

数学・物理通信

14 卷 2 号 2024 年 4 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2024 年 4 月 5 日

目次 (Contents)

| | | |
|---|--------------|----|
| 1. 座屈現象のモデル (2) | 世戸憲治 | 2 |
| 2. 四元数と Pauli 行列の対応 | 世戸憲治 | 11 |
| 3. 四元数と空間回転 3 (改訂版) | 矢野 忠 | 15 |
| 4. 編集後記 | 世戸憲治 | 38 |
| | | |
| 1. Model of Buckling Phenomenon (2) | Kenji SETO | 2 |
| 2. Correspondence of Quaternions to Pauli Matrices | Kenji SETO | 11 |
| 3. Quaternion and Spatial Rotations 3 (Revised Version) | Tadashi YANO | 15 |
| 4. Editorial Comments | Kenji SETO | 38 |

座屈現象のモデル (2)

世戸 憲治 *

Model of Buckling Phenomenon (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「座屈モデル (1)」(「数学・物理通信」14 巻 1 号) では 1 個の錘が x 軸上を動くようにしておき、この錘に質量が無視できる一定の長さの棒を結び付け、棒の他端は y 軸上を動くようにしておいた。さらに、座標原点とこの y 軸上の棒の端を一定の自然長とばね定数を持つばねで結び付けておき、この棒の y 軸上の点に一定の下向きの力をかけたとき x 軸上の錘がどのように動くかを解析した。今回は、棒の y 軸上の点に一定の力を掛ける代わりに、この点に 2 個目の錘を付けたときの振動の様子を解析する。前回は 1 体問題だったので解析しやすかったが、今回は 2 体問題になるので、そのぶん複雑になる。しかし、系の外部から力を加えるよりは、座屈モデルとして本物に近づけるはずである。

2 方程式の導入とその解法

図 1 に示すように、水平右向きに x 軸、鉛直上方に y 軸をとる。いま、質量 m_1, m_2 の 2 個の錘を用意し、 m_1 の錘は x 軸上を、また m_2 の錘は y 軸上を摩擦無しに動くようにしておく。ただし、これら 2 個の錘は質量が無視できる長さ l の棒で結び付けておく。さらに、ばね定数 k , 自然長 L のばねを用意し、このばねの一端は原点 O に、他端は y 軸上を動く m_2 の錘に結び付けるものとする。このとき、重力下で、これら 2 個の錘がどのように動くかを解析する。ただし、 x 軸上の錘とばねは立体的に交差するようにしておき、互いに衝突することなく、すり抜けられるようにしておく。また、ここでは、ばねの自然長 L は棒の長さ l より大きいものとし、 $L > l$ としておく。

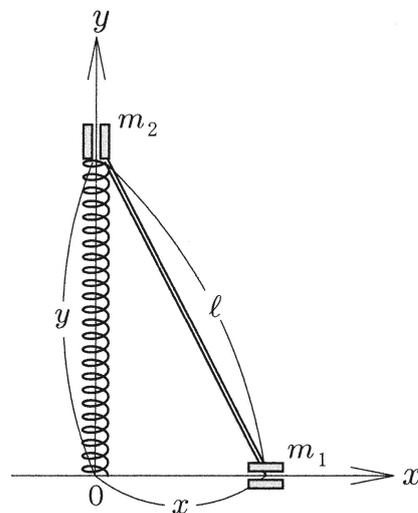


図 1 座屈モデル

この問題を Lagrangian を使う方法で解析してみよう。時刻 t における x 軸上の錘 m_1 の位置を $(x(t), 0)$, また y 軸上の錘 m_2 の位置を $(0, y(t))$ とする。このときの 2 個の錘 m_1, m_2 の運動エネルギーの和を T とす

* 北海学園大学名誉教授

ると,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 \quad (2.1)$$

となる. ここに上付きドットは時間微分を表す. また, ばねの歪みエネルギーを U_1 , 重力加速度を g としたときの錘 m_2 の位置エネルギーを U_2 とすると,

$$U_1 = \frac{1}{2}k(y-L)^2, \quad U_2 = m_2gy \quad (2.2)$$

と表される. ただし, 錘 m_2 の位置エネルギーの基準を原点の高さにとるものとする. また, この場合はこれら 2 個の錘は長さ ℓ の棒で繋がれているので, x, y は独立ではなく, 常に,

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \quad (2.3)$$

の関係が成り立つ. これらのことを踏まえて Lagrangian \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = T - U_1 - U_2 - \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - \ell^2) \quad (2.4)$$

となる. ここに, λ は (2.3) 式に対応する Lagrange の未定乗数で, 一般には x, y には依存せずに, 時間 t のみの関数である. これを用いて作用積分 \mathcal{I} を

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \left[T - U_1 - U_2 - \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - \ell^2) \right] dt \\ &= \int \left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k(y-L)^2 - m_2gy - \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - \ell^2) \right] dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

と作る. この変分をとるときは, Lagrange 未定乗数法を用いているので, $\delta x, \delta y$ を独立した変分として扱ってよく, 2 本の Euler-Lagrange 方程式

$$m_1\ddot{x} + \lambda x = 0, \quad m_2\ddot{y} + k(y-L) + m_2g + \lambda y = 0 \quad (2.6)$$

を得る. 一旦, 方程式ができてしまったあとは, これら 2 本の式から未定乗数の λ を消去すると

$$m_2\ddot{y} + k(y-L) + m_2g - m_1\frac{\ddot{x}}{x}y = 0 \quad (2.7)$$

となる. ただし, このままでは変数の x, y が混在しているがいまはこのままにしておく. この式に \dot{y} を掛けてから, (2.3) 式を時間で微分した

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad (2.8)$$

を左辺最後の項に利用して, 整理すると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(y-L)^2 + m_2gy \right] = 0 \quad (2.9)$$

となる. これからエネルギー積分の式

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + U(y) = E \quad (2.10)$$

を得る. ここに, ポテンシャル $U(y)$ を

$$U(y) = \frac{1}{2}k[(y-L)^2 - (\ell-L)^2] + m_2g(y-\ell) \quad (2.11)$$

と定義する。ただし、この段階では、 U の定数項は不定なので、 $y = \ell$ のとき $U(\ell) = 0$ となるように、適当な定数項を付け加えた。また、(2.10) 式の右辺の E は全エネルギーで一般には初期条件で決まる定数である。

この式からさらに解こうとすると 2 個の変数 x, y を統一しなければならない。ここでは、(2.3) (2.8) 式を用いて、 y, \dot{y} を消去し、 x, \dot{x} で表わすようにしよう。ただし、ここで y は常に正の値をとるものとして $y = \sqrt{\ell^2 - x^2}$ と置くことにする。結果は、

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + F(x)[U(\sqrt{\ell^2 - x^2}) - E] = 0, \quad F(x) = \frac{m_1(\ell^2 - x^2)}{m_1(\ell^2 - x^2) + m_2x^2} \quad (2.12)$$

となる。(2.11) 式の段階では U は y の関数 $U(y)$ だったので、 y を x で表したときこれを $U(\sqrt{\ell^2 - x^2})$ という書き方をした。しかし、これ以降は U は x の関数として扱うので、以下ではこれを $U(x)$ と書くことにする。

これから \dot{x} を求め、変数分離して積分形にもっていくことはできるが、その積分は楕円積分以上の困難なものになってしまう。ここで計算の見通しを良くするためと、数値計算をするときパラメータは少ない方が扱いやすいとの観点から、変数の無次元化をしておこう。すなわち、棒の長さ ℓ を長さの単位、 $\sqrt{m_1/k}$ を時間の単位として、

$$\frac{x}{\ell} \rightarrow x, \quad \frac{L}{\ell} \rightarrow L, \quad \frac{t}{\sqrt{m_1/k}} \rightarrow t, \quad \frac{m_2g}{k\ell} \rightarrow P, \quad \frac{E}{k\ell^2} \rightarrow E, \quad \frac{U}{k\ell^2} \rightarrow U \quad (2.13)$$

と置き換える。これでこれらの量はすべて無次元になる。特に、 P は質点 m_2 に掛かる重力を無次元化したものである。この変換で (2.12) 式は

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + F(x)[U(x) - E] = 0 \quad (2.14)$$

と書き直される。ここに無次元化された $F(x), U(x)$ は

$$F(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mu x^2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}[(\sqrt{1 - x^2} - L)^2 - (1 - L)^2] + P(\sqrt{1 - x^2} - 1) \quad (2.15)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \alpha(\sqrt{1 - x^2} - 1), \quad \alpha = P - L$$

となる。この第 1 式にある μ は質量 m_2 の m_1 に対する比である。また、ポテンシャル $U(x)$ はこの最後に定義する 1 個のパラメータ α のみで規定される。実はここで定義した $U(x)$ は前回の「座屈現象のモデル (1)」の (2.12) 式で定義したものとまったく同じであることを注意しておく。

ここで、(2.15) の第 1 式で定義した $F(x)$ について、その振る舞いを見てみよう。以下のグラフは $\mu = 0.1, 1, 10$ の 3 通りについて $F(x)$ をグラフ化したものである。

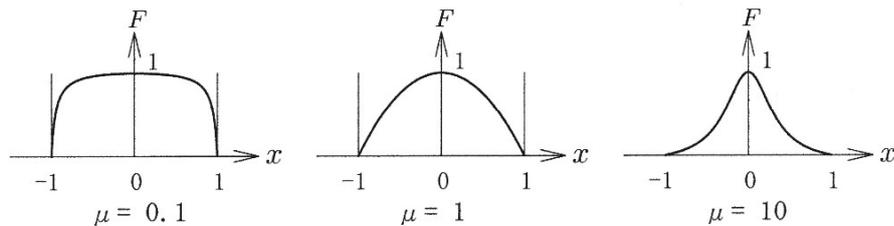


図 2 関数 $F(x)$ のグラフ

このグラフから分かるように、関数 $F(x)$ は $x = \pm 1$ でゼロとなり、 μ の値が小さいときは $-1 < x < 1$ でほとんど 1 に近い値を取るが、 μ が大きくなるにつれ 1 となる部分は狭くなる。

つぎに、(2.15) の第 2 式で定義した $U(x)$ については前回の論文ですでに示してあるが、ここで再録しておく。

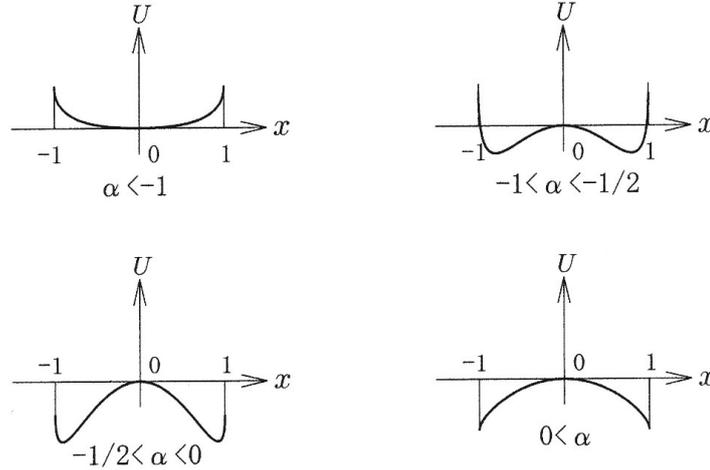


図 3 関数 $U(x)$ のグラフ

このグラフから分かることは、仮に、 $F(x)$ が恒等的に 1 で、ポテンシャルがこの $U(x)$ だけで決まるとすれば、 $\alpha < -1$ のとき、 $x = 0$ は安定平衡点となることである。また、 $\alpha > -1$ のときは $x = 0$ の点是不安定となり、いわゆる座屈が起こる。しかし、ここで扱っているモデルの場合、ポテンシャルは $F(x)$ と $U(x)$ の積となるのでそう簡単にはいかない。このことをさらに詳しく議論するため、(2.15) を用いて $F(x)[U(x) - E]$ を $x = 0$ の点で、 x の 2 次の項まで Taylor 展開すると、

$$F(x)[U(x) - E] = -E + \left(\mu E - \frac{1+\alpha}{2}\right)x^2 + \dots \quad (2.16)$$

となる。この結果から、 $x = 0$ が安定平衡点となるためには、 x^2 の項の係数が正

$$\alpha < -1 + 2\mu E \quad (2.17)$$

という条件が必要になる。これ以上計算を進めるには全エネルギーの E を決めておく必要がある。ここでは初期条件として、 x 軸上の錘 m_1 に初速度 v_0 を与えることにして、

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0, \quad y = \ell, \quad \dot{y} = 0 \quad (2.18)$$

と設定するものとする。この条件を無次元化する前の (2.10) 式に適用すると

$$E = \frac{1}{2}m_1v_0^2 \quad (2.19)$$

となるが、(2.13) の無次元化の式を用いると、

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 \quad (2.20)$$

となる。ただし、ここで、速度 v_0 の無次元化は

$$\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{m_1}{k}} v_0 \rightarrow v_0 \quad (2.21)$$

となることに注意する。この結果を用いて、 $x = 0$ が安定平衡点となるための条件式 (2.17) は

$$\alpha < -1 + \mu v_0^2 \quad (2.22)$$

となる。これは無次元化する前の元の変数で書くと

$$m_2 g < k(L - \ell) + m_2 \frac{v_0^2}{\ell} \quad (2.23)$$

となる。この右辺の第 2 項は、 x 軸上の錘 m_1 が速度 v_0 で動くことによってその反動が棒を通して伝播し、 y 軸上の錘 m_2 に遠心力が発生することを意味する。したがって、この式は、 y 軸上の錘 m_2 に掛かる下向き重力が、上向きのばねの力と、同じく上向きの遠心力との和よりも、小さいということである。この条件が成立していると x 軸上の錘は微小振動するだけで座屈は起こらない。

最後にこの微小振動を求めておこう。方程式 (2.14) とその近似式 (2.16)、および E の (2.20) 式から

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - (\mu v_0^2 - 1 - \alpha)x^2 \quad (2.24)$$

となるが、これも無次元化する前の元の変数に戻すと

$$\dot{x}^2 = v_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right], \quad x_0 = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2 \ell}{k(L - \ell) + m_2 v_0^2 / \ell - m_2 g}} \quad (2.25)$$

となる。ここに x_0 は長さの次元を持つ定数で、この第 2 式で定義する。この第 1 式から \dot{x} を求め、変数分離してから積分形にすると

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^2}} = v_0 \int dt \quad (2.26)$$

となるが、この積分は三角関数で簡単に実行され、初期条件 (2.18) 式を満たす解は、

$$x(t) = x_0 \sin \left(\frac{v_0}{x_0} t \right) \quad (2.27)$$

と求められる。

ついでながら、(2.23) 式で、 v_0^2/ℓ が g より小さく、 y 軸上の錘の質量 m_2 を大きくしたとき、あるいは、ばねの力 $k(L - \ell)$ を小さくしたときは、不等号の向きが逆になって、

$$m_2 g > k(L - \ell) + m_2 \frac{v_0^2}{\ell} \quad (2.28)$$

となる。このときは (2.25) で定義した x_0 が虚数の $i|x_0|$ となるので、(2.27) 式の解 $x(t)$ は

$$x(t) = i|x_0| \sin \left(\frac{v_0}{i|x_0|} t \right) = |x_0| \sinh \left(\frac{v_0}{|x_0|} t \right) \quad (2.29)$$

と三角関数の sine が双曲線関数の sinh に化けてしまう。これがまさしく座屈現象でこの系は倒壊してしまうことになる。

3 もう一つのモデル

前回の論文で、ばねを縦方向に付けなくて、水平方向に付けた場合も議論した。ただし、そこでは外から一定の力を加える方式だったので、これも前節で議論したように、一定の質量を持つ錘にした場合を議論してみよう。

このモデルは図4に示すように、前節の縦に付いていたばねを水平方向の x 軸に沿って動くようにしたものである。このばねの一端は x 軸上の負の点に固定し、他端に質量 m_1 の錘を付けておく。ただし、ばねが自然長にあるときは錘は原点 O にあるものとする。前節と変わるのはこのばねの付け方だけで、長さ ℓ の棒、および、 y 軸上をを動く錘 m_2 は前節とまったく同じである。

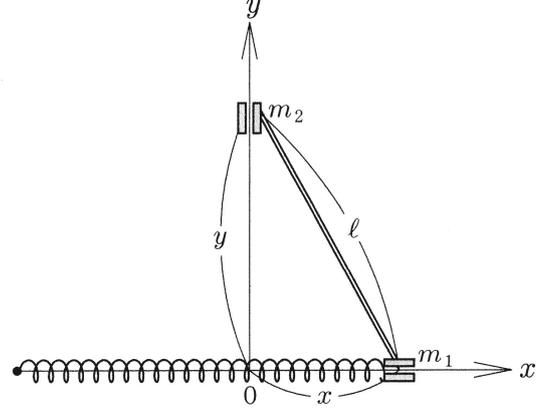


図4 もう一つのモデル

数式上で変わるのは、(2.2) 式の U_1 が

$$U_1 = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3.1)$$

に置き換わるだけである。その結果として、(2.10) 式に相当するエネルギー積分の式は

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + U(x) = E \quad (3.2)$$

となる。ここにポテンシャル $U(x)$ は

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + m_2 g (y - \ell) \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、初期条件として、(2.18) 式と同じく、

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0, \quad y = \ell, \quad \dot{y} = 0 \quad (3.4)$$

を設定すると、全エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad (3.5)$$

と決まる。この E の値を (3.2) 式に代入し、さらに、(2.3) 式、および、それを時間で微分した (2.8) 式を用いて y, \dot{y} を消去し、 x, \dot{x} のみの式で表すと、(2.12) 式と同じ形の

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + F(x) \left[U(x) - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \right] = 0, \quad F(x) = \frac{m_1 (\ell^2 - x^2)}{m_1 (\ell^2 - x^2) + m_2 x^2} \quad (3.6)$$

となる。ここで、数式簡素化のため (2.13), (2.21) 式の無次元化を行うと

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + F(x) \left[U(x) - \frac{1}{2} v_0^2 \right] = 0 \quad (3.7)$$

となる。ここに、無次元化された $F(x), U(x)$ は

$$F(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mu x^2}, \quad U(x) = \frac{1}{2} x^2 + P(\sqrt{1 - x^2} - 1) \quad (3.8)$$

と定義する．特に， $F(x)$ は前節の (2.15) 第 1 式と同じであり， $U(x)$ の方は，右辺 1 項目の符号が変わり，2 項目の α が P に替わる．

ここで，積 $F(x)\left[U(x) - \frac{1}{2}v_0^2\right]$ を x の 4 次の項まで展開すると

$$F(x)\left[U(x) - \frac{1}{2}v_0^2\right] = -\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}(1 - P + \mu v_0^2)x^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}P + \mu(1 - P) + \mu(\mu - 1)v_0^2\right]x^4 + \dots \quad (3.9)$$

となる．これから $x = 0$ が安定平衡点であるためには，2 次の項の係数が正でなければならず，

$$P < 1 + \mu v_0^2, \quad \text{元の変数で書くと} \quad m_2 g < k\ell + m_2 \frac{v_0^2}{\ell} \quad (3.10)$$

となる．これは，錘 m_2 に作用する重力は，錘 m_1 に与えた初速度 v_0 の反動で錘 m_2 に作用する遠心力とばねが ℓ だけ伸びたときのばねの力との和よりも小さくなければならないということである．

この条件式 (3.10) が成立するとき，方程式 (3.7) の原点回りの微小振動解を求めるには，近似式 (3.9) で x^2 の項までとることにして，

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - (1 - P + \mu v_0^2)x^2 \quad (3.11)$$

となるが，これを書き直して，

$$\dot{x}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right), \quad x_0 = \frac{v_0}{\sqrt{1 - P + \mu v_0^2}} \quad (3.12)$$

しておく．ここに， x_0 はこの第 2 式で定義する．この解は， \dot{x} を求めてから変数分離し，積分することで容易に求まり，初期条件 (3.4) を満たす解は

$$x(t) = x_0 \sin\left(\frac{v_0}{x_0}t\right) \quad (3.13)$$

となる．

もう一つ，キंक型の解になる場合も求めておこう．以下， x の 4 乗の項までとった (3.9) 式において，計算が面倒になるのを避けるため変数の置き換え

$$1 - P + \mu v_0^2 = 2B, \quad \frac{1}{4}P + \mu(1 - P) + \mu(\mu - 1)v_0^2 = A^2 \quad (3.14)$$

をする．ここで，この第 2 式の左辺は正ということを仮定する．これを用いて，(3.9) 式を

$$F(x)\left[U(x) - \frac{1}{2}v_0^2\right] = -\frac{1}{2}v_0^2 + Bx^2 - \frac{1}{2}A^2x^4 \quad (3.15)$$

と書き換えておく．これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\left(U(x) - \frac{1}{2}v_0^2\right)\right] = 2(B - A^2x^2)x \quad (3.16)$$

となるので，これから $F(x)\left[U(x) - \frac{1}{2}v_0^2\right]$ が極値をとるのは $x = 0, \pm\sqrt{B}/A$ の 3 点で， $x = 0$ は極小点， $x = \pm\sqrt{B}/A$ は極大点となる．以後，数式の簡素化のため，この極大点の位置を表わす \sqrt{B}/A を

$$\sqrt{B}/A = x_M \quad (3.17)$$

と書くことにする．ただし，ここでは，この $\pm x_M$ は x の範囲 $(-1, 1)$ に収まっているものとする．

以下、方程式を解くために、この (3.15) 式を (3.7) 式に代入すると

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - 2Bx^2 + A^2x^4 \quad (3.18)$$

となる。この方程式をそのまま解くには楕円関数が必要になるが、ここでは最も解きやすくなる右辺が完全平方式、すなわち、

$$v_0^2 - 2Bx^2 + A^2x^4 = (v_0 - Ax^2)^2 \quad (3.19)$$

になる場合を解くことにする。そのためには、

$$B = v_0A \quad (3.20)$$

であればよい。この条件は (3.14) 式を用いて、 A 、 B を元の変数に戻した形で書くと、

$$\frac{1}{2}(1 - P + \mu v_0^2) = v_0 \sqrt{\frac{1}{4}P + \mu(1 - P) + \mu(\mu - 1)v_0^2} \quad (3.21)$$

となる。すなわち、この式が成り立つように、本来独立であった 3 個の変数 P 、 μ 、 v_0 にこの従属性を仮定しておくということである。このとき方程式 (3.18) は

$$\dot{x} = v_0 - Ax^2 = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_M^2}\right) \quad (3.22)$$

と書くことができる。この最右辺の式は (3.17)、(3.20) 式から B を消去してできる $A/v_0 = 1/x_M^2$ を用いた。これを変数分離してから積分すると、初期条件 (3.4) を満たすキック型の解

$$x(t) = x_M \tanh\left(\frac{v_0}{x_M}t\right) \quad (3.23)$$

を得る。これは、初めに $x = 0$ から始まって、ゆっくりと $x = x_M$ に近づいていく解である。

ここでは、(3.14) の第 2 式の左辺 $[\frac{1}{4}P + \mu(1 - P) + \mu(\mu - 1)v_0^2]$ が正ということを仮定したが、もしこれが成立しないときは、 A は虚数、したがって、(3.17) 式から x_M も虚数になるので、この解の双曲線関数 \tanh は三角関数の \tan に変わり、これは時間と共に発散する解になってしまう。

4 おわりに

前回の論文では y 軸上には錘はなく、錘は x 軸上の 1 個だけで、そのかわり、 y 軸のばねの上部には外から一定の下向き力を加えるというものであった。これは完全な 1 体問題でその解析は従来の方法をそのまま踏襲するだけであった。ところが、今回のモデルは x 軸上の他に y 軸上にも錘を付けたことで 2 体問題となり、その分難解なものになった。もっとも、この 2 個の錘は棒で繋がれているので、完全な 2 体問題ではなく、形式的には Lagrange 未定乗数法を用いて 1 体問題に還元できるものである。しかしながら、この 1 体問題は通常の 1 体問題とはまったく違った形で、下の錘 m_1 が動くことで、上の錘 m_2 にその反動が伝わり、遠心力が発生してしまう。これには力学現象の解析に慣れている私も戸惑ってしまった。これは倒立振子の力学と関係があるのかもしれない。この安定条件を与える (2.23) 式であるが、錘 m_1 に与える初速度 v_0 の値が大きいほど成立しやすくなるというのは不思議と思えるかもしれない。しかし、ここでの議論は、(2.16) 式で与えたように、ポテンシャル部分を $x = 0$ の近傍で x の 2 次の項まで近似した式を用いた結果であって、近似せずに厳密な解法を用いた

ときは、初速度 v_0 を大きくし過ぎるとポテンシャルの山を越えて倒壊してしまうはずである。この問題については、解析が難しくなりすぎるのでここでは扱わないことにした。しかしながら、苦勞しながらも、何とか結論らしいところまでこぎ着けることができたことは幸いである。

話は変わって、私が住む札幌での冬の積雪量は年によって異なるが、多い年では 1m を超え、道路脇に積み上げた雪の高さは私の背を超える 2m から高いところは 3m にもなることがある。これほどの雪になると、恐ろしいことに、屋根に積もった雪の重さで倒壊する建物がでることがある。ここで、仮に屋根の面積を標準的な個人住宅の 80 m^2 とし、その上に積もっている雪の高さを 1m とすると、屋根の上の雪の量は 80 m^3 となる。雪の密度は雪の硬さによってまちまちであるが、降り積もった硬い雪のときは、水の密度の半分くらいになるので、屋根の上に積もった雪の重さは、およそ 40 ton にもなる。つまりこれは、4 ton トラックが 10 台も屋根の上に乗っているのと同じである。これでは倒壊する家が出るのも無理はない。これはまさしく座屈現象で、建物の柱の弾性が雪の重さによる圧縮に耐えられなくなり曲がることでその位置エネルギーを小さくしようとするからである。今回の座屈現象の解析は、上の方の錘 m_2 から崩れるのではなく、崩れるのは下の錘 m_1 の方である。この意味で、建物の座屈とは、同じ座屈でも少し違っているのではと考え出した。この建物の倒壊現象を、その本質的な部分だけを取って、簡単化したモデルをもう一つ作れるのではと思いだしてきた。これがうまくできれば次回以降で発表するつもりである。

四元数とパウリ行列の対応

世戸 憲治 *

Correspondence of Quaternions to Pauli Matrices

Kenji SETO*

1 はじめに

矢野忠さんが書かれた「四元数 (補遺 3) (改訂版)」(数学・物理通信 14 巻 1 号) には, 四元数の元 i, j, k と Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ との対応式が何通りもあることが書かれている. 私はこのうちの最も対称性が良くきれいな形をした以下に述べる (2.2) 式については, すでに知っていたが, こんなにもたくさんの対応式があることに驚いてしまった. ここでは, この対応式が 24 通りあることを, 矢野さんが導かれた方法とはまったく異なる対称性を用いた方法で示していく.

初めに以下で用いる Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の定義式を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

と書いておく. これらの 2 乗はすべて単位行列

$$\sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_3^2 = 1 \quad (1.2)$$

となり, Pauli 行列の異なるもの同士の積の間に成立する関係式

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 \quad (1.3)$$

はである.

また, 四元数の元 i, j, k については, 虚数単位の i との混同を避けるため, 以下では, 四元数の元の方を太字にして, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と書くことにする. これら元の間関係式は,

$$\mathbf{i}^2 = -1, \quad \mathbf{j}^2 = -1, \quad \mathbf{k}^2 = -1 \quad (1.4)$$

と, および,

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (1.5)$$

である. 以下の節ではこれらの式を基にして, 四元数と Pauli 行列の間に成立する対応式を作成していく.

* 北海学園大学名誉教授

2 四元数と Pauli 行列の対応式

ここで、恒等式 $(-i)(-i) = -1$ と (1.3) のそれぞれの式とを辺々掛けあわせると、

$$\begin{aligned} (-i\sigma_1)(-i\sigma_2) &= -(-i\sigma_2)(-i\sigma_1) = -i\sigma_3, & (-i\sigma_2)(-i\sigma_3) &= -(-i\sigma_3)(-i\sigma_2) = -i\sigma_1, \\ & & (-i\sigma_3)(-i\sigma_1) &= -(-i\sigma_1)(-i\sigma_3) = -i\sigma_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

となるので、これと四元数の (1.5) 式を比べると、Pauli 行列との対応式

$$\mathbf{i} = -i\sigma_1, \quad \mathbf{j} = -i\sigma_2, \quad \mathbf{k} = -i\sigma_3 \quad (2.2)$$

が得られる¹⁾。これは四元数の元と Pauli 行列の対応を与える式としては最も対称性の良い美しい式である。以下この式を基本式として、他の対応式を求めていく。それには、(1.3) 式が持つ、つぎの 3 つの特性を用いる。

- (A) Pauli 行列間の関係式 (1.3) で、添え字 (1, 2, 3) を cyclic に入れ変えて $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 1, 2)$ としても同じ式になる。
- (B) Pauli 行列間の関係式 (1.3) で、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のうちのいずれか 2 個の符号を変えても同じ式になる。
- (C) Pauli 行列間の関係式 (1.3) で、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のうちのいずれか 2 個を入れ替えて、他の 1 個の符号を変えても同じ式になる。

ということ、(2.2) 式に適用すると、それぞれ、3 個ずつの式が得る。すなわち、操作 (A) を (2.2) 式に適用すると、この (2.2) 式も含めて、

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_1, & \mathbf{j} &= -i\sigma_2, & \mathbf{k} &= -i\sigma_3 \\ \text{(A2)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_2, & \mathbf{j} &= -i\sigma_3, & \mathbf{k} &= -i\sigma_1 \\ \text{(A3)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_3, & \mathbf{j} &= -i\sigma_1, & \mathbf{k} &= -i\sigma_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで、A に付けた番号 1, 2, 3 は、Pauli 行列の添え字の番号を cyclic に入れ替えたときの順序の番号である。

つぎに、操作 (B) をこの (A1), (A2), (A3) のそれぞれに適用すると、

$$\begin{aligned} \text{(A1.B1)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_1, & \mathbf{j} &= +i\sigma_2, & \mathbf{k} &= -i\sigma_3 \\ \text{(A1.B2)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_1, & \mathbf{j} &= +i\sigma_2, & \mathbf{k} &= +i\sigma_3 \\ \text{(A1.B3)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_1, & \mathbf{j} &= -i\sigma_2, & \mathbf{k} &= +i\sigma_3 \\ \text{(A2.B1)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_2, & \mathbf{j} &= +i\sigma_3, & \mathbf{k} &= -i\sigma_1 \\ \text{(A2.B2)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_2, & \mathbf{j} &= +i\sigma_3, & \mathbf{k} &= +i\sigma_1 \\ \text{(A2.B3)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_2, & \mathbf{j} &= -i\sigma_3, & \mathbf{k} &= +i\sigma_1 \\ \text{(A3.B1)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_3, & \mathbf{j} &= +i\sigma_1, & \mathbf{k} &= -i\sigma_2 \\ \text{(A3.B2)} \quad \mathbf{i} &= -i\sigma_3, & \mathbf{j} &= +i\sigma_1, & \mathbf{k} &= +i\sigma_2 \\ \text{(A3.B3)} \quad \mathbf{i} &= +i\sigma_3, & \mathbf{j} &= -i\sigma_1, & \mathbf{k} &= +i\sigma_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹⁾ ここで用いる「=」は対応関係を表わすもので、右辺と左辺が等しいという意味ではないことに注意する。

と 9 通りの対応式ができる。ここで、B に付けた番号 1, 2, 3 は、Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ から 2 個のものを選ぶときの $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_2, \sigma_3), (\sigma_3, \sigma_1)$ の順序番号である。

さらに、操作 (C) を、(A1) (A2) (A3) に適用すると、

$$\begin{aligned}
(A1.C1) \quad & i = -i\sigma_2, \quad j = -i\sigma_1, \quad k = +i\sigma_3 \\
(A1.C2) \quad & i = +i\sigma_1, \quad j = -i\sigma_3, \quad k = -i\sigma_2 \\
(A1.C3) \quad & i = -i\sigma_3, \quad j = +i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_1 \\
(A2.C1) \quad & i = -i\sigma_3, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = +i\sigma_1 \\
(A2.C2) \quad & i = +i\sigma_2, \quad j = -i\sigma_1, \quad k = -i\sigma_3 \\
(A2.C3) \quad & i = -i\sigma_1, \quad j = +i\sigma_3, \quad k = -i\sigma_2 \\
(A3.C1) \quad & i = -i\sigma_1, \quad j = -i\sigma_3, \quad k = +i\sigma_2 \\
(A3.C2) \quad & i = +i\sigma_3, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_1 \\
(A3.C3) \quad & i = -i\sigma_2, \quad j = +i\sigma_1, \quad k = -i\sigma_3
\end{aligned} \tag{2.5}$$

と 9 通りの対応式を得る。ここで、C に付けた番号は B のときと同じく、3 個の Pauli 行列から 2 個のものを選ぶときの順序番号である。

最後に、9 通りある (A1.B1) から (A3.B3) までの対応式に操作 (C) を施すと、元の式 1 通りに、それぞれ、3 通りの式ができるので、合計 $9 \times 3 = 27$ 通りの対応式ができる。このうちの 18 通りは、2 個ずつ同じものができ、しかも、これらの式はすべて (2.5) 式と重複している。したがって、これら 18 通りの式は四元数と Pauli 行列の対応式としてカウントされないが、どのように重複しているかを示すために挙げておく。

$$\begin{aligned}
(A2.B3.C2), (A3.B2.C3), (A1.C1) \quad & i = -i\sigma_2, \quad j = -i\sigma_1, \quad k = +i\sigma_3 \\
(A2.B1.C3), (A3.B3.C1), (A1.C2) \quad & i = +i\sigma_1, \quad j = -i\sigma_3, \quad k = -i\sigma_2 \\
(A2.B2.C1), (A3.B1.C2), (A1.C3) \quad & i = -i\sigma_3, \quad j = +i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_1 \\
(A1.B2.C3), (A3.B3.C2), (A2.C1) \quad & i = -i\sigma_3, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = +i\sigma_1 \\
(A1.B3.C1), (A3.B1.C3), (A2.C2) \quad & i = +i\sigma_2, \quad j = -i\sigma_1, \quad k = -i\sigma_3 \\
(A1.B1.C2), (A3.B2.C1), (A2.C3) \quad & i = -i\sigma_1, \quad j = +i\sigma_3, \quad k = -i\sigma_2 \\
(A1.B3.C2), (A2.B2.C3), (A3.C1) \quad & i = -i\sigma_1, \quad j = -i\sigma_3, \quad k = +i\sigma_2 \\
(A1.B1.C3), (A2.B3.C1), (A3.C2) \quad & i = +i\sigma_3, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_1 \\
(A1.B2.C1), (A2.B1.C2), (A3.C3) \quad & i = -i\sigma_2, \quad j = +i\sigma_1, \quad k = -i\sigma_3
\end{aligned} \tag{2.6}$$

この 3 つの操作 A, B, C を使った 27 通りのうち 18 通りはこのように他と重複していて、あと 9 通りの式が残る。この残った 9 通りは、3 個ずつが同じものなので、本質的なものは、3 通りしかない。これらは、

$$\begin{aligned}
(A1.B1.C1), (A2.B2.C2), (A3.B3.C3) \quad & i = +i\sigma_2, \quad j = +i\sigma_1, \quad k = +i\sigma_3 \\
(A1.B2.C2), (A2.B3.C3), (A3.B1.C1) \quad & i = +i\sigma_1, \quad j = +i\sigma_3, \quad k = +i\sigma_2 \\
(A1.B3.C3), (A2.B1.C1), (A3.B2.C2) \quad & i = +i\sigma_3, \quad j = +i\sigma_2, \quad k = +i\sigma_1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる。

以上が、四元数と Pauli 行列の対応式として考察されたすべてで、その総数は

$$\left[(2.3) \text{ 式の } 3 \text{ 通り} \right] + \left[(2.4) \text{ 式の } 9 \text{ 通り} \right] + \left[(2.5) \text{ 式の } 9 \text{ 通り} \right] + \left[(2.7) \text{ 式の } 3 \text{ 通り} \right] = 24 \text{ 通り}$$

となる。これら 24 通りの式の右辺には、すべて虚数単位の i が付くので、Pauli 行列の (1.2) 式から四元数の元の (1.4) 式が導かれることが容易に分かる。

3 おわりに

「はじめに」のところで述べたように、私はこの四元数と Pauli 行列の対応式としては、(2.2) 式の最も対称性の良いものしか知らなかったし、それで十分だと思っていた。

ところが、矢野さんの論文を読んでみて、そこにはたくさんの対応式が載っていたので、初めはこんなにたくさんの対応式を求めてどうするのだろうと、思ってしまった。そこで、矢野さんとメールのやりとりをしたのだが、そのうちに、この対応式が何通りできるかということに、興味を持って調べてみるのも面白いと考えるようになった。

そこで、矢野さんの求め方よりも、よりスマートな方法はないかと考えたのがこの論文である。この方法は、(2.3), (2.4), (2.5) 式までは確かにスマートに求まるが、(2.6), (2.7) 式になると同じ対応が重複してでてきて、それを取り除くのが面倒になってしまった。四元数の専門家の矢野さんに、素人の私がこんなこと言うのは失礼かと思うが、お許し願いたい。

論文の冒頭にも述べたが、この論文は矢野忠「四元数 (補遺 3) (改訂版)」(数学・物理通信 14 巻 1 号) を読んで考えついたことである。そのことについて矢野さんに深く感謝しておきたい。

四元数と空間回転 3 (改訂版)

矢野 忠^{*1}

Quaternions and Spatial Rotations 3 (Revised Version)

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

これは「数学・物理通信」に載せた [1] の改訂版である。主な改訂箇所は四元数のベクトルとしての直交性をきちんと導入したことである。これは『四元数の発見』(海鳴社)の中でもっとも大きな改訂を要する箇所であった。ところがなかなかどのように改訂したらいいのか、アディアがなかった。これは査読者の K さんがすでに指摘してくださっていたが。

ベクトル空間についての最低限の説明も欠けていることとか、さらに計量ベクトル空間(ユークリッド・ベクトル空間ともいう)の説明がなく、この章で必要不可欠である、ベクトルの直交性の説明が欠けていることが指摘されていた。

ベクトル空間の詳しい説明は線形代数のテキストに譲るとしても最低限の説明が必要であると感じられていた。そういう不十分な説明を補充することによっていくらかでも話の筋を通しておきたい。

1 はじめに

この四元数のシリーズで前にも述べたが、ベクトルなどの空間回転を取り扱う方法としては

1. ベクトルでの表現
2. 行列による表現
3. 四元数による表現
4. 2回の鏡映変換による表現

の少なくとも4つが知られている。

四元数による回転の表現の公式 $u = qvq^{-1}$ をできるだけ天下りではなく導くという趣旨で2回にわたって述べたが [2], [3], その後また別の観点があることを知った。

それは同形(同型)写像を指導原理として四元数による回転表現の式を導くことである。

さて、同形写像とはどういう写像であったか。

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \tag{1.1}$$

$$f(vw) = f(v)f(w) \tag{1.2}$$

この二つの条件を満たす写像を同形写像という [5], [7]。

この (1.1) は $v, w \rightarrow v+w$ という和の演算が写像 f で保存されており、(1.2) は $v, w \rightarrow vw$ という積の演算がやはり写像 f で保存されることを示している。そのときに写像 f とはどんな形の式で表されるか^{*3}。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 写像とは、ある集合 A の任意の元に対して別の集合 B の元を対応させる規則 f が与えられているとき、 f を A から B への写像という。また A を f の定義域、 B を f の値域という。

そのことを次節で考えることにするが、結論を先取りして述べれば、(1.1),(1.2)を同時に満たす、写像は $f(v) = qvq^{-1}$ であり、 v を実部をもたない四元数とすれば、 $f(v)$ は3次元空間での回転を四元数で表すことを示したい。

2 同形写像

前節で与えた条件 (1.1),(1.2) を関数方程式としてみた場合にどういう解が得られるか。2つの条件 (1.1),(1.2) を同時に満たすような関数の解はないと言われている [8]。

しかし、いまは四元数の間の写像を考えるから、そのような写像 f は存在するはずである（実はその写像をすでに何回か求めてもいる [2], [3]）。それを (1.1),(1.2) の条件から求めてみよう。

まず (1.1) の条件から考えれば、これは写像 f が線形であることを示している。それで (1.1) を満たす変換として

$$f(v) = qv, \quad q = \text{一定}$$

はそのような写像の候補となる*4。実際に

$$\begin{aligned} f(v+w) &= q(v+w) \\ &= qv + qw \\ &= f(v) + f(w) \end{aligned}$$

と (1.1) を満たす。それでは写像 $f(v) = qv$ は (1.2) を満たすだろうか。

$$f(vw) = qvw$$

となつて、これでは

$$f(v)f(w) = qv \cdot qw$$

とはならない。しかし、どうしても w の前の因子 q は (1.2) が成り立つためには必要である。またそれは可能である。 w の前に因子 q をつくる代償として、 vw を

$$v \cdot 1 \cdot w = v(q^{-1}q)w = vq^{-1} \cdot qw$$

と考えれば、必然的に qv の後ろに因子 q^{-1} が来なければならない。そこで、 $f(v) = qvq^{-1}$ と修正をする。したがって

$$\begin{aligned} f(vw) &= qvwq^{-1} \\ &= qvq^{-1} \cdot qwq^{-1} \\ &= f(v)f(w) \end{aligned}$$

となる。

確かに、写像 $f(v) = qvq^{-1}$ は条件 (1.2) を満たしている。この写像 f は

$$\begin{aligned} f(v+w) &= q(v+w)q^{-1} \\ &= (qv + qw)q^{-1} \\ &= qvq^{-1} + qwq^{-1} \\ &= f(v) + f(w) \end{aligned}$$

*4 2次写像 $f(v) = qv^2$ や一般の1次写像 $f(v) = qv + r$ とかは (1.1),(1.2) を満たさないことが、具体的に調べてみればわかる。(1.1) を満たす写像 (関数) には $f(v) = qv$ しか存在しない。

と (1.1) も満たす.

すなわち, 四元数の和と積の演算を保つような, すなわち条件 (1.1), (1.2) を満たす写像 f として

$$f(v) = qvq^{-1} \quad (2.1)$$

が得られた.

つぎの 3 節から, 四元数からはなれて, しばらくベクトル空間について述べよう.

3 ベクトル空間

四元数の説明の途中で線形代数の主要なトピックである, ベクトル空間について述べるのは不本意の感じもある. しかし, ここではあくまで四元数の理解に役立たせるという観点からベクトル空間について述べたい.

どの線形代数のテキストをみても, その 1 つの章でベクトル空間の説明がされている. また, さらに計量ベクトル空間についても述べられている. これからしばらくそれらについて述べたい*5.

簡単な数ベクトルから話を始めよう. n 個の実数からなる数の組 $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ が

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \quad (3.1)$$

の形に表されるとき, これを n 次元数ベクトルという. n 次元数ベクトルの全体 \mathbf{R}^n を n 次元数ベクトルとい
い, 数

$$x^1, x^2, x^3, \dots, x^n \quad (3.2)$$

をベクトルの成分という*6.

そのすべての成分が 0 である, ベクトルを

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \quad (3.3)$$

と $\mathbf{0}$ で表す.

この数ベクトルには, 2 つの演算が定義できる.

一つはベクトルの和であり, ベクトル \mathbf{x} にベクトル \mathbf{y} を加えることができる. $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3, \dots, y^n)$ とすれば,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) \quad (3.4)$$

であり, もう一つはベクトル \mathbf{x} に実数 a をかける演算である.

$$a\mathbf{x} = (ax^1, ax^2, \dots, ax^n) \quad (3.5)$$

この 2 つの演算ができる集合をベクトル空間という.

ベクトル空間の例としては, はじめに挙げた数ベクトルの全体はベクトル空間をなす. 複素数 $x+yi$, (x, y : 実数) の全体, 四元数 $w + xi + yj + zk$, (w, x, y, z : 実数) の全体もベクトル空間である. また数ベクトルが 1 成分だとすれば, 実数 x , (x : 実数) の全体もベクトルと考えることができる. というのはこれらの例においてはすべてベクトルの和とスカラー乗法はすべて定義されているから. ここまでかなり直観的にベクトル空間を導入したが, ベクトル空間の公理的な定義がある.

*5 この節で部分的かつ不十分にしか述べられなかった, ベクトル空間や計量ベクトル空間と四元数についての体系的な知識と情報は [4], [5] 等を参照せよ.

*6 ここで, x^1 とか x^2 のような上付きの添字は x のべき乗を表していない. もし, べき乗を表すときには $(x^1)^2$ のように $()$ の外に上付きの添字をつける.

つぎに一般のベクトル空間の定義を [6] にしたがって述べよう.

[ベクトル空間の定義]

V を集合とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ とし, $c, d \in \mathbf{R}$ とする. V に和の演算

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V \tag{3.6}$$

が定義され, また, ベクトル \mathbf{x} にある実数 c をかける, スカラー乗法という演算

$$c\mathbf{x} \in V \tag{3.7}$$

が定義される. このときつぎの 1. - 9. が成り立つ.

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (和の交換則)
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (和の結合則)
3. 零ベクトルとよばれる V の元 $\mathbf{0}$ が存在し, 任意の \mathbf{x} に対して,
 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
が成り立つ.
4. 任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して, ある \mathbf{z} が存在して
 $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$
となる. この \mathbf{z} を $-\mathbf{x}$ と表す.
5. $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$ (スカラー乗法の結合則)
6. $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ (分配則 1)
7. $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ (分配則 2)
8. 任意の元 $\mathbf{x} \in V$ に対して
 $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
となる, 数 1 が存在する.
9. 任意の元 $\mathbf{x} \in V$ に対して
 $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$
となる, 数 0 が存在する.

この 9 つの規則をみたす集合 V をベクトル空間という*7.

上に述べたベクトル空間ではベクトル \mathbf{x} の成分とベクトルにかけるスカラーをすべて実数としたが, これらをすべて複素数でおきかえることもできる. その方が数学的にはより一般的なベクトル空間を考えることができるが, ここでは四元数をベクトルと考えることによって四元数の理解を深めようとしているので, 成分とベクトルにかけるスカラーを実数にだけ限定しておく.

こういう風にベクトル空間を公理化したのは Peano (1888) だといわれている. これらの公理をどこから考え出したのかはわからないが, ベクトルの特例として 1 成分からなる実数を考えると, このベクトルに関する公理とスカラー乗法に関する公理はすべて実数の和と積のしたがう公理である*8.

確かにベクトルをいくつかの実数の組である, 数ベクトルと考えるとそれはもう数そのものではないが, このベクトル空間の 2 群の公理は実数の和と積のしたがう公理に由来すると考えてよいだろう.

*7 9 番目の公理は普通のテキストには公理に入れられていない. というのは公理 6. から導くことができるからである. 公理とは必要最少限の独立な公理から構成されているべきだと立場からは 9 番目の公理を除くことは正しい. また, スカラー乗法とここで述べたが, 普通の線形代数のテキストではスカラー倍と表現されている. いずれにしてもベクトルに, あるスカラーの数をかけるということである. スカラー倍と言わずにわざわざスカラー乗法といったのにはちょっと理由があるが, いまはそのことに立ち入らない.

*8 もちろん, ベクトルの演算規則となったときにはすでに実数の和や積の演算規則と見かけは同じでも意味はちがっている.

上に述べたベクトル空間に関しては線形代数のテキストでは、ベクトルの1次独立と1次従属とか、ベクトル空間の基底と次元とか部分空間とか基底変換とかについて述べられている。それらはすべて重要なテーマだが、部分空間についてだけ述べて他の事項は割愛しよう。

あるベクトル空間があるとき、その部分ベクトル空間を考えることができる。私たちのいる3次元空間にはある3次元の座標を設定できるが、その空間内に座標系の原点を通る一つの平面を考えることができる。この平面は空間という3次元空間のベクトル空間の中に存在する2次元のベクトル空間となっている。こういう具体例を考えながら、部分空間の定義について述べよう。

ベクトル空間が1つあれば、その部分集合としてのベクトル部分空間を考えることができる。

[ベクトル部分空間の定義]

V をベクトル空間、 W を V の部分集合とする。 W が V の和およびスカラー乗法によりベクトル空間となるとき、 W を V のベクトル部分空間という。

このときにつぎの3つの条件をみたせば、 W は V のベクトル部分空間となる。

1. $\mathbf{0} \in W$
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば、 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$
3. $\mathbf{x} \in W, c \in \mathbf{R}$ ならば、 $c\mathbf{x} \in W$

こういうベクトル部分空間の自明な例としては元のベクトル空間 V とか零空間 $\mathbf{0}$ がある*9。

つぎの4節ではベクトル空間に長さ（距離）の概念を導入した、計量ベクトル空間（ユークリッド・ベクトル空間ともいう）を導入しよう。

4 計量ベクトル空間

実部のない、2つの四元数 $ai + bj + ck$ と $xi + yj + zk$ の積を考えたとき、

$$(ai + bj + ck)(xi + yj + zk) = -(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bz)k \quad (4.1)$$

であることをすでに [9] に述べた。

これは実部のない2つの四元数の積であったが、これから Gibbs はこの四元数の虚部（またはベクトル部ともいう）から3次元の空間を記述する3次元ベクトルを考え出した*10。

すなわち、3つの数 (a, b, c) や (x, y, z) で3次元空間での位置を表示するという考えである。もちろんここには座標空間とか座標系の考えが導入されている。直交する3次元空間の座標系を設定すると原点 O から点 P への距離 OP は、点 P の座標が (x, y, z) ならば、

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.2)$$

で与えられるであろう。そういう現代の世界中の中学生なら知っていることを数学のベクトル空間に導入するにはどうしたらよいか。それがベクトルのスカラー積（または内積ともいう）の導入である。このことについてこの節で述べたい。

[計量ベクトル空間の定義]

*9 定義1. は定義2. から導かれるので、部分ベクトル空間の定義に入れないのが、一般的である。

*10 ベクトルという用語は Hamilton が使い始めたといわれている。スカラーという用語も同様である。もっともいまの用語とはすこしがっていた。

V をベクトル空間とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ で, かつ, $c \in \mathbf{R}$ とし, 任意の \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, 実数 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{R}$ が決まり, 下に述べる 1. - 4. をみたととき, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ をスカラー積 (または内積) といい, またこのスカラー積が定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間という.

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (対称性)
2. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ (線形性 1)
3. $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (線形性 2)
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ であり, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ならば $\mathbf{x} = 0$ (正值性)

2つのベクトル

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n), \mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n) \quad (4.3)$$

に対して, スカラー積として定義される積を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n \quad (4.4)$$

標準スカラー積という*11.

スカラー積は計量ベクトル空間の上の4つの条件をみたせば, 標準スカラー積に限ることはない. しかし, もっとも有用なのはやはり標準スカラー積であろう.

この標準スカラー積を用いて長さ (距離) の概念であるノルムを定義できる. V を計量ベクトル空間とすると, 任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して, \mathbf{x} のノルムを

$$\|\mathbf{x}\| =: \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (4.5)$$

で定義する. 特別の場合として $\|\mathbf{x}\|$ が0になるのは $\mathbf{x} = 0$ のときに限られる.

この \mathbf{x} のノルムはこのベクトルの長さを表す. これで計量ベクトル空間に長さ (距離) の概念が導入された. ノルムに関してつぎの定理が成り立つ.

[計量ベクトル空間のノルム]

V を計量ベクトル空間とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, かつ, $c \in \mathbf{R}$ とするとき, ノルムに対して, つぎの性質が成り立つ.

1. $\|c\mathbf{x}\| = |c| \|\mathbf{x}\|$ ($|c|$ は実数 c の絶対値)
2. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (三角不等式)

(証明)

1.

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{x}\| &= \sqrt{\langle c\mathbf{x}, c\mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{c \langle \mathbf{x}, c\mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{c^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &= |c| \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &= |c| \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

*11 前に注意したように, 文字の上につけた添字はべき乗を意味せず, 単なる上付きの添字である.

2. 任意の実数 t に対して, ベクトル $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ を考えると

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

不等式 $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 \geq 0$ が成り立つための t についての 2 次不等式の条件は t の 2 次式の判別式が正でない (負または 0 である) ことである.

したがって

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 &\leq 0 \\ |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| &\leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

が成り立つ.

3.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

が成り立つ.

5 ベクトルの直交性

(4.4) で 2 つのベクトルのスカラー積を定義したが, このスカラー積を用いてベクトルの間の直交性を定義しよう.

[ベクトルの直交性]

計量ベクトル空間 V のノルムが 0 でない, 2 つのベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} について, そのスカラー積が 0 となる時, すなわち, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ であるとき, ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} は直交するという. またこのことを記号的に, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ と表す.

このベクトルの直交性はちょっと抽象的に思えるが, 平面上に描かれた 2 つの矢線ベクトルや空間中の矢線ベクトルが直交していることなども表している.

このことを見るために計量ベクトル空間のノルムの性質 2. で述べた Cauchy-Schwarz の不等式を思い出してみよう. この不等式は

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1 \quad (5.1)$$

とも表せるから, いま

$$u := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (5.2)$$

と表せば, この関係をみたく θ の値は一つに決めることができる*12. この θ をベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} のなす角という.

*12 この式で θ の範囲を $0 \leq \theta \leq \pi$ に制限しないと θ を一意に決めることができない. 三角関数は 1 価であるが, 逆三角関数 (その内の一つ $\theta = \arccos u$ も当然として) は多価関数である. その多価性を避けるために $\arccos u$ の場合には $0 \leq \theta \leq \pi$ が取られている. この θ の範囲をとることを主値をとるという.

幾何学的には2つのベクトルのスカラー積を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta \quad (5.3)$$

で定義している。ここで $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|$ はそれぞれベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} の大きさ（長さ）を表していることを思い出しておこう。また $u = \cos \theta$ のグラフから $\theta = \pi/2$ のときに $\cos \theta = 0$ であり、このときにベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} とは確かに幾何学的な意味でも直交している。

計量ベクトル空間 V の部分空間 W があるとき、 V のあるベクトル \mathbf{a} が W のすべてのベクトルと直交するならば、ベクトル \mathbf{a} は W と直交するといひ、 $\mathbf{a} \perp W$ と表す。また $\mathbf{a} \perp W$ であるすべてのベクトル \mathbf{a} の集合を W_{\perp} で表す。このとき W_{\perp} を W の直交補空間という。もちろん、逆に W は W_{\perp} の直交補空間である。

6 ベクトルとしての四元数

しばらくベクトル空間と計量ベクトル空間について学んだが、私たちの目的はあくまで四元数の理解に役立つためであった。そこで四元数にもどっていききたいが、その前に複素数でちょっとトレーニングをしたい。

まず複素数では、2つの複素数の和および複素数と実数との積が

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \quad (a, b, c, d : \text{実数}) \\ s(a + bi) &= (sa) + (sb)i, \quad (a, b, s : \text{実数}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

で定義できるから、複素数の全体はベクトル空間の2次元のベクトルである。

複素数は実数 1 と虚数単位 i を用いて $a + bi$ と表されているから、これを2つの実数の組 (a, b) と表すこともできる。もちろん、このとき $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ とも表すことができる。このとき、複素数の全体は基底 $(1, 0), (0, 1)$ の一次結合で表されるという。

こう考えると $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ であるから、 $1 := (1, 0), i := (0, 1)$ であると考えられる。

$(1, 0), (0, 1)$ は複素数が2次元のベクトル空間の基底で、正規直交性をみたしており、いわゆる正規直交基底となっている^{*13}。2次元のベクトル空間の1次独立な基底の数は次元数2に等しい。

この考えを四元数に拡張するとどうなるか。複素数と同様に四元数も2つの四元数の和と任意の四元数と実数の積が

$$\begin{aligned} (d + ai + bj + ck) + (w + xi + yj + zk) &= (d + w) + (a + x)i + (b + y)j + (c + z)k, \quad (d, a, b, c, w, x, y, z : \text{実数}) \\ s(d + ai + bj + ck) &= (sd) + (sa)i + (sb)j + (sc)k, \quad (d, a, b, c, s : \text{実数}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

で定義できるから、四元数の全体もベクトル空間の4次元のベクトルである。

1つの四元数を $d + ai + bj + ck$ と表したが、これを複素数 $a + bi$ を2つの実数の組 (a, b) と考えたように4つの実数の組 (d, a, b, c) として表すことはだれでも思いつくであろう。そうすれば、

$$(d, a, b, c) = d(1, 0, 0, 0) + a(0, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) + c(0, 0, 0, 1) \quad (6.3)$$

と表せることはすぐに思いつくから、これを $d + ai + bj + ck$ と対照させてみれば、 $1, i, j, k$ は

$$1 := (1, 0, 0, 0), \quad i := (0, 1, 0, 0), \quad j := (0, 0, 1, 0), \quad k := (0, 0, 0, 1) \quad (6.4)$$

と表すことができる。(6.4)を四元数の基底ということは複素数の場合と同じである。また、すべての四元数は基底(6.4)の一次結合として(6.3)のように表される。

^{*13} このことはスカラー積を導入した後に示す。

前の複素数のときと同様に $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ は四元数を 4 次元ベクトルとしてみたときの正規直交な基底をなしていることが後でわかる。4 次元のベクトル空間では 1 次独立な基底の数は 4 である。

ただし、複素数とか四元数をベクトルとみなしたときの和とかスカラー乗法とかの演算以外にも複素数や四元数の固有の演算（複素数や四元数の四則演算）もあることが数ベクトルの場合とちがっている。これらの演算はもちろんベクトル空間のベクトルの演算とは別の演算である。

ベクトルの和とスカラー乗法の他に、複素数と四元数にスカラー積を導入すれば、複素数や四元数の全体を計量ベクトル空間とすることができる。

それで 2 つの複素数 θ と ϕ

$$\theta := a + ib = (a, b), \quad (a, b : \text{実数}) \quad (6.5)$$

$$\phi := x + yi = (x, y), \quad (x, y : \text{実数}) \quad (6.6)$$

のスカラー積を

$$\langle \theta, \phi \rangle = \langle (a, b), (x, y) \rangle := ax + by \quad (6.7)$$

で定義する^{*14}。このとき複素数の全体は 2 次元の計量ベクトル空間となる。

複素数の場合と同様に 2 つの四元数 α と β

$$\alpha := d + ai + bj + ck = (d, a, b, c), \quad (d, a, b, c : \text{実数}) \quad (6.8)$$

$$\beta := w + xi + yj + zk := (w, x, y, z), \quad (w, x, y, z : \text{実数}) \quad (6.9)$$

のスカラー積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle (d, a, b, c), (w, x, y, z) \rangle := dw + ax + by + cz \quad (6.10)$$

で定義する^{*15}。

ここで二つの課題がある。一つは複素数の場合なら、1 と虚数単位 i の積が従うべき関係 $1^2 = 1, i^2 = -1, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ があるが、それらの関係が $1 := (1, 0), i := (0, 1)$ に対して確かに成り立つのだろうか。またベクトル空間のベクトルとしてのベクトルの直交性はどうかである。

まずは複素数についてベクトルとしての直交性から見ておく。これはスカラー積の定義 (6.7) から

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 0, \quad \text{直交性}$$

$$\langle (1, 0), (1, 0) \rangle = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1, \quad \text{正規性} \quad (6.11)$$

となって、ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ についてその正規直交性は成り立っている。

つぎに複素数の計算の規則である

$$1^2 = 1, \quad i^2 = -1 \quad (6.12)$$

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i$$

が成り立つかである。こちらは複素数の計算の規則にしたがって計算すればよい。

2 つの複素数の積は

$$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i \quad (6.13)$$

^{*14} $\langle (a, b), (x, y) \rangle$ で用いられた記号 \langle, \rangle でスカラー積を定義する。 $(,)$ でスカラー積を表すことも一般にされるが、数ベクトルを (a, b) のように表すので、それとの区別をするためにスカラー積に記号 \langle, \rangle を用いる。

^{*15} これらのスカラー積は 2 つの複素数や四元数の積そのものではないが、複素数や四元数の積との関係がわかっている。(6.5),(6.6),(6.7) と (6.8),(6.9),(6.10) の記号を用いれば、

$$\langle \theta, \phi \rangle = \frac{1}{2}(\theta\bar{\phi} + \phi\bar{\theta}),$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha})$$

と表される。ここで $\bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ はそれぞれ $\theta, \phi, \alpha, \beta$ の共役である。

であるから,

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) \quad (6.14)$$

となる. これを用いて計算すれば,

$$\begin{aligned} (1, 0)(1, 0) &= (1, 0) \\ (0, 1)(0, 1) &= -(1, 0) \\ (1, 0)(0, 1) &= (0, 1) \\ (0, 1)(1, 0) &= (0, 1) \end{aligned} \quad (6.15)$$

であるから (6.12) は確かに成り立っている.

同じことを四元数についても行ってみよう. まずはじめに四元数のスカラー積の定義 (6.10) を用いれば, 基底 $1, i, j, k$ の直交性は

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle &= 0, \\ \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle &= 0, \\ \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0, \\ \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle &= 0, \\ \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0, \\ \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

と示され, 成り立っている.

さらに, スカラー積の定義から, 基底 $1, i, j, k$ の正規性も

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle &= 1, \\ \langle (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle &= 1, \\ \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle &= 1, \\ \langle (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (6.17)$$

と示され, 成り立っている.

以上で 4 次元のベクトル空間のベクトルとしての四元数の基底の正規直交性が示された.

つぎに四元数の $1, i, j, k$ の相互の積の間に成り立つ関係は

$$\begin{aligned} 1 \cdot i &= i \cdot 1 = i, \\ 1 \cdot j &= j \cdot 1 = j, \\ 1 \cdot k &= k \cdot 1 = k, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j \end{aligned} \quad (6.18)$$

であった. この関係が前に決めた $1 := (1, 0, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0, 0)$, $j := (0, 0, 1, 0)$, $k := (0, 0, 0, 1)$ で (6.18) が成り立っているかどうかを調べなくてはならない. そのためには一般の 2 つの四元数の積で

$$\begin{aligned} (d + ai + bj + ck)(w + xi + yj + zk) &= D + Ai + Bj + Ck, \\ D &= dw - (ax + by + cz), \\ A &= aw + dx - cy + bz, \\ B &= bw + cx + dy - az, \\ C &= cw - bx + ay + dz \end{aligned} \quad (6.19)$$

であることを思い出して*16, (6.19) の 2 つの四元数の積を

$$(d, a, b, c)(w, x, y, z) = (D, A, B, C) \quad (6.20)$$

と表して, 計算すればよい. ここで, D, A, B, C は (6.19) で与えられている.

ここでは (6.18) の $ij = k$ と $ji = -k$ がベクトル表示でも成り立つことを示しておく. (6.18) の他の積もベクトル表示で同様に成り立っていることが確かめられる*17.

ij の積 $(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0)$ では (6.20) の左辺で 0 でないのは $a = y = 1$ だけであるから, $D = A = B = 0, C = 1$ となり,

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) \quad (6.21)$$

であるから, 確かに $ij = k$ が成り立っている.

また, i と j との順序を入れ変えた ji の積 $(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0)$ では (6.20) の左辺で 0 でないのは $b = x = 1$ だけであるから, $D = A = B = 0, C = -1$ となり,

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = -(0, 0, 0, 1) \quad (6.22)$$

であるから, 確かに $ji = -k$ が成り立っている.

7 直交補空間

5 節で直交補空間について簡単に言及したが, この節ではこの直交補空間について焦点をあてて述べよう.

いま n 次元のベクトルの全体の集合を考えると, これを n 次元ベクトル空間 V^n とよぶ.

このベクトル空間の部分空間 W が与えられたとき, W のすべてのベクトル \mathbf{y} と直交するような \mathbf{x} の全体の集合はもう一つの部分空間 U になる. これを W の直交補空間という.

具体的に直交補空間の例を考えよう. 3 次元のベクトル空間を考えたとき, この 3 次元ベクトル空間はそのベクトル空間の中のある一つの直線に垂直な平面 (2 次元ユークリッド空間) とその平面に垂直な直線の方向の空間に分けることができる. このときそれぞれの空間, すなわち, 平面とそれに垂直な直線方向の空間はいま挙げた直交補空間となっている*18.

いま, この 3 次元空間の中のある平面に垂直な任意の直線を固定軸として, その軸のまわりに平面を回転させることができる.

この平面上にベクトルをとれば, そのベクトルも固定軸のまわりに回転するが, この平面上からぬけ出すことはなく, この平面上のベクトルでありつづける. また, 平面に垂直なベクトルはこの軸のまわりの回転によって, この平面を通る点の位置は固定軸のまわりに回転するけれども, この平面に垂直なベクトルが垂直の状態から傾いてしまったり, はたまた平面上のベクトルになってしまったりすることはない.

こういう状況はもちろん, 回転軸のとり方があくまで特殊なのであって, 平面に垂直な軸ではなく平面上に存在する, ある軸のまわりの $\pi/2$ の回転をとれば, 平面に垂直だったベクトルをその平面上のベクトルには変換することはもちろん可能である.

それはともかく, 上に述べた 3 次元ユークリッド空間を 2 次元のユークリッド空間とそれに直交した 1 次元のユークリッド空間とに分けることができるという考えはおもしろい. こういう 3 次元空間における 2 次元ユークリッド空間 (平面) とそれに直交した 1 次元空間 (直線) という 2 つの直交した空間を一般化して, 直交補空間という考えが生まれた.

*16 2 章の四元数を表す文字の順序とこの章での四元数の文字の順序が変わっていることに注意せよ.

*17 残りの関係が成り立つことは付録 1 に示す.

*18 このときに直交補空間は部分空間であるから, 零ベクトルを含む. それで座標空間としてベクトル空間を考えると, 必ず原点を含んでいなければならない.

平面の直交補空間はそれに垂直な方向の1次元のユークリッド空間であり、またこの1次元のユークリッド空間の直交補空間はそれに直交した平面である。

上で見てきたように、平面に垂直なある直線のまわりの回転によって平面上のベクトルはその方向や向きは変るが、やはりその平面上のベクトルであり続ける。

平面全体で見れば、平面は回転するけれども、その平面の方向（これは平面の法線の方向で決める）は不変である。

Hamilton が“三元数”をつくろうとして、

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj)$$

の積を考えたときに、新しい4つ目の元 k の存在を認めざるを得なかった。これから“三元数”は存在せず、Hamilton が四元数を発見する契機となったことはすでに述べた [9]。

しかし、そうやって発見した四元数の4つの元 $1, i, j, k$ のしたがう代数は1と i, j, k とでは大いに異なっていた。もう一度復習をしておく

1. 1 は i, j, k の各元とは交換可能である。 $1 \cdot i = i \cdot 1$, $1 \cdot j = j \cdot 1$, $1 \cdot k = k \cdot 1$
2. i, j, k の各元は交換可能ではない。もっと詳しくいえば、それらの間の交換に対して反対称（交代）である。またその中の2つの積からこの積の因子にはない、第3の元が生ずる。

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

したがって、こういう考察から i, j, k を元としてつくられる空間が3次元空間と同定できるのではないかというアイデアが浮かんでくる。そうすると、四元数の中で i, j, k でつくられる空間と別のもう一つの 1 を元としてつくられる空間とがあたかも互いに直交補空間をなしているのではないか。これは四元数の実部の部分 R と虚部の部分 I とが画然と性質が異なっていることから予想されることである*19。

いま四元数 γ, δ をそれぞれ

$$\gamma = d, \quad (d: \text{実数}) \in R \tag{7.1}$$

$$\delta = xi + yj + zk, \quad (x, y, z, \text{実数}) \in I \tag{7.2}$$

とすれば、

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \langle d, xi + yj + zk \rangle = 0 \tag{7.3}$$

であるから、部分空間 R と I とは確かに互いに直交補空間になっている。

それで四元数の中で実部がつくる空間 R と虚部がつくる空間 I が互いに直交補空間となっているとことがわかる。

四元数 v がいま実部のみをもっており、虚部をもたないとき、 q は一般の四元数であるとすれば、 $q \neq 0$ のとき q^{-1} が存在して q^{-1} と v とは交換可能であるので

$$qvq^{-1} = qq^{-1}v = v \tag{7.4}$$

となり、写像 $f(v) = qvq^{-1}$ によって v は不変である。このことを記号的に表すならば

$$v \in R \rightarrow qvq^{-1} \in R$$

となる。

*19 四元数の実部の部分空間 R は $v = t$, ($t = \text{実数}$) であり、虚部の部分空間 I は $v = xi + yj + zk$, ($x, y, z = \text{実数}$) である。

つぎに四元数 v が実部をもたず、虚部だけをもつならば、ポントリヤーギン [5] の用いた記号 \hat{v} を用いて

$$\hat{v} = xi + yi + zk, \quad q = d + ai + bj + ck \quad (7.5)$$

と表し、写像 $f(v) = q\hat{v}q^{-1}$ を考えよう。このとき $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(d - ai - bj - ck)$ であった。したがって

$$q\hat{v}q^{-1} = (d + ai + bj + ck)(xi + yj + zk)\frac{1}{|q|^2}(d - ai - bj - ck) \quad (7.6)$$

である。

そこで、まず $\hat{v}q^{-1}$ の積の計算を行うと

$$\begin{aligned} \hat{v}q^{-1} &= \frac{1}{|q|^2}(xi + yj + zk)(d - ai - bj - ck) \\ &= \frac{1}{|q|^2}[(ax + by + cz) + (dx - cy + bz)i + (cx + dy - az)j + (-bx + ay + dz)k] \\ &= \frac{1}{|q|^2}[D + Ai + Bj + Ck] \end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$D = ax + by + cz \quad (7.7)$$

$$A = dx - cy + bz \quad (7.8)$$

$$B = cx + dy - az \quad (7.9)$$

$$C = -bx + ay + dz \quad (7.10)$$

である。

つづいて、 $q\hat{v}q^{-1}$ を計算すれば

$$\begin{aligned} q\hat{v}q^{-1} &= (d + ai + bj + ck)\frac{1}{|q|^2}(D + Ai + Bj + Ck) \\ &= \frac{1}{|q|^2}[(dD - aA - bB - cC) + (aD + dA - cB + bC)i \\ &\quad + (bD + cA + dB - aC)j + (cD - bA + aB + dC)k] \end{aligned} \quad (7.11)$$

が得られる。

まず $q\hat{v}q^{-1}$ の実部

$$dD - aA - bB - cC$$

がどうなるか調べてみよう。

$$\begin{aligned} dD - aA - bB - cC &= d(ax + by + cz) - a(dx - cy + bz) - b(cx + dy - az) - c(-bx + ay + dz) \\ &= (ad - ad - bc + bc)x + (bd + ac - bd - ac)y + (cd - ab + ab - cd)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $q\hat{v}q^{-1}$ の実部は 0 となる。すなわち

$$\operatorname{Re}(q\hat{v}q^{-1}) = 0 \quad (7.12)$$

である。

したがって

$$q\hat{v}q^{-1} = x'i + y'j + z'k \quad (7.13)$$

の形に表される。ここで

$$x' = \frac{1}{|q|^2}(aD + dA - cB + bC) \quad (7.14)$$

$$y' = \frac{1}{|q|^2}(bD + cA + dB - aC) \quad (7.15)$$

$$z' = \frac{1}{|q|^2}(cD - bA + aB + dC) \quad (7.16)$$

である。

したがって、 qvq^{-1} は実部をもたない、虚部だけの四元数であることがわかった。これは実は [9] ですでにそうなるように写像をつくったことを思い出してほしい。

すなわち、写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によって実部だけからなる四元数 v は実部だけからなる四元数 u に、虚部だけからなる四元数 v は虚部だけの四元数 u に写像される：四元数 v の部分空間 R の写像 f は R であり、部分空間 I の写像は I であることを示している。

前に述べた用語でいえば四元数の実部のつくる部分空間 R と虚部のつくる部分空間 I は、ベクトル空間のそれぞれ互いの直交補空間となっており、互いに直交補空間であるという性質は写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によっては変わらない（保存される）*20。

このことを前の実部だけの四元数がやはり実部だけの四元数に写像されるという性質とあわせて、まとめて記号的に表せば

$$\begin{aligned} v \in R &\rightarrow qvq^{-1} \in R \\ v \in I &\rightarrow qvq^{-1} \in I \end{aligned}$$

と表すことができる。

8 \hat{v} の大きさの保存

この節では記号を簡単にするために $\hat{v} = xi + yj + zk$ を単に v と表すことにしよう。すなわち、 v は実部をもたない四元数である。写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によって v の大きさが保存されることを見ておこう。このことは幾何学的に考えるとベクトルはこの写像によって、その大きさが変わらないこと、すなわち、ベクトルの空間回転を写像 $u = f(v)$ が表すことを意味する。

v とは違って、いま q は一般の四元数である。普通の文献には q を単位四元数にとっている。すなわち、そのノルム $|q|$ が $|q| = 1$ にとられているが、いましばらくは任意の四元数とする。その一般的な四元数による写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ はその大きさを保存することを示す。

そのために qvq^{-1} のノルムの 2 乗を考えよう。ここで、 $\overline{qvq^{-1}}$ と \bar{v} は、それぞれ、 qvq^{-1} と v の共役を表す。

*20 Hamilton が三元数をつくらうとして $(a + bi + cj)(x + yi + zk)$ の積を考えたときに、どうしても新しい第四の元 $k = ij = -ji$ の存在を認めなければならなかった。その事実と対照すれば、四元数 v の実部の部分空間 R と虚部の部分空間 I がそれぞれ写像 qvq^{-1} によって交わり合わないで、保存されているという事実は興味深い。そしてこの事実から写像 qvq^{-1} が空間回転を表すという発想へと導かれたのではないかと推測される。

また $\overline{qvq^{-1}}$ の計算については付録 2 を参照すれば,

$$\begin{aligned}
|qvq^{-1}|^2 &= (qvq^{-1})\overline{(qvq^{-1})} \\
&= \frac{1}{|q|^2} qvq^{-1}q\bar{v}\bar{q} \\
&= \frac{1}{|q|^2} q|v|^2\bar{q} \\
&= \frac{1}{|q|^2} |q|^2|v|^2 \\
&= |v|^2
\end{aligned} \tag{8.1}$$

したがって, v の大きさは写像 f によっては変わらない (保存される).

これは $v = xi + yj + zk$, $q = d + ai + bj + ck$ を代入して $|qvq^{-1}|^2$ を直接計算しても確かめられる.

大部分の文献では q を単位四元数としているが, この q が単位四元数であると限定する理由は, この四元数を $q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}$ と表すためである. ここで, \mathbf{n} は空間回転の回転軸の方向を表しており, 角 θ は空間の回転軸 \mathbf{n} のまわりの回転角を表している.

9 四元数表現から SO(3) 表現へ

この節では空間回転の四元数による表現から行列の SO(3) 表現を導く*21.

これは 7 節の (7.13) を四元数 q のノルムが 1 の場合, すなわち $|q| = 1$ に対して単に計算するだけである.

出発点は (7.13) の qvq^{-1} であるが, q として単位四元数をとるので, $|q| = 1$ である. 本来 $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ であったから, この式に $|q| = 1$ を代入すれば,

$$q^{-1} = \bar{q} \tag{9.1}$$

となる. したがって, qvq^{-1} は

$$qv\bar{q} \tag{9.2}$$

となる.

単位四元数による回転について述べる前に, まず単位四元数としての q の表現について述べておこう.

単位四元数 q についても一般の四元数と同じく

$$q = d + ai + bj + ck \tag{9.3}$$

と表せば*22,

$$|q|^2 = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{9.4}$$

の条件がつく. したがって,

$$d = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sin \frac{\theta}{2} \tag{9.5}$$

と表す角 θ があることがわかる. 結果を先取りしていえば, この角 θ はいま回転する対象をベクトルとすれば, ベクトルの回転軸のまわりの回転角を表している.

では回転軸をどのように指定するのか. これがつぎの問題である. それについて述べよう.

単位四元数 q は

$$q = d + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{9.6}$$

*21 SO(3) とは, 要素が実数の 3 行 3 列の行列のつくる直交群 O で, O の転置行列が逆行列となり, すなわち $O^t = O^{-1}$ が成立し, かつその行列式 $\det O = 1$ であるものをいう. 群については, 例えば, [10] を参照せよ.

*22 もちろん同じ d, a, b, c でも表す値はちがってくることに注意しなくてはならない.

とも書き表せる。ここで,

$$\frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = n_1i + n_2j + n_3k := \mathbf{n} \quad (9.7)$$

と表す。ここで,

$$n_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n_3 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (9.8)$$

である。これは

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (9.9)$$

を確かみにたしている。(9.7) で定義された \mathbf{n} はベクトルの回転軸の方向を示している^{*23}.

前の (9.5) の記号を用いれば,

$$d = \cos \frac{\theta}{2}, a = n_1 \sin \frac{\theta}{2}, b = n_2 \sin \frac{\theta}{2}, c = n_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.11)$$

とも表される。ここで n_1, n_2, n_3 はベクトルの回転軸の方向余弦であり^{*24}, 3つのパラメーターがあるように見えるが, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ の条件があるから, フリーなパラメーターは2つしかない。もっとも他に回転の角を表す θ があるから, 回転全体では3つのフリーなパラメーターがあることはいうまでもない。

したがって, この節で定義した記号を用いて単位四元数 q は

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}, \mathbf{n} = n_1i + n_2j + n_3k \quad (9.12)$$

と表すことができる。

また, $q\bar{q} = 1$ であることをつぎのようにして確かめることができる。まず

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.13)$$

$$\bar{q} = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.14)$$

であるから

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \langle \mathbf{n}, -\mathbf{n} \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.15)$$

^{*23} (9.9) が成り立つのは自明だが, $|\mathbf{n}|^2 = 1$ が成り立つことを四元数の計算としてもつぎのように確かめられる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}|^2 &= \mathbf{n}\bar{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} (ai + bj + ck)[(-1)(ai + bj + ck)] \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.10)$$

^{*24} 方向余弦については付録 4 を参照せよ。

さて、準備が整ったので、主題にとりかかろう。これから行いたいことは (7.13) の $qv\bar{q}$ を計算することであった。ここで後の都合がよいように記号の変更をしておく。すなわち、(7.13) で

$$x' \rightarrow x'_1, y' \rightarrow x'_2, z' \rightarrow x'_3 \quad (9.16)$$

とおきかえれば、

$$qv\bar{q} = x'_1 i + x'_2 j + x'_3 k \quad (9.17)$$

と表される。また (7.5) で与えた \hat{v} を v とおきかえて、さらに

$$x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3 \quad (9.18)$$

とおきかえる。そうすると v は

$$v = x_1 i + x_2 j + x_3 k \quad (9.19)$$

と表される。

いま求めたいのは (9.17) であるが、この中の x'_1, x'_2, x'_3 を表す式は前に (7.14)-(7.16) で与えられている。それらは $|q| = 1$ を考慮すれば、

$$x'_1 = aD + dA - cB + bC, \quad (9.20)$$

$$x'_2 = bD + cA + dB - aC, \quad (9.21)$$

$$x'_3 = cD - bA + aB + dC \quad (9.22)$$

である。さらに、ここに用いられている、 D, A, B, C は (7.7)-(7.10) に与えられているが、記号を変更して表すと

$$D = ax_1 + bx_2 + cx_3, \quad (9.23)$$

$$A = dx_1 - cx_2 + bx_3, \quad (9.24)$$

$$B = cx_1 + dx_2 - ax_3, \quad (9.25)$$

$$C = -bx_1 + ax_2 + dx_3 \quad (9.26)$$

となる。これに d, a, b, c の式 (9.11) を代入すれば、

$$D = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.27)$$

$$A = x_1 \cos \frac{\theta}{2} + (n_2 x_3 - n_3 x_2) \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.28)$$

$$B = x_2 \cos \frac{\theta}{2} + (n_3 x_1 - n_1 x_3) \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.29)$$

$$C = x_3 \cos \frac{\theta}{2} + (n_1 x_2 - n_2 x_1) \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.30)$$

となり、 D, A, B, C もベクトルの回転角 θ で表される。

つぎに (9.20)-(9.22) の x'_1, x'_2, x'_3 に (9.11) の d, a, b, c と (9.27)-(9.30) の D, A, B, C を代入して、 x_1, x_2, x_3 について整理すれば

$$x'_1 = E_1 x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3 \quad (9.31)$$

$$x'_2 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 \quad (9.32)$$

$$x'_3 = G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 \quad (9.33)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned}
 E_1 &= n_1^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \\
 E_2 &= n_1 n_2(1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta \\
 E_3 &= n_1 n_3(1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\
 F_1 &= n_1 n_2(1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta \\
 F_2 &= n_2^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \\
 F_3 &= n_2 n_3(1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\
 G_1 &= n_1 n_3(1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta \\
 G_2 &= n_2 n_3(1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta \\
 G_3 &= n_3^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

である。

x'_1, x'_2, x'_3 と x_1, x_2, x_3 の関係 (9.31)-(9.33) はもちろん行列で線形変換として書き表すこともできる。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

そして、この 3 行 3 列の行列が直交行列であることを証明することができる。その証明は式が少し面倒なので、付録 3 に述べる*25。

10 おわりに

同形写像 (1.1), (1.2) から空間回転の四元数表現 $u = f(v) = qvq^{-1}$ を導いた。しかし、どうしてこのような同形写像を考えついたのかはいまのところまだ私には明らかではない。歴史的に振り返って見る必要があるであろう。

それはともかく四元数の回転表現 $u = f(v) = qvq^{-1}$ が行列の直交変換と結びつくことがわかった。しかし、さらに行列での回転の表現とベクトルでの回転表現との同等性や行列による回転の表現についても SO(3) 表現と SU(2) 表現の同等性とかまだまだ議論したいことが残っている。それらは今後の課題としたい。

この長くて退屈なエッセイを読んで、多くの有用なアドバイスを世戸憲治さんから頂きました。少しでもこのエッセイが読みやすくなっているとすれば、世戸さんのおかげです。深く感謝します。

付録 1 ベクトル表示による (6.18) の成立

すでに (6.18) の $ij = -ji = k$ については本文中でベクトル表示で成り立つことを確かめた。この付録では残りの関係もベクトル表示で成り立つことを確かめる。

まずベクトル表示で $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ が成り立つことを示す。つぎに $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ が成り立つことを示し、最後に $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$, $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $1 \cdot k = k \cdot 1 = k$ が成り立つことを示す*26。

*25 この変換 (9.35) は行列の成分が回転角 $\theta = 0$ のときに、対角成分は $E_1 = F_2 = G_3 = 1$ で、かつ非対角成分はすべて 0 であるので恒等変換を含んでいる。すなわち、この行列の行列式の値は 1 である。この直交変換を固有直交変換という。

*26 誤解を招かないために一言注意しておく。(6.18) は四元数において、すべて成り立つことが要請されている関係である。ここではそれらの関係がベクトル表示でも矛盾なく成立することを確認している。

($jk = -kj = i$ の場合)

jk の積 $(0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1)$ は (6.18) で 0 でないのは $b = z = 1$ であるから, (6.18) の $D = B = C = 0, A = 1$ である. したがって,

$$(0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0)$$

となり, $jk = i$ が成り立つ.

また kj に対応した積 $(0, 0, 0, 1)(0, 0, 1, 0)$ は (6.18) で 0 でないのは $c = y = 1$ であるから, (6.18) の $D = B = C = 0, A = -1$ である. したがって,

$$(0, 0, 0, 1)(0, 0, 1, 0) = -(0, 1, 0, 0)$$

となり, $kj = -i$ が成り立つ.

($ki = -ik = j$ の場合)

ki に対応した積 $(0, 0, 0, 1)(0, 1, 0, 0)$ は (6.18) で 0 でないのは $c = x = 1$ であるから, (6.18) の $D = A = C = 0, B = 1$ である. したがって,

$$(0, 0, 0, 1)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 1, 0)$$

となり, $kj = i$ が成り立つ.

また ik に対応した積 $(0, 1, 0, 0)(0, 0, 0, 1)$ は (6.18) で 0 でないのは $a = z = 1$ であるから, (6.18) の $D = A = C = 0, B = -1$ である. したがって

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 0, 1) = -(0, 0, 1, 0)$$

となり, $ik = -j$ が成り立つ.

($i^2 = j^2 = k^2 = -1$ の場合)

i^2 では (6.20) の左辺で $a = x = 1$ であり, 他はすべて 0 であるから, $A = B = C = 0, D = -1$ が成り立つ. したがって

$$(0, 1, 0, 0)(0, 1, 0, 0) = -(1, 0, 0, 0)$$

$i^2 = -1$ が成り立つ. j^2 では (6.20) の左辺で $b = y = 1$ であり, 他はすべて 0 であるから, $A = B = C = 0, D = -1$ が成り立つ. したがって

$$(0, 0, 1, 0)(0, 0, 1, 0) = -(1, 0, 0, 0)$$

$j^2 = -1$ が成り立つ. k^2 では (6.20) の左辺で $c = z = 1$ であり, 他はすべて 0 であるから, $A = B = C = 0, D = -1$ が成り立つ.

$$(0, 0, 0, 1)(0, 0, 0, 1) = -(1, 0, 0, 0)$$

したがって, $k^2 = -1$ が成り立つ.

以上で

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{10.1}$$

がベクトル表示でも成り立つ.

($1 \cdot i = i \cdot 1 = i$, $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $1 \cdot k = k \cdot 1 = k$ の場合)

これらの式をベクトル表示で示すことは必要ないかもしれない。というのも 1 はどの他の i, j, k とも交換できるからである。

まず (6.20) で $d = 1$, $a = b = c = 0$ のときに, w, x, y, z が任意の値のときに積が変わらないことを示しておく。このときの積は (6.20) で $D = w, A = x, B = y, C = z$ であるから

$$(1, 0, 0, 0)(w, x, y, z) = (w, x, y, z)$$

となり, 任意の (w, x, y, z) に $(1, 0, 0, 0)$ を左からかけても積は (w, x, y, z) のままである。

積の順序が逆になった場合には (6.20) で $w = 1$, $x = y = z = 0$ のときに, d, a, b, c が任意の値のときに積は (6.20) で $D = d, A = a, B = b, C = c$ であるから

$$(d, a, b, c)(1, 0, 0, 0) = (d, a, b, c)$$

となり, 任意の (d, a, b, c) に $(1, 0, 0, 0)$ を右からかけても積は (d, a, b, c) のままである。

これらのことから

$$1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k \tag{10.2}$$

がベクトル表示でも成り立つことが示された。

付録 2 $\overline{qvq^{-1}}$ の計算

$\overline{qvq^{-1}}$ の計算にはいくつかの予備知識がいる。

その一つは複数の四元数の積の共役をとることと関係している。いま, 2つの四元数を r, s としよう。このときこれらの四元数の積 rs の積の共役 \overline{rs} は

$$\overline{rs} = \bar{s}\bar{r}$$

となる。2つの四元数の積の共役をとれば, 複素数の場合とは違って順序が逆になる。

もう一つは q^{-1} がどう表されるかである。これは

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= |q|^2 \\ q\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

であるから, q^{-1} は

$$q^{-1} := \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

と表される。

これらを用いれば, $u := qvq^{-1}$ の共役は

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \overline{qvq^{-1}} \\ &= \overline{qv \frac{\bar{q}}{|q|^2}} \\ &= \frac{1}{|q|^2} \overline{q(qv)} \\ &= \frac{1}{|q|^2} q\bar{v}\bar{q} \end{aligned}$$

となる。

付録 3 (9.35) は直交変換である

(9.35) が直交変換であることは

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 & G_1 \\ E_2 & F_2 & G_2 \\ E_3 & F_3 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

であることを示せばよい。したがって、

$$E_1^2 + F_1^2 + G_1^2 = 1 \quad (10.4)$$

$$E_2^2 + F_2^2 + G_2^2 = 1 \quad (10.5)$$

$$E_3^2 + F_3^2 + G_3^2 = 1 \quad (10.6)$$

$$E_1E_2 + F_1F_2 + G_1G_2 = 0 \quad (10.7)$$

$$E_1E_3 + F_1F_3 + G_1G_3 = 0 \quad (10.8)$$

$$E_2E_3 + F_2F_3 + G_2G_3 = 0 \quad (10.9)$$

が示せればよい。

以下ではその詳細な計算を示す。上の式の6つの式の前半の3つの式(10.4)-(10.6)と後半の3つの式(10.7)-(10.9)がそれぞれ成り立つことを示す。

まず、前半の式(10.4)-(10.6)を証明する。いま

$$P_{ijk} := [n_i^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta]^2 + [n_i n_j(1 - \cos \theta) + n_k \sin \theta]^2 + [n_i n_k(1 - \cos \theta) - n_j \sin \theta]^2$$

とおけば、この P_{ijk} は

$$P_{123} = E_1^2 + F_1^2 + G_1^2$$

$$P_{231} = E_2^2 + F_2^2 + G_2^2$$

$$P_{312} = E_3^2 + F_3^2 + G_3^2$$

となる。したがって、この P_{ijk} を計算すればよい。式の表記を簡単にするために $\cos \theta = c$, $\sin \theta = s$ と略記する。また計算の中で $n_i^2 + n_j^2 + n_k^2 = 1$ の関係を用いる。

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= [n_i^2(1 - c) + c]^2 + [n_i n_j(1 - c) + n_k s]^2 + [n_i n_k(1 - c) - n_j s]^2 \\ &= n_i^4(1 - c)^2 + c^2 + 2n_i^2(1 - c)c \\ &\quad + n_i^2 n_j^2(1 - c)^2 + n_k^2 s^2 + 2n_i n_j n_k(1 - c)s \\ &\quad + n_i^2 n_k^2(1 - c)^2 + n_j^2 s^2 - 2n_i n_j n_k(1 - c)s \\ &= n_i^2(1 - c)^2 + 2n_i^2(1 - c)c + c^2 + s^2 - n_i^2 s^2 \\ &= n_i^2(1 - c)(1 + c) - n_i^2 s^2 + 1 \\ &= n_i^2(1 - c^2 - s^2) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ただし、上の P_{ijk} の式の2行目から4行目では計算がわかりやすいように上下に同じ位置にそろった項ごとに加えて計算している。これで、前半の3つの式(10.4)-(10.6)が証明された。

つぎの後半の式(10.7)-(10.9)を証明する。いま

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= [n_i^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta][n_i n_j(1 - \cos \theta) - n_k \sin \theta] \\ &\quad + [n_i n_j(1 - \cos \theta) + n_k \sin \theta][n_j^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta] \\ &\quad + [n_i n_k(1 - \cos \theta) - n_j \sin \theta][n_j n_k(1 - \cos \theta) + n_i \sin \theta] \end{aligned}$$

とおけば、この Q_{ijk} は

$$Q_{123} = E_1E_2 + F_1F_2 + G_1G_3$$

$$Q_{312} = E_1E_3 + F_1F_3 + G_1G_3$$

$$Q_{231} = E_2E_3 + F_2F_3 + G_2G_3$$

となる。したがって、この Q_{jik} を計算すればよい。前と同じく $\cos \theta = c$, $\sin \theta = s$ と略記し、計算で $n_i^2 + n_j^2 + n_k^2 = 1$ の関係を用いる。

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= [n_i^2(1-c) + c][n_in_j(1-c) - n_ks] + [n_in_j(1-c) + n_ks][n_j^2(1-c) + c] \\ &\quad + [n_in_k(1-c) - n_js][n_jn_k(1-c) + n_is] \\ &= n_i^3n_j(1-c)^2 - n_i^2n_k(1-c)s + n_in_j(1-c)c - n_ks \\ &\quad + n_in_j^3(1-c)^2 + n_j^2n_k(1-c)s + n_in_j(1-c)c + n_ks \\ &\quad + n_in_jn_k^2(1-c)^2 + (n_i^2 - n_j^2)n_k(1-c)s - n_in_js^2 \\ &= n_in_j(1-c)^2 + 2n_in_j(1-c)c - n_in_js^2 \\ &= n_in_j(1-c)(1+c) - n_in_js^2 \\ &= n_in_j(1-c^2 - s^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ただし、上の Q_{ijk} の式の 3 行目から 5 行目では計算がわかりやすいように上下の同じ位置にそろった項ごとに加えて計算している。

以上から、(9.35) の行列は直交行列であり、したがって (9.35) は直交変換であることが示された。

付録 4 方向余弦

最近あまり解析幾何学を学ぶ機会が以前より少なくなっているので、方向余弦と聞いてすぐわかる人が少なくなっているかもしれない。そのことを考慮して方向余弦について説明をしよう。

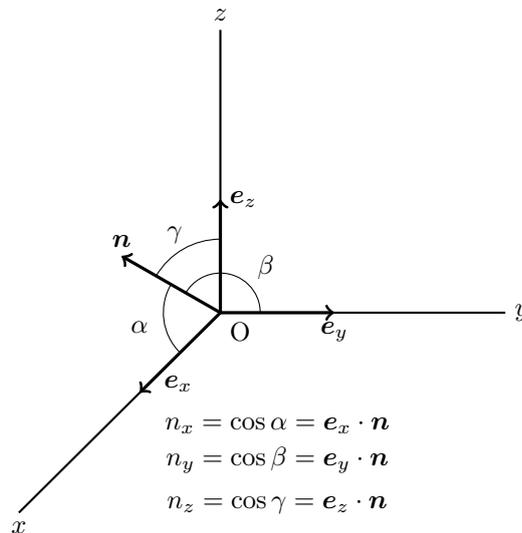


図 10.1 方向余弦

ある直交座標系をとり、その原点から任意の方向に向かっている単位ベクトル \mathbf{n} をとる。いまこの単位ベクトル

ル \mathbf{n} を

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z \quad (10.10)$$

と表したとき、図 10.1 のように \mathbf{n} が x 軸、 y 軸、 z 軸の正の方向となす角を α 、 β 、 γ とすれば、

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \cos \beta, \quad n_z = \cos \gamma \quad (10.11)$$

となる。この n_x 、 n_y 、 n_z をベクトル \mathbf{n} の方向余弦という。これが方向余弦の定義であるが、ベクトルのスカラー積を用いれば、

$$n_x = \cos \alpha = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}, \quad (10.12)$$

$$n_y = \cos \beta = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}, \quad (10.13)$$

$$n_z = \cos \gamma = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (10.14)$$

と x 、 y 、 z 軸にそった単位ベクトル \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z とのスカラー積で表すことができる。

また方向余弦は単位ベクトル \mathbf{n} の成分であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= (n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z) \cdot (n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z) \\ &= n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (10.15)$$

であることもわかる。

(2013. 2. 13)(2024. 4. 3 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数と空間回転 3, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 1 号 (2013.3) 15-24
- [2] 矢野 忠, 四元数と空間回転 1, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 2 号 (2012.6) 19-29
- [3] 矢野 忠, 四元数と空間回転 2, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 5 号 (2012.10) 20-27
- [4] 佐武一郎, 『線型代数学』(裳華房, 1958) 91-138
- [5] ポントリャーギン, 『数概念の拡張』(森北出版, 2002) 32-66
- [6] 藤岡敦, 『手を動かしてまなぶ線型代数』(裳華房, 2015) 123-124
- [7] http://sammaya.garyoutensei.com/math_phys/math1/math1-12/math1-12.html
- [8] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/func-eq/func-eq.htm
- [9] 矢野 忠, 四元数の発見へ, 数学・物理通信 第 1 巻, 第 11 号 (2011.12) 16-23
- [10] 山内恭彦, 杉浦光夫, 『連続群論入門』(培風館, 1960)

編集後記

読者の皆さん、こんにちは。私が住む札幌のこの冬は、これまでに経験したことがないおかしな冬でした。1年で最も寒いはずの2月に、前代未聞、過去最高の気温、プラス13.9度を記録しました。これだけ気温が上がると、道路にへばり付いていた雪が解け始めザクザクになって、歩くのが大変になります。いっそのこと、雪がすべて解けてくれるとよいのですが、その2,3日後にはマイナス10度近くまで気温が下がってしまうので、解けた雪が再び凍ってしまい非常に滑りやすくなり、転ばないように用心して歩かねばなりません。

また、車の運転も大変になります。道路の両わきに積み上げた雪のために、本来2車線で走っていたところが1車線になってしまい、おまけに寒暖差のために、車が通ったあとには轍(わだち)ができてしまいます。一度、轍にはまってしまうと、簡単には抜け出すこともできず、その上、雪で狭くなった道路で、対向車がきたらどうしようかと、ハラハラドキドキしながら、運転しなければなりません。このような気温の乱高下が、何度も続くと、雪国で生まれ育った私でも、さすがに疲れてしまい早く春になってくれと、願わずにはいられません。若いときなら、これも運命かとそれなりに、楽しむこともできたのですが、この歳になると、苦痛かつ苦惱でしかありません。これも地球温暖化のせいでしょう。

いつものことながら、時候の挨拶のつもりが、またまた長くなってしまいました。

話は変わって、今号は、私(世戸)のものが2編と編集長の矢野さんのものが1編の計3編になってしまいました。私のものは、前回の「座屈現象のモデル(1)」の続きで、前回は、ばねと棒と1個の錘を組み合わせたものでしたが、今回はこの錘を2個にして、前回と同じような解析をしたものです。この座屈モデルは今後も、もう少し続けるつもりです。もう一つは、前回の号で矢野さんが書いていた「四元数(補遺3)」の中でやっていた四元数とPauli行列の対応式にヒントを得て、矢野さんの方法とは別の方法でこの対応式を導いてみたものです。今号の最後の矢野さんの「四元数と空間回転3」は四元数における関係式をベクトル形式で書き表し、空間回転と結び付けたものです。これは大変に長いもので、読むのに苦労しますが、四元数をしっかり勉強したい人には役立つものと思われま

(世戸憲治)