ を直交多項式とすると、 k を0から $n-1$ 次までとした $p_k(x)$ で作られる式を、 $p_n(x)$ と $p_{n-1}(x)$ だけの式と結びつけるものです。もちろん、 $p_n(x)$ がすべての n について決まっていればそれなりに結び付けることはできるでしょうが、ここでは、 $p_n(x)$ の具体的形は何も与えられてはいないのに成立するというのですから、不思議という他ありません。これで思い出すのは、初めてTaylor展開を学んだとき、不思議な式があるものだと思いました。何故なら、この展開式を使うと、任意関数の $x=0$ 近傍だけの振る舞いが分かれば、他のすべての x での振る舞いが分かってしまうからです。

(世戸憲治)