

数学・物理通信

14 卷 3 号 2024 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2024 年 6 月 10 日

目次 (Contents)

1. 研究と出会い	広中平祐	2
2. 座屈現象のモデル (3)	世戸憲治	6
3. オイラー定数の表式	秋葉敏男	12
4. 編集後記	矢野 忠	29
1. My Research and Fateful Encounter	Heisuke HIRONAKA	2
2. Model of Buckling Phenomenon (3)	Kenji SETO	6
3. Expression of the Euler's Constant	Toshio AKIBA	12
4. Editorial Comments	Tadashi YANO	29

研究と出会い

広中平祐

My Research and Fateful Encounter

Heisuke HIRONAKA

まえがき

私（世戸憲治）のところに、恩師である中西襄先生から一通の手紙がきた。その中に、ここに掲載する広中先生の平成9年（1997年）8月23日に長野で行なわれた講演を手書きした原稿が入っていた。この原稿は、先生の知り合いである原山巖という人が広中先生の講演を聞いて手書きしたものということであった。中西先生からの希望は、この手書き原稿を TeX で打ち直して「数学・物理通信」に掲載していただきたいとのことであった。そこで、この原稿を TeX で打ち直すことを私が引き受け、この「数学・物理通信」に掲載することになった。この原稿を TeX で打ち直すということは、「話し言葉」を「書き言葉」に直すことであり、元の原稿には、修正すべき助詞の「てにをは」や、また、主語、述語、目的語が省略されていて意味不明のところが何か所もあった。そこで、一度読んで素直に理解でき、かつ、読みやすくなるように書き換えせざるを得なかった。したがって、ここに掲載したものは原稿そのままのものではないことを、ご理解のうえ、お許し願いたい。

ここで、広中平祐氏のことを簡単に紹介すると、先生は1931年生まれ、京都大学、ハーバード大学の名誉教授であり、数学部門のノーベル賞と言われるフィールズ賞、および、文化勲章を受章された数学者である。

（ここまで 世戸憲治 記）

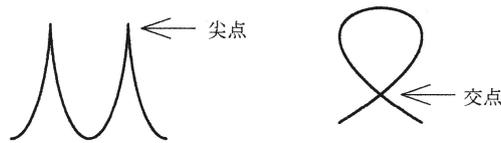
1 子供のころのこと

父も母も3度目の結婚で、当初からの連れ子が5人いた。その後、子供が10人生まれたので、全部で15人になり、私はこの10人の子供の長男であった。連れ子の中で二人の兄は戦争で21, 22才で亡くなった。

母は学校を出ていなかった。子供のころ母に「こんな小さなお目々で、どうしてあんな大きなお家が入るの」と聞いたら「眼のことなら眼医者さんに聞いた方がいい」と言って眼医者さんに連れて行ってもらった。眼医者さんは「面白いことを考える子だ」というようなことを言ったが、はっきりした答えはもらえなかった。この眼医者さんとは今もお付き合いしており、数日前も寝たきりになっているところにお見舞いに行ってきた。母は、父との3度目の結婚でこの子を生んだので、まさに3度目の正直であり、エライことだと人にはよく言っていた。

2 フィールズ賞につながる研究

数学の問題で70年間解けなかった「特異点の解消」でフィールズ賞をもらった。もちろん他にも仕事はしているが、特異点とは2次元では交点や尖点のことを言う。3次元のジェットコースターを2次元の平面に投影すると必ず特異点ができる。特に接線方向に投影すると尖点ができる（下図を参照せよ）。



n 次元図形の特異点は $n+1$ 次元を考えると解消するということを証明した. 先の例で言うと, 2 次元の特異点である交点や尖点は $2+1=3$ 次元のジェットコースターの影と考えられる. ジェットコースターそのものには特異点はないので, そこで必要な解析をしてから, 1 次元を取って 2 次元にすると元に戻る. 特異点の近辺は普通の数学が使えない, 例えば, 微分にしても厄介なところである. これを $n+1$ 次元にしておいて特異点がない状態にしてから詳しく調べ, その後, 1 次元を取って元に戻した方がやりやすい. この 1 次元を何にするかは問題であるが.

3 ザリスキー教授との出会い

京都大学の秋月研究室にハーバード大学のザリスキー教授¹⁾が来た. いままで研究していたことを話して, 帰りは空港まで一人で送っていった. 「I will see you again」と言ったら, 奥さんが will でなく hope だと言った. このことで, 可能性がある, 希望があるというときには hope を使うことを知った. その後, ザリスキー教授に呼んでもらってハーバード大学に留学した. ザリスキー教授の経歴もお聞きした. ロシア人で, ドイツに行ったがナチに追われて, アメリカに来た, というようなことを言われたが, 聴き間違いがあるかもしれない.

お弟子さんをとらない先生で, 3 人しかとらなかつた. 3 人ともフィールズ賞をもらった. 誰かが弟子になりたいと来ても, 他の先生を紹介して追い払ってしまう. 教授はいつも忙しく, あまり話ができなくて, 弟子の 3 人で勉強会をやっていた. あるとき私が研究発表しているところに教授が入ってきて「広中の言っていることはおおよそナンセンスだ」と言って, さっさと行ってしまった. こちらは黒板に書いているところだったが, 手がストップしてしまいどうしてよいか分からなくなった.

ザリスキー教授は特異点のことはよく研究していて, いくつもの論文があった. しかし, その特異点と私が研究している特異点とがどういう関係にあるのか, さっぱり分からなかつた. 物の見方には, 「大局的」と「局所的」の 2 つがある. 京都大学は伝統的に, 数式を一切使わない抽象代数というものをやっていた. これは大局的のものを考えるのに非常に役に立った. その後ヨーロッパでの客員研究員のときに知り合った仲間のおかげで, 大分よく分かってきた. あるとき瞬間的にヒラメいて答えが見えてきた. 分かるときは瞬間的に分かる. この仲間とやっているものとザリスキー教授の研究を結び付ければよいということが瞬間的に分かった. ザリスキー教授に電話したら「気を付けてやるんだぞ」と一言いわれた.

いままでに解けたという話はいくつもあつたが, みんな失敗であつた. このうまくいった論文は毛筆で書いたので, 一冊の本になるほどの長いものになり, いままでにこんな長い論文は書いたことがなかつた. 広中の研究はあれとこれを結び付けたものでしかない, 悪口を言う人がいる. しかし, 「結び付けただけで, できるんならやってみろ」と言いたい.

ザリスキー教授がアメリカ数学界の会長をやっていたときに, 招待講演の終わりで「戦いは広中の勝利によって終わった」と言ってくれた. それ以前の問題が解けなかつたときには, 「この問題は広中の第一論文のやり方で解けるかもしれない」と言われた. それでもう一度やってみようと思つて取りくみ, 少し追加してやったら問題が解けてきた. また, 問題が解ける前に, ザリスキー教授は「私がこんなに長くやっていて解け

¹⁾ Oscar Zariski (1899-1986) ロシア帝国 (現ベラルーシ) 生まれ, のちアメリカで活躍した数学者

なかったのに、おまえがやれば、すぐに終わりまで見通せるよ」と言ってもくれた。問題が解けた後で聞いてみたら「そんなに簡単にできると確信をもって言った訳ではない。若いからおだてればやるだろうと思って、言ってみただけだ」と言っていた。

4 ベテランの定義

ベテランと言う人がどの世界にもいるが、これがくせ者である。ある人がいままでの経験を整理して、本を出そうとして原稿をいくつもの出版社に持ち込んだ。出版の神様と言う人が何人もいて、その人が売れると言えばほとんどがあたる。このある人が書いた本は、すべての神様に売れないと言われ断られたので、小さな出版社が引き受けることになった。そうしたら全米のベストセラーになった。本の内容について私には、たいしたものとは思われないが、新聞にインタビューが載っていたのでそれを読んでみた。その中でその人はインタビューに答えてベテランの定義をしていた。「ベテランとは、だめな理由を 20 項目すぐに挙げられる人と言う」と言っていたのが印象に残っている。

私の研究もある人は「仮に解けてもこんなに長い時間がかかっている、その間にいろいろな分野でいろいろな研究がなされていて、仮に解けてもそのときには、その意味がなくなっているかもしれないし、そうでないとしてもほんの少しの貢献があるにすぎない」と言った。これには、この特異点の研究を中心にやっていたときだったので、まいってしまった。

クリエイティブとは質的に変化することを言うと言った。答えがでる前と後ではガラッと変わる。地震はいつ起きるか分からないが、起きる前と後ではガラッと変わる。起きる前の延長線上には起きた後の質的な変化はない。クリエイティブとはこういうことを言うのだ。

ある日本人の老学者が私を訪ねてきた。ワトソンとクリックが DNA の 2 重らせん構造を提唱するずっと以前に、私は同じことを考えていたと、一つの論文を見せてくれた。この論文の最後に (注) で 2 重らせんのこと小さく書かれていた。しかし本人は自信が持てなかった。周りの人がおだててやればやれたかもしれないが、そうならなかったためにやめてしまった。

学生時代の京都大学では物理をやろうと 2 年生までは思っていた。しかし、湯川先生の講義を聴く機会はまったくなかった。あるとき、全員を集めて講演会があり、このとき初めて湯川先生のお話を聴いた。話の終わりに「物理学は 1970 年で終焉する」と言われた。終焉するものをやっても仕方ないと思ってあきらめたのも一つの理由である。あとで、何故はっきりした年月まで予測できるのかと皆で話し合っ、いろいろ調べてみたら、1970 年は湯川先生の定年の年であった。そのためにそう言われたのかは、湯川先生にお聞きした訳ではないので、本当のところは分からない。ベテランとか大家は晩年になると、よくこういうおかしな発言をする。大家が言っている否定的な話は絶対にそのまま受け止めてはいけない。

5 おわりに

講演の終わりにおもしろいことを言われたので書いておく。広中先生の思い出みたいな話です。

「特異点がなければ、例えば、人間の顔で言うと、出っ張りやへこみがないと、風船みたいで、広中も兎島先生も区別できなくなる」

「相対論はブラックホールがなければ成立しない」と言われた。

ザリスキー教授が亡くなったときに奥さんと話した中に「数学をやろうと思って講義を聞いていたら、数学より数学者が好きになった」と言っていた。

追記

この広中先生の講演とは、直接の関係はないが、「まえおき」のところで紹介した原山さんの原稿に書かれていたものを、我々が研究を進めるうえでの教訓として、載せておく、それは彼の有名なエジソンの言葉で、「天才とは1パーセントの閃きと、99%の努力だ」と言ったことが誤解されて広まったということで、誤解を解くための釈明をした。本意は「いくら努力しても閃きがなければ、すべては無駄だ」ということ。

また、エジソンは「私は失敗したことがない。ただ、1万通りのうまくいかない方法を発見しただけだ」と言った。

座屈現象のモデル (3)

世戸 憲治*

Model of Buckling Phenomenon (3)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回、および、前々回で2度にわたって座屈モデルを解析してきた。そこでは、柱に対する弾性論は使わずに、棒と錘とばねを組み合わせた座屈モデルを解析した。しかし、前回の最後に述べたように屋根に積もった雪の重みで建物が倒壊するようなモデルではなかったため、今回は、柱の上の方にある重みで、上の方から倒壊するモデルにして解析してみる。もちろん、この種の解析は建物の構造そのものを考慮するものではなく、あくまでも座屈という現象を理解するための原理的モデルにすぎないことをお断りしておく。

2 方程式の導入とその解法

図1に示すように、水平な地面の上に、地上に出ている部分の長さが l の棒を垂直に立てる。ただし、この棒は地面に埋め込まれていて動かないものとする。この棒の先端には同じ長さ l の質量が無視できる棒が自由に回転できるように結び付けておく。さらに、この棒の先端には質量 m の錘を取り付けておく。もちろんこのままではこの上に付けた棒は倒れてしまうが、これが倒れないように、下にある棒の根元と上に付けた棒の先端にある錘とをばね定数 k 、自然長 L のばねで結んでおく。ただしここでは、このばねの自然長 L はこれら2本の棒の合計の長さ $2l$ より大きいものとし、 $L > 2l$ としておく。このとき、ばねは伸びようとして上の棒の先端に付けた錘を上向きに押し付けるので、ばねがある程度強ければ倒れることなく、たとえ、錘が多少ぐらついても立ったままの状態を保つはずである。ただし、ここではばねと棒はぶつかることなく立体的にすり抜けるものとする。

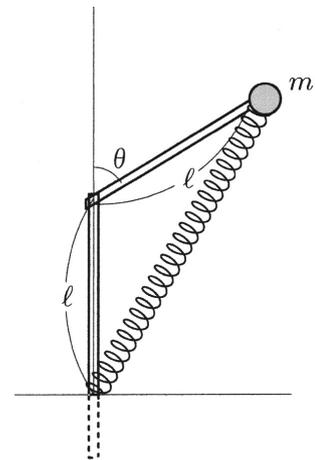


図1 座屈モデル

この問題を Lagrangian を使う方法で解析してみよう。いま、ある時刻 t で、この上に付けた棒の傾き角度を $\theta(t)$ とする。このときの錘の速度は $l\dot{\theta}$ なので、その運動エネルギーを T とすると

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \tag{2.1}$$

* 北海学園大学名誉教授

であり、また、位置エネルギーの基準を下の棒と上の棒との接続点とすると、錘の位置エネルギー U_1 は、重力加速度を g として、

$$U_1 = mgl \cos \theta \quad (2.2)$$

となる。また、このときのばねの長さは、三角形の余弦定理を使うと $\ell\sqrt{2(1+\cos\theta)}$ 、あるいは、ばねと2本の棒それぞれとなす角が $\theta/2$ であることに注意すると、 $2\ell \cos(\theta/2)$ となる。もちろん、これら2つの量は三角関数の倍角公式を用いると等しいことが証明される。ここでは平方根を使わない後者の方を用いて議論を進める。このばねの長さを使って、ばねの歪みエネルギー U_2 は

$$U_2 = \frac{1}{2}k[2\ell \cos(\theta/2) - L]^2 \quad (2.3)$$

と与えられる。これから Lagrangian \mathcal{L} を

$$\mathcal{L} = T - U_1 - U_2 \quad (2.4)$$

と作り、これを時間で積分した作用積分から変分をとると、Euler-Lagrange 方程式として

$$m\ell\ddot{\theta} = mg \sin \theta + k(2\ell \cos(\theta/2) - L) \sin(\theta/2) \quad (2.5)$$

を得る。これが運動方程式であるが、この両辺に $\ell\dot{\theta}$ を掛けてまとめると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mgl \cos \theta + \frac{1}{2}k(2\ell \cos(\theta/2) - L)^2 \right] = 0 \quad (2.6)$$

となる。これからエネルギー積分

$$\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + U(\theta) = E \quad (2.7)$$

を得る。ここでポテンシャル $U(\theta)$ を

$$U(\theta) = mgl(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2}k \left[(2\ell \cos(\theta/2) - L)^2 - (2\ell - L)^2 \right] \quad (2.8)$$

と定義する。ただしこの段階では、この $U(\theta)$ の定数項部分には不定性があるので、 $\theta = 0$ のときの U の値がゼロ、すなわち、 $U(0) = 0$ となるように、定数項部分を調整した。また、この E は全エネルギーを表し、一般には初期条件で決めるべき量である。

以下、数式および数値計算を簡素化するために変数の無次元化をしておく。棒の長さ ℓ を長さの単位、また、 $\sqrt{m/k}$ を時間の単位として

$$\frac{L}{\ell} \rightarrow L, \quad \frac{t}{\sqrt{m/k}} \rightarrow t, \quad \frac{mg}{k\ell} \rightarrow P, \quad \frac{E}{k\ell^2} \rightarrow E, \quad \frac{U(\theta)}{k\ell^2} \rightarrow U(\theta) \quad (2.9)$$

と置き換える。これですべての量は無次元化され、エネルギー式 (2.7) は

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E \quad (2.10)$$

と書き直される。ここに、無次元化されたポテンシャル $U(\theta)$ は

$$U(\theta) = P(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2} \left[(2 \cos(\theta/2) - L)^2 - (2 - L)^2 \right] \quad (2.11)$$

となる. この (2.11) 式の $U(\theta)$ が θ のどんな関数になるかは, 2 個のパラメータ P, L を含むため簡単には見えてこない. そこで, これらパラメータのうち, P の値を $P = 1$ に固定し, L の値を $L = 4, 3, 2$ と変えた 3 通りについてそのグラフを描いてみると図 2 のようになる.

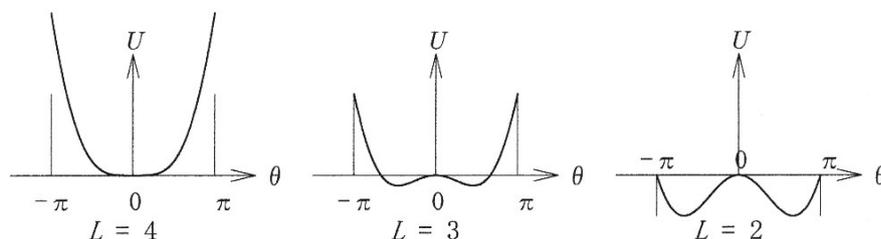


図 2 $P = 1$ としたときの関数 $U(\theta)$ のグラフ

このグラフから, $\theta = 0$ が安定平衡点になるには, $P = 1$ の場合, L の値が 4 以上であること, また, これ以下のときは不安定平衡点になることが分かる.

このことをより厳密に述べるために, この関数 $U(\theta)$ を θ の 4 次の項まで展開してみると,

$$U(\theta) = \frac{1}{4}(L - 2 - 2P)\theta^2 + \frac{1}{24}\left(P + 1 - \frac{L}{8}\right)\theta^4 + \dots \quad (2.12)$$

となる. これから, $\theta = 0$ の点が安定平衡点になるためには, 2 次項の係数が正でなければならない,

$$L - 2 > 2P \quad (2.13)$$

が条件となる. これは, 無次元化する前の元の変数で書くと

$$k(L - 2\ell) > 2mg \quad (2.14)$$

となり, ばねが錘を押す力が錘の重力の 2 倍以上なければならないことを示す.

ここで, 初期条件として, 錘に初速度 v_0 を与えたとき, 棒の傾き角 θ が時間 t のどのような関数になるかを, U の近似式 (2.12) の 2 次までの範囲で求めてみる. すなわち, 初期条件として,

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad \theta = 0, \quad \dot{\theta} = v_0 \quad (2.15)$$

とおくと, (2.7) 式から E は

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.16)$$

となるが, この E を無次元化すると,

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 \quad (2.17)$$

となる. ただし, ここで速度 v_0 の無次元化は

$$\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \rightarrow v_0 \quad (2.18)$$

となることに注意する. つぎにエネルギー式 (2.10) において, U を (2.12) 式の 2 次の項までの近似を用いて書き直すと,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}(L - 2 - 2P)\theta^2 = \frac{1}{2}v_0^2 \quad (2.19)$$

となる。この式を無次元化する前の元の変数で書き直すと

$$\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{\ell}{4}[k(L-2\ell) - 2mg]\theta^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.20)$$

となるが、この式をさらに整理して書き直すと

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{\ell}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right], \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{2mv_0^2}{\ell[k(L-2\ell) - 2mg]}} \quad (2.21)$$

となる。ここに無次元量の θ_0 をこの第2式で定義する。この式から $\dot{\theta}$ を求め、変数分離して積分形にすると

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (\theta/\theta_0)^2}} = \frac{v_0}{\ell} \int dt \quad (2.22)$$

となるが、この積分は三角関数で容易に実行され、初期条件を満たす解は、

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{v_0}{\ell\theta_0}t\right) \quad (2.23)$$

と求められる。ここで、(2.21) の第2式で定義した θ_0 は、 $\theta = 0$ の点が安定平衡点であるという条件式 (2.14) から実数となることを注意しておく。なお、この θ_0 は、質点に与える初速度 v_0 に比例して大きくなるので、2次式近似を用いたここでの方法に対しては、この v_0 の値はある程度制限しなければならない。

もし、この条件式 (2.14) が成立しないとき、すなわち、 $k(L-2\ell) < 2mg$ のときは、この θ_0 は $i|\theta_0|$ と虚数になる。このときの解は

$$\theta(t) = i|\theta_0| \sin\left(\frac{v_0}{\ell i|\theta_0|}t\right) = |\theta_0| \sinh\left(\frac{v_0}{\ell|\theta_0|}t\right) \quad (2.24)$$

となって、三角関数の sine が双曲線関数の sinh になってしまう。つまりこのときは $\theta = 0$ の点は不安定になって、振幅は時間と共に大きくなり、倒壊が起る。これが座屈現象である。

3 2本の棒の長さを変えた場合

ここまで計算してきて、(2.14) 式で示した $\theta = 0$ が安定平衡点となるための条件、すなわち、「ばねが錘を押す力は錘の重さの2倍以上」というのが気になってきた。何故2倍なのかということである。もしこれを2本の棒の長さを変えたとこの数値も変わるのかということである。そこで、棒の長さを変えた場合も計算してみた。ここでは、上に付けた棒の長さを l_1 、それを支えるために地面に埋めた棒の地面から上の長さを l_0 とする (次ページの図3参照)。いま、この上に付けた棒が鉛直線から傾いた角度を θ とする。このときのばねの長さは三角形の余弦定理から $\sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \cos\theta}$ となるので、錘の位置エネルギーとばねの歪みエネルギーの和 $U(\theta)$ は

$$U(\theta) = mgl_1(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}k \left[\left(\sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \cos\theta} - L \right)^2 - (l_0 + l_1 - L)^2 \right] \quad (3.1)$$

と表される。ここで、 $U(0) = 0$ となるように定数項部分を調整した。この $U(\theta)$ を θ の2次の項まで展開すると、

$$U(\theta) = \frac{l_0l_1}{2(l_0 + l_1)} \left[k[L - (l_0 + l_1)] - \frac{l_0 + l_1}{l_0}mg \right] \theta^2 + \dots \quad (3.2)$$

となる。これから $\theta = 0$ の点が安定平衡点となるためには、この 2 次の項の係数が正でなければならず、

$$k[L - (\ell_0 + \ell_1)] > \frac{\ell_0 + \ell_1}{\ell_0} mg \quad (3.3)$$

とばねが錘を押す力 $k[L - (\ell_0 + \ell_1)]$ が錘の重さ mg の $(\ell_0 + \ell_1)/\ell_0$ 倍以上あればよい。この値は ℓ_1 が小さいほど 1 に近づき、 $\ell_0 = \ell_1$ のときは 2 倍になり、 $\ell_0 < \ell_1$ では 2 倍より大きくなる。逆の言い方をすると、上に付けた棒が長くなるほど、当然ながら倒れやすくなる。

《もう一つの方法》

この $\theta = 0$ の点が安定平衡点になるための条件を、ポテンシャルなどというものを使わずに、作用する力の大きさとその方向を考慮して、より直感的に説明できないものかと考えてみた。右の図 3 に示すように、この錘は、2 本の棒の接点を中心とし、半径 ℓ_1 の円弧 C に沿って動こうとする。いま上の棒が角度 θ 傾いたとき、ばねと下の棒がなす角を α 、ばねと上の棒がなす角を β とする。当然のことながら、

$$\alpha + \beta = \theta \quad (3.4)$$

が成り立つ。またここでは、錘の重力を $W = mg$ 、ばねが錘を押す力を $F = k[L - (\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta)]$ とする。このとき錘は重力によって下に落ちようとするが、この重力 W の円弧 C

に沿った成分は $W \sin \theta$ であり、それを押さえようとするばねの力 F の円弧に沿った成分は $F \sin \beta$ である。これから傾いた錘を戻すようにするには、

$$F \sin \beta > W \sin \theta \quad (3.5)$$

であればよい。これをさらに解析するには、この式の $\sin \theta$ を (3.4) 式から出る

$$\sin \theta = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (3.6)$$

で置き換え、さらに、2 本の棒とばねが作る三角形における正弦定理

$$\frac{\sin \alpha}{\ell_1} = \frac{\sin \beta}{\ell_0} \quad (3.7)$$

を利用して、 $\sin \alpha$ を $\sin \beta$ で表わすと、両辺の $\sin \beta$ は消えて、

$$F > \frac{\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta}{\ell_0} W \quad (3.8)$$

と変形される。ここでさらに、 $\theta = 0$ の周りの微小振動に話を限定すると、 α, β も小さくなるので、 $\cos \alpha \cong 1$ 、 $\cos \beta \cong 1$ と近似される。結果として、この (3.8) 式は、

$$F > \frac{\ell_0 + \ell_1}{\ell_0} W \quad (3.9)$$

となって、(3.3) 式が再現される。方程式を解こうというときはポテンシャルを用いた方がよいが、そうでないときはこの説明の方が理解しやすい。なお、このときのばねの力は、 $F = k[L - (\ell_0 + \ell_1)]$ となる。

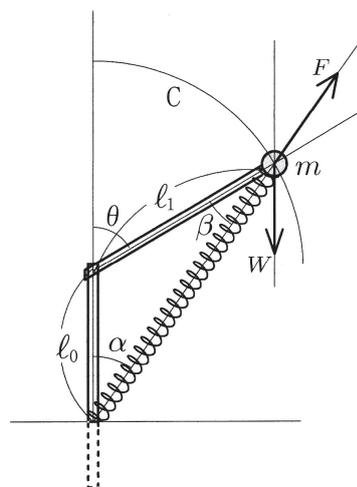


図 3 2 本の棒の長さが異なる場合

4 おわりに

「座屈現象のモデル」ということで、今回で3度目のモデルを紹介した。前回の「おわりに」でも書いたように、雪の重みで建物が倒壊するモデルとしては今回のものが一番適切と考えられる。その理由は、前回の2つのモデルは、力学系の下の方から倒壊するのに対し、今回のモデルは、上の方から倒壊するからである。しかし、解析方法はいずれのモデルでも同じような計算過程で進めることができた。

今回のモデルは計算が楽になるように、できるだけ単純なモデルを採用した。ここで述べたように、棒の長さを変えたり、あるいは、棒とばねを多段式にしたりしてより現実の建物に近づけることはできるだろう。しかし、モデルは、あくまでもモデルであって本物ではない。本物の原理的なことを知らしめることがモデルの役目と理解する。

オイラー定数の表式

秋葉 敏男

Expression of the Euler's Constant

Toshio AKIBA¹

1 はじめに

本通信 第 8 巻 9 号 (2018 年 10 月) に掲載された論文 [1] で, 下記の定積分で定義される定数 (γ_2) が論じられています.

$$\gamma_2 := -P \int_0^1 \frac{dx}{\log |\log x|} = -P \int_0^\infty \frac{dx}{e^x \log x} \quad (1.1)$$

この論文の著者は, 理論物理学者として高名な中西 襄 博士で, 定積分 γ_2 を**第 2 オイラー定数**と命名することを提案されております.

この定積分は長い間 0 であるとされてきましたが, ある日本人研究者によりそれが誤りであることが指摘されました.[1]

筆者は, γ_2 の被積分関数 $1/(e^x \log x)$ の不定積分

$$H_2(x) := \int \frac{dx}{e^x \log x} \quad (1.2)$$

を, 解析的に表示できないかを考察したことがあります.[2] そこでは, 不定積分 $H_2(x)$ が絶対収束する関数項級数で表示できて, 定積分 (1.1) は 0 ではなくて, 負値であることを導いています.

一方, オイラー定数 (γ) の多くの表式の一つが, 次式に示す定積分表示式です.

$$\gamma = -P \int_0^\infty dx e^{-x} \log x \quad (1.3)$$

そこで, 不定積分 $\int dx e^{-x} \log x$ についても γ_2 の場合と同様の推論で, 級数表示を追及してみたいと思います.

2 オイラー定数の級数表示

2.1 表示級数の導出

定積分 $-\gamma = P \int_0^\infty dx e^{-x} \log x$ の被積分関数は 0 および ∞ で発散しますから, これを広義積分

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1/r}^r dx e^{-x} \log x \quad (\star)$$

で計算します. そして定積分 $I(r)$ を求めるにあたり, まず不定積分

$$H(x) := \int dx e^{-x} \log x \quad (2.1)$$

を求めます. (2.1) において, $t := \log x$ と置換すると

¹ta106365@gmail.com

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int dx e^{-x} \log x = \int dt e^t t \exp(-e^t) \\
&= \int dt e^t t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-e^t)^l}{l!} \\
&= \int t dt \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} e^{(l+1)t} \\
&= \int t dt \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(l+1)^m t^m}{m!} \\
&= \int dt \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+1)^m}{l!} \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$$= \int dt \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m!} t^{m+1} \tag{2.3}$$

ここで導入した $\varphi(m)$ を変形すると

$$\begin{aligned}
\varphi(m) &:= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+1)^m}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} l^r \\
&= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \psi(r) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

$$= -\psi(m+1) \tag{2.5}$$

(2.4), (2.5) への変形では, 下記の定義式および漸化式を用いています.²

$$\psi(r) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^r}{l!} \tag{a1.0}$$

$$\psi(m+1) = -\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \psi(r) \tag{a1.1*}$$

したがって,

$$H(x) = -\int dt \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{m!} t^{m+1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \int dt \frac{\psi(m+1)}{m!} t^{m+1} \tag{2.6}$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+2)m!} t^{m+2} \tag{2.7}$$

と表されます。(2.6) において級数の項別積分を実行していますが, これは被積分関数が整級数 (冪級数) だからです.³ ちなみに, 被積分関数の収束半径は無限大です。

[収束半径の計算]

被積分関数の第 m 項の係数を c_m とすると

$$\begin{aligned}
\frac{c_m}{c_{m+1}} &= \frac{\psi(m+1)}{m!} \frac{(m+1)!}{\psi(m+2)} = (m+1) \frac{\psi(m+1)}{\psi(m+2)} \\
\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{c_m}{c_{m+1}} \right| &= \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \left| \frac{\psi(m+1)}{\psi(m+2)} \right|
\end{aligned}$$

²付録 1-3 参照. なお実際に計算してみると, $\psi(0) = e^{-1}$, $\psi(1) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (l-1)! = -\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m)! = -e^{-1}$, $\psi(2) = -\sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} \psi(r) = -(\psi(0) + \psi(1)) = -e^{-1} + e^{-1} = 0$, $\psi(3) = e^{-1} \dots$ となります

³整級数は, 収束半径内において絶対かつ一様収束します. 文献 [3] 参照

文献 [2] の付録 2 に示すように,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(m+1)}{\psi(m+2)} \right| = \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

ですから,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{c_m}{c_{m+1}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) = \infty \quad (2.9)$$

(2.9) は, コーシー・アダマールの公式より, 被積分関数の収束半径が ∞ であることを意味します.[計算終]
(2.7) を用いれば, 式 (*) で表示した問題の定積分は以下のように計算されます.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1/r}^r dx e^{-x} \log x = - \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+2)m!} [(\log x)^{m+2}]_{1/r}^r \quad (2.10)$$

$$= - \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+2)m!} \{(\log r)^{m+2} - (-\log r)^{m+2}\} \quad (2.11)$$

(2.11) では, $m = 2q + 1$ の項のみが残ります. よって

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} I(r) &= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\psi(2q+2)}{(2q+3)(2q+1)!} (\log r)^{2q+3} \\ &= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} J(r) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } J(r) &:= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi(2p)}{(2p+1)(2p-1)!} (\log r)^{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{2p} (\log r)^{2p+1} \quad \left(b_{2p} := \frac{\psi(2p)}{(2p+1)(2p-1)!} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) では, $p := q + 1$ としています.

ここで (2.8) を用いて, 級数 $J(r)$ の収束半径 ρ を確かめておきます.

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{2p}}{b_{2p+2}} \right| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(2p)}{(2p+1)(2p-1)!} \times \frac{(2p+3)(2p+1)!}{\psi(2p+2)} \right| \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} 2p(2p+3) \left| \frac{\psi(2p)}{\psi(2p+2)} \right| \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} 2p(2p+3) \times \frac{1}{2} = \infty \end{aligned}$$

2.2 表示級数の符号

前節 (2.12) で導入された級数 $J(r)$ は, r の区間 $(1, \infty)$ で正值です. これを示すためにまず, (2.13) で導入した係数 b_{2p} を変形すると

$$\begin{aligned} J(r) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi(2p)}{(2p-1)(2p)!} \frac{2p(2p-1)}{2p+1} (\log r)^{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p(2p-1)}{2p+1} a_{2p} (\log r)^{2p+1} \quad \left(a_{2p} := \frac{\psi(2p)}{(2p-1)(2p)!} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-1} \frac{p(p-1/2)}{(p+1/2)} A_{2p} 10^{-p} (\log r)^{2p+1} \quad (0 \leq |A_{2p}| < 10) \quad (2.15)$$

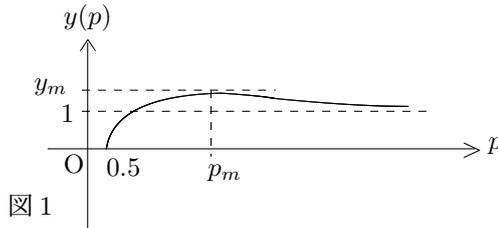
(2.15) への変形では, 付録 1-1 の式 (a1.7) を用いています. ($e^{-1}K_m$ の代わりに A_{2p} としています)

ここで $\beta_p := A_{2p}10^{-p}p(p-1/2)/(p+1/2)$ と表示すると

$$\beta_p = A_{2p}10^{-p} \left(\sqrt[p]{\frac{p(p-1/2)}{p+1/2}} \right)^p = A_{2p} \left(\frac{y(p)}{10} \right)^p \quad (2.16)$$

$$\text{ただし } y(p) := \left(\frac{p(p-1/2)}{p+1/2} \right)^{1/p} \quad (2.17)$$

関数 $y(p)$ については, $y(1/2) = 0, y(1) = 1/3, y(2) = 1.095, y(3) = 1.2892, y(4) = 1.3280, y(5) = 1.3253, y(6) = 1.3109, \lim_{p \rightarrow \infty} y(p) = 1$ であり, $p \approx 4$ で最大値となります. 詳しい数値計算によると, $(4.331250 < p < 4.331557)$ の範囲で $y(p) = 1.329619526$ となりますから, $y(p)$ の最大値を y_m と表せば, $y_m < 1.3297 < 1.33$ と判断されます. (図 1 参照)



したがって,

$$\frac{y(p)}{10} < \frac{1.33}{10} < \frac{3}{20} \quad (2.18)$$

となります. 一方, $|\beta_p| = |A_{2p}|(y(p)/10)^p < |A_{2p}|(y(p)/10)$ ですから (2.18) を使って

$$|\beta_p| < |A_{2p}| \frac{y_m}{10} < |A_{2p}| \frac{3}{20} < \frac{3}{2} \quad (2.19)$$

$$\text{i.e. } |\beta_p| < \frac{3}{2} \quad (2.20)$$

この β_p を用いて

$$J(r) = 2e^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p (\log r)^{2p+1} \quad (2.21)$$

と変形すると, 級数 $\sigma(r) := \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p (\log r)^{2p+1}$ の係数 β_p の符号は, 因子 A_{2p} と同じですから, 付録 1-1 の末尾に記した定理により $\sigma(r) > 2 \times 3/2 \log r = 3 \log r > 0$ と評価されます. ($N = 3/2$ の場合です) したがって, $J(r) > 0$ と結論されます.

3 γ および γ_2 の関係

オイラー定数 γ の対数関数の級数による表示式は, 前節の式 (2.12) により $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} 2J(x)$ となります. ここでは $t := \log x$ と置換して $S(t) := 2J(x)$ と表します. そして第 2 オイラー定数 γ_2 を表わす式は, 文献 [2] の §3 の式 (3.4) の $F(x)$ ですが, 変数 x, t の使い方が逆 ($x = \log t$) になっていますから, $S_2(t) := 2F(t)$ とします.

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\psi(2p)}{(2p+1)(2p-1)!} t^{2p+1} \quad (3.1)$$

$$\gamma_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\psi(2p)}{(2p-1)(2p)!} t^{2p-1} \quad (3.2)$$

両級数は区間 $[0, \infty)$ で絶対収束し、そのグラフは図 2, 図 3 のようになります。

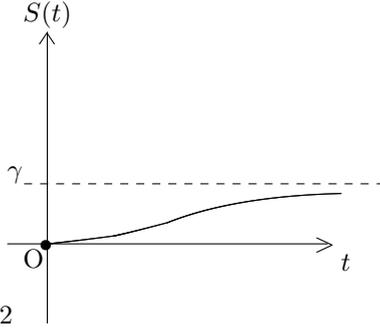


図 2

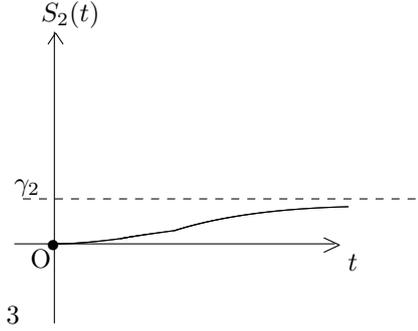


図 3

(3.1) の級数 $S(t)$ の各項の分子・分母に $2p$ を掛けると、次の表式が得られます。

$$S(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4p\psi(2p)}{(2p+1)!} t^{2p+1} \quad (3.3)$$

級数 S と S_2 の関係を知るために、これらを微分してみます。絶対収束する整級数は項別微分ができますから

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4p\psi(2p)}{(2p+1)!} t^{2p+1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4p\psi(2p)}{(2p)!} t^{2p} \quad (3.4)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\psi(2p)}{(2p-1)(2p)!} t^{2p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\psi(2p)}{(2p)!} t^{2p-2} \quad (3.5)$$

(3.5) において、 $l := p - 1$ と置換すると

$$\begin{aligned} \frac{dS_2}{dt} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\psi(2l+2)}{(2l+2)!} t^{2l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\psi(2l+2)}{(2l+2)(2l+1)(2l)!} t^{2l} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ところが (3.6) において、 $l = 0$ の項の係数因子 $\psi(2)$ は 0 ですから⁴

$$\frac{dS_2}{dt} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\psi(2l+2)}{(l+1)(2l+1)(2l)!} t^{2l} \quad (3.7)$$

和のパラメータを p に統一して、(3.4) と (3.7) の差をとると、

$$\frac{dS}{dt} - \frac{dS_2}{dt} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(4p\psi(2p) - \frac{\psi(2p+2)}{(p+1)(2p+1)} \right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad (3.8)$$

(3.8) の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} S - S_2 &= \sum_{p=1}^{\infty} \left(4p\psi(2p) - \frac{\psi(2p+2)}{(p+1)(2p+1)} \right) \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \phi(p) t^{2p+1} = \Gamma^*(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{ただし} \quad \phi(p) := \left(4p\psi(2p) - \frac{\psi(2p+2)}{(p+1)(2p+1)} \right) \frac{1}{(2p+1)!} \quad (3.10)$$

$$\Gamma^*(t) := \sum_{p=1}^{\infty} \phi(p) t^{2p+1} \quad (3.11)$$

⁴第 2-1 節の脚注 2 参照

(3.9) の両辺で, t を無限に増大させてみると, γ と γ_2 の関係式が得られます.

$$\begin{aligned}\gamma - \gamma_2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} (S - S_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} \phi(p) t^{2p+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma^*(t)\end{aligned}\quad (3.12)$$

つぎに, (2.14) に示す a_{2p} の表式を用いると

$$\psi(2p+2) = a_{2p+2} \times (2p+1)(2p+2)! \quad , \quad \psi(2p) = a_{2p} \times (2p-1)(2p)!$$

となりますから, (3.10) で定義した $\phi(p)$ は

$$\begin{aligned}\phi(p) &= \frac{1}{(2p+1)!} \left(4pa_{2p}(2p-1)(2p)! - \frac{a_{2p+2}(2p+1)(2p+2)!}{(p+1)(2p+1)} \right) \\ &= \frac{4p(2p-1)}{(2p+1)} 2a_{2p} - 2a_{2p+2} \\ &= \varphi(p)a_{2p} - 2a_{2p+2}\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\text{ただし} \quad \varphi(p) := 4p(2p-1)/(2p+1) \quad (3.14)$$

と表わされます. そして級数 $\Gamma^*(t)$ の収束半径は以下のようにして確かめることができます.

$$\begin{aligned}\frac{\phi(p)}{\phi(p+1)} &= \frac{\varphi(p)a_{2p} - 2a_{2p+2}}{\varphi(p+1)a_{2p+2} - 2a_{2p+4}} \\ &= \frac{(a_{2p}/a_{2p+2}) - 2/\varphi(p)}{\varphi(p+1)/\varphi(p) - 2a_{2p+4}/a_{2p+2}\varphi(p)}\end{aligned}\quad (3.15)$$

(3.15) において p を無限に増大させると

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(a_{2p}/a_{2p+2}) - 2/\varphi(p)}{\varphi(p+1)/\varphi(p) - 2a_{2p+4}/a_{2p+2}\varphi(p)} = \frac{\pm\infty - 0}{1 - 0} = \pm\infty \quad (3.16)$$

つまり収束半径は ∞ です. なお, ここまでの推論では以下の性質を用いています.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \infty \quad , \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p)/\varphi(p+1) = 1 \quad (3.17)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2p}}{a_{2p+2}} \right| = \infty \quad , \quad \varphi(1) = \frac{4}{3} \quad (3.18)$$

最後に級数 $\Gamma^*(t)$ の符号については解析します.

定義式 (3.10) より

$$\begin{aligned}\phi(p) &= \left(4p\psi(2p) - \frac{\psi(2p+2)}{(p+1)(2p+1)} \right) \frac{1}{(2p+1)!} \\ &= \varphi(p)a_{2p} - 2a_{2p+2} \quad (\varphi(p) = 4p(2p-1)/(2p+1))\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$= a_{2p} \left(\varphi(p) - 2 \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right) \quad (3.20)$$

付録 1-2 の評価式 (†) を用いると, $R_p := |a_{2p+2}/a_{2p}| = |eA_{2p+2}/eA_{2p}| = |\bar{K}(2p+2)10^{-p-1}/\bar{K}(2p)10^{-p}| = |\bar{K}(2p+2)/10\bar{K}(2p)|$ と変形できますから, (‡) を用いると $10R_p = |(p+1)(2p+1)(2p-3)/p(2p-1)^2|$ となります. p の関数 $y(p) := (p+1)(2p+1)(2p-3)/p(2p-1)^2$ は単調増加関数で, $-6 \leq y(p) < 1$ ですから $R_p \leq 6/10$ したがって

$$|\phi(p)| = |a_{2p}| \left| \left(\varphi(p) - 2 \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right) \right| \leq |a_{2p}| \left(\varphi(p) + \frac{6}{5} \right) \quad (3.21)$$

(3.20) において $\varphi(p) > 4/3$ ですから, 括弧内の因子は正値であり $\varphi(p)$ の符号は a_{2p} と同一です. そして (3.21) において $(\varphi(p) + 6/5 = 10^{-q})$ と変形すると, $q = -\log(\varphi(p) + 6/5)/\log 10$ であり, $|\phi(p)| \leq |A_{2p}| \times 10^{-p-q} = |B_{2p}| \times 10^{-p-q}$. ただし $B_{2p} := \Lambda(p)A_{2p} (|\Lambda(p)| < 1)$ としています. ($|B_{2p}| < 10$)

ここで $q = \log(\varphi(p) + 6/5)/\log 10$ は p と共に無限に増大します. そして級数 $\Gamma^*(t)$ は, $\xi := t/\sqrt{10}$ として

$$\Gamma^*(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \phi(p)t^{2p+1} = B_{2p} \times (t/\sqrt{10})^{2p+1} \times 10^{1/2-q} \quad (3.22)$$

$$= C_{2p}\xi^{2p+1} \quad (C_{2p} := B_{2p} \times 10^{1/2-q}, |C_{2p}| < 10) \quad (3.23)$$

(3.23) において, C_{2p} の符号配列は a_{2p} と同一ですから, 付録 1-1 の末部の定理により $\Gamma^*(t) > 20\xi > 0$ となります. したがって, その極限值である $(\gamma - \gamma_2)$ も正値です. 事実, $\gamma \approx 0.5772, \gamma_2 \approx 0.1544$ ですから $\gamma - \gamma_2 \approx 0.4228 > 0$ となり, 矛盾しません.

4 おわりに

今回の論文の目的は, オイラー定数 γ と第 2 オイラー定数 γ_2 との関係解析することでした. その一つの答えが式 (3.12) に示す関係式です.

$$\gamma - \gamma_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} \phi(p)t^{2p+1}$$

一方, γ と γ_2 については, ガンマ関数を用いた明快な表式が文献 [1] で紹介されています.

α を正の実数部をもつ複素数とすると, ガンマ関数 $\Gamma(\alpha)$ は次式で定義されます.

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\alpha-1} \quad (4.1)$$

そして $\Gamma(\alpha)$ の α に関する導関数 $\Gamma^{(1)}(\alpha)$ および不定積分を求めると, C_1 を積分定数として

$$\Gamma^{(1)}(\alpha) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\alpha-1} \log x \quad (4.2)$$

$$\int d\alpha \Gamma(\alpha) = \tilde{\Gamma}^{(1)}(\alpha) + C_1 \quad (4.3)$$

$$\text{ただし } \tilde{\Gamma}^{(1)}(\alpha) := P \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{\log x} \quad (4.4)$$

上記の関数記号 $\tilde{\Gamma}^{(1)}(\alpha)$ は文献 [1] の表記に習っています.⁵

(4.2), (4.4) で $\alpha = 1$ とおくと, $\Gamma^{(1)}(1) = -\gamma, \tilde{\Gamma}^{(1)}(1) = -\gamma_2$ であることが分かります.

つぎに, $\Gamma(\alpha)$ の n 階導関数を $\Gamma^{(n)}(\alpha)$ と表せば,

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\alpha-1} (\log x)^n \quad (4.5)$$

そして, $\Gamma(\alpha)$ を n 回不定積分したものは, $\{C_i\}$ を積分定数として

$$\underbrace{\int \int \cdots \int}_{n} d\alpha \Gamma(\alpha) = \tilde{\Gamma}^{(n)}(\alpha) + \sum_{i=1}^n C_i \alpha^{n-i}$$

$$\text{ただし } \tilde{\Gamma}^{(n)}(\alpha) := P \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\alpha-1} (\log x)^{-n} \quad (4.6)$$

⁵式 (††) において, $\int d\alpha \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \int d\alpha x^{\alpha-1} = \int_0^{\infty} dx e^{-x} (x^{\alpha-1}/\log x + C_1) = \tilde{\Gamma}^{(1)}(\alpha) + \int_0^{\infty} dx e^{-x} C_1 = \tilde{\Gamma}^{(1)}(\alpha) + C_1$

となります. (4.5),(4.6) を用いて, $\Gamma^{(n)}(1), \tilde{\Gamma}^{(n)}(1)$ という新たな定数が生まれます.

$\Gamma^{(n)}(1), \tilde{\Gamma}^{(n)}(1)$ はいずれも級数表現された関数の極限值として表され, 負の定数であることが証明されます.⁶

定数 $\Gamma^{(n)}(1)$ の絶対値を **n 階オイラー定数**, $\tilde{\Gamma}^{(n)}(1)$ の絶対値を **n 階第 2 オイラー定数** と名付けてみてはいかがでしょう.

今回の論文についても, 査読者の厳格な指摘により, 読み易く誤りの無いものに上げることができました. 査読者並びに編集者に心から感謝申し上げます.

付録 1 文献 [2] への補足

付録 1-1 文献 [2] の概要

文献 [2] のテーマは, 定積分 $I_2 := P \int_0^\infty \frac{dx}{e^x \log x}$ の値が 0 か否かを明らかにすることでした. I_2 は絶対収束する整級数で表される関数

$$f(t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} (\log t)^{2p-1} \quad \left(a_{2p} := \frac{\psi(2p)}{(2p)!(2p-1)} \right) \quad (\text{a1.1})$$

を用いて, 次のように表示されました.

$$I_2 = -2 \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (\text{b})$$

$x := \log t$ と変数変換して, $F(x) := f(t)$ と表わせば

$$F(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} x^{2p-1} \quad (\text{a1.2})$$

と表現されます.⁷ そして級数 (a1.2) の係数 $\{a_{2p}\}$ の符号配列は, 連続する複数の項について同一で, やがて反符号となって複数項続き, このような符号反転を繰り返します. しかも, 同符号の項数は徐々に増加します.⁸ そこで k 個の連続する正符号項の末項を, 級数 (a1.2) の第 m 項と名付け, m 項までの部分 F_m に含まれる正係数を a_{2q} , 負係数を $-|a_{2n}|$ のように表せば 部分和の項順を入れ替えて

$$F_m = \sum_{(q)}^m a_{2q} x^{2q-1} - \sum_{(n)}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1} \quad (\text{a1.3})$$

右辺の和記号 $\sum_{(l)}$ は, 正項 (または負項) のみの和を意味します. (a1.3) において, 負項の符号を反転したものの和を加減すると, 次のように変形できます.

$$F_m = \sum_{(q)}^m a_{2q} x^{2q-1} + \sum_{(n)}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1} - 2 \sum_{(n)}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1}$$

さらに, k 個の正項列の直前の負項列の個数を j として, $(m-k-j)$ 項までの正項の和を 2 倍したものを加減してやると

$$\begin{aligned} F_m &= \sum_{(q)}^m a_{2q} x^{2q-1} + \sum_{(n)}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1} - 2 \sum_{(n)}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1} \\ &\quad - 2 \sum_{(q)}^{m-k-j} a_{2q} x^{2q-1} + 2 \sum_{(q)}^{m-k-j} a_{2q} x^{2q-1} \end{aligned} \quad (\text{a1.4})$$

⁶付録 2, 付録 3 参照

⁷文献 [2] の式 (3.4) 参照

⁸文献 [2] 付録 1 命題 (2) 参照

式 (a1.4) の右辺の第 1, 第 2 項の和は, 絶対値級数の m 項までの部分和であり, 第 3, 第 4 項の和は, 絶対値級数の $(m-k)$ 項までの部分和の -2 倍ですから, $a_2 = 0$ (つまり $\psi(2) = 0$) に注意して

$$F_m = \sum_{l=2}^m |a_{2l}|x^{2l-1} - 2 \sum_{l=2}^{m-k} |a_{2l}|x^{2l-1} + 2 \sum_{(q)}^{m-k-j} a_{2q}x^{2q-1} \quad (\text{a1.5})$$

この F_m は, ある正項列までの部分和ですが, その部分数列 $\{F_m\}$ の極限值は任意の部分数列の極限值 (つまり $F(x)$) に一致します.⁹ そして文献 [2] の付録 1 命題 3 で, 係数 a_{2p} が

$$ea_{2p} = K_{2p} \times 10^{-p} \quad (1 \leq |K_{2p}| < 10) \quad (\text{a1.6})$$

と表されると評価して計算を進めています. (文献 [2] の記号 α_{2p} を K_{2p} と表わしています)

しかしこの評価式 (a1.6) の条件 " $1 \leq |K_{2p}| < 10$ " は, すべての p に対しては成り立たないことが, その後の数値計算で判明しました. しかも部分和 F_m の符号判定には, " $|K_{2p}| < 10$ " という条件のみで十分です.

数値計算結果と整合する, 正しい評価式は

$$ea_m = K_m \times 10^{-m/2} \quad (|K_m| < 10) \quad (\text{a1.7})$$

となります. (次節で詳述しています)

そこで表示式 (a1.7) を適用して, (a1.5) において $r := x^2/10$ とおくと, $0 \leq |K_m| < 10$ に注意して

$$\begin{aligned} exF_m &= \sum_{l=2}^m |K_{2l}|r^l - 2 \sum_{l=2}^{m-k} |K_{2l}|r^l + 2 \sum_{(q)}^{m-k-j} a_{2q}r^q \\ &> 0 - 20 \sum_{l=2}^{m-k} r^l + 0 = -20 \frac{r^{m+1-k} - r^2}{r-1} \end{aligned} \quad (\text{a1.8})$$

(a1.8) を G_m と表すと, k は m と共に増大しますから

$$\begin{aligned} G_\infty &:= \lim_{m \rightarrow \infty} G_m = \lim_{(m-k) \rightarrow 0} G_m \\ &= -20 \frac{r - r^2}{r - 1} = 20r > 0 \end{aligned} \quad (\text{a1.9})$$

これから, $\lim_{m \rightarrow \infty} exF_m \geq G_\infty > 0$ ですから, $F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m > 0$ となり, (a1.2) の符号は正と判定されます. そして, 以上の推論は, 一般につきの定理が成り立つことを意味しています.

定理 区間 $[0, \infty)$ で定義された絶対収束級数 $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p x^p$ において, 係数 $\{A_p\}$ の符号配列が上記の $\{a_{2p}\}$ と同様で, しかも条件 " $|A_p| < N$ " ($N > 0$) が満足されるならば, $f(x) > 2Nx > 0$ と結論されます.

付録 1-2 係数の評価式 (a1.7) の証明

級数 (a1.1) の係数 $\{a_m\}$ について, $A_m := ea_m = e\psi(m)/(m-1)m!$ と定義して数値計算してみると, $A_2 = 0, A_3 \approx 0.0833 \approx 2.6246 \times 10^{-3/2}, A_4 \approx 0.0138 \approx 1.38 \times 10^{-2}, A_5 \approx -4.16 \times 10^{-3} \approx -1.3155 \times 10^{-5/2}, A_6 \approx -2.50 \times 10^{-3}$ などが得られ, 添い字 m と 10 の指数 $-m/2$ との間の下記のような関連が示唆されます.

$$A_m \approx k(m) \times 10^{m/2} \quad (|k(m)| < 10) \quad (\dagger)$$

⁹級数 $F(x)$ の第 l 部分和を F_l とします. l 項が負のときは l 項の直前の正項列の最終項を $m(l)$ 項とし, l 項が正のときは l 項を含む正項列の最終項を $m(l)$ 項とすれば, $F_l = F_{m(l)} - D_l$ と表わせます. ($D_l \geq 0$) これより $D_l = |F_l - F_{m(l)}|$ は l が無限に増大するとき, 0 に収束します. (なぜなら, $F(x)$ が絶対収束級数だからです) したがって, $\lim_{l \rightarrow \infty} F_l = \lim_{m(l) \rightarrow \infty} F_{m(l)}$

そこで $3 \leq r \leq m$ なる r について, $A_r = k(r) \times 10^{-r/2}$ と仮定して, A_{m+1} を計算してみます. ($|k(r)| < 10$ とします)

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= e \frac{\psi(m+1)}{m(m+1)!} = e \frac{-1}{m(m+1)!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \psi(r) \\ &= \frac{-1}{m(m+1)!} \sum_{r=1}^m \binom{m}{r} r!(r-1)A_r - \frac{1}{m(m+1)!} \\ &= \frac{-1}{m(m+1)} \sum_{r=2}^m \frac{r-1}{(m-r)!} A_r - \frac{1}{m(m+1)!} \end{aligned}$$

スターリングの公式 $x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$ を適用すると

$$A_{m+1} \approx \frac{-1}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \sum_{r=2}^{m-1} \frac{r-1}{\sqrt{(m-r)}} \frac{e^{m-r}}{(m-r)^{m-r}} A_r - \frac{1}{m(m+1)!} - \frac{m-1}{m(m+1)} A_m \quad (\text{a1.10})$$

$A_m = k(m) \times 10^{-m/2}$ ですから, (a1.10) の右辺の第 2, 3 項は十分大きな m に対しては無視できて

$$\begin{aligned} |A_{m+1}| &\approx \frac{1}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \left| \sum_{r=2}^{m-1} \frac{r-1}{\sqrt{(m-r)}} \frac{e^{m-r}}{(m-r)^{m-r}} A_r \right| \\ &< \frac{m-2}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \sum_{r=2}^{m-1} \frac{e^{m-r}}{(m-r)^{m-r}} |A_r| \end{aligned} \quad (\text{a1.11})$$

$$\approx \frac{(m-2)10^{-m/2}}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \sum_{r=2}^{m-1} \frac{(e\sqrt{10})^{m-r} |k(r)|}{(m-r)^{m-r}} \quad (\because |A_r| = |k(r)|10^{-r/2}) \quad (\text{a1.12})$$

$$< \frac{(m-2)10^{1-m/2}}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \sum_{r=2}^{m-1} \frac{(e\sqrt{10})^{m-r}}{(m-r)^{m-r}} \quad (\because |k(r)| < 10) \quad (\text{a1.13})$$

代数和 $\sum_{r=2}^{m-1} \frac{(e\sqrt{10})^{m-r}}{(m-r)^{m-r}}$ については, 数値計算により $m = 12$ のときの和 (≈ 115) より大きくは無いことが分かりますから

$$\begin{aligned} |A_{m+1}| &< \frac{115(m-2)10^{1-m/2}}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} = \frac{(m-2)}{m(m+1)} \frac{1150\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} 10^{-(m+1)/2} \\ \text{i.e. } |A_{m+1}| &= \lambda(m+1)K(m+1)10^{-(m+1)/2} \quad (\text{a1.14}) \\ \text{ただし } K(m+1) &:= \frac{(m-2)}{m(m+1)} \frac{1150\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \\ \lambda(m+1) &< 1 \end{aligned}$$

そこで, $K(m+1)$ が 10 に等しくなる m の値を求めてみます. それは, 2 次方程式 $10\sqrt{\pi}m(m+1) = 1150\sqrt{5}(m-2)$ の解で, $m \approx 2.04$ または $m \approx 142.03$ となります. したがって $K(m+1) < 10$ を満たすのは, 143 以上の m となります. このとき, $\tilde{K}(m+1) := \lambda(m+1)K(m+1) < 10$ ですから, 自然数 $m \geq 144$ に対して

$$\begin{aligned} A_m &= \tilde{K}(m) \times 10^{-m/2} \quad (|\tilde{K}(m)| < 10) \quad (\dagger) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{K}(m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-3)}{m(m-1)} = 0 \quad (\#) \end{aligned}$$

と評価されることとなります. ただし (†) は, 143 以下の m について帰納法の仮定 $|\tilde{K}(m)| < 10$ が成り立つ場合に, すべての m に対して正しい評価式となります.

そこで, くわしく数値計算してみると, 係数 $\{A_m\}$ は (†) の形に表わされて, $m \leq 38$ では $1 < |\tilde{K}(m)| < 10$ が

当てはまり, $m \geq 39$ では $|\tilde{K}(m)| < 1 (< 10)$ となり, 確かに 143 以下の m について $|\tilde{K}(m)| < 10$ が成り立っています. そして m の増大と共に $|\tilde{K}(m)|$ は減少しています.¹⁰ この減少傾向は, 論理的帰結である (#) と合致します.

よって, 数値計算の結果と (十分大きな m に対して) 論証された式 (†) とを比較考慮すれば, すべての m に当てはまる表示式としては, $|K_m| < 10$ を条件として

$$A_m = K_m \times 10^{-m/2} \quad (\text{a1.15})$$

を用いることができます. (これは (a1.7) にほかなりません)

付録 1-3 式 (a1.0),(a1.1) の説明

文献 [2] の § 2 に示すように,

$$\begin{aligned} \exp(-e^t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-e^t)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l e^{lt}}{l!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(lt)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} \end{aligned} \quad (\text{a1.16})$$

(a1.16) の最右辺の l に関する無限和を $\psi(m)$ と定義します.

$$\psi(m) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} \quad (\text{a1.17})$$

この $\psi(m)$ を変形すると

$$\begin{aligned} \psi(m) &:= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l^{m-1}}{(l-1)!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} (l+1)^{m-1}}{l!} \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{r=0}^{m-1} l^r \binom{m-1}{r} \\ &= - \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} \psi(r) \end{aligned} \quad (\text{a1.18})$$

という漸化式が得られます.

付録 2 定数 $\Gamma^{(n)}(1)$ の符号

(4.4) より,

$$\Gamma^{(n)}(1) = P \int_0^{\infty} dx e^{-x} (\log x)^n = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1/r}^r dx e^{-x} (\log x)^n \quad (\text{a2.1})$$

(a2.1) の最右辺の被積分関数の不定積分を $g(x)$ とすると, 変数変換 $t := \log x$ により

¹⁰ $A_{38} = 1.0702 \times 10^{-19}$, $A_{39} = 0.7532 \times 10^{-39/2}$, $A_{40} = 0.1125 \times 10^{20}$, $A_{50} = -0.1953 \times 10^{-25}$, $A_{100} = (4.3031 \times 10^{-6}) \times 10^{-50}$, $A_{200} = (1.4155 \times 10^{-20}) \times 10^{-100}$

$$\begin{aligned}
g(x) &:= \int dx e^{-x} (\log x)^n = \int dt e^t t^n \exp(-e^t) \\
&= \int dt e^t t^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-e^t)^l}{l!} \\
&= \int dt \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{n+m}}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+1)^m}{l!}
\end{aligned} \tag{a2.2}$$

(a2.2) における l についての和は

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+1)^m}{l!} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} l^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} l^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} \psi(r) = -\psi(m+1)
\end{aligned} \tag{a2.3}$$

最後の变形では, §2 の脚注2 に示す漸化式を用いています. (a2.3) を (a2.2) に代入して

$$\begin{aligned}
g(x) &= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{m!} \int t^{n+m} dt = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+n+1)m!} t^{n+m+1} \\
&= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+n+1)m!} (\log x)^{n+m+1}
\end{aligned} \tag{a2.4}$$

この $g(x)$ を (a2.1) に用いると

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(n)}(1) &= \lim_{r \rightarrow \infty} [g(x)]_{1/r}^r = - \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+n+1)m!} [(\log x)^{n+m+1}]_{1/r}^r \\
&= - \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+n+1)m!} [(\log r)^{n+m+1} - (-\log r)^{n+m+1}]
\end{aligned} \tag{a2.5}$$

(a2.5) においては, $n+m+1$ が偶数のときは0となりますから, $n=2\nu$ なら $m=2\mu+1$ として

$$\Gamma^{(n)}(1) = -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\psi(2\mu+2)}{(2\mu+n+2)(2\mu+1)!} (\log r)^{n+2\mu+1} \tag{a2.6}$$

$n=2\nu+1$ なら $m=2\mu$ として

$$\Gamma^{(n)}(1) = -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\psi(2\mu+1)}{(2\mu+n+1)(2\mu)!} (\log r)^{n+2\mu+1} \tag{a2.7}$$

$n=2\nu$ の場合は, (a2.6) より

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(n)}(1) &= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\psi(2\mu+2)}{(2\mu+n+2)(2\mu+1)!} (\log r)^{2\mu+n+1} \\
&= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2\mu+2)(2\mu+1)}{2\mu+n+2} a_{2\mu+2} (\log r)^{2\mu+n+1} \quad \left(\because a_m = \frac{\psi(m)}{(m-1)(m)!} \right)
\end{aligned} \tag{a2.8}$$

ここで、付録 1-1 の式 (a1.7) を用いると、 $a_{2\mu+2} = e^{-1}A_{2\mu+2}10^{-\mu-1}$ (ただし $|A_{2\mu+2}| < 10$) と変形されますから

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(1) &= -2e^{-1}10^{-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2\mu+2)(2\mu+1)}{2\mu+n+2} A_{2\mu+2}10^{-\mu}(\log r)^{2\mu+n+1} \\ &= -4e^{-1}10^{-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{2\mu+2} \left(\frac{g(\mu)}{10}\right)^{\mu} (\log r)^{2\mu+n+1}\end{aligned}\tag{a2.9}$$

$$= -4e^{-1}10^{-1} \lim_{r \rightarrow \infty} G(r)\tag{a2.10}$$

ただし

$$G(r) := \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{2\mu+2} \left(\frac{g(\mu)}{10}\right)^{\mu} (\log r)^{2\mu+n+1}\tag{a2.11}$$

$$\log g(\mu) := \frac{1}{\mu} \log \frac{(\mu+1)(2\mu+1)}{2\mu+n+2}\tag{a2.12}$$

と表しています. この関数 $g(\mu)$ は § 2.2 の関数 $y(p)$ と類似のものです.

$$g(0) = 0, \quad g(1) = \frac{6}{4+n} < 6/5\tag{a2.13}$$

$$g(\mu) > 1 \quad (\mu > (-1 + \sqrt{8n+9})/4)\tag{a2.14}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} g(\mu) = 1$$

$g(\mu)$ の極値を知るために (a2.12) を μ に関して微分して、微分係数を g' と表すと

$$\mu^2 \frac{g'}{g(\mu)} = \frac{4\mu^2 + 4(n+2)\mu + 3n + 4}{(\mu+1)(2\mu+1)(2\mu+n+2)} - \log M(\mu)\tag{a2.15}$$

$$\text{ただし} \quad M(\mu) := \frac{(\mu+1)(2\mu+1)}{2\mu+n+2}\tag{a2.16}$$

極値条件 $g' = 0$ より、極値を与える μ_m の満たすべき式は

$$4\mu_m^2 + 4(n+2)\mu_m + 3n + 4 = (\mu_m+1)(2\mu_m+1)(2\mu_m+n+2) \log M(\mu_m)\tag{a2.17}$$

そして極値 g_m を決める式は (a2.12) および (a2.17) より

$$\log g_m = \frac{1}{\mu_m} \log M(\mu_m) = \frac{1}{\mu_m} \frac{4\mu_m^2 + 4(n+2)\mu_m + 3n + 4}{(\mu_m+1)(2\mu_m+1)(2\mu_m+n+2)}\tag{a2.18}$$

(a2.18) を用いて数値計算してみると下表のようになります. (μ_m は仮固定値です)

n	μ_m	$\log g_m$	g_m	n	μ_m	$\log g_m$	g_m	n	μ_m	$\log g_m$	g_m
1	1	0.7666	2.1525	1	10	0.0099	1.0099	1	100	0.0000	1.0000
5	1	0.9444	2.5713	5	10	0.0112	1.0112	5	100	0.0001	1.0001
50	1	1.1296	3.0945	50	10	0.0123	1.0124	50	100	0.0001	1.0001
100	1	1.1474	3.1501	100	10	0.0169	1.0171	100	100	0.0001	1.0001
500	1	1.1626	3.1985	500	10	0.0182	1.0183	500	100	0.0001	1.0001
∞	1	1.1666	3.2112	∞	10	0.0186	1.0187	∞	100	0.0001	1.0001

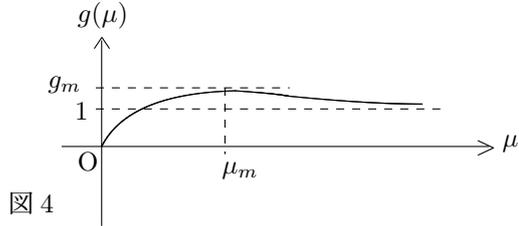
これより、 g_m の最大値はほぼ 3.2112 と判明します. ちなみに、 $n = \infty$ の場合の値は次式により算出しています.

$$L(\mu_m) := \lim_{n \rightarrow \infty} \log g_m = \frac{4\mu_m + 3}{\mu_m(\mu_m + 1)(2\mu_m + 1)}\tag{a2.19}$$

この結果より

$$g_m < 3.22 < 3.50 \quad (\text{a2.20})$$

よって $g(\mu)$ のグラフは図4のようになります.



$g(\mu) < 3.5$ ですから, (a2.11) において $(g/10)^\mu < (g/10) < 0.15$ であり, $\beta_\mu := A_{2\mu+2}(g/10)^\mu$ と定義すると, $|\beta_\mu| < 3.5$ と評価できます. したがって

$$\begin{aligned} G(r) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{2\mu+2} \left(\frac{g(\mu)}{10} \right)^\mu (\log r)^{2\mu+n+1} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_\mu (\log r)^{2\mu+n+1} \end{aligned} \quad (\text{a2.21})$$

$$|\beta_\mu| < 3.5 \quad (\text{a2.22})$$

(a2.21) において β_μ の符号は $A_{2\mu+2}$ と同一ですから, 付録 1-1 の末部の定理に示すように級数 $G(r)$ の符号は, $G(r) > 2 \times 3.5 \times (\log r)^{2+(n+1)} = 7(\log r)^{2+(n+1)} > 0$ より, 正となります. ($N = 3.5$ の場合です) したがって (a2.10) より $\Gamma^{(n)}(1) < 0$ と結論されます.

$n = 2\nu + 1$ の場合も, 同様の計算で負値であることが導かれます.

付録3 定数 $\tilde{\Gamma}^{(n)}(1)$ の符号

(4.5) より,

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(1) = P \int_0^\infty dx e^{-x} (\log x)^{-n} \quad (\text{a3.1})$$

(a3.1) の被積分関数を $f(x)$ と表せば

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= -e^{-x} (\log x)^{-n} - n e^{-x} \frac{(\log x)^{-n-1}}{x} \\ \therefore P \int_0^\infty dx f(x) &= -[f(x)]_0^\infty - nP \int_0^\infty dx e^{-x} \frac{(\log x)^{-n-1}}{x} \end{aligned} \quad (\text{a3.2})$$

(a3.2) の右辺の第 1 項の極限值は 0 ですから, 変数変換 $t := \log x$ により

$$P \int_0^\infty dx f(x) = P \int_{-\infty}^\infty dt \exp(-e^t) t^{-n-1} \quad (\text{a3.3})$$

(a3.3) の右辺の被積分関数を $\tilde{g}(t)$ と表わせば, その不定積分 \tilde{I} は

$$\tilde{I} := \int \tilde{g}(t) dt = \int dt \exp(-e^t) t^{-n-1} \quad (\text{a3.4})$$

関数 $\exp(-e^t)$ を級数展開すると

$$\begin{aligned}\exp(-e^t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l e^{lt}}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{l^m t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \psi(m)\end{aligned}\tag{a3.5}$$

(a3.5) では, $\psi(m) := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^m / l!$ という定義式を用いています. (a3.5) を (a3.4) に代入して

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \int t^{m-n-1} dt = \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} t^{m-n} + \frac{\psi(n)}{n!} \log t \\ &= \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} (\log x)^{m-n} + \frac{\psi(n)}{n!} \log |\log x|\end{aligned}\tag{a3.6}$$

よって, 求める定積分は

$$\tilde{\Gamma}^n(1) = [\tilde{I}]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} (\log x)^{m-n} + \frac{\psi(n)}{n!} \log |\log x| \right]_{1/r}^r\tag{a3.7}$$

(a3.7) の最右辺の第 2 項の積分値については

$$\begin{aligned}[\log |\log x|]_0^{\infty} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log |\xi| - \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \log |\eta| \\ &= \lim_{\xi, \eta \rightarrow \infty} \log \xi / \eta \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \log \zeta = 0\end{aligned}\tag{a3.8}$$

したがって

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^n(1) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} (\log x)^{m-n} \right]_{1/r}^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} (\log r)^{m-n} - \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} \frac{1}{m-n} (-\log r)^{m-n} \right]\end{aligned}\tag{a3.9}$$

(a3.9) において $n = 2\nu$ のとき, $m = 2\mu + 1$ の項のみが残りますから

$$\tilde{\Gamma}^n(1) = -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{2\mu \neq n-1}^{\infty} \frac{\psi(2\mu+1)}{(2\mu+1)!} \frac{1}{2\mu+1-n} (\log r)^{2\mu+1-n}\tag{a3.10}$$

そして $n = 2\nu + 1$ のときは, $m = 2\mu$ の項のみが残って

$$\tilde{\Gamma}^n(1) = -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{2\mu \neq n+1}^{\infty} \frac{\psi(2\mu)}{(2\mu)!(2\mu-n)} (\log r)^{2\mu-n}\tag{a3.11}$$

ここで $p := \mu - n/2$ と置換して (a3.10) を変形すると

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^n(1) &= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{2p \neq -1}^{\infty} \frac{\psi(2p+n+1)}{(2p+n+1)!(2p+1)} (\log r)^{2p+1} \\ &= -2 \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{G}(r)\end{aligned}\quad (\text{a3.12})$$

$$\text{ただし} \quad \tilde{G}(r) := \sum_{p=-n/2}^{\infty} \frac{\psi(2p+n+1)}{(2p+n+1)!(2p+1)} (\log r)^{2p+1} \quad (\text{a3.13})$$

(a3.13) の和については, $\mu = 0$ のとき $p = -n/2$ であること, および $2p \neq -1$ ですから $n \geq 2$ でなければならないことに留意します. ここでは $p_0 := -n/2$ と表します. 級数 $\tilde{G}(r)$ の係数について, コーシー・アダマールの公式を適用してみると, その収束半径は ∞ となります.

つぎに, 付録 1-1 の式 (a1.7) を用いて

$$\tilde{G}(r) = \sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{p+\nu}{p+1/2} e^{-1} A_{2p} 10^{-p-\nu-1/2} (\log r)^{2p+1} \quad (\text{a3.14})$$

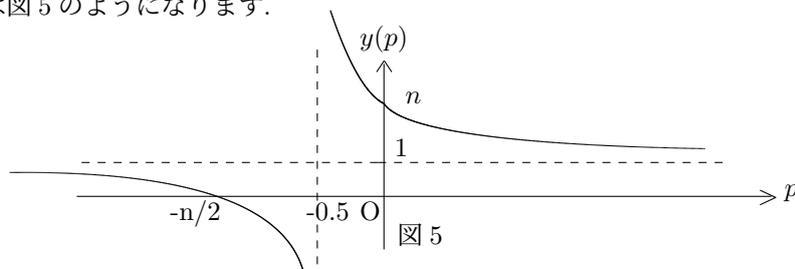
$$= \sum_{p=p_0}^{\infty} y(p) 10^{-(n+1)/2} \times 10^{-p} A_{2p} (\log r)^{2p+1} \quad (\text{a3.15})$$

$$\text{ただし} \quad y(p) := \frac{p+\nu}{p+1/2}, \quad |A_{2p}| < 10 \quad (\text{a3.16})$$

関数 $y(p)$ について,

$$\begin{aligned}y(0) &= 2\nu = n, \quad y(-n/2 = p_0) = 0 \\ \frac{dy}{dp} &= \frac{-2(n-1)}{(2p+1)^2} < 0, \quad \lim_{p \rightarrow \pm\infty} y(p) = 1 \\ y(-1/2) &= \pm\infty\end{aligned}$$

$y(p)$ のグラフは図 5 のようになります.



$y(p \leq p_0) < 1$ ですから, 関数 $y(p)$ は, $|y(p)| \leq n$ の範囲に限られます. そこで $\beta_p := 10^{-(n+1)/2} y(p) A_{2p}$ と表せば,

$$|\beta_p| < n \times 10^{(1-n)/2} < 1.10 \quad (\text{a3.17})$$

と評価され,¹¹ (a3.13) は

$$\begin{aligned}\tilde{G}(r) &= \sum_{p=p_0}^{\infty} 10^{-p} \beta_p (\log r)^{2p+1} \\ &= (\log r) \sum_{p=p_0}^{\infty} \beta_p \left(\frac{(\log r)^2}{10} \right)^p\end{aligned}\quad (\text{a3.18})$$

¹¹ $f(n) := n10^{(1-n)/2}$ は, $n = 2/\log 10 \approx 0.8686$ で最大値 1.0103 となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ です

(a3.18) を構成している級数

$$s(r) := \sum_{p=p_0}^{\infty} \beta_p \left(\frac{(\log r)^2}{10} \right)^p$$

において、係数 β_p の符号は A_{2p} と同一ですから、付録1-1の末部の定理に示すように $s(r) > 2 \times 1.1 (\log r)^2 / 10 > 0$ が導かれます。($N = 1.1$ の場合です) したがって $\tilde{G}(r) > 0$ と判定されますから、(a3.11) より $\tilde{\Gamma}^{(n)}(1)$ の符号は負です。

$n = 2\nu + 1$ の場合の式 (a3.9) についても、まったく同様にして関数項級数の極限值が負数であることが示されます。

参考文献

- [1] 中西 襄 「第2オイラー定数」 数学・物理通信 8巻9号 (2018年10月) p.11~p.13
- [2] 秋葉 敏男 「ある定積分の解析」 数学・物理通信 8巻8号 (2018年10月) p.27~p.37
- [3] 田島・近藤・天野 共著 『微分・積分』 培風館 (1967年)
整級数の収束性・項別微積分性については、p.184~p.185 参照

編集後記

いつのまにか 2024 年 6 月となった。ようやくこの 14 巻 3 号の発行へとこぎつけた。

今回、中西先生の知人のとったメモから広中平祐先生の以前の講演の要旨を掲載できることとなった。掲載にご尽力をいただいた中西襄先生と共同編集者の世戸憲治さんに御礼を申し上げます。それからメモをとられた原山巖さんにも感謝します。

世戸さんの論文は座屈現象のモデル計算である。これは北国の北海道に住まわれている、世戸さんにはあまり浮世離れした話ではなく、現実味のある現象なのであろう。

秋葉さんの論文はオイラーの定数を表す広義の定積分を級数表示するという論文であり、氏が計算達人なことは伺い知られるが、それ以上ではないのが残念である。

これは投稿者の問題ではなく、編集者としての私の見識が問われていることかもしれない。吹けば飛ぶようなつまらない雑誌ではあるが、すこしでも意義のあるあり方を考えていきたい。

6 月中にもう一号を発行したいと思っている。

(矢野 忠)