

数学・物理通信

13 卷 4 号 2023 年 7 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2023 年 7 月 10 日

目次 (Contents)

1. 回転系の力学	世戸憲治	2
2. シングル j 殻モデルにおける超伝導 (1)	岩崎正春	11
3. $\cos x$ と $\sin x$ の値の求め方	矢野 忠	19
4. 編集後記	世戸憲治	30
1. Mechanics in Rotating Systems	Kenji SETO	2
2. Superconductivity in the Single-j Shell Model (1)	Masaharu IWASAKI	11
3. Numerical Values for $\cos x$ and $\sin x$	Tadashi YANO	19
4. Editorial Comments	Kenji SETO	30

回転系の力学

世戸 憲治 *

Mechanics in Rotating Systems

Kenji SETO*

1 はじめに

ここでは、回転系の内部で発生する仮想的な力である Coriolis 力, Euler 力, 遠心力について述べる. このうち, 遠心力は誰もが知る馴染みのものであるが, Coriolis 力, Euler 力となるとご存知ない人も多いと思われる. ここで, 新しいことは何もないが, その導入方法について, できるかぎり簡便な方法で紹介し, その後で, これら力の具体例である Foucault 振子や高気圧, 低気圧からの風向きについて詳しく議論する.

2 回転系における運動方程式の導入

最初に, 図 1 に示すような回転系を考える. ここでは原点 O から発する角速度ベクトル ω を回転軸とし, 角速度 $\omega = |\omega|$ で回転する系に乗った質量 m の質点を考える. この質点の運動方程式を, 回転系から見て立てるには, どうすればよいかという問題である.

まず, 時刻 t における質点の位置を A , その位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とし, 同じく, dt を微小時間として, 時刻 $t + dt$ における位置を B , 位置ベクトルを $\mathbf{r}(t + dt)$ とする. この時間が dt だけ経過する間に変化した位置ベクトル \overrightarrow{AB} は, 静止系で見ると,

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) \equiv d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

となるが, これを回転系から見たときはどうなるであろうか. この時間が dt だけ経過する間に点 A は, A から角速度ベクトル ω に下ろした垂線の足 D の周りに角度で ωdt だけ回転し点 C に移動してしまう. ここで, ω と $\mathbf{r}(t)$ のなす角を θ とすると, このときの回転半径は, $r \sin \theta$ となるので, AC 間の距離は $r \sin \theta \cdot \omega dt$ となる. したがって, 点 A から点 C に至るベクトルを \overrightarrow{AC} とすると,

$$\overrightarrow{AC} = \omega \times \mathbf{r} dt \quad (2.2)$$

と, ω と \mathbf{r} のベクトル積を用いて表わされる. この現象を回転系で見たときは, この質点は C から B に動いたように見えるので, これを $\overrightarrow{CB} = d'\mathbf{r}$ と書くことにする. 当然ながら, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ なので, (2.1) (2.2)

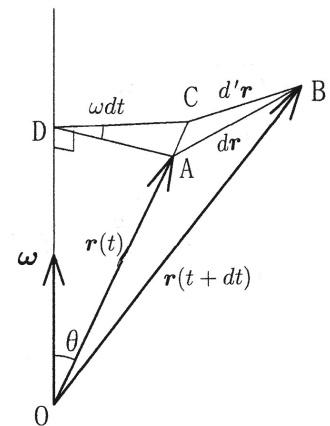


図 1 回転系の微分

* 北海学園大学名誉教授

式を用いて,

$$d\mathbf{r} = d'\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dt \quad (2.3)$$

となる. この両辺を dt で割って書き直すと,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.4)$$

と回転系での時間微分と静止系での時間微分の関係式が得られる. ここでは, これまで位置ベクトル \mathbf{r} に限って議論してきたが, この微分式は, 速度ベクトル, 加速度ベクトルなど他のベクトルに対しても同じく使うことができる. そこで, この式を \mathbf{r} を付けずに,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \quad (2.5)$$

と回転系と静止系での微分演算子の関係式として, 書いておくことにする.

つぎに, 静止系と回転系での加速度の違いを見るために, この式を 2 乗してみると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \\ &= \frac{d'^2}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'}{dt} + \frac{d'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \\ &= \frac{d'^2}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'}{dt} + \left(\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \times + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \end{aligned} \quad (2.6)$$

と計算される. この微分演算子を $m\mathbf{r}$ に作用させ, 適当に右辺と左辺を入れ替えると,

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.7)$$

と, 回転系における質点 m の運動方程式が作られる. ただし, ここでは, (2.5) 式から, $\boldsymbol{\omega}$ の時間微分は回転系と静止系で同じになること, また, $d'\mathbf{r}/dt$ を回転系で見た速度 \mathbf{v}' と書くことにした.

この式右辺の 1 項目は,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

と質点 m に外から実際に作用する力 \mathbf{F} である. これ以降のものは, すべて架空の見掛けの力で, (2.7) 式, 右辺 2 項目から, Coriolis (コリオリ) 力, Euler (オイラー) 力, 遠心力と呼ばれるものである. これら力を, 3 次元座標 (x, y, z) のうち, (x, y) 面が z 軸周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で反時計回りに回転するとき, (x, y) 面内で運動する質量 m の物体の場合について, 簡単に述べておく.

《 Coriolis 力, $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ 》 回転する (x, y) 面内で見た速度を \mathbf{v}' としたとき, その大きさ v' に比例する力 $2m\boldsymbol{\omega} v'$ が進行方向の右向きに作用する.

《 Euler 力, $-m(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}$ 》 回転軸が z 方向で変わらないとしたとき, $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$ は回転方向の加速度を表わす. それ故, この Euler 力是一种の慣性力で, 回転方向とは逆向き方向に大きさ $m r \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ の力が作用することを意味する.

《 遠心力, $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ 》 この力はベクトル 3 重積の公式を使うと $-m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + m\omega^2 \mathbf{r}$ となり, さらに (x, y) 面内の運動に対しては $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = 0$ なので, この力は大きさ $m r \omega^2$ の力が回転の外向き方向に作用する, いわゆる遠心力である.

3 Foucault (フーコー) 振り子

我々は、1日で1回転する地球という回転系の上で生きているので、その影響を示す現象がいくつかある。この節では、そのうちの一つである Foucault 振り子について述べる。地球の回転角速度は $\omega = 2\pi/(24 \times 60 \times 60 \text{ sec}) = 7.272 \times 10^{-5} / \text{sec}$ と非常に小さいものであるが、フランス人の Foucault は 1851 年に、地球の回転を示すための振り子を考案した。

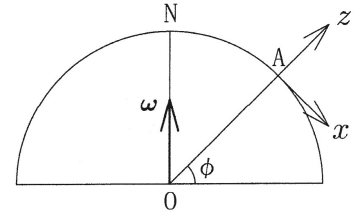


図 2 地球の北半球

ここでは、図 2 に示すように、地上の北緯の度数が ϕ の場所 A でその実験を行うものとし¹⁾、この場所 A から水平南方向に x 軸，東方向に y 軸，真上方向に z 軸をとるものとする。このときの振り子の弦の長さを ℓ ，錘の質量を m ，重力加速度を g とする。この回転系における運動方程式は (2.7) 式であるが、このうち角加速度にあたる $d\omega/dt$ はゼロとし，また，最後の項の遠心力は振り子の錘に作用する重力に比べ無視できるほど小さい，あるいは，重力加速度 g に含めるものとして考慮しないものとする。また，これ以下は，回転系内だけで議論するので，時間微分の d'/dt は，ダッシュを付けなくて d/dt ，あるいは，Newton 流のドットで表わす方法も併用して話を進めることにする。このときの振り子の運動方程式は，

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_T - 2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

で，右辺の \mathbf{F}_g ， \mathbf{F}_T は，それぞれ，錘に作用する重力，および，弦から錘が受ける張力である。これら力を成分で表わすと，弦の張力の大きさを T として，

$$\mathbf{F}_g = (0, 0, -mg), \quad \mathbf{F}_T = \left(-\frac{x}{\ell}T, -\frac{y}{\ell}T, \frac{\ell-z}{\ell}T \right) \quad (3.2)$$

となる。また，Coriolis 力に含まれる地球の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は，この点 A にとった座標系で見ると，

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi) \quad (3.3)$$

と表わされる。以上から，(3.1) 式を成分表示で表わすと，

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{x}{\ell}T + 2m\omega \sin \phi \dot{y} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{y}{\ell}T - 2m\omega \sin \phi \dot{x} - 2m\omega \cos \phi \dot{z} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + \frac{\ell-z}{\ell}T + 2m\omega \cos \phi \dot{y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。実際に，この Foucault 振り子を作るとなると，その振動は何時間も続かなければならないので，弦の長さは相当長く，錘の質量も相当大きくしなければならない。そのためには錘の x, y 方向の変位は弦の長さの比に相当小さく，高さ方向の変位 z はさらに小さいはずである。ここで， $z \approx 0$ と仮定すると，この第 3 式から

$$T = mg \quad (3.5)$$

¹⁾ 南緯のときは ϕ を負にとる。

とおける。このとき、(3.4) の第 1, 第 2 式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x + 2\omega \sin \phi \dot{y}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}y - 2\omega \sin \phi \dot{x} \quad (3.6)$$

と書き換えられ、 x, y に関する 2 元連立微分方程式となる。この方程式の解法はいくつかあるが、ここでは最も簡単と思われる方法を紹介する²⁾。これを解く前に初期条件を、原点から x 方向に初速度 v_0 で出発するものとして、

$$\text{時刻 } t=0 \text{ のとき, } \quad x=0, \quad y=0, \quad \dot{x}=v_0, \quad \dot{y}=0 \quad (3.7)$$

と設定しておく。まず、(3.6) の第 1 式に y を掛け、第 2 式に x を掛けてから、これら 2 つの式の辺々を引き算すると

$$\frac{d\dot{x}}{dt}y - \frac{d\dot{y}}{dt}x = 2\omega \sin \phi (x\dot{x} + y\dot{y}), \quad \text{これを書き換えて} \quad \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = \omega \sin \phi \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \quad (3.8)$$

となるので、両辺を時間で積分して、

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \omega \sin \phi (x^2 + y^2) \quad (3.9)$$

となる。ここで、初期条件 (3.7) から積分定数が入らないことに注意する。これから 2 次元の極座標 (r, θ) を導入して、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.10)$$

を (3.9) 式に代入すると、 r に依存する部分はすべて消えて、

$$\dot{\theta} = -\omega \sin \phi \quad (3.11)$$

となり、これから、初期条件も加味して、

$$\theta = -\omega \sin \phi \cdot t \quad (3.12)$$

と、 θ が時間の関数として解けてしまう。これは地球の回転とは逆方向に、角速度 $\omega \sin \phi$ で振子の振動面が回転することを意味している。したがって、緯度 ϕ が 90 度の北極では 1 日に 1 回転、緯度が ϕ のところでは 1 日に $\sin \phi$ 回転することになる。

あとは、(3.10) 式の \dot{x} の式をもう一度、時間で微分して、

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (3.13)$$

としてから、これを (3.6) の第 1 式に代入し、(3.11) 式を用いると、 $\sin \theta$ に比例する項はすべて消去され、残りの項はすべて $\cos \theta$ が付くので。この $\cos \theta$ で割ると、 r だけの方程式

$$\ddot{r} = -\left[\frac{g}{\ell} + (\omega \sin \phi)^2\right]r \quad (3.14)$$

を得る。これは単振動の方程式であるが、先に述べたように地球の回転速度 ω は非常に小さいので、 ω^2 が付く項は無視することにして、

$$\ddot{r} = -\frac{g}{\ell}r \quad (3.15)$$

となる。これは通常の振子の方程式で、初期条件を考慮して解くと、

²⁾ もう一つの別解法を付録 1 に掲げる。

$$r = \frac{v_0}{\sqrt{g/l}} \sin(\sqrt{g/l} t) \quad (3.16)$$

と解が求められる。まとめると、この振り子は、図3に示すように、通常の振り子のように振動しながら、その振動面が地球の自転とは逆方向にゆっくりと回転していくことになる。ただしこの図は、振動の様子が分かり易いように地球の自転速度を早くしたモデルである。

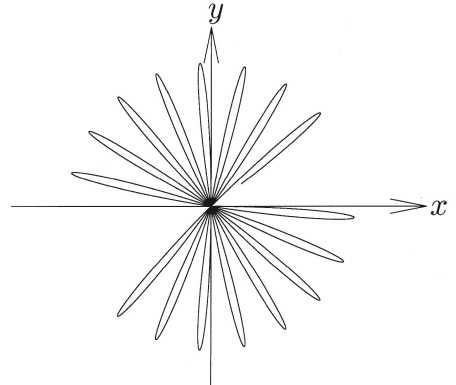


図3 Foucault 振り子の振動

4 高気圧，低気圧の風向き



図4 高気圧，低気圧の風向き

左の図4に示すように、高気圧から風が吹き出すときは、Coriolis 力のために、北半球では風が進む方向の右向きに力を受けるために、右にずれていき、結果として時計回りの渦を巻くように風が吹き出していく。逆に、低気圧で風が中心に集まるときは、これも Coriolis 力の影響を受けて反時計回りに回り込むように風が吹く。これは、ちょっと考えると逆のように感じてしまう。何故かという、低気圧の場合

は風の進行方向の左方向にずれていくからである。ここではこれらの現象について解析してみよう。

空気の任意の点における単位質量部分を考え、この部分の速度ベクトルを \mathbf{v} とする。このときの運動方程式は (3.1) 式のとおりと同じようにして、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \gamma \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (4.1)$$

となる。ここに、 \mathbf{f} は空気の単位質量に作用する気圧勾配による力、すなわち、気圧勾配力³⁾、また、 $-\gamma \mathbf{v}$ は空気と地面の間で発生する摩擦力、最後の項は Coriolis 力である。この Coriolis 力に含まれる地球の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は、緯度 ϕ のところで、(3.3) 式で与えたように、

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega \cos \phi, 0, \omega \sin \phi) \quad (\text{再掲 3.3})$$

のようになるので、風は水平面内で吹くものとして、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ とおくと、

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (-\omega \sin \phi v_y, \omega \sin \phi v_x, -\omega \cos \phi v_y) \quad (4.2)$$

³⁾ 正式には「気圧傾度力」というらしいが、物理屋には「気圧勾配力」のほうが似合っている。これは、空気の圧力を P としたとき、その勾配に負号を付けた $-\nabla P$ に比例する力である。

となる。ただし、ここでは、水平面 (x, y) 内の運動しか扱はないので、この z 成分をゼロとして、

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \implies (-\omega \sin \phi v_y, \omega \sin \phi v_x, 0) = \omega \sin \phi (-v_y, v_x, 0) = \omega \sin \phi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \quad (4.3)$$

と置き換えることにする。ここに、 \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルである。これを方程式 (4.1) に代入すると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \gamma \mathbf{v} - 2\omega \sin \phi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \quad (4.4)$$

となる。気圧勾配力 \mathbf{f} を与えてこの方程式を直接解くのは大変なので、ここでは、速度ベクトル \mathbf{v} が時間に依存しない一定値となる場合を考えることにする。このとき、方程式は、

$$\mathbf{f} - \gamma \mathbf{v} - 2\omega \sin \phi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = 0 \quad (4.5)$$

となる。これは、空気に作用する気圧勾配力、地面から受ける摩擦力、および、Coriolis 力の総和が釣り合っていることを示す。この式から速度ベクトル \mathbf{v} を求めるには、いったん、この式に左から \mathbf{e}_z をベクトル積で掛け、 $\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ となることを使うと、

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{f} - \gamma \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + 2\omega \sin \phi \mathbf{v} = 0 \quad (4.6)$$

となる。さらに、この式と (4.5) 式から $\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}$ を消去すると、速度ベクトル \mathbf{v} が求まり、

$$\mathbf{v} = \frac{\gamma \mathbf{f} - 2\omega \sin \phi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{f})}{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2} \quad (4.7)$$

となる。これから速度ベクトル \mathbf{v} は、気圧勾配力 \mathbf{f} の方向を向くわけではなく、Coriolis 力のために、緯度 ϕ が正の北半球では、力 \mathbf{f} が向く方向の右側方向にずれることになる。これをより詳しく見るには、2次元の極座標 (r, θ) を導入して、気圧勾配力 \mathbf{f} を、

$$\mathbf{f} = f(r)\mathbf{e}_r \quad (4.8)$$

とおいてみる。ここに、 \mathbf{e}_r は r 方向の単位ベクトルであり、高気圧から風が吹き出すときと、低気圧に風が吹き込むときの違いは、

$$\text{高気圧のとき, } f(r) > 0, \quad \text{低気圧のとき, } f(r) < 0 \quad (4.9)$$

で区別される。この (4.8) 式を (4.7) 式に代入し、 θ 方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_θ として、 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ となることを使うと、

$$\mathbf{v} = \frac{\gamma \mathbf{e}_r - 2\omega \sin \phi \mathbf{e}_\theta}{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2} f(r) \quad (4.10)$$

となる。この式から、風の色度 \mathbf{v} がどのように傾くかは、高気圧、低気圧に関係なく、この式の分子 $\gamma \mathbf{e}_r - 2\omega \sin \phi \mathbf{e}_\theta$ で決まる。高気圧、低気圧が関係してくるのは、(4.9) 式から、風が吹く曲線の形はそのまま、高気圧のとき風は外向き方向、低気圧のときは内向き方向と向きが変わるだけである。

ここでもし、摩擦抵抗が無視できるときは、(4.10) 式で $\gamma = 0$ として、

$$\mathbf{v} = -\frac{f(r)}{2\omega \sin \phi} \mathbf{e}_\theta \quad (4.11)$$

となるので、これは一定半径で中心の周りに回転する風、すなわち、竜巻、あるいはつむじ風のようなものになる。ただし、竜巻の場合、風は回転しながら上方に上がっていくので、ここでの議論をそのまま当てはめてはいけなからう。なお、図 4 を描くための計算方法については付録 2 に掲載してある。

5 おわりに

ここでは、回転系の内部で発生する仮想的な力である Coriolis 力, Euler 力, 遠心力について述べた。このうち Coriolis 力は、1835 年にフランス人の Gaspard-Gustave Coriolis によって導入されたものであるが、遠心力に比べると、一般人にはあまり知られていないと思われる。先に述べたように、同じくフランス人の Jean Bernard Léon Foucault が、地球の自転による Coriolis 力の証拠としての Foucault 振子を考案したのが、その 16 年後の 1851 年である。最初の実験は、自宅で、錘の質量 5kg, 弦の長さ 2m の振子であった。2 度目の実験は、パリ天文台で行なわれ、このときの錘は自宅の時と同じ 5kg のものを使用した。弦の長さは 11m と長くなった。3 度目の実験は、パンテオン宮殿の大ホールで行われ、弦の長さはホールの天井の高さに合わせ、67m と長いものになり、錘の質量も 28kg と、格段に大型の装置に変わっていった。現在では、振子の振動に合わせて、下から磁石の力を錘に作用させ、振動が長続きするように作られた Foucault 振子がある。この装置では、弦の長さは、せいぜい 1m 程度ですむ。

私がこの原稿を書く気になったのは、高気圧、低気圧の風向きがよく理解できなかったからである。つまり、高気圧のときは、気圧勾配力のため、空気は気圧の中心から外向き方向に押され、外向き方向に動こうとするが、Coriolis 力のため、北半球では進行方向の右方向に押され、結果として、時計回りに回転しながら、外方向に押し出されていく。これはよく理解できるが、しかし、低気圧のときはそう簡単ではない。低気圧のときは、気圧勾配力が気圧の中心方向に働くので、風は中心方向に動こうとするが、Coriolis 力が進行方向の右向きに作用するので、右に逸れながら動き出す。そこで、少し動いたところから見ると、気圧の中心が左に逸れたように見えるので、その地点から左方向に行こうとするが、Coriolis 力が右方向に作用して、真っすぐ中心方向よりも少し右にずれた方向に動く。この繰り返しが図 4 の低気圧の風向きになるということである。

6 付録 1 : 方程式 (3.6) の別解法

方程式 (3.6) には複素数を用いた別解法がある。この方程式を再掲すると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x + 2\omega \sin \phi \dot{y}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}y - 2\omega \sin \phi \dot{x} \quad (\text{再掲 3.6})$$

である。この第 2 式に虚数の i を掛けてから、第 1 式と辺々を加え、

$$x + iy = z \quad (6.1)$$

とおいてしまうと、方程式は

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}z - 2i\omega \sin \phi \frac{dz}{dt} \quad (6.2)$$

と、1 個の複素数 z の方程式になるので、容易に解くことができるようになる。これを解く前に (3.7) 式から z に対する初期条件を求めておくと、

$$\text{時刻 } t = 0 \text{ のとき } \quad z = 0, \quad \dot{z} = v_0 \quad (6.3)$$

となる。ここで、 $z = \exp(i\lambda t)$ とおいて、方程式に代入すると、

$$\lambda^2 + 2\omega \sin \phi \lambda - \frac{g}{\ell} = 0 \quad (6.4)$$

となるので, これから λ は,

$$\lambda = -\omega \sin \phi \pm \sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell} \quad (6.5)$$

と求まる. これから, z の一般解は A, B を任意定数として,

$$z = A \exp \left[i \left(-\omega \sin \phi + \sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell} \right) t \right] + B \exp \left[i \left(-\omega \sin \phi - \sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell} \right) t \right] \quad (6.6)$$

となる. これに, (6.3) の初期条件を付加すると,

$$A + B = 0, \quad i \sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell} (A - B) = v_0 \quad (6.7)$$

となり, A, B は

$$A = -B = \frac{v_0}{2i \sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell}} \quad (6.8)$$

と求まる. これを (6.6) の z に代入して,

$$z = \frac{v_0 \exp(-i\omega \sin \phi t)}{\sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell}} \sin(\sqrt{(\omega \sin \phi)^2 + g/\ell} t) \quad (6.9)$$

となるが, ここで前の 3 節でやったように, 平方根の中の $(\omega \sin \phi)^2$ は g/ℓ に比べ十分に小さいのでこれを無視することにして,

$$z = \frac{v_0 \exp(-i\omega \sin \phi t)}{\sqrt{g/\ell}} \sin(\sqrt{g/\ell} t) \quad (6.10)$$

と近似しておく. あとはこの実部, 虚部が, それぞれ, x, y になるので,

$$x = \frac{v_0 \cos(\omega \sin \phi t)}{\sqrt{g/\ell}} \sin(\sqrt{g/\ell} t), \quad y = -\frac{v_0 \sin(\omega \sin \phi t)}{\sqrt{g/\ell}} \sin(\sqrt{g/\ell} t) \quad (6.11)$$

と最終的に求められる. これを極座標で表示したものが, 3 節の (3.12) (3.16) 式である.

7 付録 2 : 図 4 を描くための計算

ここで, 図 4 を描くためにどのような計算をしたかについて, 簡単に述べておく. (4.10) 式を再掲すると

$$\mathbf{v} = \frac{\gamma \mathbf{e}_r - 2\omega \sin \phi \mathbf{e}_\theta}{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2} f(r) \quad (\text{再掲 4.10})$$

となる. これを書き直して,

$$\mathbf{v} = \frac{\gamma \mathbf{e}_r - 2\omega \sin \phi \mathbf{e}_\theta}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} \frac{f(r)}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} \quad (7.1)$$

とし, ここで,

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{2\omega \sin \phi}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} = \sin \alpha \quad (7.2)$$

および,

$$\frac{f(r)}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} = F(r) \quad (7.3)$$

と置き直すと, (7.1) 式は,

$$\mathbf{v} = (\cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \mathbf{e}_\theta) F(r) \quad (7.4)$$

となる. この e_r, e_θ を元の直交座標 (x, y) の x, y 方向の単位ベクトル e_x, e_y で表わすと,

$$e_r = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y, \quad e_\theta = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y \quad (7.5)$$

となるので, (7.4) 式は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \left[(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) e_x + (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) e_y \right] F(r) \\ &= \left[\cos(\theta - \alpha) e_x + \sin(\theta - \alpha) e_y \right] F(r) \end{aligned} \quad (7.6)$$

となるので, 速度ベクトル \boldsymbol{v} は, 気圧勾配力によって押される方向 θ よりも角度 α だけ小さい方向に向くことになる.

図 4 を描くにあたっては, さらに $F(r)$ を r に反比例するものとして,

$$F(r) = \frac{a}{r} \quad (7.7)$$

とおいた. a は適当な比例係数で, 高気圧のときは正, 低気圧のときは負である. また, 気圧の中心から一定距離だけ離れたところから出発し, (7.6) (7.7) 式にしたがって速度ベクトル \boldsymbol{v} に微小時間を掛け, つぎの移動場所を計算しながら, つぎつぎと曲線を描いていったものが図 4 である.

シングル j 殻モデルにおける超伝導 (1)

Superconductivity in the Single- j Shell Model (1)

岩崎正春*

Masaharu IWASAKI

1 はじめに—シングル j 殻モデルとは

よく知られているように、原子核は陽子と中性子（これらを総称して核子と呼ぶ）からできている。それらは原子核という狭い空間に閉じ込められ、核力という強い短距離力によって結び付けられている。したがって、はじめ原子核は液体のようなものと思われていた（ボアの液滴モデル）。液体ならば原子核の結合エネルギーは核子数に比例するはずである。ところが実際は、いくつかの核子数の所で不連続性があることが明らかになった。このときの核子数をマジックナンバーという。この事情は、ちょうど原子の中の電子系と同じであり、原子核においても原子の中の電子と同じように「核子の殻構造」が存在することを暗示する。

そこで適当な平均場を仮定して核子の定常状態を計算したところ、比較的エネルギーの近い軌道の一つの集団にまとめると何個かの集団が得られた。そのとき核子数が 2, 8, 20, 40, 70, ... のとき結合エネルギーに不連続が存在することが示された。一方、実験によるとマジックナンバーは、2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の所に現れる。これを説明するため、平均場に強いスピン軌道結合 (LS 力) を導入した。このとき核子の状態は、軌道・スピン角運動量ではなく全角運動量 j で分類される。 LS 力の強さを適当に決めると、原子核の上記マジックナンバーが見事に再現された。ここに原子核の $j-j$ 結合殻モデルが確立した。

その後の原子核の理論的展開において、 $j-j$ 結合殻モデルは共通の足場として低エネルギー現象の説明に有効であることが示された。そのとき通常エネルギーの低い閉じた殻を無視し、最外殻のみに着目する。これを理想化したものがシングル j 殻モデルである。つまり最外殻を全角運動量 j の単一の仮想的殻で代表させ、その z 成分の作る $(2j+1)$ 次元空間の中で核子系を考える。また、現実の原

*高知大学名誉教授 (miwasaki@cure.ocn.ne.jp)

子核は、陽子と中性子の内部自由度を持つが、ここではそれらを見捨て電荷をもたない単純フェルミオンが存在すると考える。これはかなり単純化したモデルではあるが、とにかく計算は簡単になる。

以下において、このモデルがもつ原子核の種々な運動の側面、特に超伝導についてを考察する。そのため今回は粒子間に対相互作用のみ存在する単純な場合を取り扱い、より現実的な相互作用については次回に議論する。

2 対相互作用

われわれが今から考察する対象は、シングル j 殻 (j は半整数) の中の N 個の粒子系である。粒子としては核子を想定しているが、フェルミオンであれば何でもよい。各 1 粒子状態は角運動量の大きさ j とその z 成分 m で記述され、それらの 1 粒子エネルギーは縮退している。したがって状態の総数は $\Omega = 2j + 1$ となる。各状態の生成・消滅演算子を a_m^\dagger, a_m とする。これらはフェルミオンの反交換関係を満たし、このとき系のハミルトニアンはつぎのように書かれる。

$$H = \sum_{m>0} \varepsilon_0 (a_m^\dagger a_m + a_{-m}^\dagger a_{-m}) - G \sum_{m>0} \sum_{m'>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger a_{-m'} a_{m'}. \quad (2.1)$$

右辺第一項は 1 粒子状態 m のエネルギー (ε_0) を表し、第 2 項は強い短距離引力を表す対相互作用である。通常、相互作用は引力であり ($-G < 0$) 結合定数 G は正の値をとる。このハミルトニアンの定常状態を求めるにあたって 2 つの方法で解を求めよう。一つは準スピンを用いる代数的方法であり、他は平均場近似 (BCS 理論) を用いて定常状態とそのエネルギーを計算する。

2.1 準スピン形式 (厳密解)

まず次の対演算子が $SU(2)$ 代数を作ることに注目する。 ($m > 0$)

$$J_m^+ = a_m^\dagger a_{-m}^\dagger, \quad J_m^- = a_{-m} a_m, \quad J_m^0 = \frac{1}{2}(a_m^\dagger a_m + a_{-m}^\dagger a_{-m} - 1).$$

この準スピンは状態 ($\pm m$) のみ含むので、異なる ($\pm m'$) の準スピンと交換する。したがって準スピンの総和もまた $SU(2)$ 代数を満たす。

$$J^+ = \sum_{m>0} J_m^+, \quad J^- = \sum_{m>0} J_m^-, \quad J^0 = \sum_{m>0} J_m^0 = \frac{2N - \Omega}{4}.$$

最後の等式中の N は粒子数演算子、 Ω は状態の総数 ($2j + 1$) を表す。このとき系のハミルトニアンは全準スピンだけで書かれることに注意しよう。

$$H = \varepsilon_0 \left(2J^0 + \frac{\Omega}{2} \right) - G J^+ J^- = \varepsilon_0 \left(2J^0 + \frac{\Omega}{2} \right) - G [J^2 - (J^0)^2 + J^0]. \quad (2.2)$$

つまりハミルトニアンが $\mathbf{J}^2 = J(J+1)$ と $J^0 = M$ のみで書かれたので、系のエネルギーは J と M の2つの量子数で指定できたことになる。粒子数 N を与えると、 M は $(2N - \Omega)/4$ と定まる。このとき全準スピンの大きさ J の取りうる値はつぎのようになる。

$$|M|, |M| + 1, |M| + 2, \dots, J_{\max}.$$

J の取りうる最大値 J_{\max} は粒子数 N の偶奇により次の値をとる： $\Omega/4$ (偶), $(\Omega - 2)/4$ (奇)。励起状態については非対粒子数 s (セニオリティと呼ぶ) を用いて

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{2} - s \right) \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

となる。右辺の $1/2$ は各サイトの準スピンの大きさを、 $(\Omega/2 - s)$ は状態対 ($\pm m$) の中で共に占有されているまたは共に空いている対の総数を表している。セニオリティを用いて系のエネルギーはつぎのように求められる。

$$E_s = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4} (N - s)(\Omega - N - s + 2). \quad (2.3)$$

つぎに各定常状態についてももう少し詳しく見てみよう。

(A) 基底状態 ($N = \text{偶}$)

エネルギーの最低状態は (2.1) より $s = 0$ の状態なのでエネルギーは、(2.3) で $s = 0$ とおけば

$$E_0 = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4} N(\Omega - N + 2) \quad (2.4)$$

で与えられることが分かる。基底状態については状態対 ($\pm m$) が共に占有されているか共に空いているかどちらかである。状態ベクトルを書けば

$$|\Psi_0\rangle = \left| J_{\max} = \frac{\Omega}{4}, M = \frac{2N - \Omega}{2} \right\rangle \propto (J^+)^{N/2} |0\rangle = \left(\sum_{m>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle. \quad (2.5)$$

[証明] $|0\rangle$ は粒子のない状態 (真空) であるから

$$J^+ J^- |0\rangle = 0, \quad J^0 |0\rangle = -\frac{\Omega}{4} |0\rangle.$$

したがって

$$\mathbf{J}^2 |0\rangle = (J^+ J^- + (J^0)^2 - J^0) |0\rangle = \frac{\Omega}{4} \left(\frac{\Omega}{4} + 1 \right) |0\rangle,$$

であるから $|0\rangle = |J = \Omega/4, M = -\Omega/4\rangle$ 。この状態に J^+ を $N/2$ 回作用すると上記の基底状態が得られる。

[証明終]

結果をみると、2粒子対の状態は各 $\pm m$ 状態に均等に分布している。基底状態はこの特定の状態にすべての対が凝縮した「ボーズ凝縮状態」を示している。その意味で一種の「秩序状態」を表している。ただ、凝縮状態がすべてこの形で書かれるとは限らない。つぎのような例もある。

$$a_{m_1}^\dagger a_{-m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger a_{-m_2}^\dagger \cdots a_{m_{N/2}}^\dagger a_{-m_{N/2}}^\dagger |0\rangle \propto \left(\sum_{m>0} f_m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle.$$

右辺で $f_m = 1 (m \leq m_{N/2})$, $f_m = 0 (m > m_{N/2})$ と置くと、この状態はスレーター行列式に対応する状態を表している。

(B) 励起状態 ($N = \text{偶}$)

第一励起状態は $s = 2$ の状態である。したがってそのエネルギーは

$$E_2 = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4}(N-2)(\Omega - N), \quad (2.6)$$

であるから、基底状態とのエネルギーギャップは、

$$\Delta E = E_2 - E_0 = \frac{1}{2}G\Omega.$$

となり、粒子数に依存しない定数である。励起状態ベクトルは $|m| \neq |m'|$ としてつぎのように書ける。

$$\left| J = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{2} - 2 \right), M = \frac{2N - \Omega}{4} \right\rangle \propto a_m^\dagger a_{m'}^\dagger |\Psi_0\rangle \propto a_m^\dagger a_{-m'}^\dagger (J^+)^{(N-2)/2} |0\rangle. \quad (2.7)$$

最後の項は $N - 2$ の基底状態から2個の粒子を生成した状態を表している。

[証明] 右辺を $[a_m, J_m^+] = \pm a_{-m}^\dagger$ (\pm は m の正負を表す) を利用してつぎのように変形する。

$$a_m^\dagger a_{m'}^\dagger (J^+)^{N/2} |0\rangle = [a_m^\dagger a_{m'}^\dagger, (J^+)^{N/2}] |0\rangle = \pm \frac{N}{2} (J^+)^{N/2-1} a_m^\dagger a_{m'}^\dagger |0\rangle.$$

右辺の状態に J^2 を作用させると次式を得る

$$J^2 a_m^\dagger a_{m'}^\dagger (J^+)^{N/2} |0\rangle = \left(\frac{\Omega}{4} - 1 \right) \frac{\Omega}{4} a_m^\dagger a_{m'}^\dagger (J^+)^{N/2} |0\rangle.$$

すなわちこの状態の準スピン角運動量の大きさは $(\Omega/4 - 1)$ となる。

[証明終]

特別な場合として $m = -m'$ のときは、つぎのように変形すると

$$\begin{aligned} J^2 a_m^\dagger a_{-m}^\dagger (J^+)^{\frac{N-2}{2}} |0\rangle &= (J^+)^{\frac{N-2}{2}} (J^+ J^- + (J^0)^2 - J^0) a_m^\dagger a_{-m}^\dagger |0\rangle \\ &= |\Psi_0\rangle + \left(\frac{\Omega}{4} - 1 \right) \frac{\Omega}{4} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger (J^+)^{\frac{N-2}{2}} |0\rangle \end{aligned}$$

この状態は準スピンの全角運動量の固有状態にはならない。つまりエネルギーの固有状態にはなっていないことになる。また、 $m = -m'$ の場合は $(a_m^\dagger)^2 = 0$ より状態は零になり存在しない。

一般にもっと高い励起状態はつぎのように表せる。

$$\begin{aligned} & a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \cdots a_{m_k}^\dagger a_{m_{k+1}} a_{m_{k+2}} \cdots a_{m_{2k}} |\Psi_0\rangle \\ & \propto a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \cdots a_{m_k}^\dagger a_{-m_{k+1}}^\dagger a_{-m_{k+2}}^\dagger \cdots a_{-m_{2k}}^\dagger (J^+)^{\frac{N-2k}{2}} |0\rangle \end{aligned}$$

ただし、 $2k$ 個の量 $|m_i|$ ($i = 1, 2, \dots, 2k$) は同じものはないとする。したがって $2k$ は前述のセニオリティ s になっていることに注意しよう。上式の証明は2粒子の場合の(2.7)式と同様に行われるので省く。ここではこの状態が確かにエネルギーの固有状態になっていることを確かめておこう。この状態に \mathbf{J}^2 を作用すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 (a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \cdots a_{m_{2k}}^\dagger) (J^+)^{\frac{N-2k}{2}} |0\rangle &= (J^+)^{\frac{N-2k}{2}} \mathbf{J}^2 (a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \cdots a_{m_{2k}}^\dagger) |0\rangle \\ &= \left(\frac{\Omega - 2k}{4}\right) \left(\frac{\Omega - 2k}{4} + 1\right) (a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \cdots a_{m_{2k}}^\dagger) (J^+)^{\frac{N-2k}{2}} |0\rangle \end{aligned}$$

となり、準スピンの大きさは $(\Omega - 2k)/4 = (\Omega - s)/4$ となる。したがってエネルギー固有値は

$$E = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4} (N - 2k)(\Omega - N - 2k + 2).$$

となり、以前に求めた $E_s = E_{2k}$ と一致する。

(C) 奇数粒子系 ($N = \text{奇}$)

奇数粒子系はかならず対を作らない粒子を一つ以上もつ。 $J_{max} = (\Omega - 2)/4$ であるから基底状態はつぎのように書ける。 ($s = 1$)

$$\begin{aligned} \left| J = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{2} - 1 \right), M = \frac{2N - \Omega}{4} \right\rangle &\propto a_m^\dagger (J^+)^{(N-1)/2} |0\rangle \\ &= a_m^\dagger \left(\sum_{m>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right)^{(N-1)/2} |0\rangle. \end{aligned}$$

m は任意に取れるので基底状態は N 重に縮退していることになる。励起状態についても N が偶数の場合と同じように構成することができる。

2.2 平均場近似 (BCS 理論)

以上説明したとおり，シングル j 殻モデルにおいて対相互作用をもつ簡単なモデルでは系の厳密解が得られた．つぎに現実の系でよく知られている BCS 理論による取り扱いについて簡単に議論する．BCS 近似については種々なアプローチがあるが，ここでは平易な平均場近似によって取り扱ってみよう．まず対演算子を 2 つの部分に分ける．

$$a_m^\dagger a_{-m}^\dagger = \left\langle a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right\rangle_0 + \left(a_m^\dagger a_{-m}^\dagger - \left\langle a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right\rangle_0 \right) \equiv \left\langle a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right\rangle_0 + \delta \left(a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \right).$$

右辺第 1 項は対演算子の平均値 (c 数) を表し，第 2 項がそこからの揺らぎを表している (演算子)．この式をハミルトニアン (2.1) へ代入し，揺らぎの 2 次の項を小さいとして無視する．その結果は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned} H' &= H - \lambda N \\ &= \sum_{m>0} \tilde{\varepsilon}_0 \left(a_m^\dagger a_m + a_{-m}^\dagger a_{-m} \right) - \sum_{m>0} \left(\Delta a_m^\dagger a_{-m}^\dagger + \Delta^* a_{-m} a_m \right) + \frac{1}{G} |\Delta|^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

この表式について説明を加えよう．いま状態として粒子数の一定でない状態まで考慮しているので化学ポテンシャル λ (ラグランジュ乗数) を導入したので， $\tilde{\varepsilon}_0 \equiv \varepsilon_0 - \lambda$ である．また，対演算子の基底状態に関する期待値としてつぎの量を導入した．

$$\Delta \equiv G \left\langle \sum_{m>0} a_{-m} a_m \right\rangle_0.$$

さて，近似されたハミルトニアン (2.8) は演算子に関する 2 次形式であるのでよく知られた方法で対角化できる．(Bogoliubov 変換)

$$\begin{cases} a_m = u_m \alpha_m + v_m \alpha_{-m}^\dagger \\ a_{-m} = u_m \alpha_{-m} - v_m \alpha_m^\dagger \end{cases}$$

右辺の $\alpha_m^\dagger, \alpha_m$ は新たに導入された準粒子の生成・消滅演算子である．また係数は条件 $u_m^2 + v_m^2 = 1$ を満たす c 数である．以後の展開はよく知られた事柄なので結果のみ記す．ハミルトニアンは準粒子を用いてつぎのように対角化される．

$$H' = \left(\tilde{\varepsilon}_0 N - \frac{\Delta^2}{G} \right) + \sum_{m>0} E \left(\alpha_m^\dagger \alpha_m + \alpha_{-m}^\dagger \alpha_{-m} \right). \quad (2.9)$$

ここで準粒子のエネルギーは $E \equiv \sqrt{\tilde{\varepsilon}_0^2 + \Delta^2}$ である．また，係数は

$$u_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{E} \right), \quad v_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{E} \right)$$

で与えられ、このモデルでは u_m, v_m は状態 m に無関係な定数となる。つぎに粒子数および平均場に関する自己無撞着条件（自己矛盾のない条件）より、 λ および Δ が求まる。

$$\lambda = \varepsilon_0 - \frac{G}{4}(\Omega - 2N) \quad , \quad \Delta = \frac{G\Omega}{2} \sqrt{\frac{N}{\Omega} \left(1 - \frac{N}{\Omega}\right)}.$$

つまり通常のギャップ方程式は簡単に解けたことになる。これらの結果により、準粒子のギャップエネルギーは有限値 $E = G\Omega/4$ となり、系は「超伝導状態」にあることになる。

基底状態および第1励起状態のエネルギーは、それぞれ次のように与えられる。

$$E_0 = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4} N(\Omega - N), \quad (2.10)$$

および

$$E_2 = E_0 + 2E = \varepsilon_0 N - \frac{G}{4} N(\Omega - N - 2). \quad (2.11)$$

前に求めた厳密解の結果 (2.4) と (2.6) と比べると、 $1/N$ の誤差の範囲で一致することが分かる。ただし、 $N=0, \Omega$ の近くは除く。

つぎに状態ベクトルについて平均場近似でどのように表されるか見てみよう。話の順序を逆にして、厳密解の基底状態から BCS 状態を導いてみる。まず、

$$|\Psi_0\rangle = (J^+)^{N/2} |0\rangle \sim \exp(fJ^+) |0\rangle = \exp\left(f \sum_{m>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle.$$

右辺の f は後で決められる定数としておく。右辺をさらに変形すると

$$\exp\left(f \sum_{m>0} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle = \prod_{m>0} \exp\left(f a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle = \prod_{m>0} \exp\left(1 + f a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle.$$

基底状態（BCS 真空）は準粒子の真空であるから、

$$\alpha_m \left(1 + f a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle = \left(u a_m - v a_{-m}^\dagger\right) \left(1 + f a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle = \left(-v + u f\right) a_{-m}^\dagger |0\rangle = 0,$$

に注意すると $f = v/u$ となり、粒子数の誤差を無視する近似のもとで、平均場近似での基底状態は BCS の基底状態に帰着することが示された。

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{m>0} \exp\left(u + v a_m^\dagger a_{-m}^\dagger\right) |0\rangle. \quad (2.12)$$

3 まとめ

シングル j 殻モデルについて2つの方法を用いて解析した。一つは準スピンを用いる代数的方法で、近似する必要はなくモデルの厳密解が得られた。他方、平

均場近似を用いて従来のBCS理論による解が求められた。両者の基底状態およびエネルギースペクトルを計算し、結果は低エネルギー状態に限って言えば $1/N$ の誤差の範囲で一致することが確かめられた。単純なシングル j 殻モデルの枠内とはいえ、平均場近似が予想以上に系を正確に記述していることが示された。相転移に関しては、有限自由度の多体系であるから厳密には存在しないが、全準スピンのみで表現される「秩序状態」は考えることができる。ちょうど崎田による集団場の方法と同じである。言い換えると粒子がすべてペアを作っている状態を秩序状態（集団場で記述される状態）であると定義すると、系の基底状態は常に「秩序状態」（超伝導状態）にあることがわかる。

参考文献

- [1] 高木修二，丸森寿夫編「原子核論」（岩波講座 現代物理学の基礎（第2版）9）。
- [2] 崎田文二，「ゲージ理論と集団場」素研 62-6 (1981-3)。

cos x と sin x の値の求め方

矢野 忠*¹

Numerical Values for cos x and sin x

Tadashi YANO*²

1 はじめに

いまでは電卓とかパソコンとかコンピュータとかがあって、cos x と sin x の値とか tan x の値はほぼ瞬時にその数値がわかる時代になっている。もっとも私の若いときなどまだそういうものがなかったので、せいぜい計算尺を使って有効数字3桁の数値を知るのがやっとであった。いまはそういう時代ではないのだが、どうやって三角関数表をつくったのかを知っている人は、高校で数学として三角関数を学んだ人でも少ないのではないだろうか。しかし、そういうことでいいのだろうか。これはそういう問題意識から出発したノートである。

2 30°, 45°, 60° の三角関数の値

ここで三角関数の値というとき、cos x , sin x のことを指すとす。tan x はこの2つの関数値がわかれば求められるからである。

30°, 45°, 60° の三角関数の値はだれでも知っているはずである。私は「数学とはもう関係ないです」とか、俺は「数学のことはまったく忘れた」とかいう方でもこれらの角度の cos x , sin x の値はぜひ思い出してほしい。もし忘れてしまっているなら。

問 2.1 と問 2.2 の問の形で与えておこう。

(問 2.1) 一辺が1の正方形を考えて、それを一つの対角線でわけると2つの二等辺直角三角形ができる。この直角二等辺三角形の斜辺は $\sqrt{2}$ となることから、cos 45°, sin 45°, tan 45° の値を求めよ (図 2.1 参照)。

(解) 三角比の余弦 cos, 正弦 sin, 正接 tan の定義にしたがって、図 2.1 を参照して

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45^\circ = 1$$

と求められる。

(問 2.2) 一辺が2の正三角形を考えて、その頂点の一つからそれに対する辺に垂線を下ろすと正三角形が二つの直角三角形に分けられる。この直角三角形の三辺の長さが1, 2, $\sqrt{3}$ であることから cos 60°, sin 60°, tan 60° の値と cos 30°, sin 30°, tan 30° との値を求めよ (図 2.2 参照)。

(解) 三角比の余弦 cos, 正弦 sin, 正接 tan の定義にしたがって、図 2.2 を参照して

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

が求められる。

*¹ 元愛媛大学工学部

*² yanotad@earth.ocn.ne.jp

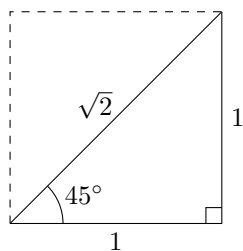


図 2.1 (正方形を二分割してできる) 直角二等辺三角形

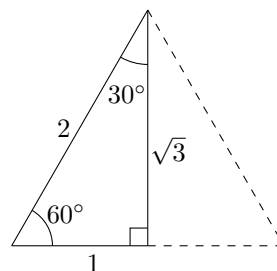


図 2.2 (正三角形を二分割してできる) 直角三角形

また、この場合には

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \sin 30^\circ \\ \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ \\ \tan 60^\circ &= \frac{1}{\tan 30^\circ}\end{aligned}$$

であることもわかる。これは偶然ではなく余角の公式の特別の場合となっている。

図 2.2 では $x = 60^\circ$ の $\cos x, \sin x$ を見るのは簡単だが、 $x = 30^\circ$ の $\cos x, \sin x$ を見るのはちょっと難しい。紙面を 90° 時計方向に回転して右の方から角度 30° を見るとよい。角度 30° を左側においた図を図 2.2 とは別にもう一つ描いた図を載せている親切なテキストもある [1]。これは図 2.2 の点線部分の直角三角形を反時計方向に 90° だけ回転して得られた図だと言ってもよい。

3 加法定理を用いれば

三角関数の加法定理を用いれば、 $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ, 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ とか $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ の三角関数の値を求めることができる^{*3}。

まず加法定理を書いておこう。

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3.1)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3.2)$$

である。

$$x + y = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \quad (3.3)$$

$$x + y = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ \quad (3.4)$$

$$x - y = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \quad (3.5)$$

^{*3} $0^\circ = 30^\circ - 30^\circ$ とか $90^\circ = 30^\circ + 60^\circ$ であるから 0° と 90° の $\cos x, \sin x$ の値を加法定理から求めることもできるが、そういう面倒なことをしないで、円の動径がまったく動かないとき、 0° のときは直角三角形は横長につぶれて長さ 1 の線分となるので $\cos 0^\circ = 1, \sin 0^\circ = 0$ となり、動径が反時計方向に 90° のときは直角三角形は縦長につぶれて長さ 1 の線分になるので、 $\cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1$ となると考えた方がよい。

の \cos, \sin の値は加法定理から

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(45^\circ + 60^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}\tag{3.11}$$

が $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の \cos, \sin の値からすぐ求められる.

4 半角の公式を用いれば

まず半角の公式の導出を簡単に復習しておこう.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\tag{4.1}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x\tag{4.2}$$

を辺々を加えれば,

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x\tag{4.3}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}\tag{4.4}$$

であり, (4.1) から (4.2) を辺々減じれば,

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x\tag{4.5}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\tag{4.6}$$

と半角の公式が得られる。

これらの半角の公式を用いれば、 $2x = 30, 45^\circ$ のときには、その半角の $x = 15^\circ, 22.5^\circ$ に対する三角関数の値が求められる。

まずは $x = 15^\circ$ に対する三角関数の値を求めよう。

$$\begin{aligned}\cos^2 15^\circ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 + \sqrt{3}) \\ \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3}) \\ \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\end{aligned}\tag{4.7}$$

が求められる*4。 15° の三角関数値が求められると 15° の半角の 7.5° だとかそのまた半角の 3.75° での値が求められるであろう。

同様に $2x = 45^\circ$ のときには

$$\begin{aligned}\cos^2 22.5^\circ &= \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 + \sqrt{2}) \\ \cos 22.5^\circ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ \sin^2 22.5^\circ &= \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2}) \\ \sin 22.5^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}\tag{4.9}$$

が求められる。同様にその半角の 11.5° や 5.625° での三角関数値が求められるのは 15° のときと同様である。

*4 $\cos 15^\circ$ の値は (3.10) と (4.7) との二つの表し方があり、 $\sin 15^\circ$ にも (3.11) と (4.8) の二つの表し方がある。これらの値は同じ値である。詳しくは付録 1 を参照。

5 余角の公式を用いれば

うまい具合に余角の公式と3倍角の公式を用いれば、 $\sin 18^\circ$ を求めることができる。この値を知れば、 $\cos 18^\circ$ はもちろんであるが、 18° の2倍角の 36° 、その他の 54° や 72° の三角関数の値を求めることができる。[2]にはその求め方が図形を用いて説明されている。しかし、ここでは代数的な方法で求めてみよう [3]。

まずその基本となるのは $\sin A$ である。この角を $A = 18^\circ$ としよう。このとき、

$$A = 18^\circ, 2A = 36^\circ, 3A = 54^\circ, 4A = 72^\circ \quad (5.1)$$

を考えることにしよう。ここで $5A = 90^\circ$ となることに注意する。

すなわち、 A と $4A$ は互いに余角であり、また $2A$ と $3A$ とは互いに余角である。

いま $\cos 3A$ を考えれば、余角の公式によって

$$\cos 3A = \cos(90^\circ - 2A) = \sin 2A \quad (5.2)$$

が成り立つ。ここで $\cos 3A$ に3倍角の公式を、 $\sin 2A$ に倍角の公式を用いれば、

$$4\cos^3 A - 3\cos A = 2\sin A \cos A \quad (5.3)$$

となる*5。 $A = 18^\circ$ だから、 $\cos A \neq 0$ であるので、上式の両辺を $\cos A$ でわれば、

$$4\cos^2 A - 3 = 2\sin A \quad (5.4)$$

が得られる。ここで、 $\cos^2 A$ を $\sin^2 A$ を用いて表せば、

$$4(1 - \sin^2 A) - 3 - 2\sin A = 0 \quad (5.5)$$

となる。いま $x = \sin A$ とおけば

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (5.6)$$

となるので、 x の値を求めると

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad (5.7)$$

が得られる。いま $x = \sin A > 0$ であるから、

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (5.8)$$

となる。この x の値はおよそ0.3090であるから $-1 \leq \sin A \leq 1$ の条件をみたしているので解としてとることができる。

すなわち、

$$\sin A = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad (5.9)$$

この値がわかれば、これから

$$\begin{aligned} \cos^2 A &= 1 - \sin^2 A \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \end{aligned} \quad (5.10)$$

*5 $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ と $\sin 2A = 2\sin A \cos A$ であることを思い出しておく。3倍角の公式の導出は付録2を参照せよ。

であるから

$$\cos A = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad (5.11)$$

と求められる.

$\cos 2A$ は倍角の公式から

$$\begin{aligned} \cos 2A &= 1 - 2\sin^2 A \\ &= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \quad (5.12)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sin^2 2A &= 1 - \cos^2 2A \\ &= 1 - \left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]^2 \\ &= \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \end{aligned} \quad (5.13)$$

であり,

$$\sin 2A = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \quad (5.14)$$

である.

これらの $A, 2A$ に対する三角関数の値が求められると, それら角の余角である $4A, 3A$ に対する三角関数の値を求めることができる.

$$\begin{aligned} \cos 3A &= \cos(90^\circ - 2A) \\ &= \sin 2A \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \sin 3A &= \sin(90^\circ - 2A) \\ &= \cos 2A \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \quad (5.16)$$

となり, また同様に

$$\begin{aligned} \cos 4A &= \cos(90^\circ - A) \\ &= \sin A \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \sin 4A &= \sin(90^\circ - A) \\ &= \cos A \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる.

6 テイラー展開を用いれば

高校数学での微分学では学ばないが、少し高級な微分学では関数のテイラー展開を学ぶ。これは関数 $f(x)$ を無限のべき級数として

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (6.1)$$

と表して、未定の係数 a_0, a_1, a_2, \dots を微分係数を用いて決める。そのためには関数 $f(x)$ は無限回微分可能でなければならない。

具体的に $f(x)$ が $\cos x$ であれば、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (6.2)$$

また $\sin x$ であれば、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6.3)$$

である。

この場合にはそれぞれ $\cos x$ と $\sin x$ とかの $x = 0$ のまわりのテイラー展開（またはマクローリン展開）という。

一見とても複雑な無限級数展開であるような気がするが、みかけほど複雑ではない。これらの無限べき級数展開は $\cos x$ と $\sin x$ の導関数を知っていれば、簡単に導ける式である。これらの式を用いて任意の x の値に対して $\cos x$ と $\sin x$ の値を求めることができる。ただし、いままで度数表で測った角度に対して、 $\cos x$ と $\sin x$ の値を求めてきたが、テイラー展開で関数値を求めるときには、弧度法によって角度を測っている。

弧度法での角度 x の定義は

$$x = \frac{l}{r} \quad (6.4)$$

で行われる。ここで l は半径 r の円の中心角 x に対する円弧の長さであり、 r は円の半径である。度数法で測った角 180° が弧度法の $\pi(\text{rad})$ である。すなわち、

$$180^\circ = \pi \quad (6.5)$$

と表す。 π はもちろん円周率である。なぜなら、一直線のなす角は度数表では 180° であるが、これは弧度法では

$$x = \frac{\pi r}{r} = \pi \quad (6.6)$$

となるからである。というのも半円周の円弧の長さは πr であるから、上の式が成り立つ。

微分学を知っていれば、

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad (6.7)$$

$$\frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x \quad (6.8)$$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x \quad (6.9)$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \quad (6.10)$$

となる。すなわち、4回続けて微分すると元の関数に戻ってくる。いま初めの関数を $\cos x$ にとったが、これは初めの関数が $\sin x$ であれば、4回続けて微分すると元の関数 $\sin x$ にもどるのはすぐにわかるであろう。

さらに、前の (6.2) の無限べき級数を仮定し、またこの $\cos x$ の無限級数が項別微分できることを仮定すれば、 $\cos x$ を x で微分すれば、 $-\sin x$ になることは

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos x)}{dx} &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots \\ &= -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= -\sin x \end{aligned} \tag{6.11}$$

であることからわかる。このような議論をしていけば、上の微分公式の全部を示すことができる。実は無限級数が各項ごとに微分できるということを証明すべきであったのだが。

余計な話に首を突っ込んでしまったが、ともかくも $\cos x$ と $\sin x$ の $x = 0$ のまわりのテイラー展開を用いれば、任意の角（弧度法）での $\cos x$ と $\sin x$ の値を求めることができる。有効数字が小数点以下 10 桁を得るには x^{11} までの項の和を求めればよいと [4] に述べられている。

また $\cos x$ と $\sin x$ は周期 2π の周期関数であることとか三角関数の還元公式を用いれば、角度が 0 から $\pi/2$ までの値を知れば、それ以外の値はあらためて計算する必要がない。

7 おわりに

6 節で述べたテイラー展開を高校数学では普通には教えないので、三角関数の値をどうやって求めるかはブラックボックスでわからないままにされている。しかし、そのことがこのままではいいはずがない。

またもう一つ問題なのは、なぜ 10 桁にもおよぶ精確な三角関数表がつけられたのかについてその必要性の説明が数学の歴史書においてあまり詳しくは述べられていないことである。占星術と天文学とか、はたまた測量術とかにおいて三角関数の表が必要とされたから、精度のいい表がつけられたのだとは思いますが、それらについての説明があまりにもすくないので、その重要性がもうひとつピンとこない。

8 付録

8.1 $\cos 15^\circ$ と $\sin 15^\circ$ の値

$\cos 15^\circ$ の値に関しては (3.10) と (4.7) との二つの表し方があり、また $\sin 15^\circ$ の値に関しては (3.11) と (4.8) の二つの表し方がある。これらについてここで検討する。これらが互いに一致しないとどちらかがまちがっている可能性がある。

まず、 $\cos 15^\circ$ から検討しよう。(3.10) の方が簡単なので (4.7) から (3.10) を導出することを考えよう。(4.7) の

二重根号をはずしてそれが (3.10) となることを示す.

$$\begin{aligned}
 \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2 + 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6 + 2 + 2\sqrt{6 \cdot 2}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

となるので, (3.10) と (4.7) とが一致することがわかる.

つぎに, $\sin 15^\circ$ を検討しよう. (3.11) の方が簡単なので (4.8) から (3.11) を導出することを考えよう. (4.8) の二重根号をはずしてそれが (3.11) となることを示す.

$$\begin{aligned}
 \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2 - 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{12}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{6 \cdot 2}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

となるので, (3.11) と (4.8) とが一致することがわかる.

高校数学で学んだ二重根号の外し方を忘れていたので, [6] であわてて二重根号の外し方を復習した.

8.2 付録 2 3倍角の公式の導出

加法定理を使って3倍角の公式の導出をする [5]. まず $\cos 3x$ の公式から始めよう.

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \cos(2x + x) \\
 &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
 &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\
 &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\
 &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

つぎに $\sin 3x$ の公式は

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) \\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\ &= \sin x[2(1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x)] \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}\tag{8.4}$$

である。この公式の覚え方を佐々木重吉先生（故人、元愛媛大学助教授）から聞いた記憶があるが、その記憶法がどうだったか覚えていない。残念である。

私ならどうするかという試みの一つを以下に記す。

$\cos 3x$ はすべて $\cos x$ とその 3 乗 $\cos^3 x$ の 1 次結合で表され、 $\sin 3x$ はすべて $\sin x$ とその 3 乗 $\sin^3 x$ の 1 次結合で表されることを覚えておく。後はその係数 a, b をどう決めるかである。

すなわち、 $\cos 3x$ のときは

$$\cos 3x = a \cos^3 x + b \cos x\tag{8.5}$$

とおけば、 $x = 0$ のとき $\cos x = 1$ と $\cos 3x = 1$ である。また $x = \frac{\pi}{4}$ のとき $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ また $\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、この 2 つの x の値から

$$x = 0 \quad \text{のとき} \quad a + b = 1\tag{8.6}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{のとき} \quad \frac{a}{2} + b = -1\tag{8.7}$$

から $a = 4, b = -3$ が求められる。

また $\sin 3x$ のときは

$$\sin 3x = a \sin^3 x + b \sin x\tag{8.8}$$

とおけば、 $x = \frac{\pi}{2}$ のときは $\sin x = 1$ と $\sin 3x = -1$ である。また $x = \frac{\pi}{4}$ のときは $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と $\sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、2 つの x の値から

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad a + b = -1\tag{8.9}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{のとき} \quad \frac{a}{2} + b = 1\tag{8.10}$$

から $a = -4, b = 3$ が求められる。

8.3 付録 3 平方根の求め方

実は本文では平方根とか二重の平方根号が使われていて、三角関数の値が小数では与えられていない。それでこの本文に述べたままでは実は十分な答えを与えたとはいえない。

平方根の近似値を求める方法はいろいろある。そのうちのいくつかについてすでに愛数協（愛媛県数学教育協議会）の機関誌「研究と実践」に述べたことがあるので、ここではそれらを引用するだけにとどめておきたい [7], [8], [9]。まだレビューをしていない平方根の近似の求め方についても機会があれば、レポートしたいと思っている。また、これらの旧稿も点検した上で「数学・物理通信」に再掲載したいと考えている。

(2023.7.5)

参考文献

- [1] 坂江正, 『ピタゴラスからオイラーまで』, (海鳴社, 2019) 28-29
- [2] 坂江正, 『ピタゴラスからオイラーまで』, (海鳴社, 2019) 38-39
- [3] 秋山武太郎, 『わかる三角法』(日新出版, 1960) 1 高校数学 03
- [4] 森口繁一, 『数値計算工学』(岩波書店, 19589) 6-8
- [5] 坂江正, 『ピタゴラスからオイラーまで』, (海鳴社, 2019) 174-175
- [6] 高橋一雄, 『語りかける高校数学』 数I編 (ベレ出版, 2006) 199-204
- [7] 矢野忠, 平方根の近似値 1 - Newton 法による -, 研究と実践 (愛数協) No. 111 (2012.4) 30-36
- [8] 矢野忠, 平方根の近似値 2 - バビロニアの算法 -, 研究と実践 (愛数協) No. 112 (2012.8) 24-28
- [9] 矢野忠, 平方根の近似値 3 - 2 項展開の利用 -, 研究と実践 (愛数協) No. 114 (2013.5) 1-6

編集後記

本誌「数学・物理通信」に何度か投稿していただいた小方厚さんのブログを読んでいたら、つぎのようなことが書かれていた。最近の日本は科学技術の面で世界に遅れをとっている。1つに、H3 ロケットの打ち上げ失敗、2つ目に、民間初の月着陸船の失敗、3つ目に、マイナンバーカードの記録ミス問題が挙げられている。その他として、半導体や自動運転車の開発製造では中国に追い越されそうだし、コロナワクチンや人工知能 (AI) の開発ではアメリカに及ばなかった、等々、数え上げるときりがない。一時期は、日本は科学技術の面で世界をリードしていたはずなのに、情けないことである。どうして、こんなことになったのだろうか。

その理由の第一は、いまの日本人は皆が忙しすぎて、物事をじっくり考える時間がないのではないか。第二に、いまの教育方法に問題があるのではないかとということである。私たちが子供のころは、公立高校に入学するには1学区1高校制だったので、受験勉強はほとんどしなくても自分が住んでいる近くの高校に入ることができた。しかし、今は多学区多高校制のため、高校の格差が大きく、良い高校に入るには、中学生のうちからすべての科目にわたって、まんべんなく勉強しなければならない。これでは、高校に入ってから勉強疲れて、やる気が薄れてしまうのではと思われる。本来ならば、高校に入ってから勉強がその人の将来を決めるはずのものである。だいたい、人間はそんなにすべてのことに万能である必要はなく、自分の好きなことだけに精魂込めて頑張ってもらえば良いというのが、本来の姿であるべきである。さらに言えば、各人各様の個性を伸ばすような教育体系に変えていくべきときではないかと考えている。

もう一つ、勝手なことを言わせてもらおうと、新聞には、日本の月着陸船が失敗に終わったのはソフトウェアの不具合によるものと書いてあった。これは将来、日本人が月に行くことを目指しているのかも知れないが、私から見ると、どうせ月に行ったところで、水も空気もないところに人間が住める訳はなく、行くだけ無駄、そんなことをするのは、エネルギーをはじめ、地球上の限りある貴重な資源の無駄遣いでしかない。今年の夏は、世界各地で、観測史上最高の気温を記録しているという。これら人間の能力や地上の資源は、地球温暖化対策や環境保全問題などのもっと我々に直接的で有益なことに使ってほしいと願うのは、私だけではないだろう。

余計な話が長くなりましたが、本号も私の「回転系の力学」、岩崎正春さんの「シングル j 殻モデルにおける超伝導 (1)」、編集長の矢野忠さんの「 $\cos x, \sin x$ の値の求め方」の3編の論文を載せることができました。私のは、高気圧から風が吹き出すとき地球自転による Coriolis 力のため、風が時計回りに渦を巻きながら吹き出すのは理解できるが、低気圧のとき風が反時計回りに吹き込むのが理解できずに悩んでいた。今回この問題を解決すべく、努力して書いてみたものである。岩崎さんのものは、原子核のシェルモデルに関するもので、専門外の私には大変難解で理解に苦しむところもあるが、新しい理論体系の確立のために役立つものと思われる。最後の矢野さんのものは三角関数 \sin, \cos の値の求め方について書いたものである。例えば、角度が 30 度、45 度、60 度の \sin, \cos を求めることは、高校で数学を学んだ人なら、すぐに答えられないとしても、思い出してもらえらるだろう。しかし、18 度や 36 度の \sin, \cos を求めるとなると、そう簡単ではない。これは私も知らなかったが、今回初めて教えていただいた。

(世戸憲治)