

数学・物理通信

13 卷 3 号 2023 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2023 年 6 月 26 日

目次 (Contents)

1. 3次元空間内を動く弦振子	世戸憲治	2
2. ローレンツ変換へのコメント	秋葉 敏男	11
3. 第2オイラー定数の数値的評価 - 台形則による -	植田洋平	22
4. Spence 関数	矢野 忠	25
5. 編集後記	矢野 忠	30
1. String Pendulum Moving in a Three-Dimensional Space	Kenji SETO	2
2. A Comment on Lorentz Transformation	Toshio AKIBA	11
3. Numerical Estimation for the Second Euler's Constant - in Terms of Trapezoidal Rule -	Yohei UEDA	22
4. Spence Function	Tadashi YANO	25
4. Editorial Comments	Tadashi YANO	30

3 次元空間内を動く弦振子

世戸 憲治 *

String Pendulum Moving in a Three-Dimensional Space

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「3次元空間内を動くばね振子」(数学・物理通信 13 巻 2 号)の中で, その特別な場合として, 3次元的に動く弦振子を紹介した. しかし, この弦振子の一般的な解は求めていなかったのて, ここでは, その一般解を求めておこう. 結果は非常に煩雑な楕円関数を用いた解になる.

2 方程式の導入とその解法

一端を固定した長さ ℓ の弦の他端に質量 m の錘を付けた振子を用意する. ここでは, 3次元的に動く振子を考えるので, 弦が固定された点を原点として, 錘の座標 (x, y, z) をとり, その3次元極座標を (r, θ, ϕ) とする. ただし, 重力加速度を g としたとき, この錘に作用する重力 mg の方向に z 軸をとるものとする. 極座標で表わした方程式は, 前回の論文で導いたが, ここでもう一度引用しておく,

$$\begin{aligned} r \text{ 方向: } \quad & \frac{T}{m} = \ell \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + g \cos \theta \\ \theta \text{ 方向: } \quad & \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \ell \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - g \sin \theta \\ \phi \text{ 方向: } \quad & \frac{d}{dt} \left(\sin^2 \theta \frac{d\phi}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

である. これら方程式に錘の質量 m を掛けると, 定性的な意味が見えてくるので簡単に説明しておく.

- (1) 初めに, r 方向の式について述べると, 弦の張力 T は, θ 方向の運動による遠心力と, 同じく, ϕ 方向の運動による遠心力の r 方向成分, および, 錘に作用する重力の r 方向成分の和と釣り合っていることを示す.
- (2) つぎの θ 方向の式について, $[\text{質量}] \times [\theta \text{ 方向の加速度}]$ は, ϕ 方向の運動による遠心力の θ 方向成分, および, 重力の θ 方向成分の和になることを示す.
- (3) 最後の ϕ 方向の式については, ϕ 方向に作用する力は存在しないので, ϕ 方向の回転による角運動量が保存されることを示す. これは, ϕ 方向回転による面積速度が一定と言い換えることもできる.

* 北海学園大学名誉教授

これら 3 本のうち、実際の振子の運動を決めるのは、第 2, 第 3 式で、第 1 式は弦が錘を引く張力 T を決めるにすぎない。この第 3 式から、時間の逆数の次元を持つ定数 C を用いて、

$$\sin^2 \theta \frac{d\phi}{dt} = C \quad (2.2)$$

とおけるので、これから $d\phi/dt$ を求め、第 2 式に代入すると、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = C^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \omega_0^2 \sin \theta, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (2.3)$$

と θ を求めるための方程式を得る。ここで、 ω_0 は、 C と同じく時間の逆数の次元を持つ定数で、この第 2 式で定義する¹⁾。つぎに、この方程式を解くために、 θ の 2 階微分を、ドットを用いた Newton 流の記号を用いて、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (2.4)$$

と変形してから (2.3) 式に代入し、変数分離してから、積分すると、

$$\int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int \left(C^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \omega_0^2 \sin \theta \right) d\theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{2} \sin^{-2} \theta + \omega_0^2 \cos \theta + \frac{E}{2} \quad (2.5)$$

となる。 E は時間の逆 2 乗の次元を持つ積分定数である。これら定数 C と E は初期条件で決めるべき量である。これから $\dot{\theta}$ を

$$\dot{\theta} = \sqrt{-C^2 \sin^{-2} \theta + 2\omega_0^2 \cos \theta + E} \quad (2.6)$$

と求め²⁾、さらに変数分離して、積分形にすると

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{-C^2 \sin^{-2} \theta + 2\omega_0^2 \cos \theta + E}} = t \quad (2.7)$$

となる。ただし、時間の原点は自由にとれるので、ここでは積分定数を敢えて入れないことにする。この左辺の積分は、

$$\cos \theta = \xi \quad (2.8)$$

と変数変換すると、

$$\int \frac{-d\xi}{\sqrt{-C^2 + (2\omega_0^2 \xi + E)(1 - \xi^2)}} = t \quad (2.9)$$

と、分母の平方根の中が ξ の 3 次式の積分となる。この積分を楕円積分の標準形に持っていくために、まず、

$$\xi = \frac{1}{\eta} \quad (2.10)$$

と変数変換をすると、

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta[(E - C^2)\eta^3 + 2\omega_0^2 \eta^2 - E\eta - 2\omega_0^2]}} = t \quad (2.11)$$

¹⁾ 前回の論文では ω_0 を、錘の質量 m と、ばね定数 k を用いて $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と定義していたので今回のものとは異なることに注意。

²⁾ ここでは、 θ が時間的に増加する解に限定して考えることにする。

と平方根の中は η の 4 次式になる．この 4 次式のうち，大括弧中の 3 次の部分を因数分解するために，3 次方程式

$$(E - C^2)\eta^3 + 2\omega_0^2\eta^2 - E\eta - 2\omega_0^2 = 0 \quad (2.12)$$

を解く．そのため， $E - C^2 \neq 0$ として，この方程式を

$$\eta^3 + 3\alpha\eta^2 - 3\beta\eta - 3\alpha = 0, \quad \left(\alpha = \frac{2\omega_0^2}{3(E - C^2)}, \quad \beta = \frac{E}{3(E - C^2)} \right) \quad (2.13)$$

と書いておく．ここで無次元数 α, β を括弧内の式で定義する．さらにこの式の 2 次の項をなくすための変換

$$\eta = \zeta - \alpha \quad (2.14)$$

を施すと，

$$\zeta^3 - 3(\alpha^2 + \beta)\zeta + 2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha = 0 \quad (2.15)$$

となる．ここでさらに，

$$\zeta = u + v \quad (2.16)$$

とおき，方程式 (2.15) を書き直すと，

$$u^3 + v^3 + 2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha + 3(u + v)(uv - \alpha^2 - \beta) = 0 \quad (2.17)$$

となる．元々は，1 個の未知数 ζ を (2.16) 式で 2 個の未知数 u, v に増やしてしまったので，ここで，1 本の方程式から 2 本の方程式を作ることができ，

$$u^3 + v^3 + 2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha = 0, \quad uv - \alpha^2 - \beta = 0 \quad (2.18)$$

と置くことができる．これから，

$$u^3 + v^3 = -2\alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\alpha, \quad u^3v^3 = (\alpha^2 + \beta)^3 \quad (2.19)$$

となるので， u^3, v^3 は λ の 2 次方程式，

$$\lambda^2 + (2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha)\lambda + (\alpha^2 + \beta)^3 = 0 \quad (2.20)$$

の解となる．これを解くと，

$$u^3, v^3 = \frac{1}{2} \left[-(2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha) \pm \sqrt{(2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha)^2 - 4(\alpha^2 + \beta)^3} \right] \left(\equiv \Lambda_{(\pm)} \right) \quad (2.21)$$

となるが，ここでは，この右辺の値を $\Lambda_{(\pm)}$ と定義しておく．あとはこの 3 乗根をとって， u, v を作るが，そのとき，1 の 3 乗根は， $1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}$ の 3 個存在することと，(2.18) 第 2 式から $uv = \alpha^2 + \beta$ となるので，この値は実数でなければならないことを考慮すると，

$$\begin{aligned} \text{Case 1:} \quad u_1 &= \Lambda_{(+)}^{1/3}, & v_1 &= \Lambda_{(-)}^{1/3} \\ \text{Case 2:} \quad u_2 &= e^{2\pi i/3} \Lambda_{(+)}^{1/3}, & v_2 &= e^{-2\pi i/3} \Lambda_{(-)}^{1/3} \\ \text{Case 3:} \quad u_3 &= e^{-2\pi i/3} \Lambda_{(+)}^{1/3}, & v_3 &= e^{2\pi i/3} \Lambda_{(-)}^{1/3} \end{aligned} \quad (2.22)$$

の 3 通りの組み合わせが考えられる．なお， u, v は対称の形で入るので，その入れ替えは考えない．なお，(2.21) 式で定義した $\Lambda_{(\pm)}$ の平方根の中が負になるとき，これらの値は複素数になるが， $\Lambda_{(+)}$ と $\Lambda_{(-)}$ は互いに複素共役になるので， $u_i + v_i$ ($i = 1, 2, 3$) はいずれも実数になる．つまり，この場合は，3 次方程式は 3 実根を持つ．また， $\Lambda_{(\pm)}$ に含まれる平方根の中が正のときは， $u_1 + v_1$ は実数になる．しかし， $u_2 + v_2$ と $u_3 + v_3$ は実数にはならないが，これら 2 つの量は互いに複素共役になる．したがって，このときは，元の 3 次方程式は，1 実根と 2 個の共役な複素解を持つことになる．

以上から，(2.15) 式左辺の ζ の 3 次式は，

$$\zeta^3 - 3(\alpha^2 + \beta)\zeta + 2\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\alpha = [\zeta - (u_1 + v_1)][\zeta - (u_2 + v_2)][\zeta - (u_3 + v_3)] \quad (2.23)$$

と因数分解される．さらに，(2.14) 式を経て (2.13) 式左辺の η の 3 次式に戻ると，

$$\eta^3 + 3\alpha\eta^2 - 3\beta\eta - 3\alpha = [\eta + \alpha - (u_1 + v_1)][\eta + \alpha - (u_2 + v_2)][\eta + \alpha - (u_3 + v_3)] \quad (2.24)$$

と因数分解される．これに η を 1 個掛けた 4 次式は，

$$\eta[\eta^3 + 3\alpha\eta^2 - 3\beta\eta - 3\alpha] = [\eta^2 + P\eta][\eta^2 + Q\eta + R] \quad (\equiv f(\eta)) \quad (2.25)$$

と [2 次式] $\times$ [2 次式] の形となる．ただし，ここで， P, Q, R はつぎの式

$$P = \alpha - (u_1 + v_1), \quad Q = 2\alpha - (u_2 + v_2 + u_3 + v_3), \quad R = [\alpha - (u_2 + v_2)][\alpha - (u_3 + v_3)] \quad (2.26)$$

で定義するが，これらはすべて実数である．また，この (2.25) 式右辺を，以後の数式の簡素化のため， $f(\eta)$ と書くことにする．

ここでさらに，これら各 2 次式の 1 次の項が消えるように，さらなる η から y への変数変換，

$$\eta = \frac{Ay + B}{y + 1} \quad (2.27)$$

を行う．この変換を (2.25) 式の右辺に施すと，

$$\begin{aligned} f(\eta) = \frac{1}{(y+1)^4} & \left[(A^2 + PA)y^2 + (2AB + P(A+B))y + B^2 + PB \right] \\ & \times \left[(A^2 + QA + R)y^2 + (2AB + Q(A+B) + 2R)y + B^2 + QB + R \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

となるので，この大括弧で包まれた 2 つの各 2 次式において，1 次の項が消えるように，

$$2AB + P(A+B) = 0, \quad 2AB + Q(A+B) + 2R = 0 \quad (2.29)$$

とおく．これから， $A+B, AB$ が

$$A+B = -\frac{2R}{Q-P}, \quad AB = \frac{PR}{Q-P} \quad (2.30)$$

と決まるので， A, B は λ の 2 次方程式

$$(Q-P)\lambda^2 + 2R\lambda + PR = 0 \quad (2.31)$$

の解となる。これから、 A, B が,

$$A, B = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - (Q - P)PR}}{Q - P} \quad (2.32)$$

となる。ここでは、複号のうちプラスの方を A , マイナスの方を B とする。

以上の操作をまとめると、(2.28) 式は

$$f(\eta) = \frac{f(A)}{(y+1)^4} (y^2 + S)(y^2 + T),$$

$$f(A) = (A^2 + PA)(A^2 + QA + R), \quad S = \frac{B^2 + PB}{A^2 + PA}, \quad T = \frac{B^2 + QB + R}{A^2 + QA + R} \quad (2.33)$$

となる。ここで、(2.25) 式における $f(\eta)$ の定義から、前に付く係数 $(A^2 + PA)(A^2 + QA + R)$ を $f(A)$ とおき、さらに、 $(B^2 + PB)/(A^2 + PA)$, $(B^2 + QB + R)/(A^2 + QA + R)$ を、以下の数式の簡素化のため、それぞれ、 S, T とおいた。さらに、これら S, T は共に負と予測されるので、

$$S = -\mu^2, \quad T = -\nu^2 \quad (2.34)$$

とおくことにする³⁾。これで、(2.33) 式は

$$f(\eta) = \frac{f(A)}{(y+1)^4} (y^2 - \mu^2)(y^2 - \nu^2) \quad (2.35)$$

の形になる。ここで、(2.27) 式の微分をとると、

$$d\eta = \frac{A - B}{(y+1)^2} dy \quad (2.36)$$

となるので、(2.11) 式まで戻ると、その左辺の積分は

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta[(E - C^2)\eta^3 + 2\omega_0^2\eta^2 - E\eta - 2\omega_0^2]}}$$

$$= \int \frac{d\eta}{\sqrt{(E - C^2)f(\eta)}} = \frac{A - B}{\sqrt{(E - C^2)f(A)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - \mu^2)(y^2 - \nu^2)}} \quad (2.37)$$

と η 積分から y 積分に変換される。ここで最後の変数変換である y から z への変換

$$y = \nu z \quad (2.38)$$

を実行すると、(2.11) 式は最終的に、

$$\tau_0 \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = t, \quad \tau_0 = \frac{A - B}{\mu \sqrt{(E - C^2)f(A)}}, \quad k^2 = \frac{\nu^2}{\mu^2} \quad (2.39)$$

と、ようやく楕円積分の Jacobi の標準形に書き換えられる。ここに、 τ_0 は時間の次元を持つ定数、また、 k は楕円積分の母数で、それぞれ、第 2 式、第 3 式で定義する。この積分は Jacobi の第 1 種楕円関数 sn の逆関数 $\text{arcsn}(z)$ になるので、方程式は、

$$z = \text{sn}\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (2.40)$$

³⁾ ここで S と T は共に負と仮定したが、これはここで求めた解の特殊な場合として円錐振子を含ませるための必要条件になっている。これについては次節「円錐振子の場合」の最後で述べることにする。

と解けたことになる。ただし、変数の z は元の θ まで戻さなければならない。そのためには、(2.38) (2.27) (2.10) (2.8) 式まで遡っていくと、

$$y = \nu \operatorname{sn}\left(\frac{t}{\tau_0}\right), \quad \eta = \frac{A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B}{\nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + 1}, \quad \xi = \frac{\nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + 1}{A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B}, \quad (2.41)$$

となって、最後の θ は、

$$\theta(t) = \arccos\left(\frac{\nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + 1}{A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B}\right) \quad (2.42)$$

と求まったことになる。

角度 ϕ の方は、(2.2) 式において、定数 C を適当な初期条件で決めておき、

$$\begin{aligned} \phi(t) &= C \int \sin^{-2} \theta(t) dt = C \int \sin^{-2} \left[\arccos\left(\frac{\nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + 1}{A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B}\right) \right] dt \\ &= C \int \frac{[A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B]^2}{[A \nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + B]^2 - [\nu \operatorname{sn}(t/\tau_0) + 1]^2} dt \end{aligned} \quad (2.43)$$

を実行することになるが、この積分はできそうもない。

3 円錐振子の場合

前節で求めた一般的な解は、当然のことながら円錐振子の場合も含んでいなければならない。ここで通常の円錐振子とは、糸が鉛直下向きにとった z 軸となす角が一定値 θ_S を保ったまま、この鉛直線の周りに一定の角速度 $d\phi/dt = \omega_S$ で回転するものを言う。ここではこの円錐振子が前節で求めた一般解の特別な場合になっていることを示す。円錐振子は糸が錘を引く力を T としたとき、 T の鉛直成分 $T \cos \theta_S$ 、水平成分 $T \sin \theta_S$ が、それぞれ、重力 mg 、遠心力 $m\ell \sin \theta_S \omega_S^2$ と釣り合ったときに起こる。すなわち、

$$T \cos \theta_S = mg, \quad T \sin \theta_S = m\ell \sin \theta_S \omega_S^2 \quad (3.1)$$

である。これら 2 式から T を消去すると、

$$\omega_S^2 = \frac{\omega_0^2}{\cos \theta_S} \quad (3.2)$$

と ω_S の値は θ_S に依存して決まる。ここに、 ω_0 は (2.3) 式で定義した $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ である。この式から θ_S が小さいときは回転角速度 ω_S は ω_0 に近い値をとるが、 θ_S を大きくとって $\pi/2$ に近づけるには、 ω_S の値を大きくしなければならない。

この円錐振子の場合、(2.2) 式の C 、および、(2.5) 式に表れる E は、それぞれ、

$$C = \omega_S \sin^2 \theta_S, \quad E = C^2 \sin^{-2} \theta_S - 2\omega_0^2 \cos \theta_S \quad (3.3)$$

となるので、(2.11) (2.12) (2.13) 式に表れる $E - C^2$ を、(3.2) 式も動員して求めると、

$$E - C^2 = -\omega_0^2 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S) \quad (3.4)$$

となり、この値は $0 < \theta_S < \pi/2$ の範囲で負の値をとる。同じように、(2.13) 式で定義した α, β を求めると、

$$\alpha = -\frac{2}{3 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)}, \quad \beta = \frac{3 \cos^2 \theta_S - 1}{3 \cos^2 \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)} \quad (3.5)$$

となり、 α も同じ範囲 $0 < \theta_S < \pi/2$ で負の値になる。しかし、 β の方は、 $\cos \theta_S = 1/\sqrt{3}$ となる θ_S より小さいときは正、それより大きいときは負の値になる。この α, β を基にして、(2.21) 式で定義する $\Lambda_{(\pm)}$ を計算してみると、平方根の中身がゼロになるので $\Lambda_{(+)} = \Lambda_{(-)}$ となり、その値は、

$$\Lambda_{(\pm)} = - \left[\frac{3 \cos^2 \theta_S + 1}{3 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)} \right]^3 \quad (3.6)$$

となり、この 3 乗根は

$$\Lambda_{(\pm)}^{1/3} = - \frac{3 \cos^2 \theta_S + 1}{3 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)} \quad (3.7)$$

となる。これから (2.22) 式で定義した $u_i, v_i, (i = 1, 2, 3)$ を基にして、3 次方程式の 3 個の解 $u_i + v_i$ は

$$u_1 + v_1 = - \frac{2(3 \cos^2 \theta_S + 1)}{3 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)}, \quad u_2 + v_2 = u_3 + v_3 = \frac{3 \cos^2 \theta_S + 1}{3 \cos \theta_S (1 + \cos^2 \theta_S)} \quad (3.8)$$

と、3 個の解のうち 2 個が重解になる。これから、(2.26) 式で定義する P, Q, R は

$$P = \frac{2 \cos \theta_S}{1 + \cos^2 \theta_S}, \quad Q = - \frac{2}{\cos \theta_S}, \quad R = \frac{1}{\cos^2 \theta_S} \quad (3.9)$$

となり、さらに、(2.32) 式で定義する A, B は

$$A = - \frac{\cos \theta_S}{1 + 2 \cos^2 \theta_S}, \quad B = \frac{1}{\cos \theta_S} \quad (3.10)$$

および、(2.34) 式で定義する μ^2, ν^2 と (2.35) で用いた $f(A)$ は

$$\mu^2 = \left(\frac{1 + 2 \cos^2 \theta_S}{\cos^2 \theta_S} \right)^2, \quad \nu^2 = 0, \quad f(A) = - \frac{(1 + 3 \cos^2 \theta_S)^3}{(1 + \cos^2 \theta_S)(1 + 2 \cos^2 \theta_S)^4} \quad (3.11)$$

となる。この中で $\nu^2 = 0$ となることは、円錐振子の大きな特徴である。また、(3.4) 式の $E - C^2$ とこの式の $f(A)$ から、(2.37) (2.39) に現れる積 $(E - C^2)f(A)$ が正となることに注意したい。

この場合の最終的な解は、 $\nu = 0$ とした (2.42) 式から

$$\theta = \arccos(1/B) = \arccos(\cos \theta_S) = \theta_S \quad (3.12)$$

となって、角度 θ は確かに円錐振子として最初に設定した角度 θ_S に等しくなる。また、角度 ϕ は、 $\nu = 0$ とした (2.43) 式から、(3.3) 式の C と、(3.10) 式の B を用いて、

$$\phi(t) = C \int \frac{B^2}{B^2 - 1} dt = \omega_S t \quad (3.13)$$

と、これも円錐振子の場合に帰着する。

ここで、(2.34) 式のところで、2 つの量 S と T を、なぜ共に負と仮定したかについて、間接的な証明法ではあるが、ここで述べておこう。そこでは、これら両者とも負として、 $S = -\mu^2, T = -\nu^2$ とおいた。確かに、(3.11) 式で見るように、円錐振子の場合 μ^2 は正となるので、 S を負とした仮定とは矛盾しない。また、このとき、 ν^2 はゼロとなる。したがって、円錐振子でない一般のときは、 T は、正か負かどちらかの可能性がある。

もし、この (2.34) 式のところで、 T を正と仮定してこれを $T = \nu^2$ とおいてしまうと、どうなるかを見てみよう。この場合、(2.37) 式は

$$(2.37) = \frac{A-B}{\sqrt{(E-C^2)f(A)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-\mu^2)(y^2+\nu^2)}} \quad (3.14)$$

となり、これを楕円積分の標準形にするためには、

$$y = \frac{\mu}{\sqrt{1-z^2}} \quad (3.15)$$

とにおいて、(3.14) 式の積分は、

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-\mu^2)(y^2+\nu^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad k^2 = \frac{\nu^2}{\mu^2+\nu^2} \quad (3.16)$$

となる。この積分は Jacobi の第 1 種楕円関数の逆関数 $\arcsn$ となるが、ここで $\nu = 0$ としても、(2.41) の第 1 式とは違って、 y 依存性、つまり、 θ 方向の振動が残ってしまうので、円錐振子とは結びつかなくなる。それゆえ、 T の値は一般に負と仮定しなければならない。

4 おわりに

これまで、何か問題が頭に浮かんだときは、その問題をでき得る限り解析的な方法で厳密解を求めようと努力してきた。どうしても解けないときは数値計算で済ますこともあるが、数値計算は解析的厳密解に比べて 100 分の 1 くらいしか価値はないものと思っている。しかし、今回は、せっかく (2.42) 式という厳密解を求めたにもかかわらず、その努力がむなしく感じてしまった。その理由は、途中の定数、変数の置き換えがあまりに多く、これから見えてくるものは非常に少ないからである。これなら、数値的に解を求めた方が少しは何かが見える気がするでもない。まさに《たかが振子、されど振子》でこんな難問になるとは思いもしなかった。道理で、こんな計算するのは暇人の私くらいで、通常の力学の教科書にこんなものを書く人はいないということが、よく分かる。これまでも、3 次方程式、あるいは、4 次方程式をともに解いて、楕円関数の解を求めることは何度かあったが、そのたびに憂鬱な気分がしていた。どうも、この楕円積分、楕円関数と言うのは、私とは相性が合わないとは思ってならない。

最近、計算をしていてミスることが多くなった。歳のせいと諦めてはいるが、そのため 3 度同じ計算をしないと自信が持てなくなってしまった。特に、(3.5) 式から (3.11) 式までの計算は非常に面倒で、間違いそうな気がしたので、数式処理ソフト Maxima も動員して確かめてみた。確かに Maxima を使うのは便利ではあるが、こんなものをいつも使っていると自分の計算能力が鈍ってしまいそうな気もするし、またときには、自分が考えていた形とまったく違ったものが出てきて途惑うことも多い。人間のやることにミスは付き物であるが、いつも愛用している岩波全書の『数学公式』でさえも、ときに間違いと出くわすことがある。非常に役に立つ立派な本ではあるが、そのまま鵜呑みにすることなく、自分で確かめておく必要はあるだろう。

ここで、もう一つ、余計なことを書いておく。夜散歩のでて月を眺めていると、どうして月は地球に落ちこちてこないのかと、一瞬、思ってしまうことがある。これを物理では、月が地球の周りを回転するときに発生する遠心力と地球が月を引っ張る万有引力が釣り合っているから月は地球に落ちないですむと説明する。今回の解析でも遠心力を多用して計算を進めてきた。しかし、遠心力などというものは実在しない仮想的な力で、これは単

に、 $mr\omega^2$ を力と仮定すると、動力学が静力学のときと同じように力の釣り合いで説明できるというだけの話である。つまり、実際は、月は絶えず地球に向かって落ちているのであって、もし、落ちなかったら月は直線運動をして地球からたちまち遠のいてしまうはずである。つまり、月は地球に向かって絶えず落下を続け、ちょうど円を描くように運動しているだけである。これは地球が太陽の周りを回転するのも同じことで、地球は太陽に向かって絶えず落下しているということである。

誰がこの遠心力を考え出したのかをネットで調べてみると、最初に言いだしたのは Huygens (ホイヘンス 1629 - 1695) で、後に Newton (1642 - 1727) が数学的に定式化したということであった。この Newton は、リンゴが木から落ちるのを見て万有引力を発見し、というのは嘘らしいが、この万有引力と釣り合わせるために遠心力を持ちだしたのであろう。

ローレンツ変換へのコメント

秋葉 敏男

A Comment on Lorentz Transformation

Toshio AKIBA¹

1 はじめに

物理学では、「自然現象の背後にある3次元真空内のいかなる領域も均一な性質をもち、時間の起点は任意に設定できる」と考えます。これが「時空の一様性および空間の等方性原理」です。これにより、空間の基準原点および基準方向は任意に選択できますから、座標系を平行移動したり回転(または反転)したりしても、物理法則は正しく記述できると考えられます。ただし、この変換前後の座標系で表した法則数式の形は一般には変化します。

一方、ある座標系 S に対して相対運動している(平行移動中や回転中の)系 S' を想定して、両系の座標の関係を問題にすることも考えられます。そして、「相対運動している座標系 S および S' において表現された物理法則の数式形式は同型である」という考え方が、**相対性原理**です。

座標系の中で、外力を加えない限り等速直線運動が持続するものを、**慣性系**とよびます。そして、この慣性系の間の相対性原理が**特殊相対性原理**です。この原理を指導理念として、物理法則を解析する特殊相対性理論を語る上では、相対運動する二つの慣性系の座標を結びつける**ローレンツ変換**の説明が、まず求められます。

このローレンツ変換の導出については、多様な論法が展開されていますが、それらの議論は上記の「時空の一様性および空間の等方性原理」と「特殊相対性原理」に加えて「**光速不変の原理**」を根拠としています。ここでは、それらの論述を参考にして、つぎの2点について掘り下げてみたいと思います。

[1] 相対運動方向に垂直な座標軸の変換性

[2] ローレンツ変換群

2 ローレンツ変換の概要

まず光速不変の原理により、すべての慣性系において真空内の光の速さは同一ですから、これを c とします。この定数 c を使って、慣性系 S のミンコフスキー座標系を $(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$ とし、慣性系 S' の座標系は $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) := (ct', x', y', z')$ とします。ただし、空間座標系 (x^1, x^2, x^3) は右手直交系であり、座標軸 x'^k と x^k は同じ向きに平行とします。さらに、両系の相対運動速度の向きと x^1 軸の向きとが一致しているものとすれば、相対運動速度は $(V, 0, 0)$ となります(V は実定数)。

このように設定したときの両系の座標 $\{x'^\mu\}$ と $\{x^\mu\}$ との関係式を求めたいわけですが、それは一次代数式となります。なぜなら、慣性系 S' の x'^k 軸方向に等速直線運動する物体は、慣性系 S から観ると $(x'^k$ 軸に平行な) x^k 軸方向に等速直線運動しているはずですから、位置と時間の関係式 $x'^k = a'_k x'^0 + b'_k$ に対して常に $x^k = a_k x^0 + b_k$ の形の関係式が成り立たなければなりません。($k = 1, 2, 3$) このことから、変換式 $x'^\mu = f_\mu(x^\sigma)$ は一次式でなければなりません。したがって変換行列を $L = (L^\mu_\nu)$ として、 $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + K^\mu$ のように表されますが、時空の一様性により両慣性系の原点は、はじめに一致していたとしても一般性に問題はありません。よって $K^\mu = 0$ において、つぎのような変換式を考えることにします。

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (2.1)$$

¹ta106365@gmail.com

変換係数 L_{ν}^{μ} の決定に当たり、まづ S' 系の原点 O' に注目します。 S' 系から観測すると、 O' は静止していますから、その空間座標は $x'^k = 0$ ($k = 1, 2, 3$) ですが、これを S 系から観れば x^1 方向に速さ V で移動していますから、 $x^1 = Vt = \beta x^0, x^2 = x^3 = 0$ と表されます。(ただし $\beta := V/c$)

これらの値を (2.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} L_0^i x^0 + L_1^i \beta x^0 &= x'^i = 0 \\ \text{i.e.} \quad (L_0^i + \beta L_1^i) x^0 &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

関係式 (2.2) が常に成り立つためには、係数がすべて 0 でなければなりませんから、

$$L_0^i = -\beta L_1^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

そして次節で示すように、相対運動方向に直交する座標値 x^2, x^3 は不変ですから、 L はつぎのようになります。

$$L = \begin{pmatrix} L_0^0 & L_1^0 & L_2^0 & L_3^0 \\ L_0^1 & L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

L の第 1 行および第 2 行要素の決定のために、光信号の伝播について「光速不変の原理」を加味した関係式

$$\sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 - (x'^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - (x^0)^2 = 0 \quad (2.5)$$

を適用します。

行列要素決定の詳細については付録 1 に記してあります。

3 相対運動に直交する座標軸の変換性

上記のローレンツ変換論で行列 (2.4) を導く際に、 x^2 軸および x^3 軸の座標値の不変性を前提として推論しています。この不変性を根拠づける説明として、以下のようなものがあります。

[説明 1] x^2 軸について、相対速度の大きさ V に依存する定数 $\kappa(V)$ を用いて、

$$x'^2 = \kappa(V) x^2 \quad (\#)$$

の形に表されることを示します。この定数 $\kappa(V)$ は x^2 軸方向の長さの変換比とみられますから正值であり、それは空間の等方性により相対運動の向きには依存しないと考えられます。すなわち、 $\kappa(-V) = \kappa(V)$ が成り立ちます。一方、座標の変換と逆変換とを合成すれば元の座標系にもどりますから、関係式 $\kappa(V)\kappa(-V) = 1$ が得られます。以上により、 $\kappa(V) = 1$ と結論されます。 x^3 軸についてもまったく同様の議論が成り立ちます。

そして、関係式 (#) の説明としては、つぎのようなものがあります。

[1-1] (文献 [2] 参照)

変換式は同次一次式ですから

$$x'^j = A_{\nu}^j x^{\nu} \quad (j = 2, 3) \quad (\#\#)$$

と書けます。ところが、両慣性系の初期設定および相対運動の設定から、 x^1 軸と x^2 軸の張る平面 (これを $x^1 x^2$ 面とします) と $x'^1 x'^2$ 面は同一平面上にありますから、 $x'^3 = 0$ なら $x^3 = 0$ です。そして、 $x^1 x^3$ 面と $x'^1 x'^3$ 面も同一平面上にありますから、 $x'^2 = 0$ なら $x^2 = 0$ となります。これらの値を (#) に代入すると

$$A_0^2 x^0 + A_1^2 x^1 + A_3^2 x^3 = x'^2 = 0 \quad (*)$$

$$A_0^3 x^0 + A_1^3 x^1 + A_2^3 x^2 = x'^3 = 0 \quad (**)$$

この二つの関係式が常に成立するためには、すべての係数 (A_j^i) が 0 でなければなりません。(ただし $j \neq \nu$) したがって、(##) において A_j^i 以外は 0 ですから、 $\kappa(j) := A_j^j$ として $x'^j = \kappa(j)x^j$ が得られます。($j = 2, 3$) これは、(♯) の形の式となっています。²

[1-2] (文献 [3] 参照)

S' 系で x'^2 が一定値 (η') の平面を想定してこれを S 系から観測すると、等速度 $(V, 0, 0)$ で移動していますから、やはり x^2 が一定値 (η) の平面として認識されと考えられます。両者のスケール比を、相対速度の大きさ V に依存する定数 $\kappa(V)$ とすれば、 $\eta' := \kappa(V)\eta$ とおけます。 x^3 座標についても全く同様の推論ができます。

[説明 2]

変換 (2.1) において、両慣性系の空間座標軸は同じ向きに平行ですから、 x'^2 軸上の 3 次元位置ベクトル $(0, x'^2, 0)$ は、 x^2 軸上の 3 次元位置ベクトル $(0, x^2, 0)$ のスカラー ($\alpha > 0$) 倍です。よって第 2 成分について

$$x'^2 = \alpha x^2 \quad (3.1)$$

(3.1) の両辺を x^0 で偏微分すると、左辺は (2.1) より

$$\frac{\partial x'^2}{\partial x^0} = L_0^2 \quad (3.2)$$

です。一方、右辺は $x^2 \partial \alpha / \partial x^0$ ですから、

$$L_0^2 = x^2 \partial \alpha / \partial x^0 \quad (3.3)$$

L_0^2 は定数で、しかも α は空間変数を含みませんから、(3.3) が任意の x^2 について成り立つためには、 $L_0^2 = 0$ かつ $\partial \alpha / \partial x^0 = 0$ でなければなりません。つまり、スカラー α は時間座標に依存しません。特に $x^0 = 0$ のときは、両慣性系は一致していましたから $\alpha = 1$ となり、常に $x'^2 = x^2$ が成り立つことになります。このとき、 $L_0^2 = 0$ は自動的に満たされます。 x^3 軸についてもまったく同様ですから、 x^2, x^3 座標は不変です。³ [説明 2 終]

[説明 3]

付録 2 で示している「世界間隔の不変性」を適用して説明します。そのために、S' 系の y' 軸に固定された長さ l' の棒を想定します。(図 1 の $O'(0)P'(0)$)

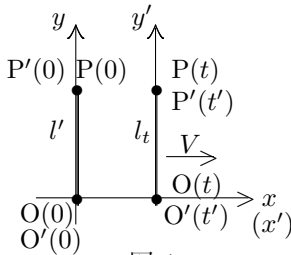


図 1

この棒を S 系から観測すると、 x 軸に垂直な状態で速さ V で進行して t 秒後には $O(t)P(t)$ の状態になります。このときの棒の長さを l_t とすると、ミンコフスキー空間における棒の両端 $O(t), P(t)$ の座標はそれぞれ $(ct, Vt, 0, 0)$ および $(ct, Vt, l_t, 0)$ です。よってこの 2 点の世界間隔は $s = l_t$ です。一方 S' 系では棒は固定されていますから、 $O(t), P(t)$ に対応する点を $O'(t'), P'(t')$ とすると、それぞれの座標は $(ct', 0, 0, 0)$ および $(ct', 0, l', 0)$ ですから、この 2 点の世界間隔は $s' = l'$ です。付録 2 で示した [法則] により慣性系間の同次一次変換で結ばれた世界間隔は不変ですから $l_t = l'$ となり、

相対運動に直交する y 軸方向の座標は不変であることになります。 z 軸方向についても、同様です。[説明 3 終]

第 2 節で考察した慣性系では、相対速度が一つの空間軸に平行でした。このような場合の座標変換は、特殊ローレンツ変換とよべれます。

² ここで考えている変換は相対速度で特徴づけられていますから、係数 $\kappa(j)$ は当然相対速度 $\mathbf{V}$ に依存します。しかし、空間の等方性により $\mathbf{V}$ の方向にはよらずその大きさ V のみに依存すると考えるべきです。なお変換係数が V に依存することは、ガリレー変換式からも予想されます

³ x^1 軸と x'^1 軸も同じ向きに平行ですが、もし x^1 座標が不変であるとなると、条件式 (2.3) から導かれる関係式

$$x'^1 = L_1^1(-\beta x^0 + x^1) + L_2^1 x^2 + L_3^1 x^3 \quad (\dagger)$$

の左辺は x^1 に等しくなりますから、独立変数 $\{x^\mu\}$ の間に $-\beta L_1^1 x^0 + (L_1^1 - 1)x^1 + L_2^1 x^2 + L_3^1 x^3 = 0$ が成り立ち、 $L_1^1 = 0$ かつ $L_1^1 = 1$ となり不合理です。よって、 x^1 座標は変換されます。そして、絶対時間が存在しませんから、時間座標 x^0 も不変ではあり得ません。

ところで付録2の[法則]によれば, 座標変換 (2.1) において ミンコフスキー空間の世界間隔は不変に保たれます. つまり, 慣性系の間の座標変換は「世界間隔を不変にする変換」でなければなりません. そこで, この「世界間隔の不変性」と「変換行列の特性」との関係について, 次節で考察します.

4 ローレンツ変換群

S系の原点と世界点 (x^μ) との世界間隔の平方は $\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - (x^0)^2$ であり, S'系では $\sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 - (x'^0)^2$ ですから, 世界間隔の不変性は

$$\sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 - (x'^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - (x^0)^2 \quad (4.1)$$

と表されます. そこで, 変換式 (2.1) の x'^μ を (4.1) の左辺に代入して, $x^\mu x^\nu$ の係数を比較すれば

$$\sum_{i=1}^3 (L_0^i)^2 - (L_0^0)^2 = -1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^3 (L_l^i)^2 - (L_l^0)^2 = 1 \quad (l = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^3 L_\lambda^i L_\mu^i - L_\lambda^0 L_\mu^0 = 0 \quad (\lambda > \mu) \quad (4.4)$$

という10個の関係式が得られます. ここで行列 L に対して $\bar{L}$ を

$$\bar{L} := \begin{pmatrix} -L_0^0 & L_0^1 & L_0^2 & L_0^3 \\ -L_1^0 & L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ -L_2^0 & L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ -L_3^0 & L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

と定義すると, 上記の関係式 (4.2)~(4.4) は

$$\bar{L}L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

と表されます. $\bar{L}$ は転置行列の第一列の符号を反転させたもので, その行列要素は符号関数 $\epsilon(\xi)$ を用いて

$$\bar{L}_\nu^\mu = \epsilon(\nu) L_\mu^\nu \quad (4.7)$$

と表せます. (ただし $\epsilon(0) = -1, \epsilon(\xi \neq 0) = 1$ とします) そして, その行列式は L^t を転置行列として

$$\begin{aligned} \det(\bar{L}) &= \sum_{(j_0 j_1 j_2 j_3)} \sigma(j_0 j_1 j_2 j_3) \bar{L}_{j_0}^0 \bar{L}_{j_1}^1 \bar{L}_{j_2}^2 \bar{L}_{j_3}^3 = \sum_{(j_0 j_1 j_2 j_3)} \sigma(j_0 j_1 j_2 j_3) \epsilon(0) L_0^{j_0} \epsilon(1) L_1^{j_1} \epsilon(2) L_2^{j_2} \epsilon(3) L_3^{j_3} \\ &= -\det(L^t) = -\det(L) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となります.⁴ (4.6) より, $\det(\bar{L})\det(L) = \det(\bar{L}L) = -1$ ですから, (4.8) を考慮すれば $(\det(L))^2 = (\det(\bar{L}))^2 = 1$ となり, $\det(L) = \pm 1, \det(\bar{L}) = \mp 1$ が得られます.

⁴ $(j_0 j_1 j_2 j_3)$ が偶置換 (奇置換) のとき, $\sigma(j_0 j_1 j_2 j_3) = +1 (-1)$

ここで (4.5) で導入した $\bar{L}$ を L の擬転置行列とよぶことにします. この擬転置行列を含む行列演算規則のいくつかをまとめておきます. A, B を任意の行列とし, I を単位行列とすると

$$\overline{(AB)} = B^t \bar{A} \quad (4.9)$$

$$\overline{(\bar{I})} = I, \quad (\bar{I})^t = \bar{I} \quad (4.10)$$

$$\bar{I}A = (\bar{A})^t, \quad A\bar{I} = \overline{(A^t)} \quad (4.11)$$

これらの関係式は, 表式 (4.7) を用いて両辺の行列要素を比較すれば, 容易に確かめられます.

4 行 4 列の行列のうち, 条件式 (4.6) を満たすものの集合を G とします. そこでまず, 実数行列の積については結合法則が成り立っていることに注意します. また, 単位行列 I については $\bar{I}$ は式 (4.6) の右辺に等しいですから, 条件式 (4.6) は $\bar{L}L = \bar{I}$ と書けます. そして $\bar{I}I = \bar{I}$ ですから, I も G に含まれます.

つぎに L, M を G に属する行列とすると, これらの積 (LM) や逆行列 L^{-1} も G に属します.

[証明] まず, $(\overline{LM})(LM) = \bar{I}$ であることを示します. (4.9) より, $\overline{LM} = M^t \bar{L}$ ですから

$$\begin{aligned} (\overline{LM})(LM) &= (M^t \bar{L})(LM) = M^t (\bar{L}L) M \\ &= M^t \bar{I} M \\ &= M^t (\bar{M})^t \quad (\because (4.11) \text{ の第 1 式}) \\ &= (\bar{M}M)^t \\ &= (\bar{I})^t = \bar{I} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.12) は, $LM \in G$ を意味します.

つぎに, $L^{-1} \in G$ であることを示します. 定義により, $L^{-1}L = I$ ですから両辺の擬転置行列を作ると

$$\overline{(L^{-1}L)} = \bar{I} \quad (4.13)$$

左辺は, (4.9) を適用して $L^t \overline{(L^{-1})}$ となり, 右辺は $\bar{L}L = \bar{I}$ であることから $\bar{L}L$ に等しいですから

$$L^t \overline{(L^{-1})} = \bar{L}L \quad (4.14)$$

(4.14) の両辺に, 左から $(L^t)^{-1}$ を掛け右から L^{-1} を掛けると

$$\begin{aligned} \overline{(L^{-1})}L^{-1} &= (L^t)^{-1}\bar{L} \\ &= (L^{-1})^t \bar{L} \\ &= \overline{(LL^{-1})} = \bar{I} \quad ((4.9) \text{ 参照}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15) は, $L^{-1} \in G$ を意味します. [証明終]

よって, 条件 (4.6) を満たす行列の集合 G は, 群の公理をすべて満たしています.⁵ G はローレンツ変換群とよばれます.

相対運動速度が $(V, 0, 0)$ である特殊ローレンツ変換の場合は, $\beta := V/c, \gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ として

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := L(\beta), \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := \overline{L(\beta)} \quad (4.16)$$

となります. (付録 1 の (a1.19), (a1.20) 参照) そこで, $\mathbf{R}$ を実数の集合として

$$G_s := \{L(\beta) \mid \beta \in \mathbf{R}\}$$

⁵ 集合が元の間の算法に関して閉じていて, 結合法則が成り立ち, 単位元が存在して, 各元が逆元をもつとき, その集合は群を構成すると定義されます.

なる集合 G_s を考えます. このとき, $L(0) = I, L(\beta)L(-\beta) = I$ が成り立っていますから, $L(\beta)^{-1} = L(-\beta)$ です. さらに, $L(\beta_1)$ と $L(\beta_2)$ の積については, $\beta_{12} := (\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)$, $\gamma_{12} := \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)$ とおくと, $\gamma_{12} = 1/\sqrt{1 - (\beta_{12})^2}$ および $L(\beta_1)L(\beta_2) = L(\beta_{12})$ であることが確かめられます. そして, $L(0), L(-\beta), L(\beta_{12})$ はすべて G_s の元です. 以上により, G_s は G と共通の単位元を有する群であることになります. さらに, 任意の $L(\beta) (\in G_s)$ について $\overline{L(\beta)}L(\beta) = \bar{I}$ が成り立ちますから, $L(\beta)$ は群 G に含まれます (つまり, $G_s \subset G$). よって, G_s は G の部分群です.⁶

5 おわりに

ガリレー・ニュートンの力学では共通不変な絶対時間が存在すると仮定されました.⁷ しかし, アインシュタインによる同時性の根本的解析により, 絶対時間の考え方は否定されました. アインシュタインの 1905 年の論文 [1] では, ある慣性座標系 (t, x, y, z) に対して相対運動する系の時間変数 (t') の同時刻の定義式から, t' の t, x, y, z に関する微分方程式を導き, 光速不変の原理などを駆使してローレンツ変換式にたどり着いています.

今回の論文ではまず, 相対運動に直交する方向の空間座標値 x^2, x^3 が不変であることを確認しました. 一方, 相対運動に沿う方向の空間座標値 x^1 は, 時間座標値 x^0 と共に変換されます. そして, 長さの相対論的収縮は, x^1 軸上でのみ認められます. 相対運動する両慣性系の空間座標軸は, 同じ向きに平行性を保持していますが, 相対運動方向との交角の違いにより, このような変換性の差異 (いわば, 等方性の破れ) が生じています.

つぎに, 第 4 節で示したように, 特殊ローレンツ変換は実数パラメータ β で特徴づけられ, それらの集合は群 $G_s = \{L(\beta) \mid \beta \in \mathbf{R}\}$ を構成しています. そして $L(\beta)$ の変換で, ミンコフスキー空間の世界間隔は不変です. そこで, 逆に世界間隔を不変にするような変換を調べてみると, それらの集合 $G = \{L \mid \bar{L}L = \bar{I}\}$ は群を構成することがわかりました. G は G_s を部分群として含みます. 群 G に属して G_s に属さない元の例として, 擬転置行列があります. $L \in G$ のとき, $\overline{L}L = \bar{I}$ が成り立ちますから $\bar{L} \in G$ です.⁸ そして, $L(\beta)$ も G の元ですから $\bar{L}(\beta) \in G$ です. しかし, $\bar{L}(\beta)$ は $L(\xi) (\xi \in \mathbf{R})$ の形に表せませんから, $\bar{L}(\beta) \notin G_s$.

最後に, この論考はていねいな査読により推論の不備や表記の誤謬が正されたものです.

査読者ならびに編集者の粘り強いご指導に感謝いたします.

付録 1 ローレンツ変換 (続)

第 2 節では, 特殊ローレンツ変換

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{a1.1})$$

の行列として

$$L = \begin{pmatrix} L_0^0 & L_0^1 & L_0^2 & L_0^3 \\ L_1^0 & L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (L_0^1 = -\beta L_1^1) \quad (\text{a1.2})$$

が導かれました. さらに変換行列要素を確定するために, 光信号の伝播を解析します.

⁶ ローレンツ変換はその変換行列の行列式 Δ の値と L_0^0 の値により, 4 分類されます. $\Delta = +1$ の変換は固有 (Proper) ローレンツ変換とよばれ, この内 $L_0^0 \geq 1$ となるものが, G_s に含まれる変換です. $\Delta = -1$ である変換は非固有 (Improper) ローレンツ変換とよばれ, これらも L_0^0 の値 ($+1$ 以上または -1 以下) により 2 分類されます.

⁷ これは「時間不変の原理」とも言えます.

⁸ $\bar{L}L = \bar{I}$ より $\bar{L}\bar{L} = \bar{I}$. 最左辺は $L^t\bar{L}$ ですから, $L^t\bar{L} = I$ が得られ, これを変形して $\bar{L}\bar{L} = (L^{-1})^t\bar{L} = \overline{(LL^{-1})} = \bar{I}$

慣性系 S におけるミンコフスキー空間内の原点と点 $P(x^\mu)$ の間の光信号の伝播を考えれば, 時間 t 内に光信号が進む距離は $ct = x^0$ であり, この距離は $\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}$ とも表されますから

$$\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - (x^0)^2 = 0 \quad (\text{a1.3})$$

光速の不変性により, S' における光信号の伝播距離については, $x'^0 := ct'$ として (a1.3) と類似の関係が成り立ちます.

$$\sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 - (x'^0)^2 = 0 \quad (\text{a1.4})$$

(a1.4) に (a1.1) を代入すると

$$\sum_{\mu=0}^3 \{ (L_\mu^1)^2 - (L_\mu^0)^2 \} (x^\mu)^2 + 2 \sum_{\lambda > \mu} (L_\lambda^1 L_\mu^1 - L_\lambda^0 L_\mu^0) x^\lambda x^\mu + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$$

(a1.3) より $(x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$ ですから, これを上式に代入すると

$$\sum_{\mu=0}^3 \{ (L_\mu^1)^2 - (L_\mu^0)^2 \} (x^\mu)^2 + 2 \sum_{\lambda > \mu} (L_\lambda^1 L_\mu^1 - L_\lambda^0 L_\mu^0) x^\lambda x^\mu + (x^0)^2 - (x^1)^2 = 0 \quad (\text{a1.5})$$

左辺の各項を $(x^\lambda x^\mu)$ ごとにまとめると, まとめられた係数は 0 でなければなりませんから, 以下の条件式が得られます.

$$(L_0^0)^2 = (L_0^1)^2 + 1, \quad (L_1^1)^2 = (L_1^0)^2 + 1 \quad (\text{a1.6})$$

$$(L_2^1)^2 = (L_2^0)^2, \quad (L_3^1)^2 = (L_3^0)^2 \quad (\text{a1.7})$$

$$L_\lambda^1 L_\mu^1 = L_\lambda^0 L_\mu^0 \quad (\lambda > \mu) \quad (\text{a1.8})$$

(a1.8) で $(\lambda, \mu) = (1, 2)$ とした場合の関係式 $L_1^1 L_2^1 = L_1^0 L_2^0$ に (a1.7) の第 1 式から得られる $L_2^1 = \pm L_2^0$ を用いると $\pm L_1^1 = L_1^0$ が得られますが, これは (a1.6) の第 2 式と矛盾します. まったく同様に (a1.8) で $(\lambda, \mu) = (1, 3)$ とした場合の関係式から, $\pm L_1^0 = L_1^1$ となり (a1.6) の第 1 式と矛盾します.

(a1.6) と (a1.7), (a1.8) の関係式が両立するためには, $L_2^1 = L_2^0 = 0, L_3^1 = L_3^0 = 0$ でなければなりません.

このとき, 条件式 (a1.8) の $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ 以外の条件式は両辺が 0 となって満足されます. よって, 第 1, 第 2 座標の変換式はつぎのようになります.

$$x'^0 = L_0^0 x^0 + L_1^0 x^1$$

$$x'^1 = L_0^1 x^0 + L_1^1 x^1$$

座標表示を (t, x, y, z) にもどすと, 下記の変換式が得られます.

$$t' = L_0^0 t + L_1^0 x / c := \kappa t + \lambda x \quad (\text{a1.9})$$

$$x' = c L_0^1 t + L_1^1 x := \mu t + \nu x \quad (\text{a1.10})$$

$\kappa := L_0^0, \lambda := L_1^0 / c, \mu := c L_0^1, \nu := L_1^1$ と定義していますから, (a1.6), (a1.8) を使えばつぎのような条件式が得られます.

$$\kappa^2 = \frac{\mu^2}{c^2} + 1 \quad (\text{a1.11})$$

$$\nu^2 = c^2 \lambda^2 + 1 \quad (\text{a1.12})$$

$$\mu \nu = c^2 \kappa \lambda \quad (\text{a1.13})$$

これらの関係式から κ, λ を消去するために, (a1.13) の両辺を 2 乗すると $(\mu\nu)^2 = c^4 \kappa^2 \lambda^2$ となりますから, 右辺の κ に (a1.11) の表式を用い, λ には (a1.12) を変形した $\lambda^2 = (\nu^2 - 1)/c^2$ を代入すると,

$$(\mu\nu)^2 = c^4 \left(\frac{\mu^2 + 1}{c^2} \right) \frac{\nu^2 - 1}{c^2} = (\mu^2 + 1)(\nu^2 - 1)$$

これを変形すると

$$\mu^2 = c^2(\nu^2 - 1) \quad (\text{a1.14})$$

が得られます. ところが (a1.2) の第 2 式に示すように $L_0^1 = -\beta L_1^1$ でしたから, これを $\mu = cL_0^1$ に代入すると, $\mu = -\beta c\nu = -V\nu$ が得られます. この μ の表式を (a1.14) に代入すると

$$\nu^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} \quad (\text{a1.15})$$

そしてこの ν^2 の表式を使えば, 他の変換パラメータは次式のようにになります.

$$\kappa^2 = \nu^2, \quad \lambda^2 = (\nu^2 - 1)/c^2 = V^2 \nu^2 / c^4 \quad (\text{a1.16})$$

λ^2 は (a1.12) を変形したものであり, κ^2 は (a1.11) より,

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= (V\nu)^2 / c^2 + 1 = \frac{V^2}{c^2} \frac{c^2}{c^2 - V^2} + 1 \\ &= \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \nu^2 \end{aligned}$$

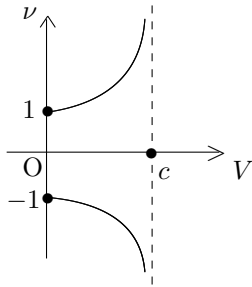


図 2

となります.

つぎに, 変換式 (a1.10) において V を 0 に近づければ, $\mu = -V\nu$ は 0 に, そして x' は x に近づきますから, $x = x \lim_{V \rightarrow 0} \nu$ より $\lim_{V \rightarrow 0} \nu = 1$ ということになります. 一方, (a1.15) より ν は V 軸について対称な単調関数です (図 2 参照). これらの性質から, ν は正値でなければなりませんから, (a1.15) より ν の表式は以下のようにになります.

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{a1.17})$$

さらに, (a1.9) においても ($V \rightarrow 0$) の極限を考えると, (a1.16) の第 2 式より ($\lambda \rightarrow 0$) ですから, $\lim_{V \rightarrow 0} \kappa = 1$ となります. $\kappa^2 = \nu^2$ ですから, κ も V 軸について対称な単調関数です. これらの性質から κ は正値です. したがって, (a1.16) の第 1 式より $\kappa = \nu$ となります. 残るパラメータ λ の符号は, $\mu = -V\nu < 0$ に注意して (a1.13) より $\lambda < 0$ と決まりますから, (a1.16) の第 2 式より $\lambda = -V\nu/c^2$ となります.

よって, 変換式は

$$t' = \nu \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \quad (\text{a1.18})$$

$$x' = \nu (-Vt + x) \quad (\text{a1.19})$$

$V/c := \beta$ と表して ν を γ と書き換えれば, (a1.17) より $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ であり, 座標 (x^μ) を用いれば,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad (\text{a1.20})$$

$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 \quad (\text{a1.21})$$

以上で特殊ローレンツ変換式が導かれました. なお, この変換行列の行列式は +1 です.

付録 2 世界間隔の不変性

二つの慣性系 S および S' の相対速度は一定値 $\mathbf{V}$ とし、慣性系 S を記述するミンコフスキー空間の座標変数を $(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$ とします。ここに、 c は真空内の光の速さです。

そして 2 点間の座標差を (Δx^μ) として

$$s^2 := \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 - (\Delta x^0)^2 \quad (\text{a2.1})$$

で定義される s を 2 点間の世界間隔とよびます。

座標差のみで定義される世界間隔は、 S' の座標系 $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) := (ct', x', y', z')$ では

$$(s')^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x'^i)^2 - (\Delta x'^0)^2 \quad (\text{a2.2})$$

と表されます。 s を構成する $\sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2$ と $(\Delta x^0)^2$ は、どちらも時間 Δt 内の光信号の伝播距離の平方とも解釈できて、この場合の s は 0 に等しくなります。このことはすべての慣性座標系で成り立ちますから、世界間隔は、ある慣性座標系で 0 ならば他の慣性座標系でも 0 であるという条件を課します。(式 (2.3) 参照)

つぎに、この両座標系で表された世界間隔 s と s' との一般的な関係を考えます。

まず平行移動の場合は、2 点間の座標差は両座標系で同一ですから、世界間隔は不変です。そして、一次変換 $x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu + K^\mu$ の場合には、定数項 (K^μ) は平行移動の作用をしますから、世界間隔を変化させません。よって、定数項の無い同次一次変換 $x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu$ を考察します。これについては、つぎの法則が成り立ちます。⁹

[法則] 世界間隔は、同次一次座標変換で不変です

[証明] $(s')^2$ の表式 (a2.2) において、座標変換式 $x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned} (s')^2 &= \sum_{j=1}^3 (L_\mu^j \Delta x^\mu)^2 - (L_\mu^0 \Delta x^\mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 L_\mu^j L_\nu^j \Delta x^\mu \Delta x^\nu - L_\mu^0 L_\nu^0 \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 L_\mu^j L_\nu^j - L_\mu^0 L_\nu^0 \right) \Delta x^\mu \Delta x^\nu \end{aligned}$$

いま、 $\alpha_{\mu\nu} := \sum_{j=1}^3 L_\mu^j L_\nu^j - L_\mu^0 L_\nu^0$ と定義すると $\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$ ですから

$$\begin{aligned} (s')^2 &= \alpha_{\mu\mu} (\Delta x^\mu)^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \alpha_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{jj} (\Delta x^j)^2 + \alpha_{00} (\Delta x^0)^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \alpha_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (\text{a2.3}) \end{aligned}$$

ここで、世界間隔が 0 の場合の条件を適用します。 $s^2 = 0$ つまり $(\Delta x^0)^2 = \sum_{j=1}^3 (\Delta x^j)^2$ のとき、 $(s')^2 = 0$ ですから

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_{jj} (\Delta x^j)^2 + \alpha_{00} \sum_{j=1}^3 (\Delta x^j)^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \alpha_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu &= 0 \\ \text{i.e. } \sum_{j=1}^3 (\alpha_{jj} + \alpha_{00}) (\Delta x^j)^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \alpha_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu &= 0 \quad (\text{a2.4}) \end{aligned}$$

⁹ 以下の議論は、文献 [4] § 34 を参考にしています。

関係式 (a2.4) が任意の $\{\Delta x^\mu\}$ に対して成り立つためには, すべての係数が 0 でなければなりません. よって

$$\alpha_{jj} + \alpha_{00} = 0 \quad , \quad \alpha_{\mu\nu} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 : \mu \neq \nu) \quad (\text{a2.5})$$

これらの係数値を (a2.3) に代入すると

$$\begin{aligned} (s')^2 &= -\alpha_{00} \left(\sum_{j=1}^3 (\Delta x^j)^2 - (\Delta x^0)^2 \right) = -\alpha_{00} s^2 \\ \text{i.e. } (s')^2 &= \alpha s^2 \quad (\text{ただし } \alpha := -\alpha_{00}) \end{aligned} \quad (\text{a2.6})$$

ところで, 両系 S, S' の相対速度は V でしたから, この座標に依存しない α の V への依存性も確認しなければなりません. しかし, 空間の等方性により, 相対速度の方向に依存してはなりませんから, その大きさ (V) のみに依存すると考えられます. そこで, 三つの慣性系 S, S_1, S_2 について, S_i の S に対する相対速度を V_i とし, S_2 の S_1 に対する相対速度を V_{12} とすると, つぎの関係式が成り立ちます.

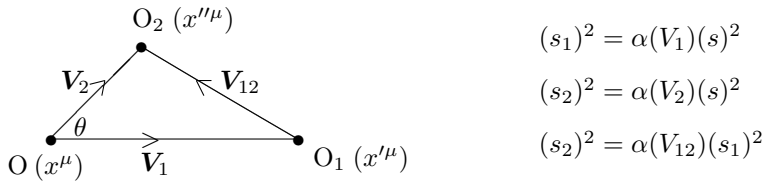


図 3

これらの関係式から, $\alpha(V_2)/\alpha(V_1) = (s_2/s_1)^2 = \alpha(V_{12})$ ですから, V_1 と V_2 との夾角を θ とすれば,

$$\frac{\alpha(V_2)}{\alpha(V_1)} = \alpha(V_{12}) = \alpha \left(\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos \theta} \right) \quad (\text{a2.7})$$

となります. (図 3 参照) 特に $V_2 = 0$ の場合は, 次式のようになります.

$$\alpha(0) = \alpha(V_1)\alpha(V_1) \quad (\text{a2.8})$$

α の定義式 (a2.6) から明らかに $\alpha(0) = 1$ ですから (a2.8) より $(\alpha(V_1))^2 = 1$ が得られますが, 再び $\alpha(0) = 1$ を考慮すれば, $\alpha(V_1) = 1$ と確定し, (a2.6) は $(s')^2 = s^2$ となります. これより $s' = \pm s$ ですが, $s'(V=0) = s(V=0)$ ですから $s' = s$ となり, 世界間隔は不変です.¹⁰[証明終]

参考文献

- [1] 内山 龍雄 訳・解説 『アインシュタイン相対性理論』岩波書店 (2015 年)
§ 3(p.24~p.33) に座標変換の論説があります.
- [2] 内山 龍雄 著 『相対性理論』岩波書店 (1990 年)
第 I 章 § 3(p.12~p.15) にローレンツ変換の解説があります.
- [3] C. メラー 著 永田・伊藤 訳 『相対性理論』みすず書房 (2005 年)
2 章 § 17 に特殊ローレンツ変換の解説があります. 垂直方向の座標の不変性については p.35 参照
- [4] L. ランダウ/ M. リフシッツ 著 水戸 巖 ほか訳 『力学・場の理論』筑摩書房 (2008 年)
9 章 相対論的力学 § 34 に世界間隔の不変性の説明があり, § 36 にローレンツ変換の説明があります.

¹⁰ $\alpha = 1$ と確定しましたから (a2.5) より $\alpha_{00} = -1, \alpha_{jj} = 1$ となり, これらを変換係数 $\{L^\mu_\nu\}$ で表すと, 第 4 節の関係式 (4.2)~(4.4) に他なりません

- [5] 中野 董夫 著 『相対性理論』 岩波書店 (1984 年)
5 章 § 1 に特殊ローレンツ変換の解説があります. 垂直方向の座標の不変性については p.65～p.66 参照
- [6] W. パウリ 著 内山 龍雄 訳 『相対性理論』 講談社 (1979 年)
第 I 編 § 4 (p.30～p.34) にローレンツ変換の解説があります.

第2オイラー定数の数値的評価 - 台形則による -

植田洋平*1

Numerical Estimation for the Second Euler's Constant - in Terms of Trapezoidal Rule -

Yohei Ueda*2

1 はじめに

中西先生は、数学・物理通信 8-9 の「第2オイラー定数」において第2オイラー定数を提案され、秋葉氏は数学・物理通信 8-8 の「ある定積分の解析」において解析的に解かれることを試みられた。

$$I = P \int_0^{\infty} dx \frac{\exp(-x)}{\ln x}. \quad (1.1)$$

この積分は解析的に解くのは難しそうであるため台形則を用いて数値積分を試みる。

2 Euler-Maclaurin の公式

漸近展開である Euler-Maclaurin の公式 [2] で考察する。 C^∞ の関数 $f(x)$ および任意の自然数 m に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b dx f(x) \\ &= I_n(a, b) - \sum_{r=1}^m \frac{h^{2r} B_{2r}}{(2r)!} \left(f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a) \right) + R_m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$I_n(a, b) = h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2} f(b) \right), \quad (2.2)$$

$$R_m = \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} \int_0^1 dt B_{2m}(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{(2m)}(a + kh + ht) \right) = O(h^{2m+1}). \quad (2.3)$$

これをみると $0 < h < 1$ かつ $f(a) = f(b)$ の場合または、台形則の数値積分値 $I_n(a, b)$ が急速に $I(a, b)$ に近づく場合は $f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a) \rightarrow 0$ になり誤差の項が急速に小さくなり誤差が $O(h^{2m+1})$ になることがわかる。これはよく知られていることである [3]。

*1 千葉県柏市

*2 ueda.yohei.0715@gmail.com

3 台形則の適用

$x = \exp(t)$ として変数変換し,

$$I = P \int_0^\infty dx \frac{\exp(-x)}{\ln x} = P \int_{-\infty}^\infty dt \frac{\exp(t - \exp(t))}{t}. \quad (3.1)$$

被積分関数は $+\infty$ で二重指数関数的に減少し, $-\infty$ で指数関数的に減少する. よって台形則でよい結果が得られそうである. $t = 0$ に極がある. これに関しては主値積分をとる. Tayler 展開して, 主値積分を数値計算する代わりに下記の主値積分を考える

$$0 = J = P \int_{-\infty}^\infty dt \frac{1}{t}. \quad (3.2)$$

これは 0 なので積分値に影響しない. 上式を用いて適当な係数 e^{-1} を掛けて, $t = 0$ の極を打ち消し, 以下の積分を数値計算する.

$$I - e^{-1}J = \int_{-\infty}^\infty dt \underbrace{\left(\frac{\exp(t - \exp(t))}{t} - \frac{e^{-1}}{t} \right)}_{\equiv f(t)}. \quad (3.3)$$

数値積分の範囲を $-a = b = R$ としておけば $P \int_{-R}^R t^{-1} dt$ の値は 0 になるので無視でき, Euler-Maclaurin の公式を適用すると区間 $-R < t < R$ の台形則は, 次式となる. ここで $h = R/n$ である. ここで $f(0) = 0$ を考慮した.

$$\begin{aligned} I_{2n}(-R, R) &= I_n(-R, 0) + I_n(0, R) \\ &= h \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(-kh) + \frac{1}{2}f(-R) \right) + h \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(R) \right) \\ &= h \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\exp(-kh - \exp(-kh))}{-kh} + \frac{1}{2} \frac{\exp(-R - \exp(-R))}{-R} \right) \\ &\quad + h \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\exp(kh - \exp(kh))}{kh} + \frac{1}{2} \frac{\exp(R - \exp(R))}{R} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで $e^{-1}t^{-1}$ の数値積分の寄与は, 原点 $t = 0$ 以外打ち消しあって 0 である. 数値積分の精度として極端であるが, 10^{-60} 程度を目標とした. 下記の数値計算では, $|\frac{\exp(kh - \exp(kh))}{kh}| < 10^{-60}$ の値をアンダーフローを避けるため打ち切り 0 とおいた.

n	h	台形則の値 I_{2n}
		-0.154479641320(公式集 [1] の値)
290	$\frac{1}{2}$	-0.15447962834708271345905942358081855583553705658175004811170759968
580	$\frac{1}{4}$	-0.15447964132004269703944935130993661595802423060063493472166532143
1160	$\frac{1}{8}$	-0.15447964132004274469018853480221138183876123324891568487329976888
2320	$\frac{1}{16}$	-0.15447964132004274469018853480221102837738369185167750891909068720
4640	$\frac{1}{32}$	-0.15447964132004274469018853480221102837738369185167750891909068719

背景が灰色の部分は, 数値積分の誤差を表す.

小数点 12 桁まで公式集の値と一致しているが, それ以上の桁数の値については, 収束はしているようであるが正しい値であるか不明である.

4 まとめ

数学・物理通信に載せられるレベルとは思ってはおりませんでした. シンプルな台形則を適用してもそれなりの精度で数値積分できると考えられます. 計算回数はかなり多いですし, 確定的なこととは言えませんが, これは素人の限界です.

参考文献

- [1] 森口, 宇田川, 一松, 岩波『数学公式 I』 微分積分・平面曲線 (岩波書店, 1999)
- [2] 森正武, 『数値解析』 (共立出版, 1985)
- [3] 伊理正夫, 藤野和建, 『数値計算の常識』 (共立出版, 2020)

Spence 関数

矢野 忠^{*1}

Spence Function

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

このノートは 1980 年代半ばころに広島大学の牟田先生のグループに入れてもらって $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ の反応の Feynman グラフの 1 loop vertex のループ運動量の積分を行っていたころに必要があって [1] の Spence 関数の箇所を調べた。[1] にはここで述べたいろいろな関係の導出については書かれていない。これは [2] の付録に掲載されたものの再録である。

1 はじめに

このノートでは Spence 関数について述べる。一般に Feynman グラフのループ運動量積分を行うと最終的に Spence 関数の和で表されることが知られている。その Spence 関数についてのいくつかの有用な等式が [1] に与えられている。ここではそれらの等式の導出を述べる。

2 Spence 関数の定義

まず Spence 関数の定義は

$$\text{Sp}(z) := - \int_0^z dt \frac{\log(1-t)}{t} \quad (2.1)$$

である^{*3}。 $\text{Sp}(z)$ は複素変数 z の解析関数で $z = 1$ から $z = \infty$ までの branch cut をもつ。 (2.1) で $t = z\theta$ とおくと、

$$\text{Sp}(z) = - \int_0^1 d\theta \frac{\log(1-z\theta)}{\theta}$$

となり、これを部分積分すれば、

$$\begin{aligned} \text{Sp}(z) &= -z \int_0^1 d\theta \frac{\log \theta}{1-z\theta} \\ &= \int_0^1 d\theta \frac{\log \theta}{\theta - \frac{1}{z}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

が得られる^{*4}。

したがって、(2.2) を (2.1) の代わりに Spence 関数の定義として用いてもよい。(2.2) の表現では branch cut は $0 \leq \frac{1}{z} \leq 1$ となっている。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 記号 $:=$ は等号の左辺をその右辺で定義することを示す。以前は $\equiv$ で定義を示すことが多かったが、最近は $:=$ で定義を示すことが多くなっている。

^{*4} 付録 1 の注意を参照せよ。

3 Spence 関数の関係式

この節では Spence 関数の間に成立するいくつかの関係式を導く．まず (2.1) を t で部分積分すれば,

$$\mathrm{Sp}(z) = -\log z \log(1-z) - \int_0^z dt \frac{\log t}{1-t}$$

いま (2.1) で $1-t=v$ とおけば,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(z) &= -\log z \log(1-z) + \int_1^{1-z} dv \frac{\log(1-v)}{v} \\ &= -\log z \log(1-z) + \int_0^{1-z} dv \frac{\log(1-v)}{v} - \int_0^1 dv \frac{\log(1-v)}{v} \\ &= -\log z \log(1-z) - \mathrm{Sp}(1-z) + \mathrm{Sp}(1) \end{aligned} \quad (1)$$

したがって

$$\mathrm{Sp}(z) + \mathrm{Sp}(1-z) = \mathrm{Sp}(1) - \log z \log(1-z) \quad (3.1)$$

が得られる．

つぎに $\mathrm{Sp}(-z)$ についての関係式を求めよう． $\mathrm{Sp}(z)$ の定義 (2.1) において $z \rightarrow -z$ と z の符号を変えたと

$$\mathrm{Sp}(-z) = - \int_0^{-z} dt \frac{\log(1-t)}{t} \quad (2)$$

である．

ここで $t = \frac{1}{u}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(-z) &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(1-u)}{u} - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^0 du \frac{\log(1-u)}{u} + \int_0^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(1-u)}{u} - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^0 du \frac{\log(1-u)}{u} - \mathrm{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$A = \int_{-\infty}^0 du \frac{\log(1-u)}{u}, \quad F(z) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \quad (4)$$

とおく．そうすると

$$\mathrm{Sp}(-z) = -\mathrm{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) + A - F(z) \quad (5)$$

となる．

ここで A と $F(z)$ とを求める．まず A は

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^0 du \frac{\log(1-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(1-u)}{u} + \int_{-1}^0 du \frac{\log(1-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(1-u)}{u} - \int_0^{-1} du \frac{\log(1-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(1-u)}{u} + \mathrm{Sp}(-1) \end{aligned} \quad (6)$$

となり，ここで (3) の 1 行目の式で， $z = 1$ とおけば，

$$\int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(1-u)}{u} = \text{Sp}(-1) + \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} \quad (7)$$

となるので，これを (6) へ代入すれば，

$$A = 2\text{Sp}(-1) + \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} \quad (8)$$

となる．一方，(4) の $F(z)$ は

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} + \int_{-1}^{-\frac{1}{z}} du \frac{\log(-u)}{u} \end{aligned} \quad (9)$$

となるが，この最後の項は $u \rightarrow -u$ とおきかえれば，積分ができて

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} + \int_1^{\frac{1}{z}} du \frac{\log u}{u} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} + \frac{1}{2} [\log u]^2 \Big|_1^{\frac{1}{z}} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} du \frac{\log(-u)}{u} + \frac{1}{2} [\log z]^2 \end{aligned} \quad (10)$$

となる．ここで，(8) の A と (10) の $F(z)$ を (5) に代入すれば，残っていた二つの積分は打ち消され，

$$\text{Sp}(-z) + \text{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\text{Sp}(-1) - \frac{1}{2}(\log z)^2 \quad (3.2)$$

が得られる．

さらに x が実変数で $x < 1$ のときの関係式を導く． $\text{Sp}(x)$ の定義から

$$\text{Sp}(x) = - \int_0^x dt \frac{\log(1-t)}{t}$$

である．この定義式において

$$t = -\frac{u}{1-u}, \quad x = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (A)$$

と変数変換して*5，

$$\begin{aligned} \text{Sp}(x) &= \int_0^\alpha du \frac{\log(1-u)}{u(1-u)} \\ &= \int_0^\alpha du \frac{\log(1-u)}{u} + \int_0^\alpha du \frac{\log(1-u)}{1-u} \\ &= -\text{Sp}(\alpha) + \int_0^\alpha du \frac{\log(1-u)}{1-u} \end{aligned}$$

ここで，上の式の最右辺の第 2 項の積分で $1-u = s$ と変数変換し，

$$\alpha = -\frac{x}{1-x}, \quad 1-\alpha = \frac{1}{1-x} \quad (B)$$

*5 この変換 (A) と下の変換 (B) に関しては付録を参照せよ．

となることを用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(x) &= -\mathrm{Sp}(\alpha) - \int_1^{1-\alpha} ds \frac{\log s}{s} \\ &= -\mathrm{Sp}(\alpha) - \frac{1}{2} [\log s]^2 \Big|_1^{1-\alpha} \\ &= -\mathrm{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{2} [\log(1-x)]^2\end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\mathrm{Sp}(x) + \mathrm{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2} [\log(1-x)]^2, \quad (x < 1) \quad (3.3)$$

が求められる。

最後に、 $|z| \leq 1$ のときの Spence 関数のべき級数展開を求めておこう。Spence 関数の定義は

$$\mathrm{Sp}(z) = - \int_0^z dt \frac{\log(1-t)}{t} \quad (2.1)$$

であった。

ここで、 $|z| \leq 1$ であるから、 $\log(1-t)$ を t のべき級数に展開すれば、

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(z) &= \int_0^z dt \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \cdots\right) \\ &= \left[\frac{1}{1^2}t + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{3^2}t^3 + \cdots\right]_0^z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (|z| \leq 1)\end{aligned} \quad (3.4)$$

が得られる。

この (3.4) から

$$\mathrm{Sp}(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.5)$$

$$\mathrm{Sp}(-1) = -\frac{\pi^2}{12} \quad (3.6)$$

が得られる。

また、(3.3) の x に $x = \frac{1}{2}$ を代入して (3.6) を用いれば、

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2 \quad (3.7)$$

も求められる。

(3.5), (3.6) を (3.1), (3.2) に代入すれば、[1] の (F.3), (F.4) が得られる。

4 おわりに

30 年以上前のノートを取り出してきて述べただけだが、岩波の『数学公式』III -特殊関数- にも載っていない特殊な関数、Spence 関数、のいくつかの性質について述べた。

ここで導出を述べた (2.1), (2.2) と (3.1)-(3.7) は [1] の (F.1)-(F.9) に対応している。

世戸憲治さんに感謝します。特に、(3.2) の導出の誤りを指摘してくださり、正しい導出法のご教示と (3.3) の導出の修正をしてくださいました。その他にも入力ミスをたくさん指摘していただきました。ありがとうございます。

5 付録

5.1 付録 1 注意

(2.2) を求めるときに部分積分において $\lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(1-x) = 0$ を用いている.

5.2 付録 2 変換 (A) と (B)

この付録では

$$t = -\frac{u}{1-u}, \quad x = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (\text{A})$$

$$\alpha = -\frac{x}{1-x}, \quad 1-\alpha = \frac{1}{1-x} \quad (\text{B})$$

について述べる.

以前にも出会ったことがあったかもしれないが,

$$t = -\frac{u}{1-u} \quad (\text{A})$$

は不思議な変換である. なぜかといえば, 変換 (A) の逆変換も同じ形の

$$u = -\frac{t}{1-t} \quad (\text{C})$$

となるからである. この変換 (A) はこういう際立った特徴があるから, 名前がついているかと思って調べてみたが, ちょっと検索してみた結果ではわからなかった. またこの変換で $1-t$ を変数変換すると, 新しい変数 u での $1-u$ の逆数となる. すなわち,

$$1-t = \frac{1}{1-u} \quad (\text{D})$$

が得られる.

参考文献

- [1] K-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma and T. Muta, Suppl. Prog. Theor. Phys. No.73, (1982) 1-225
- [2] 矢野忠, 江沢康生, 名島隆一, 若泉誠一, 渡辺敏夫, 愛媛大学工学部紀要, 第 11 巻, 第 2 号 (1987) 9-19

編集後記

2023 年もちょうど年半ばの 6 月 15 日となった。「数学・物理通信」というちょっとかわった雑誌を編集していて感じることは結局のところ意欲 (intension) ということである。雑誌を編集し、発行している私の意欲が重要なことはいうまでもないが、それだけではなく投稿してくださる方がいるということが重要な要素になっている。

私の友人・知人たちの中には大学を退職した後も研究を続けている方がいることはそういう意欲を持続けている人が最近ではかなりいるということを示している。

私などは定年退職前にすでに狭い意味の研究からは離れていたが、ものわかりがわるいので、教育の中に出てくる物理や数学のいろいろなテーマをもっと深く知りたいという欲求が強い。それが数学者の新関章三さんとこの雑誌（サーキュラー）の発行を始める動機となった。

まずは自分がいろいろ調べたことを書くというつもりでこの雑誌の発行をはじめた。これは新関さんも同じ気持ちだったと思う。読者がいるのかどうかはさておき、一風変わったマイナーな雑誌に投稿料も払わないのに投稿してくださる方がおられるという事実はどう考えたらいいのだろうか。よく考えるととてもありがたいことである。

しかし、投稿があれば何でもいいと考えてはいないので、その投稿原稿を掲載するかどうかを決めることには苦労がないわけではない。もっともこのことに関して最近編集委員の世戸憲治さんの貢献がとても大きい。世戸さんに深く感謝する次第である。

(矢野 忠)