

数学・物理通信

13 卷 5 号 2023 年 9 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2023 年 9 月 22 日

目次 (Contents)

1. 回転系の力学 (2)	世戸憲治	2
2. 質量を持つばねで作られた懸垂線	世戸憲治	7
3. 四元数 (補遺 2) (改訂版)	矢野 忠	13
4. 家中でクイズを (改訂版)	矢野 忠	21
4. 編集後記	世戸憲治	27
1. Mechanics in Rotating Systems (2)	Kenji SETO	2
2. Catenary Made of Spring with Mass	Kenji SETO	7
3. The Quarternions (Appendix 2) (Revised Version)	Tadashi YANO	13
4. Solving a Quize in the Family	Tadashi YANO	21
5. Editorial Comments	Kenji SETO	27

回転系の力学 (2)

世戸 憲治*

Mechanics in Rotating Systems (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「回転系の力学」(『数学・物理通信』13巻4号)で、高気圧、低気圧の風向きを議論した。しかし、そのときは、風の世界速度ベクトル \mathbf{v} を時間に依存せずに場所だけに依存するものとして、計算してきた。今回は、この速度ベクトルを時間の関数として議論することにする。ただし、この速度ベクトル \mathbf{v} を時間の関数とした場合、解析的に厳密解を求めることは困難であり、ここでは数値的に解曲線を求めることで満足することにする。

2 解析方法

解くべき方程式は、前回求めたように、高気圧、低気圧の中心を原点として、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = f(r)\mathbf{e}_r - \gamma\mathbf{v} - 2\omega \sin\phi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) \quad (2.1)$$

である。ここで、 \mathbf{v} は水平面 $(x, y, 0)$ 内における風の世界速度ベクトル、右辺の2項目は風と地上の間で発生する単位質量あたりの摩擦力を表し、 γ がその係数である。最後の項は風の単位質量に働く Coriolis 力で、 ω は地球の自転角速度、 ϕ は考えている地点の緯度、 \mathbf{e}_z はその点における上向き方向 (z 方向) の単位ベクトルである。ここで、 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}$ は、 \mathbf{e}_z と \mathbf{v} のベクトル積である。また、右辺1項目の $f(r)\mathbf{e}_r$ は、場所 $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ における単位質量あたりの気圧勾配力、その方向は \mathbf{r} 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ とし、その大きさは気圧中心からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の関数 $f(r)$ とした。さらにここでは、一つのモデルとして、この大きさ $f(r)$ を、

$$f(r) = \frac{a}{r}, \quad r \geq L_0 \quad (2.2)$$

と置くことにし、気圧勾配力は、圧力中心から半径 L_0 の外側で作用し、距離 r に反比例して弱まるものとする。ここで、 a は速度の2乗の次元を持つ定数で、高気圧のときは正、低気圧のときは負の値をとる。

この方程式 (2.1) を、(2.2) 式を用いて成分表示すると、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ として、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{a}{r^2}x - \gamma v_x + 2\omega \sin\phi v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r^2}y - \gamma v_y - 2\omega \sin\phi v_x \quad (2.3)$$

となる。ここで、これら2式の右辺における x, y に極座標 r, θ 、また、 v_x, v_y に極座標 v, φ を導入して¹⁾、

$$(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta), \quad (v_x, v_y) = (v \cos\varphi, v \sin\varphi) \quad (2.4)$$

* 北海学園大学名誉教授

¹⁾ 緯度に使った ϕ と、この \mathbf{v} の極座標に使う φ を区別すること。

と置くことにする。これで方程式 (2.3) は,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{a}{r} \cos \theta - \gamma v \cos \varphi + 2\omega \sin \phi v \sin \varphi, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r} \sin \theta - \gamma v \sin \varphi - 2\omega \sin \phi v \cos \varphi \quad (2.5)$$

となる。以下、この方程式を数値的に解くにあたり、3 個のパラメーター $a, \gamma, 2\omega \sin \phi$ を減らすために変数の無次元化を行う。

まず、 γ, ω が時間の逆次元を持つことに注意して、時間の次元を持つ定数 T_0 を

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} \quad (2.6)$$

と定義し、また、(2.2) 式で用いた高気圧、低気圧の中心の大きさを L_0 とする。これら 2 個の定数 T_0, L_0 を用いてつぎのように各変数を無次元化し、

$$r \longrightarrow L_0 r, \quad t \longrightarrow T_0 t, \quad \mathbf{v} \longrightarrow \frac{L_0}{T_0} \mathbf{v}, \quad a \longrightarrow \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 a \quad (2.7)$$

と置き換える。結果として、方程式 (2.5) は、無次元化された変数 r, t, \mathbf{v}, a を用いて、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{a}{r} \cos \theta - \gamma T_0 v \cos \varphi + 2\omega \sin \phi T_0 v \sin \varphi, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r} \sin \theta - \gamma T_0 v \sin \varphi - 2\omega \sin \phi T_0 v \cos \varphi \quad (2.8)$$

となるが、ここで、さらに、角度 α を

$$\gamma T_0 \left(= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} \right) = \cos \alpha, \quad 2\omega \sin \phi T_0 \left(= \frac{2\omega \sin \phi}{\sqrt{\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2}} \right) = \sin \alpha \quad (2.9)$$

となるように定義する。これで、方程式は

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{a}{r} \cos \theta - v \cos(\varphi + \alpha), \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r} \sin \theta - v \sin(\varphi + \alpha) \quad (2.10)$$

と簡単化され、方程式に含まれるパラメーターは a, α の 2 個となる。

3 数値計算

初めに、高気圧の場合に限定して議論することにする。方程式 (2.10) を数値的に解くにあたって、無次元化したパラメーター a, α を、

$$a = 0.5, \quad \alpha = \frac{\pi}{5} \quad (3.1)$$

と設定しておく。これは前回の論文で用いたものと同じ値である。さらに、 $t = 0$ における初期条件をつぎのように設定しておく。

$$\begin{aligned} \text{初期位置} \quad r &= 1, & \theta &= 0 \text{ から } 2\pi \text{ まで } \pi/6 \text{ きざみ} \\ \text{初速度} \quad v &= 1, & \varphi &= 0 \text{ から } 2\pi \text{ まで } \pi/6 \text{ きざみ.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

これから、Descartes 座標での位置と速度が

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (v_x, v_y) = (v \cos \varphi, v \sin \varphi) \quad (3.3)$$

と決まる。

実際の数値解法は、いま、時刻 t における位置 (x, y) と速度 (v_x, v_y) が分かったとすると、これらを極表示したときの変数 r, θ および、 v, φ が

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \varphi = \arctan(v_y/v_x) \quad (3.4)$$

と求められる。これら変数を用いて時間発展させるには、 dt を微小時間として、この dt だけ経過したときの位置は

$$x(t + dt) = x(t) + v_x(t)dt, \quad y(t + dt) = y(t) + v_y(t)dt \quad (3.5)$$

と計算され、また、速度の方は、方程式 (2.10) から

$$\begin{aligned} v_x(t + dt) &= v_x(t) + \left[\frac{a}{r(t)} \cos \theta(t) - v(t) \cos(\varphi(t) + \alpha) \right] dt \\ v_y(t + dt) &= v_y(t) + \left[\frac{a}{r(t)} \sin \theta(t) - v(t) \sin(\varphi(t) + \alpha) \right] dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

と求められる。あとはこの繰り返しでつぎつぎと位置と速度が求まっていく。

つぎに、低気圧の場合について考察する。この場合は風の進む向きを逆にしなければならないので、(3.1) 式は

$$a = -0.5, \quad \alpha = \frac{\pi}{5} \quad (3.7)$$

と a の符号を替えておく。また、初期位置の r, θ 、初速度の v, φ に関しては、高気圧のときのものと比較しやすいように、高気圧のときの終点位置、終点速度を、それぞれ、低気圧のときの出発位置、出発速度とした。

結果のグラフを左の図 1 に示す。高気圧から風が吹き出すときと、低気圧に風が吹き込むときでは、当然、風の向きは逆になるが、この図をよく見るとそれらの曲線の形は微妙に違いがあるのが分かる。すなわち、高気圧から風が吹き出すときは初めの曲率が大きく変化し、その後急に曲率が小さくなるのに対し、低気圧の方は曲率変化がなだらかである。

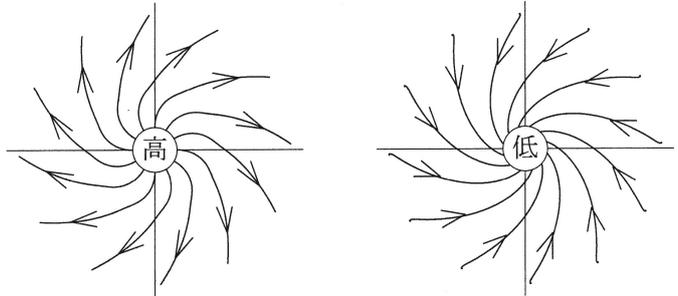


図 1 高気圧、低気圧の風向き

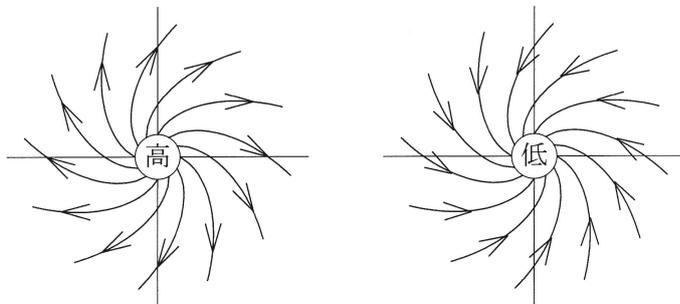


図 2 前回の高気圧、低気圧の風向き

前回の風の速度ベクトルが時間に依存しないとした解析では、高気圧、低気圧の曲線の形はまったく同じで、風の向きだけが異なっていた。参考までに前回のグラフも載せておく。これらのグラフを比べてみると、全体として、それほど大きな違いはなく、前回の速度ベクトルが場所依存性は持つが、時間には依存しないとした近似もそれほど悪いものではなかったことになる。

4 おわりに

前回のものを書いたときから、低気圧のときの風の渦巻きが反時計回りになるのが不思議な気がして、頭にこびりついていた。しかしこれはまったく正しいことで、今回の数値計算で示したように、間違いではない。そこでいろいろと調べてみたところ、北半球で時計回りに渦を巻く別の現象もあることが分かった。それは、「慣性円流」と呼ばれるものである。以下このことについて、簡単に述べておく。

この慣性円流は、気圧勾配力とは無関係に、Coriolis 力だけで起こる現象で、空气中、あるいは海水中で起こるというものである。いまこの空気なり、海水の質量が m の部分を考えて、これがある速度 v で動き出したとする。このとき、これまで扱ってきたように、大きさ $2m\omega \sin \phi v$ の Coriolis 力が進行方向の右向きに作用する。結果として右方向にどんどんずれて行き、一定半径 R の円を描くようになる。このときは、Coriolis 力と円を描くときの遠心力とが釣り合っていると考えられるので、

$$2m\omega \sin \phi v = m \frac{v^2}{R} \quad (4.1)$$

となり、これから円の半径 R を求めると、

$$R = \frac{v}{2\omega \sin \phi} \quad (4.2)$$

となる。また、このときの円を1周する周期 T は

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi}{\omega \sin \phi} \quad (4.3)$$

と速度 v には無関係に、地球の自転角速度 ω と緯度の ϕ だけで決まる。

上記のことを、私が住む札幌に当てはめて計算してみる。札幌の緯度は、およそ北緯 $\phi = 43$ 度なので、地球の自転角速度 ω と合わせて、

$$2\omega \sin \phi = 2 \times (2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60)) \times \sin(\pi / 180 \times 43) = 9.919 \times 10^{-5} / \text{s} \doteq 1 \times 10^{-4} / \text{s} \quad (4.4)$$

となる。ここでは先に、空中で起こる慣性円流を考えることにして、風速 v を中程度の強さ $v = 10 \text{ m/s}$ とすると回転円の半径は $R = 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km}$ となる。またこのときの円を1周する時間は $T = 6.283 \times 10^4 \text{ s} = 17.45 \text{ h}$ と求められる。つまり、半日と5時間半近くもかかることになる。

つぎに、海水中で起こる慣性円流として、海水の速度を、これも中程度の $v = 0.1 \text{ m/s}$ とすると、回転半径は $R = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$ となり、円を1周する周期は先の例と同じく $T = 17.45 \text{ h}$ となる。この (4.3) 式で見るように周期 T は速度 v に依存せず決まるので、これは、空気あるいは海水が同心円状に同じ位相で回転できることを意味している。

これを書いているうちに、鳴門の渦潮を思い出したが、これは慣性円流とはまったく異なるものである。鳴門の渦潮の回転速度は慣性円流に比べ桁違いに大きい。これは月の引力のために満潮、干潮が起こるときに、太平洋側と瀬戸内海側にある海水が四国と淡路島との狭い鳴門海峡を通るときに起こる現象である。このとき、海峡の中心部は海が深いために流れが速いが、海峡の周辺で岸に近いところは当然、海は浅いので流れが遅くなる。そのために、例えば、瀬戸内海側から太平洋側に海水が流れるときは、海峡の中央線を境にして、淡路島側では反時計回りの渦ができ、海峡の中央線より四国側では時計回りの渦ができるというものである。

5 付録：(2.1) 式を解析的に解く試み

今回のものを書く前に考えていたことは、どうにかして方程式 (2.1) を解析的に解くかということであった。しかしながらこの試みは失敗に終わってしまった。どのように失敗したかを、ここで述べておこう。

方程式 (2.1) に左から z 方向の単位ベクトル \mathbf{e}_z をベクトル積で掛けると、

$$\frac{d(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v})}{dt} = f(r)\mathbf{e}_\theta - \gamma(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + 2\omega \sin \phi \mathbf{v} \quad (5.1)$$

となる。ただしここでは、 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ となること、また、右辺最後の項は $\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ となることを用いた。一方、(2.1) 式から $\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}$ を求めると、

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = \frac{1}{2\omega \sin \phi} \left(f(r)\mathbf{e}_r - \gamma \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (5.2)$$

となるので、これを (5.1) 式の 2 カ所に代入して、整理すると

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + [\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2] \mathbf{v} = \left[\left(\gamma + \frac{d}{dt} \right) \mathbf{e}_r - 2\omega \sin \phi \mathbf{e}_\theta \right] f(r) \quad (5.3)$$

という方程式が得られる。初めは浅はかにも、この \mathbf{v} に関する線形非同次方程式を解けばよいのかと考えてしまった。しかしこれは大きな誤解であった。何故なら、右辺に使われている $r, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は、いずれも時間の関数で、それらはこの方程式が解けて初めて分かるものだからである。実際、この方程式を、 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}/r)$ を用いて、 \mathbf{r} だけで書き直すと、

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + 2\gamma \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + [\gamma^2 + (2\omega \sin \phi)^2] \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\left(\gamma + \frac{d}{dt} \right) - 2\omega \sin \phi (\mathbf{e}_z \times) \right] \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \quad (5.4)$$

となる。これは、 $\mathbf{r} = (x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = (-y, x)$ を考慮すると、 $f(r)$ が r に比例しないかぎり、 x, y に関する非線形の連立微分方程式であり、容易には手の付けようがないものである。

この方程式 (5.4) を解くくらいなら、元の方程式 (2.1) を解いた方が簡単ではないかと思われる。そこで、 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ とし、さらに $\mathbf{r} = (x, y)$ として成分表示にした式を (2.3) 式から作ると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ax}{x^2 + y^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + 2\omega \sin \phi \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ay}{x^2 + y^2} - \gamma \frac{dy}{dt} - 2\omega \sin \phi \frac{dx}{dt} \quad (5.5)$$

と、 x, y に関する連立の非線型微分方程式となる。この方程式を解析的に解くべく努力はしてみたが、いまのところ成功していない。

質量を持つばねで作られた懸垂線

世戸 憲治*

Catenary Made of Spring with Mass

Kenji SETO*

1 はじめに

以前に書いた「ばねの質量を考慮したばね振子」(「数学・物理通信」12巻3号2022年6月)を計算していたときに、ばねで懸垂線を作るとどんな形になるのかという疑問がわいていた。ばねは張力によって伸びてしまうので、通常の鎖で作られた懸垂線とは違った形になるであろう。今回は、このばねの質量を考慮したばね懸垂線について解析してみる。なお、ここでは、ばね懸垂線という言葉を使うが、これは伸びるゴム紐を使ったゴム懸垂線としてもまったく同じ議論ができる。このことについては以下の脚注で述べることにする。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

自然長 2ℓ , ばね定数 $k/2$ のばねを用意する。前回の論文で説明したように、ばねの自然長とばね定数は反比例の関係にあるので、このばねの長さ ℓ の部分を考えるとそのばね定数は k である。

このばねを、重力下で、水平な台の上に自然長のまま直線状に置いたとき、その真ん中を原点としてばねに沿って x 軸を、また、鉛直上方向に y 軸をとる。したがって、ばねは x の区間 $[-\ell, \ell]$ に存在することになる。このばねの両端を同じ高さに持ち上げてばねを懸垂線の形にする。このとき、持ち上げる前に x のところにあったばねの部分が x 軸方向に移動した距離を $U(x)$, また、 y 軸方向に移動した距離を $V(x)$ とする。ただし、ばねは伸びるので、持ち上げるときの両手の間隔は 2ℓ とは限らず、これより大きくても、小さくてもかまわないとする。

この定義で、持ち上げる前に、点 $P(x, 0)$ にあったばねの部分は、持ち上げられたとき、点 $P'(x+U(x), V(x))$ に移動することになる。また、この点より微小距離 Δx 離れた点を考え、持ち上げる前の点を $Q(x+\Delta x, 0)$ とすると、持ち上げられたあとは、点 $Q'(x+\Delta x+U(x+\Delta x), V(x+\Delta x))$ となる。このときの線分 $P'Q'$ が x 軸となす角を θ とすると、

$$\tan \theta = \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x + U(x+\Delta x) - U(x)} \quad (2.1)$$

となり、また、この部分が伸びた距離は、

$$\overline{P'Q'} - \overline{PQ} = \sqrt{[\Delta x + U(x+\Delta x) - U(x)]^2 + [V(x+\Delta x) - V(x)]^2} - \Delta x \quad (2.2)$$

* 北海学園大学名誉教授

となる。ここで、この PQ 間のばね定数が $(\ell/\Delta x)k$ となることを使うと、この点における張力 $T(x)$ は

$$T(x) = \frac{k\ell}{\Delta x} \left[\sqrt{[\Delta x + U(x + \Delta x) - U(x)]^2 + [V(x + \Delta x) - V(x)]^2} - \Delta x \right] \quad (2.3)$$

となる。この (2.1) (2.3) 式の $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\tan \theta = \frac{V'(x)}{1 + U'(x)} \quad (2.4)$$

$$T(x) = k\ell \left[\sqrt{[1 + U'(x)]^2 + V'(x)^2} - 1 \right] \quad (2.5)$$

となる¹⁾。ここに、 U および V に付いたプライムは x での微分を表す。

つぎに、ばねの区間 $[0, x]$ の釣り合いを考える。これは、持ち上げたあとでは、点 $[0, V(0)]$ から点 $[x + U(x), V(x)]$ までの区間となる。ばねが自然長にあるときの線密度を ρ とすると、この区間の質量は ρx 、また、重力加速度を g としてその重量は $\rho x g$ である。この重量を点 $[0, V(0)]$ における水平張力 $T(0)$ と、点 $[x + U(x), V(x)]$ における角度 θ 方向の張力 $T(x)$ で支えることになるので、その水平方向、鉛直方向の力の釣り合いの式は、

$$T(x) \cos \theta = T(0), \quad T(x) \sin \theta = \rho x g \quad (2.6)$$

となる。この 2 つの式の比をとると、

$$\tan \theta = \frac{x}{a}, \quad a = \frac{T(0)}{\rho g} \quad (2.7)$$

となる。ここに、 a は長さの次元を持つ定数で、この第 2 式で定義される。これと、(2.4) 式とから、

$$\frac{V'(x)}{1 + U'(x)} = \frac{x}{a} \quad (2.8)$$

を得る。また、(2.6) の 2 つの式を、それぞれ、2 乗してから、辺々を加えると

$$T(x)^2 = T(0)^2 [1 + (x/a)^2] \quad (2.9)$$

となるが、張力 $T(x)$ はすべての場所で正なので、これから

$$T(x) = T(0) \sqrt{1 + (x/a)^2} \quad (2.10)$$

となる。これと (2.5) 式から $T(x)$ を消去すると、方程式

$$k\ell \left[\sqrt{[1 + U'(x)]^2 + V'(x)^2} - 1 \right] = T(0) \sqrt{1 + (x/a)^2} \quad (2.11)$$

を得る。

¹⁾ もし、ばねの代わりにゴム紐を使った場合は、(2.2) 式の伸び $\overline{P'Q'} - \overline{PQ}$ を Δx で割ったものが歪み ϵ となるので、弾性理論で用いる式 $\sigma = E\epsilon$ を用いて変形すればよい。ここに、 σ 、 E は、それぞれ、応力、Young 率である。結果として (2.3) 式は、 $k\ell$ を ES で置き換えたものになる。ただし、 S はゴム紐の断面積である。

ここで、この系の対称性から、関数 $V(x)$ は偶関数であり、 $V'(x)$ は奇関数となるので、 $V'(0)$ はゼロとなることを注意する。それ故、この (2.11) 式で $x = 0$ としたときは、

$$T(0) = k\ell U'(0) \quad (2.12)$$

となるので、(2.11) 式を書き替えて、

$$\sqrt{[1 + U'(x)]^2 + V'(x)^2} = 1 + U'(0)\sqrt{1 + (x/a)^2} \quad (2.13)$$

としてよい。この式と (2.8) 式は U, V に対する連立微分方程式となる。なおついでながら、 $U(x)$ は奇関数、 $U'(x)$ は偶関数となることを注意しておく。

2.2 方程式の解法

方程式をそのまま書いてしまうと一見難しそうに思えるが、この方程式を解くことはそれほど難しいことではない。(2.8) 式を使うと、(2.13) 式の左辺は、

$$\sqrt{[1 + U'(x)]^2 + V'(x)^2} = [1 + U'(x)]\sqrt{1 + (x/a)^2} \quad (2.14)$$

と変形されるので、この (2.13) 式は、

$$U'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} + U'(0) - 1 \quad (2.15)$$

と変形される。これを積分して、 $U(x)$ は、

$$U(x) = a \operatorname{arcsinh}(x/a) + [U'(0) - 1]x \quad (2.16)$$

と求められる。 $U(x)$ は奇関数なので、ここで、積分定数は入らない。一方、 $V'(x)$ の方は、(2.8) (2.15) 式より、

$$V'(x) = \frac{x}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} + U'(0) \right] \quad (2.17)$$

となるので、これを積分し、

$$V(x) = a\sqrt{1 + (x/a)^2} + \frac{U'(0)}{2a}x^2 + y_0 \quad (2.18)$$

を得る。ここに y_0 は積分定数であるが、これは懸垂線全体を上下に動かすだけで、力学的には無意味である。

最後に残る仕事は、 $U'(0)$ を決定することである。これが決まると (2.12) 式から $T(0)$ 、(2.7) 式から a が決まる。特に、 a は、(2.12) 式を使って、 $U'(0)$ で表すと

$$a = \frac{k\ell U'(0)}{\rho g} \quad (2.19)$$

となる。ここで、このばねを持ち上げたときの両手の間隔を $2r$ とする。これは x 正の側でいうと、持ち上げる前に $x = \ell$ にあったばねの端が、持ち上げたあとの x 座標が $\ell + U(\ell) = r$ となることである。これを (2.16) 式に当てはめると

$$a \operatorname{arcsinh}(\ell/a) + U'(0)\ell - r = 0 \quad (2.20)$$

となる。ここで、(2.19) 式を用いて a を $U'(0)$ で表し、 $U'(0)$ の方程式とすることもできるが、発想を逆転させ、 $U'(0)$ を a で表し、 a の方程式とすると、

$$a \operatorname{arcsinh}(\ell/a) + \frac{\rho g}{k} a - r = 0 \quad (2.21)$$

となる。この方が、 $U'(0)$ の方程式とするより、式が簡素化される。いずれにしても、これは超越方程式なので解析的に解くことは不可能で、数値的に解くことになる。数値計算のためには、逆双曲線関数を対数関数で表しておく方がよい。すなわち、 $\operatorname{arcsinh}(\xi) = \log(\xi + \sqrt{1 + \xi^2})$ を用いると、この式は

$$a \log[(\ell/a) + \sqrt{1 + (\ell/a)^2}] + \frac{\rho g}{k} a - r = 0 \quad (2.22)$$

となる。これから a を数値的に求め、さらに、(2.19) 式から $U'(0)$ を求めるとよい。この解の一意性については付録に掲げる。

3 数値計算例

ここでは、適当ではあるが、数値パラメータを

$$\begin{aligned} \text{Case 1:} & \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad r = 1.5 \text{ m}, \quad \rho = 1 \text{ kg/m}, \quad k = 10 \text{ N/m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2 \\ \text{Case 2:} & \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad r = 0.5 \text{ m}, \quad \rho = 1 \text{ kg/m}, \quad k = 10 \text{ N/m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

と選んだときの数値計算を試みる。Case 1 と Case 2 の違いは、ばねを持ち上げたときの間隔 r の値だけである。この設定で方程式 (2.22) を解き、 a 、 $U'(0)$ 、 $T(0)$ を求めた結果は、小数点以下 5 桁の精度で、

$$\begin{aligned} \text{Case 1:} & \quad a = 0.70446 \text{ m}, \quad U'(0) = 0.69037, \quad T(0) = 6.90376 \text{ N} \\ \text{Case 2:} & \quad a = 0.13618 \text{ m}, \quad U'(0) = 0.13346, \quad T(0) = 1.33460 \text{ N} \end{aligned} \quad (3.2)$$

である。参考までに、方程式 (2.22) の左辺を独立変数 a の関数として $f(a)$ とおき、そのグラフを描いたものを図 1 に示す。この図で、2 本の曲線があるが、下にある曲線が Case 1、上にある曲線が Case 2 である。Case 2 の曲線は Case 1 の曲線を上方向に 1 だけずらしたものである。この曲線が横軸を切る点が求めるべき a となる。

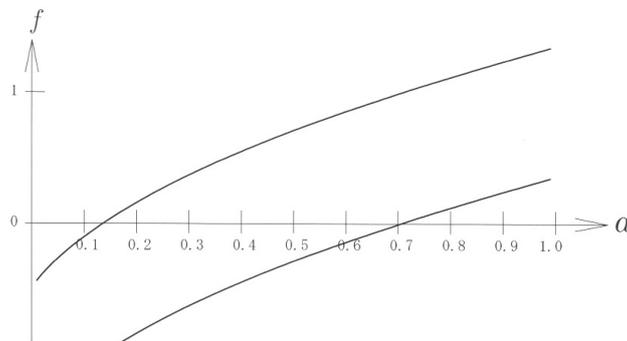


図 1 a を求めるためのグラフ、Case 1 (下の曲線)、Case 2 (上の曲線)

つぎに、ばね懸垂線がどのような形になるかを、Case 1、Case 2 の場合、それぞれ、次ページの図 2、図 3 に示す。これらの図で、 x 軸上の太線は持ち上げる前のばねで、これは区間 $[-\ell, \ell]$ 上に存在する。その上の太線

は、ばねを持ち上げたときの懸垂線を描いたものである。ここでは、求めるべき曲線の流通座標を (ξ, η) とし、(2.16) (2.18), および、(2.19) 式を用いて $U'(0)$ を a で表わすようにすると、これら座標は、

$$\xi = x + U(x) = a \operatorname{arc} \sinh(x/a) + \frac{\rho g a}{k l} x, \quad \eta = V(x) = a \sqrt{1 + (x/a)^2} + \frac{\rho g}{2k l} x^2 + y_0 \quad (3.3)$$

となる。これから、 x をパラメータとして、 $-\ell \leq x \leq \ell$ 間で動かしたときのものを描いたものが以下の図である。なお、 η に含まれる y_0 は図が見やすくなるよう図 2 では $y_0 = -1/3 \text{ m}$, 図 3 では $y_0 = 0$ と選んだ。

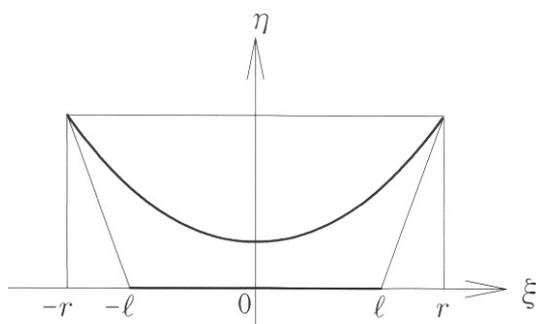


図 2 ばね懸垂線 : Case 1

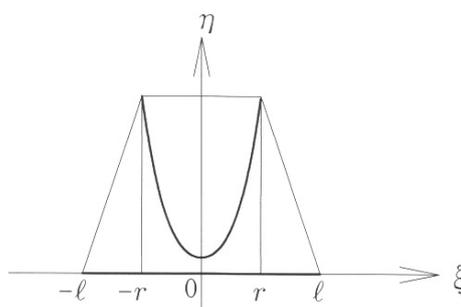


図 3 ばね懸垂線 : Case 2

これらの図を一見すると、鎖でできた懸垂線とそれほどの違いはないように思われる。一つ、完全に異なることは、鎖の場合は持ち上げたときの間隔 $2r$ は鎖の長さ 2ℓ より小さくなければならないが、ばねの場合は張力によって伸びるので、 r が ℓ より大きくてもかまわないということである。

4 おわりに

通常の鎖でできた懸垂線が双曲線余弦関数 (hyperbolic cosine) で表されることは、Johann Bernoulli, Leibniz の時代からよく知られたことである。しかし、ばねで作られる懸垂線などというものはこれまでに考えたこともなかったもので、この計算を始める前はどんな関数になるのか、楽しみでもあった。かなり難しくなることが予想されたので、これまでにに出合ったこともない関数になるのではと期待していたが、結果は意外にも初等関数で表されるものとなった。

そこで、今回のばね懸垂線と通常の鎖懸垂線とをうまく接続する方法があるのではないかと考えてみた。ばね定数を無限大にすると伸びないばねになるので、鎖のときと同じになるはずである。そこで、方程式 (2.21) において、 $k \rightarrow \infty$ とすると左辺の 2 項目が消え、方程式は、

$$\sinh(r/a) = \ell/a \quad (4.1)$$

となる。この方程式は $r < \ell$ であれば、正の a が解として存在する。この $k \rightarrow \infty$ の操作を (3.3) 式にも施すと、

$$\xi = a \operatorname{arc} \sinh(x/a), \quad \eta = a \sqrt{1 + (x/a)^2} + y_0 \quad (4.2)$$

となるが、この第 1 式から $x/a = \sinh(\xi/a)$ となり、これを第 2 式に代入すると、

$$\eta = a \cosh(\xi/a) + y_0 \quad (4.3)$$

となって、これが通常の鎖懸垂線の式となる。

5 付録：方程式 (2.21) の解の一意性

ここでは方程式 (2.22) の解 a の一意性について述べる。図 1 のところで示したように、この式の左辺を a の関数として $f(a)$ とおき、

$$f(a) = a \log \left[(\ell/a) + \sqrt{1 + (\ell/a)^2} \right] + \frac{\rho g}{k} a - r \quad (\text{A.1})$$

とする。ここで、

$$f(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} -r, \quad f(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{A.2})$$

となるので、 $f = 0$ となる正の a が少なくとも 1 個は存在する。この f を a で微分すると、

$$f'(a) = \log \left[(\ell/a) + \sqrt{1 + (\ell/a)^2} \right] - \frac{\ell/a}{\sqrt{1 + (\ell/a)^2}} + \frac{\rho g}{k} \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで、変数を a から p に

$$p = \ell/a \quad (\text{A.4})$$

と変換し、 $f'(a)$ を p の関数とみなして、以後これを $g(p)$ と書くことにすると、

$$g(p) = \log \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{\rho g}{k} \quad (\text{A.5})$$

となり、これから、

$$g(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{\rho g}{k}, \quad g(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{A.6})$$

となる。この $g(p)$ を p でもう一度微分すると、

$$\frac{dg(p)}{dp} = \frac{p^2}{(1 + p^2)^{3/2}} \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

となるので、 $g(p)$ は $p > 0$ の全領域で正となる。これは (A.4) の変換式から a の関数とした $f'(a)$ も $a > 0$ の全領域で正となることを意味する。この結果から、関数 $f(a)$ は、図 1 で見るように単調増加関数となるので、方程式 (2.22) を満たす a は 1 個しかない。また、 a に対して (2.19) 式から $U'(0)$ は一意に決まるので、 $U'(0)$ も 1 個しかないことになる。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、何度もメール交換をし、いろいろとご指導いただいた御かげでようやくできあがりしました。先生に心から感謝いたします。

四元数（補遺 2）（改訂版）

－ 四元数とベクトル空間 －

矢野 忠^{*1}

The Quaternions (Appendix 2) (Revised Version)

- The Quaternions and Vector Space -

Tadashi YANO^{*2}

目次

1. はじめに
2. なにがわからなかったか
3. 四元数と計量ベクトル空間
4. ベクトル空間
5. おわりに
6. 付録 四元数におけるスカラー積とベクトル積の定義

まえおき

これはすでに [1] に掲載されたエッセイの改訂版である。趣旨をはっきりするために脚注を付けたほかに、付録を新たに付け加えた。計量ベクトル空間の視点からの四元数の理解に役立つことを期待している。

1 はじめに

四元数（補遺 2）として^{*3}，Pauli 行列の導出について書こうかと思ったのだが，第 2 回目として「四元数とベクトル空間」について書く。

これは私がはじめに感じた大きな困難がここにあったからである。個人的な経験でもあり，一般性があまりないかもしれないが，意外に普遍性があるのかもしれない。

2 なにがわからなかったか

ポントリャーギンは『数概念の拡張』 [3] の第 4 章のまえがきに「4 元数の研究に必要なベクトル空間についてのいくつかの事柄について述べておく。それは 4 元数全体が 4 次元の計量ベクトル空間になっているからである」と述べている。

その後の 1 節と 2 節にベクトル空間と計量ベクトル空間の標準的な記述がある。そして，3 節になって 4 元数の説明になるのだが，そのはじめの部分が私には理解できなかった。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} このシリーズは『四元数の発見』 [2] の補遺として書かれている。

4元数は実数に1つではなく3つの虚数単位をつけ加えることによって得られる。これらの虚数単位は

$$i, j, k \tag{2.1}$$

と表され、おのおのの4元数 x は

$$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k \tag{2.2}$$

という形で書き表される。ここに

$$x^0, x^1, x^2, x^3 \tag{2.3}$$

はすべて実数で、4元数 x の成分を表している。したがって、4元数全体の集合 K^4 は

$$1, i, j, k \tag{2.4}$$

を基底とする4次元ベクトル空間になっている*。(太字は引用者(矢野)による)

*には訳者のつけた注があって、それもそのまま引用しておく

これは

$$x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k = 0 \iff x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0 \tag{2.5}$$

と決めるということである。

とある。これは $1, i, j, k$ が1次独立な基底であることを示している。ちょっとわかり難い気もするが、ここはま
だいい。

この基底を正規直交基底とみなせば**, ベクトル空間 K^4 は4次元計量ベクトル空間となる。(太字は引
用者(矢野)による)

と述べている。4元数がベクトル空間になることは理解できるが、この**にも訳者注もついているのに、太字部
分のところがまったく理解できなかった。

**の訳者注の部分もそれをそのまま引用すると

これは、単位間のスカラー積を

$$(1, i) = (1, j) = (1, k) = 0 \tag{2.6}$$

$$(i, j) = (j, k) = (k, i) = 0 \tag{2.7}$$

$$(1, 1) = (i, i) = (j, j) = (k, k) = 1 \tag{2.8}$$

と決めるということである。

とある。これだけきちんと訳者注もついているのだから、わかるべきだったのだろうが、これが私を大きく迷いこ
ませてしまった*4。

上のスカラー積を四元数の元の間積と混同してしまったからである。四元数の積では御存知のように

$$1 \cdot i = i, 1 \cdot j = j, 1 \cdot k = k$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$1^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

*4 言い訳がましいが、(2.6)-(2.8)の (a, x) のスカラー積の定義があからさまに書かれていなかった。 $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ と表して、 $a \cdot x = a^0 x^0 + a^1 x^1 + a^2 x^2 + a^3 x^3$ とスカラー積の定義を一言書いてくれたら、混迷におち入らな
かっただろう。もっとも正規直交基底でのベクトルのスカラー積の定義 $(x, y) = \sum_1^n x^i y^i$ が [4] の p.42 にある。

である。ただし、ここで \cdot はスカラー積の意味ではなく単に数のかけ算を意味する。このように誤解してしまうとポントリャーギンの権威も訳者の良識も疑わしくなってきた、理解不能になってしまった。しかたなくその点を棚上げて、四元数のシリーズを書き続けてきた。

本にまとめる段階でおよその原稿ができあがって、その原稿を読んでもらった読者の K さんから四元数の実部部分 R と虚部部分 I とは互いに直交補空間であるが、その直交性の定義がされていないとのコメントをされて、もう逃げるができなくなった。

3 四元数と計量ベクトル空間

以前から四元数を $w + xi + yj + zk$ と $1, i, j, k$ を用いて表す代わりに (w, x, y, z) と 4 つの実数の組で表されることは知っていた。

そうであれば

$$(w, x, y, z) = w(1, 0, 0, 0) + x(0, 1, 0, 0) + y(0, 0, 1, 0) + z(0, 0, 0, 1) \quad (3.1)$$

と $1, i, j, k$ の代わりに

$$1 = (1, 0, 0, 0) \quad (3.2)$$

$$i = (0, 1, 0, 0) \quad (3.3)$$

$$j = (0, 0, 1, 0) \quad (3.4)$$

$$k = (0, 0, 0, 1) \quad (3.5)$$

と 1 行 4 列の行列で $1, i, j, k$ を表すことができる。そうすると四元数の積はこの表示では

$$(d, a, b, c)(w, x, y, z) = (dw - (ax + by + cz), aw + dx - cy + bz, bw + cx + dy - az, cw - bx + ay + dz) \quad (3.6)$$

と表される。ところがこれは四元数の積ではあるが、4 次元計量ベクトル空間のスカラー積ではない。

複素数の場合にこれを 2 次元ベクトル空間として考えるときにはどのようにしているのだろうか。それでこのことを知るためには複素数の場合がどうであったかを知る必要があった。それで『複素数の幾何学』 [6] をとりだしてその第 5 章を読んだ。そして、ようやく計量ベクトル空間におけるスカラー積と複素数の積とは別の演算であることがわかった*5。

複素数の積は

$$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + i(bx + ay) \quad (3.7)$$

で定義される。一方、複素数を 2 次元計量ベクトル空間と考えるにはそのスカラー積を定義しなければならない。

いま $a + bi$ を二つの実数の組 (a, b) で表せば、これは

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \quad (3.8)$$

と表すことができる。したがって、2 次元のベクトル空間の基底である $1, i$ を

$$1 = (1, 0), \quad i = (0, 1) \quad (3.9)$$

と表し、スカラー積を

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by \quad (3.10)$$

*5 実は複素数を 2 次元のベクトル空間とみなすような説明はこの [6] には一言も書かれていない。いやこの本だけではなく、他の本をいろいろ探してみたが、線形代数の書でも 2 次元ベクトル空間の例として複素数を挙げているものなどあるのだろうか。このことは誰でも知っていることだからわざわざ例としては挙げなかったのだろうか。しかし、ちょっと突っ込んで考えると複素数の演算とスカラー積の演算がまったく別の演算でもないことがわかる。複素数を 2 次元ベクトルとしてみたときのスカラー積は 2 つのベクトルを A, X とし、 $A = a + bi, X = x + yi$ とすれば、 $A \cdot B = ax + by = \frac{1}{2}(A\bar{X} + X\bar{A})$ が成り立っている。

と定義すれば,

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0 \quad (3.11)$$

$$(0, 1) \cdot (1, 0) = 0 \quad (3.12)$$

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = 1 \quad (3.13)$$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = 1 \quad (3.14)$$

となることは直ちにわかる。これから複素数は 2 次元計量ベクトル空間とみなせることがわかった。

注意をするまでもないが, 上の式は特殊な複素数の積

$$1 \cdot i = i$$

$$i \cdot 1 = i$$

$$1^2 = 1$$

$$i^2 = -1$$

とはちがう。上の式で \cdot はスカラー積ではない。単なる数の乗法の記号である。3 番目の式は複素数の積とスカラー積の結果がたまたま一致しているが, それ以外は一致していない。

[6] には複素数を 2 次元の計量ベクトル空間とみなしたときの, スカラー積を定義してはいないけれども, このように 1 と i との直交性が (3.10) のように定義されるのは明らかであるから, 四元数の場合も同じように考えればよいことがわかった*6。すなわち,

$$(d, a, b, c) \cdot (w, x, y, z) = dw + ax + by + dz \quad (3.15)$$

とスカラー積を定義すればよいとわかった*7。

スカラー積がこのように定義されれば, 四元数の全体が四次元の計量ベクトル空間であることはすぐにわかる。前に挙げたスカラー積

$$(1, i) = (1, j) = (1, k) = 0$$

$$(i, j) = (j, k) = (k, i) = 0$$

$$(1, 1) = (i, i) = (j, j) = (k, k) = 1$$

(3.16)

はすぐに確かめることができる。すなわち, (3.15) によって具体的に計算すれば, (3.16) は

$$(1, i) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$

$$(1, j) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0$$

$$(1, k) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0$$

$$(i, j) = (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0$$

$$(j, k) = (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0$$

$$(k, i) = (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$

$$(1, 1) = (1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = 1$$

$$(i, i) = (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 1$$

$$(j, j) = (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 1$$

$$(k, k) = (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 0, 1) = 1$$

となる。この場合には 4 つの実数の組による四元数の表示が計算を簡単にしてくれた。

*6 [7] によれば, このスカラー積は四元数の積とまったく無関係ではないことがわかる。もともと実部のない四元数の積の一部から 3 次元ベクトルのスカラー積とベクトル積が出てくるのだから無関係でないはずだったが。このことは付録で述べる。

*7 (3.15) のスカラー積の定義と四元数の積との関係を付録に述べる。この付録にはまた四元数の虚部を 3 元ベクトルと見たときのベクトル積と四元数の積との関係も述べる。

もちろん上の計算で 0 と 1 とは実数である。もし、これらを四元数の表示で表すならば、

$$0 = (0, 0, 0, 0)$$

$$1 = (1, 0, 0, 0)$$

となる。

ポンリャーギンにしてもその書の訳者にとってもこの 2 つのベクトルのスカラー積の定義は当然のことであつたろうが、ちょっとした説明の手間が省かれてあつたために私の理解が混乱した。それによって半年間の空白ができ、四元数の積と四次元の計量ベクトル空間のスカラー積が別のものなのか関係があるのかははっきりしなかった。

4 ベクトル空間

話の筋としてはベクトル空間の議論の後でようやくスカラー積が定義されて計量ベクトル空間の話となるはずだが、実際の歴史にしたがって先に計量ベクトル空間が出てきた。そこでちょっと後戻りになるが、ベクトル空間についても触れておきたい。

ベクトル空間ではベクトルの和とベクトルとベクトルのスカラー倍が定義される。

$$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k \quad (4.1)$$

$$y = y^0 + y^1 i + y^2 j + y^3 k \quad (4.2)$$

ならば、 a を実数として

$$x + y = (x^0 + y^0) + (x^1 + y^1)i + (x^2 + y^2)j + (x^3 + y^3)k \quad (4.3)$$

$$ax = ax^0 + ax^1 i + ax^2 j + ax^3 k \quad (4.4)$$

が成り立つ。これらの演算はベクトル空間の公理としての条件をすべて満たしている。これは複素数の場合も同様である。

四元数が 4 次元の計量ベクトル空間であるためにはスカラー積が定義されればよい。不勉強な私は四元数の計量ベクトル空間としてのスカラー積の定義を文献上で見かけたことがない。私のもっている書籍だけでもよく探せば、その定義を見つけることができるのであろうが、いままでのところはそれもできていない。

もっとも四元数を 4 つの実数の組で表せば、4 次元ベクトルのスカラー積を定義することは自明のことであろう。ポントリャーギンとその著書の訳者がスカラー積の定義についてあからさまに触れていないとしても私の不明を恥すべきであって、彼らには何の責任があるはずもない。ましてや、長々と私にこのような弁明の機会を与えてくれたことにむしろ感謝すべきであろう。

5 おわりに

四元数のシリーズの補遺の第 2 回はこれで終わりである。

ポントリャーギンの『数概念の拡張』[3]にはきちんと書かれていることであるが、他の書には四元数がベクトル空間をなすことやそれにスカラー積を導入すれば、計量ベクトル空間になることなどは四元数のことを取り扱った書でもポントリャーギンの書を除いてあまり書かれていないような気がする。気がするとしか言えないのは私がいあまり文献を調べていないからである。

査読者からこのエッセイの目的と結論がわかり難いとのこと意見を頂いた。くりかえしになってしまうが、簡単に要点をまとめておく。

私のわからなかったことは四元数を四元ベクトルと考えるときのスカラー積の定義と四元数の演算との関係が長い間わからなかった。その後、四元数の演算と四元数を四元ベクトルと考えたときのスカラー積とは別に定義された演算であると考えようになった。しかし、[7]で四元数をベクトルと考えたときのスカラー積を四元数の演算で表すことができることを知った。

6 付録

6.1 付録 1 四元数におけるスカラー積とベクトル積の定義

この付録では四元数を4次元ベクトルとみなしたときのスカラー積の定義と実部のない四元数を3次元ベクトルとみなしたときのベクトル積の定義を示す。もっとも[2]のp.26に述べた2つの実部のない四元数の積

$$(ai + bj + ck)(xi + yj + zk) = -(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bz)k \quad (6.1)$$

の右辺の第1項が3次元ベクトルのスカラー積に負の符号をつけたものであり、第2項から第4項がベクトル積であるが、それをもう一度見直すことにする[7]。

まず、四元数を4次元ベクトルとみなしたときのスカラー積の定義を示そう。

$$A = d + \alpha, \quad (\alpha = ai + bj + ck) \quad (6.2)$$

$$X = w + \chi, \quad (\chi = xi + yj + zk) \quad (6.3)$$

と表す。ここで d, a, b, c, w, x, y, z はすべて実数である。また $\bar{i} = -i, \bar{j} = -j, \bar{k} = -k$ である。ここで、たとえば、 \bar{i} は i の共役を表している。

まず、 A と \bar{X} との四元数の積を考える。そうすれば、

$$A = d + \alpha \quad (6.4)$$

$$\bar{X} = w + \bar{\chi} \quad (6.5)$$

であるから

$$A\bar{X} = dw + d\bar{\chi} + w\alpha + \alpha\bar{\chi}$$

$$X\bar{A} = \overline{(A\bar{X})} = dw + d\chi + w\bar{\alpha} + \chi\bar{\alpha}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} A\bar{X} + X\bar{A} &= 2dw + d(\chi + \bar{\chi}) + w(\alpha + \bar{\alpha}) + (\alpha\bar{\chi} + \chi\bar{\alpha}) \\ &= 2dw + (\alpha\bar{\chi} + \chi\bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

であるので、

$$A \cdot X = \frac{1}{2}(A\bar{X} + X\bar{A}) = dw + ax + by + cz \quad (6.7)$$

が得られる。ここで \cdot はベクトルのスカラー積の記号として用いている。以下、同様である。

(6.6), (6.7) で

$$\alpha + \bar{\alpha} = 0$$

$$\chi + \bar{\chi} = 0$$

$$\alpha\bar{\chi} = (ax + by + cz) - (bz - cy)i - (cx - az)j - (ay - bx)k$$

$$\chi\bar{\alpha} = \overline{(\alpha\bar{\chi})} = (ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k$$

$$\alpha \cdot \chi = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\chi} + \chi\bar{\alpha}) = ax + by + cz$$

であることを用いた。

以上で4次元ベクトルのスカラー積を四元数の演算(6.7)で表した。もし四元数を3次元ベクトルに限定するならば、 $d = w = 0$ とおけばよい。このとき、 α, χ は実部のない四元数であり、これは3次元ベクトルと同一視できる。そのスカラー積は

$$\alpha \cdot \chi = ax + by + cz \quad (6.8)$$

である。

同じように3次元ベクトルのベクトル積を $\alpha \times \chi$ で表せば、

$$\begin{aligned} \alpha \times \chi &= -\frac{1}{2}(\alpha\bar{\chi} - \chi\bar{\alpha}) \\ &= (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k \end{aligned} \quad (6.9)$$

である。しかし、この表し方ではベクトル積の構造がわかりにくいので、添字をつけた文字で表しておこう。ついでに、 i, j, k も3次元の基底ベクトルらしく e_1, e_2, e_3 に書き換えておく。すなわち、

$$\begin{aligned} \alpha &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \\ \chi &= y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= -e_2 \times e_1 = e_3 \\ e_2 \times e_3 &= -e_3 \times e_2 = e_1 \\ e_3 \times e_1 &= -e_1 \times e_3 = e_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。Levi-Civitaの記号

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の偶順列であるとき} \\ -1, & (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の奇順列であるとき} \\ 0, & \text{上の二つ以外するとき} \end{cases} \quad (6.10)$$

を用いれば、

$$e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k, \quad (2 \text{ 度出てくる添字については } 1-3 \text{ までの和をとる}) \quad (6.11)$$

と表される。また、このLevi-Civitaの記号を用いると

$$\begin{aligned} \alpha \times \chi &= (x^2 y^3 - x^3 y^2) e_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) e_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) e_3 \\ &= \epsilon^{1ij} x^i y^j e_1 + \epsilon^{2ij} x^i y^j e_2 + \epsilon^{3ij} x^i y^j e_3 \end{aligned} \quad (6.12)$$

と表される。すなわち、

$$\begin{aligned} e_1 \text{ の係数: } & x^2 y^3 - x^3 y^2 = \epsilon^{1ij} x^i y^j \\ e_2 \text{ の係数: } & x^3 y^1 - x^1 y^3 = \epsilon^{2ij} x^i y^j \\ e_3 \text{ の係数: } & x^1 y^2 - x^2 y^1 = \epsilon^{3ij} x^i y^j \end{aligned}$$

となることがわかる。

(6.12)で、たとえば、 e_1 の係数は $x^2 y^3 - x^3 y^2$ の形では e_1 の係数を示す1はどこにも現れてこないが、Levi-Civitaの記号を使って表せば、 $\epsilon^{1ij} x^i y^j$ となって e_1 の係数を示す1はLevi-Civitaの記号の ϵ^{1ij} 中に出てくる。こういう理由でLevi-Civitaはこの記号をつくったのかもしれない。

6.2 付録 2 四元数とベクトルの歴史の要約

Hamilton が四元数を考え出したとき、 $d + ai + bj + ck$ の d を実部またはスカラー部と呼び、 $ai + bj + ck$ の部分を虚部またはベクトル部と呼んだ。すなわち、スカラーとかベクトルという用語はすでに Hamilton が使っていた用語である。

実部を持たない 2 つの四元数 $ai + bj + ck$ と $xi + yj + zk$ の積を考えたとき、(6.1) からわかるように、実部 $-(ax + by + cz)$ は現在のベクトルのスカラー積の定義と負号のマイナスだけ異なっている。また虚部 $(bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bz)k$ は i, j, k を x, y, z 軸に沿った正規直交基底とみなせば、これはそのまま現在のベクトル積の定義となっている。

こういう結果を四元数に見て、Gibbs はこの四元数を元にベクトル（実質的に四元数の虚部）という考えを四元数から抜き出し、新たにベクトルのスカラー積とベクトル積を考えた。このベクトルの概念はとても有用であり、かつ簡明だったので四元数よりは、ベクトルという概念が重要だと認められた。そしてベクトル代数とかベクトル解析が発展して、電磁気学や流体力学等においてもっばら使われるようになり、四元数は捨てられた。

だが、近年 3D コンピュータ・グラフィクスからの需要等から、ジンバルロックの起らない、物体の回転の表現として四元数が見直されている*8。

ここで、ジンバルロックの現象とは回転を Euler 角で表現するとき起る現象で、たとえば、 z 軸のまわりに回転をし、つぎに新しい x のまわりに回転をし、最後に新しい z 軸のまわりに回転させるとする。このときに 2 番目の軸 x 軸のまわりの回転角 θ が $\theta = 0, \pi$ のときに 3 次元の回転の自由度が 1 次元に落ちてしまうような現象が起る。普通この場合には 3 つの Euler 角がある特定の角度の範囲に制限するが、そのときはその二つの角度の間の補間が難しくなる*9。

[謝辞]

今回も編集委員の世戸さんが原稿を読んで下さっているいろいろなコメントを下さいました。ありがとうございます。もしこのエッセイが読みやすくなっているとすれば、世戸さんのおかげです。

(2015.3.23)(2023.9.18 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数 (補遺 2) - 四元数とベクトル空間 -, 数学・物理通信 5 巻 5 号 (2015.6.1) 2-6
- [2] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014)
- [3] ポントリャーギン (宮本敏雄, 保坂秀正 訳), 『数概念の拡張』(森北出版, 1995) 32-66
- [4] ポントリャーギン (宮本敏雄, 保坂秀正 訳), 『数概念の拡張』(森北出版, 1995) 42
- [5] 佐武一郎, 『行列と行列式』(掌華房, 1958) 117
- [6] 片山孝次, 『複素数の幾何学』(岩波書店, 1982) 217-226
- [7] 松岡学, 『数の世界』(講談社ブルバックス, 2020) 144-145
- [8] M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis* (Dover, 1967)

*8 詳しいベクトル解析の歴史については [8] を参照せよ。

*9 詳しいことはたとえば『ゲーム 3D 数学』(オライリー・ジャパン) 154-156 を参照せよ。

家中でクイズを（改訂版）

- 三角形の数を数える -

矢野 忠*1

Solving a Quiz in the Family

- Numbers of Regular Triangles -

Tadashi YANO*2

まえおき

これは愛数協の「研究と実践」に掲載したものの改訂版である [1]。その後、末尾の [蛇足] に書かれた (4.2) の導出したエッセイを書いた [2]。あわせてお読みいただくといいであろう。

1 ことの起こり

小学校 5 年生の夏休みの学習帳に出ていた問題について妻から聞かれたのはもう夏休みも半ばを過ぎていた頃である。どんな問題だったのかももう記憶が定かではないので正確には分からない。小さな正三角形（以後、基本三角形とよぶ）が 5 段ほど積み重ねられており、それがまた全体として正三角形をなしているといった図が夏休み学習帳に載っていた（図 1.1）。

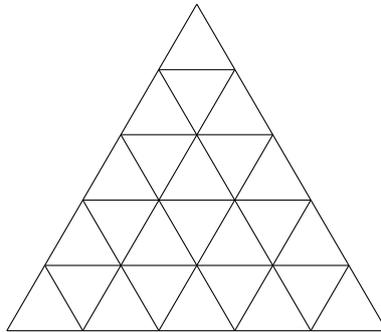


図 1.1 5 段積みの三角形

その大きな正三角形の中の基本構成単位となっている正三角形の数が積み重ねられた段数が変わると共にどのように変わっていくかというのがはじめの問いであった。これはすぐに分かった。三角形が 1 段目に 1 つ、2 段目に 3 つ、3 段目に 5 つ、4 段目に 7 つといった風にふえていくから、たとえば、4 段目まで積まれたときの基本三角形の数は

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \quad (1.1)$$

となる。また、5 段目までなら、

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \quad (1.2)$$

となる。一般に n 段目まで積まれたときには、

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad (1.3)$$

*1 元愛媛大学工学部

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

である。これはよく知られた四角数といわれるものである。なぜ、5段積みなら、 5^2 となるかという問いもあった。矢野健太郎先生の本かなにかで見た記憶があったのは、数の1を点●で表すと、図1.2のように表わすこと

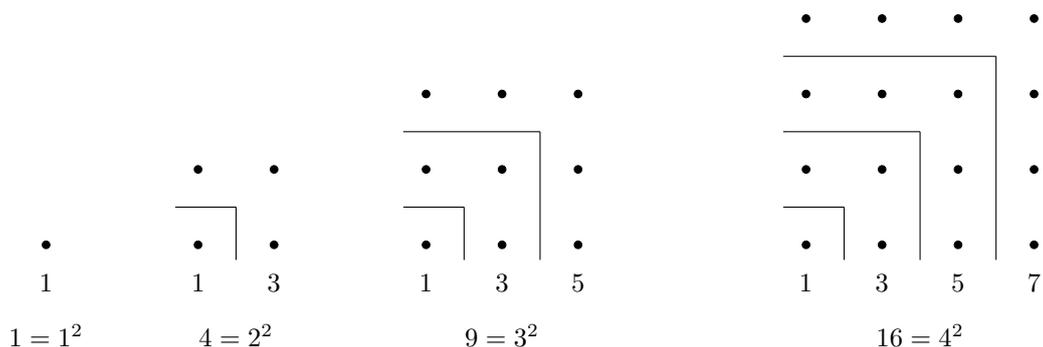


図 1.2 四角数

ができる。このとき縦に並んだ●の数と横に並んだ●の数とは等しく、例えば正三角形が3段積みなら、それに対応する縦と横の●の数は3で、総計 $3^2 = 9$ となる。このように並べていけば、10段積みなら三角形の数は $10^2 = 100$ となることは容易に分かる。

ところが、この問いの後に厄介な問いがまだ残っていた。「基本正三角形を積み重ねてできた大きな正三角形の中にある大、中、小すべての正三角形の総数はいくつか」というのがその問いであった。

2 正三角形の総数を数える

いいやり方も思い浮かばないので、まず段数の少ない簡単なものから、順々に数え上げていってその数の規則性を見つけられないかと考えた。基本三角形 \triangle のときには正三角形の数は1である。次に、2段積み三角形のときにはその数は5となる(図2.1)。

3段積み三角形のときには $9 + 4 = 13$ となる(図2.2)。4段積み的时候には $16 + 11 = 27$ (図2.3)、5段積み的时候には $25 + 23 = 48$ となる(図3.1)。これらの階差をとってみると、表2.1のようになる。最終的な階差が

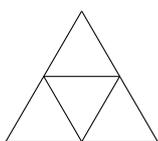


図 2.1 2段積みの三角形

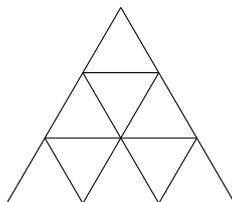


図 2.2 3段積みの三角形

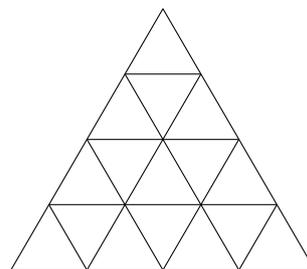


図 2.3 4段積みの三角形

2, 1, ... と得られたが、この... がどのような規則性をもつのかは5段積みまでの正三角形の総数を数えただけでは予想がつかなかったので、この方法で正三角形の総数の増加の規則性をさがす試みは途中で挫折してしまった。

5段積みの正三角形で大小あわせて48の正三角形があったが、これも数え落としがないかまたは重複して数えてないかといった心配もあって、なかなか自信がもてない。ましてや、もう1段ふやして6段積みとなると、正三角形の数はもっと多くなるので、数えまちがいが起こりそうである。またその数を数えることも面倒で意欲喪失してしまう。

それではじめからいつも数えなおしていたのでは大変だから、今までの1段積み重ねの少ない正三角形の数は

表 2.1 三角形の数 1

三角形の段数	1	2	3	4	5
三角形の総数	1	5	13	27	48
階差		4	8	14	21
			4	6	7
			2	1	

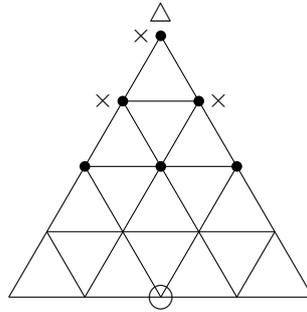


図 2.4 三角数の数え方 1

すでに数えているのだから、新しく 1 段下に増したときに増える正三角形の数だけを数え上げて、1 段少ない正三角形の総数に加えることを考えた。

妻のところへ勉強を学びに来ている小学生たちも面白そうに数えている。しかし、数え方を考えないで数えるものだから 5 段積みのところですでに数が人によって、一定しないでまちまちの答がでる。それでその日ははっきりした結論は出ないまま考えておいてあげるからといって小学生を家に帰す。「おれもうちへ帰ってもう一度考えてみよ」とか「大学生のお兄ちゃんじゃないと分かんね」とか言い合いながら、興奮して帰っていった。

その後、片付けを済ませた妻と二人でいろいろやってみたが、はっきりした答がでない。そのうちに、妻が正三角形の数を数えるかわりに正三角形をつくっている頂点の数を数えたらいいといいだす。これは確かにいい考えだ。

三角形の数とその一つの頂点の数は 1 対 1 対応しているから、例えば 4 段積みの正三角形だったら、次のようにすればよい。基本三角形の数は 16 であることがすでに分かっている。次に 2 段の正三角形の数を数えるのに、その頂点のところに ● をつける。すなわち、6 箇所黒丸がつく (図 2.4 参照)。次に 3 段の正三角形の頂点に × をつける。上に重ねて書くと分からなくなるので、傍に × をつけてある (これが 3 個)。さらに 4 段の正三角形の頂点には △ をつける (1 個)。これで頂点が上方にある三角形の数はすべて数えたが、下向きの 2 段の正三角形が残っている。その頂点に ○ をつける (1 個)。これで全部である。すなわち、正三角形の数は基本三角形は 16 個、2 段の三角形が 6 個、3 段の三角形が 3 個、4 段の三角形が 1 個あり、それに逆向きの 2 段の三角形が 1 個だけあるので、

$$16 + 6 + 3 + 1 + 1 = 27 \tag{2.1}$$

である。5 段の正三角形も少し面倒になるが同様に数えることができる (付録に示してある)。それでも 6 段の正三角形くらいになるとかなり面倒で途中で自信がもてなくなってしまう。特に、はじめはいま示したように印を変えてマークしていなかったのが混乱してしまった。夢中になって二人でやっていたが、ふと気がつくと夜中の 2 時近くになっていた。それで、その日はそのままにして床についた。

次の日、学校から帰って来てみると、妻が「昨日の問題分かったよ」とうれしそうに言う。お母さんがいろいろ

表 2.2 三角形の数 2

三角形の段数	1	2	3	4	5	6	7	8
三角形の総数	1	5	13	27	48	78	118	170
		4	8	14	21	30	40	52
			4	6	7	9	10	12
				2	1	2	1	2

やっているのを傍で見ていた小六の二男が「お母さん、表にしてみたらいいよ」と言ったらしい。いつも二男に算数の問題が分からないとき、図に描いたらとか表にしたらとっている妻もこれには「ぎゃふん」であった。「まさに“負うた子に浅瀬を教えられ”とはこのことだね」と私は言った。

数えられる三角形										
1	1									
2	1+2	1						1		
3	1+2+3	1+2	1					1+2		
4	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1				1+2+3	1	
5	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1			1+2+3+4	1+2	
6	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1		1+2+3+4+5	1+2+3	1
7	1+2+3+4+5+6+7	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4	1+2

図 2.5 三角形の数の表

見ると大きな紙に数えられる各三角形に対して、数える正三角形が大きさの順に描かれ、その数がきれいに級数の形に表に整理されている。これが図 2.5 である。整理のしかたは昨夜、私がやりかけた方法であったが、それを徹底してやっている。これはすばらしいと思った。これで正三角形の数がどのように増えていくかの規則性は全く分かってしまった。

矢野寛先生（故人）からパスカルの三角形の色別けの話を学習サークルの会合で伺った後だったので、やはり一つ一つ丹念にやってみるものの威力を感じた。僕等は小賢しいので、数個の結果から規則性を見つけようとして、失敗してしまう。しかし、一々、丹念にやってみるときれいな規則性が自然に分かってきた。それも家中の協力で、やっとできた。

この表ができたので、表 2.1 の階差表を補充することができる。それが表 2.2 である。

ここまでくると階差の規則性が見える。2, 1, 2, 1, ... の ... のところは 2, 1, 2, 1, ... と繰り返すだろう。表 2.2 にその規則性を用いて 8 段の正三角形で、大小合わせた正三角形の数を予想した部分を付け加えておいた。これに

よると 8 段の正三角形の総数は 170 と予想される。図 2.5 の規則性からその数を求めてみるとやはり 170 となっ
てぴったりあっている (図 2.5 は実は 10 段までを表にしていたのだが、スペースの関係で 7 段積みまででやめて
しまっていることに注意して欲しい)。ともかくこれでめでたし、めでたしという訳である。

3 おわりに

上の問題には難しいことはなに一つ出てこない。それで小学生の夏休みの学習帳に問題として出されたのだら
う。出題者には多分何か出典があったのだろうと思う。自分で楽しんだ後で出題したのか、または単に孫引きか
は分からない。

私はあまりクイズの好きな方ではない。というのは、クイズは非生産的であると共に、私のような頭の悪いもの
には大抵の場合、難問で解けないことが多いから。それでも、これはかなり苦しみかつ楽しんだ。妻のところへ
やって来る勉強のあまりできるとはいえない小学生もとても好奇心をもったようだ。それは普通の算数の問題を
解くときは真剣さが違っていたことから分かった。

私は正直言って、楽しいだけの、興味本位の授業にはあまり賛成でない。少なくとも、ある一貫したカリキュラ
ムが数学について、小学校から大学専門基礎課程 (昔の教養課程に相当) までにわたってきちんとつくられている
べきだと常々思っている。そして、そのための教科書、参考書、問題集や演習書も数教協独自のものが標準的なも
のとしてなければならないと考えている。

「楽しい数学」とは一貫性のない、しっかりとした基礎のない単なる雑学となってしまうのではないかと恐れて
いる。しかし、普段はまったく算数や数学に興味を起さず、算数は退屈でおもしろくないものと思っている子ど
もにも大人にも一瞬にせよ、こんなに面白いものがあるとは・・・。

僕等は宝を眼前にしながら、宝を見つけられないでいるだけなのかな。

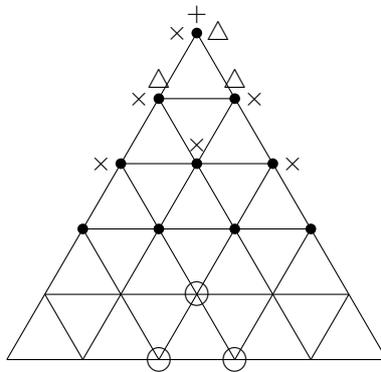


図 3.1 三角形の数え方 2

4 付録 5 段の正三角形の数

図 3.1 で 5 段のときの正三角形の数を数えると、基本三角形は 25 個あり、2 段の三角形 (●で印) は 10 個ある。
3 段の三角形 (×で印) は 6 個、4 段の三角形 (△で印) は 3 個、5 段の三角形 (+で印) は 1 個である。最後に
逆 2 段の三角形 (○で印) は 3 個ある。すなわち大小を取り交えた三角形の総数は

$$25 + 10 + 6 + 3 + 1 + 3 = 48 \tag{4.1}$$

で 48 個である。

(付記) このエッセイが愛数協の「研究と実践」に掲載された当時の編集長であった矢野寛先生から以下のコメントを頂いた。私はどうしたものか式で表わすことなど考えもしなかった。

[蛇足] このように見事に規則が分かってしまったところに、式などはヤボだとは思いますが、この規則にしたがって計算すると、 n 段のときの三角形の総数は

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) + \frac{1}{16}[(-1)^n - 1] \quad (4.2)$$

となる。

[謝辞]

編集委員の世戸憲治さんにこの原稿を読んでいただき、(4.2)の因子 $n+2$ が $n+1$ となっていたとのご指摘を受けた。ありがとうございます。なお、図 2.5 は元文部技官、大塚昌司さんが描かれたものであり、若くして亡くなった氏の思い出でもある。図は大幅に縮小され、またコピーを重ねたので原画の美しさが大いに減っているのは残念である。

(1984.10.2)(1998.3.4)(2023.9.19 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 家中でクイズを ..., 研究と実践 (愛数協), No. 16 (1984.10) 2-8
(矢野 忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) 5-10 所収)
- [2] 矢野 忠, 三角形の数, 数学・物理通信, 5 巻 11 号 (2015.12.30) 21-29

編集後記

私が住む札幌は、今夏、過去に例のない記録的な暑さに見舞われた。いつもの年なら気温が30度を越すのは、ひと夏に2,3日あるかないかであるが、この夏は、7月中旬からずっと30度越えて、普通ならお盆の8月15日を過ぎると急激に涼しくなるはずが、今年はさらに暑さが続き、8月23日には過去最高の36.3度を記録した。この暑さは9月に入っても止まらず、30度、あるいはそれに近い日がまだ続いている。暑さに弱い私は犬の散歩のため外をちょっと歩いただけで、汗だくになり、毎日、ヘトヘト、ヘナヘナになりながらようやく生きている状態である。早く夏が終わって冬になれば、願わずにはいられない。冬の寒さはいくらでも我慢できるのだが、この暑さは、ここ札幌だけでなく、日本中で、いや、世界中で猛暑に見舞われているらしく、まさに正真正銘の地球温暖化が始まっていると考えられる。もっと本腰を入れた温暖化対策をとらないと、世界中の気温が加速度的に上がってしまうのではと危惧するのは私だけではあるまい。

話し変わって、今回の号は、私のもの2編と編集長の矢野さんが書かれた2編の記事だけになってしまった。私が書いた『回転系の力学(2)』は、低気圧に向かって風が吹くときに、何故、反時計回りなるかを、Coriolisの力が入った方程式を数値的に解いて、解明したものである。もう1つの『質量を持つばねで作られた懸垂線』は、通常、懸垂線と言えば鎖を重力下で垂らしたときの曲線のことであるが、これを、鎖の代わりに「ばね」でやったときはどのような形になるかを解析したものである。これを最初に始めたときは、よほど変わった関数になるかと期待したが、さにあらず、通常の初等関数で表わされるものになってしまった。

矢野さんが書かれた『四元数(補遺2)』は、彼がこれまで専門的に扱ってきた四元数を四元ベクトルと見なして、それらの関係を論じたものである。これは、歴史的事情も踏まえて平易に解説したものである。四元数に興味ある方は、ぜひ一読することをお勧めする。もう一つの『家中でクイズを』は、同じ大きさの三角形をたくさん用意して、全体が大きな三角形になるように何段にも積み重ねたとき、これを一つの図形と見做して、この中には大小含めて何個の三角形が存在するかという問題である。これは段数が少ないときは、子供でも答えられるが、段数が増えるにしたがい数えるのが大変になってくる。ましては、段数が一般の n 段のときの三角形の個数となると我々のような数学にある程度慣れた人間にとっても、かなりの難問になってしまう。この問題の基本図形を三角形から四角形に拡張したらどうなるか。あるいは、五角形や六角形に拡張することができるかどうかを考えてみると面白いかもしれない。

(世戸憲治)