

数学・物理通信

14 卷 4 号 2024 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2024 年 6 月 18 日

目次 (Contents)

1. 「Levi-Civita の記号の縮約」再論 1

矢野 忠 2

2. ネイピア対数から指数関数へ

嶋 喜一郎 10

3. 自然対数の底とその逆数

矢野 忠 21

4. 心柱モデル (1)

世戸憲治 24

5. 編集後記

世戸憲治 34

1. The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 1

Tadashi YANO 2

2. From Napier's Logarithm to Exponential Function

Kiichiro SHIMA 10

3. The Base of Natural Logarithm and its Inverse

Tadashi YANO 21

4. Model of Central Pillar (1)

Kenji SETO 24

5. Editorial Comments

Kenji SETO 34

「Levi-Civita の記号の縮約」再論 1

矢野 忠^{*1}

The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 1

Tadashi YANO^{*2}

1. はじめに
2. Levi-Civita の記号の縮約公式
3. 縮約公式の覚え方
4. Levi-Civita の記号の Kronecker の δ による行列式表示
5. おわりに

まえおき

このエッセイは [1] に掲載されたものである。このエッセイではランク 4 の Levi-Civita の記号の縮約公式の導出を述べた。ベクトル解析の公式の導出に役立つ、ランク 3 の Levi-Civita の記号の縮約公式の導出については、[2] を参照してほしい。またこの Levi-Civita の記号のベクトル解析への応用については [3] を参照されたい。

内容を書きかえる必要はあまり感じなかったが、(2.3) の定数係数 $a_1, a_2, \dots, d_6$ の表と (4.1) の定数係数 $a_1, a_2, \dots, d_6$ の表をもっと簡潔な見やすい表にすることが改訂の主な目的である。論旨はまったく変えていない。

1 はじめに

愛数協の機関誌「研究と実践」第 18 号 [4] に「テンソル解析の学習における問題点」というテーマでエッセイを載せ、その中で Levi-Civita の記号の性質、特に縮約が行われるときによく使われる関係式の導き方についても述べた^{*3}。その導き方は Kronecker の δ の記号を一般化したものを用いていた。また、その縮約公式の導出には私の先生、米沢穰（広島大学名誉教授）さんによって示された初等的な方法もあることを言及しておいた。そのときは 1967 年当時の私のノートを見ても十分に思い出せなかったが、ここで再度そのノートにもとづいてその関係式の導出を再現してみよう。

2 Levi-Civita の記号の縮約公式

以下、Pauli metric $x_\mu = (x, y, z, ict)$ をとり、共変テンソルと反変テンソルとの区別をしないことにしよう。しかし、この区別をしないことで以下の議論が一般性を失う訳ではない。

まず、Kronecker の δ の定義をしよう。Kronecker の δ は

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\alpha = \beta) \\ 0, & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (2.1)$$

で定義される 2 階の対称テンソルである。上の式および以下の式でギリシャ文字の添字は 1 から 4 までのいずれ

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} [5] は [4] の改訂版である。

かの値をとることにする。

つぎに Levi-Civita の記号 ϵ を定義しよう。Levi-Civita の記号 ϵ は

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ が } (1, 2, 3, 4) \text{ の偶順列のとき} \\ -1, & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ が } (1, 2, 3, 4) \text{ の奇順列のとき} \\ 0, & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ が上の場合以外のとき} \end{cases} \quad (2.2)$$

で定義される 4 階の反対称の相対テンソル（テンソル密度ともいう）である。この Levi-Civita の記号は定義により 1 または -1 または 0 の値しかとらないので、 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は Kronecker の δ の 4 つの直積の 1 次結合で表わされる 8 階の反対称のテンソルとなる（この考察が本質的である）。したがって、 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は 24 個の未定の係数 a_i, b_i, c_i, d_i , ($i = 1 - 6$) によって次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = & a_1\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} + a_2\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} + a_3\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} \\ & + a_4\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} + a_5\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} + a_6\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu} \\ & + b_1\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} + b_2\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} + b_3\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} \\ & + b_4\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} + b_5\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} + b_6\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} \\ & + c_1\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} + c_2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} + c_3\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} \\ & + c_4\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} + c_5\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} + c_6\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} \\ & + d_1\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} + d_2\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu} + d_3\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} \\ & + d_4\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} + d_5\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} + d_6\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\mu} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.3) で各項の Kronecker の δ の 4 つの直積において、とられる添字の組は下に与えられた (2.4) に与えられた行列の各行から添字の組を 1 つずつ、すでに取り出した添字の組を含む列からは重複してとらないように取り出してつくられる。

例えば、係数 a_1 をもつ第 1 項は 1 行 1 列から添字 $\alpha\mu$ を、2 行 2 列から添字 $\beta\nu$ を、3 行 3 列から添字 $\gamma\rho$ を、4 行 4 列から添字 $\delta\sigma$ を選んだ、4 つの Kronecker の δ の直積である。

$$\begin{bmatrix} \alpha\mu & \alpha\nu & \alpha\rho & \alpha\sigma \\ \beta\mu & \beta\nu & \beta\rho & \beta\sigma \\ \gamma\mu & \gamma\nu & \gamma\rho & \gamma\sigma \\ \delta\mu & \delta\nu & \delta\rho & \delta\sigma \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

さて、(2.3) の 24 個の未定係数を決めるには、例えば、 $\alpha = \mu = 1$, $\beta = \nu = 2$, $\gamma = \rho = 3$, $\delta = \sigma = 4$ とおけば、 a_1 の掛かっている項以外は 0 となるので、 $a_1 = \epsilon_{1234}\epsilon_{1234} = 1$ と決定される。各々の係数の値を表 2.1 に示す。

表 2.1 では常に $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$ と固定してとられている。したがって、 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$ である。だから、添字 μ, ν, ρ, σ がそれぞれ 1, 2, 3, 4 の値を変わって取るときの $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の値が 1 か -1 かを調べればよい。そうすれば、係数 $a_1, a_2, \dots, d_6$ が求められる。このようにして決定された係数 $a_1, a_2, \dots, d_6$ を (2.3) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = & \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} \\ & + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu} \\ & - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} \\ & - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} \\ & + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} \\ & + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} \\ & - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} \\ & - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\mu} \end{aligned} \quad (2.5)$$

という項を 24 も持つ長い式が得られた。この式をどういう方針で整理していくか。まずは共通因子 $\delta_{\alpha\mu}, \delta_{\alpha\nu}, \delta_{\alpha\rho}, \delta_{\alpha\sigma}$ をもつ、それぞれの項をまとめたなら、いいだろう。

表 2.1 (2.3) の係数の表

μ	ν	ρ	σ	$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$	$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$
1	2	3	4	1	$a_1 = 1$
1	2	4	3	-1	$a_2 = -1$
1	3	2	4	-1	$a_3 = -1$
1	4	2	3	1	$a_4 = 1$
1	3	4	2	1	$a_5 = 1$
1	4	3	2	-1	$a_6 = -1$
2	1	3	4	-1	$b_1 = -1$
2	1	4	3	1	$b_2 = 1$
3	1	2	4	1	$b_3 = 1$
4	1	2	3	-1	$b_4 = -1$
3	1	4	2	-1	$b_5 = -1$
4	1	3	2	1	$b_6 = 1$
2	3	1	4	1	$c_1 = 1$
2	4	1	3	-1	$c_2 = -1$
3	2	1	4	-1	$c_3 = -1$
4	2	1	3	1	$c_4 = 1$
3	4	1	2	1	$c_5 = 1$
4	3	1	2	-1	$c_6 = -1$
2	3	4	1	-1	$d_1 = -1$
2	4	3	1	1	$d_2 = 1$
3	2	4	1	1	$d_3 = 1$
4	2	3	1	-1	$d_4 = -1$
3	4	2	1	-1	$d_5 = -1$
4	3	2	1	1	$d_6 = 1$

その方針で数式を整理すれば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= \delta_{\alpha\mu}(\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} + \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} + \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu}) \\
&\quad - \delta_{\alpha\nu}(\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} + \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} + \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu}) \\
&\quad + \delta_{\alpha\rho}(\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\sigma} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\mu} + \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\mu}) \\
&\quad - \delta_{\alpha\sigma}(\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\rho} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\mu} + \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\delta\nu} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\mu}) \\
&= \delta_{\alpha\mu} \begin{vmatrix} \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\alpha\nu} \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\mu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} \\
&\quad + \delta_{\alpha\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\mu} & \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\alpha\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \\ \delta_{\delta\mu} & \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\mu} & \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

したがって、(2.3) は (2.6) の形に表わされることが分かる。

つぎに、 $\mu = \alpha$ において縮約を 1 カ所だけしてみれば、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} &= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\alpha} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\alpha} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\alpha} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\alpha} & \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &= (4 - 1 - 1 - 1) \begin{vmatrix} \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\nu} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

と (2.7) が得られる。

さらに、 $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$ と 2 カ所で縮約すれば、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= \begin{vmatrix} \delta_{\beta\beta} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \\ \delta_{\gamma\beta} & \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\beta} & \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &= 2! \begin{vmatrix} \delta_{\gamma\rho} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\rho} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

と (2.8) が得られる。

引き続き、 $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$, $\rho = \gamma$ と 3 カ所で縮約すれば、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= 2! \begin{vmatrix} \delta_{\gamma\gamma} & \delta_{\gamma\sigma} \\ \delta_{\delta\gamma} & \delta_{\delta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &= 3! \delta_{\delta\sigma}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

と (2.9) が得られる。

最後に、添字を $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$, $\rho = \gamma$, $\sigma = \delta$ と 4 カ所で縮約すれば、

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 3! \delta_{\delta\delta} = 4 \cdot 3! = 4! \tag{2.10}$$

と (2.10) が得られる。

(2.7)–(2.10) が [6], [7], [8], [9] に与えられている Levi-Civita 記号の縮約の公式である。

3 縮約公式の覚え方

上に求めた公式 (2.6)–(2.10) の覚え方について述べておこう。

まず、 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ については $\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma}$ のようにそれぞれの ϵ の添字の 1 番目の添字 α は 1 番目の添字 μ と、2 番目 β は 2 番目 ν と、 $\dots$ といったように組み合わせて 4 つの Kronecker の δ の積を 1 つつくる。その後、順々に添字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に組み合わせる添字 μ, ν, ρ, σ を置換して得られる Kronecker の δ の 4 つの積を順々につくってやればよい。

そのとき、もとの μ, ν, ρ, σ から偶置換によって現在の順列が得られるか、奇置換によって現在の順列が得られるかに応じて、それぞれ符号 + または $-$ をつけてやればよい。このような手続きによって $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を Kronecker の δ の 4 つの積に書き下すことができる。

つぎに縮約公式の係数の求め方を述べよう。

$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}$ について考えると, まず

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = a(\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\sigma} + \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\nu} + \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu}\delta_{\delta\rho} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\nu}) \quad (3.1)$$

と $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}$ の書き下しのところで述べた方法で全項を書き下す. ここで, a は未定の係数である.

この未定の係数 a は以下のようにして決定する. すなわち, $\nu = \beta, \rho = \gamma, \sigma = \delta$ において縮約すれば, 左辺は $4!$ となる. 上の式は恒等式であるから,

$$\begin{aligned} 4! &= a(\delta_{\beta\beta}\delta_{\gamma\gamma}\delta_{\delta\delta} - \delta_{\beta\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\delta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\delta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\delta\beta} + \delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\beta}\delta_{\delta\gamma} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\gamma}\delta_{\delta\beta}) \\ &= a(\delta_{\beta\beta}\delta_{\gamma\gamma}\delta_{\delta\delta} - \delta_{\beta\beta}\delta_{\delta\delta} - \delta_{\beta\beta}\delta_{\delta\delta} + \delta_{\beta\beta} + \delta_{\beta\beta} - \delta_{\beta\beta}\delta_{\gamma\gamma}) \\ &= a(\delta_{\beta\beta}\delta_{\gamma\gamma}\delta_{\delta\delta} - 3\delta_{\beta\beta}\delta_{\delta\delta} + 2\delta_{\beta\beta}) \\ &= a(4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4) \\ &= 4a(16 - 12 + 2) \\ &= 4a \times 6 \\ &= 24a \end{aligned} \quad (3.2)$$

したがって,

$$a = 1 \quad (3.3)$$

が得られる. すなわち, (2.7) が求められる.

同様にして,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = b(\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho}) \quad (3.4)$$

で $\rho = \gamma, \sigma = \delta$ において縮約すれば,

$$\begin{aligned} 4! &= b(\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho}) \\ &= b(4^2 - 4) \\ &= 12b \end{aligned} \quad (3.5)$$

であるから,

$$b = 2 \quad (3.6)$$

が得られる. すなわち, (2.8) が求められる.

また

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = c\delta_{\delta\sigma} \quad (3.7)$$

は $\sigma = \delta$ において縮約すれば,

$$4! = c\delta_{\delta\delta} = 4c \quad (3.8)$$

であるから, したがって

$$c = 6 \quad (3.9)$$

が得られる. すなわち, (2.9) が求められる.

最後に, 4 カ所全部を縮約したときには

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4! \quad (3.10)$$

が直ちに得られる. すなわち, (2.10) が求められる.

4 Levi-Civita の記号の Kronecker の δ による行列式表示

Levi-Civita の記号は添字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が値として 1, 2, 3, 4 を重複してとらないときにのみ 0 でないので, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は 4 つの Kronecker の δ の積の 1 次結合としてつぎの形に書き表される.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = & a_1\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 4} + a_2\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 3} + a_3\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 4} \\ & + a_4\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 2} + a_5\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 3} + a_6\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 2} \\ & + b_1\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 4} + b_2\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 3} + b_3\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 4} \\ & + b_4\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 1} + b_5\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 3} + b_6\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 1} \\ & + c_1\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 4} + c_2\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 2} + c_3\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 4} \\ & + c_4\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 1} + c_5\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 2} + c_6\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 1} \\ & + d_1\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 3} + d_2\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 2} + d_3\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 3} \\ & + d_4\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 1} + d_5\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 2} + d_6\delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 1}\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここで, $a_i, b_i, c_i, d_i, (i = 1 - 6)$ はそれぞれ未定の係数である. 例えば, a_i の値を求めるために, $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4$ とおけば, 右辺の a_1 のかかっている項以外は 0 となるから, $a_1 = \epsilon_{1234} = 1$ と決定される. $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ のときと同様に各々の係数の値を表 4.1 に示す.

この表 4.1 で空白のところはその真上の行と同じ数値を示している. これらの数値を入れるとかえって煩雑に見えるのであえてその数値を書いていない. これらの係数の値を (4.1) に代入すれば, つぎのように (4.2) が得られる.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 4} - \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 3} - \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 4} \\ & + \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 2} + \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 3} - \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 2} \\ & - \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 4} + \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 3} + \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 4} \\ & - \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 1} - \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 3} + \delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 1} \\ & + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 4} - \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 2} - \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 4} \\ & + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 4}\delta_{\delta 1} + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 2} - \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 1} \\ & - \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 3} + \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 1}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 2} + \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 3} \\ & - \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 2}\delta_{\gamma 3}\delta_{\delta 1} - \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 1}\delta_{\delta 2} + \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 3}\delta_{\gamma 2}\delta_{\delta 1}\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 1} & \delta_{\alpha 2} & \delta_{\alpha 3} & \delta_{\alpha 4} \\ \delta_{\beta 1} & \delta_{\beta 2} & \delta_{\beta 3} & \delta_{\beta 4} \\ \delta_{\gamma 1} & \delta_{\gamma 2} & \delta_{\gamma 3} & \delta_{\gamma 4} \\ \delta_{\delta 1} & \delta_{\delta 2} & \delta_{\delta 3} & \delta_{\delta 4} \end{vmatrix}$$

5 おわりに

ここで初等的に導いた (2.5)-(2.8) は [10] に藤井昭彦先生によって詳しくその導出が与えられていることを後で知った. この本の初版は 1984 年 2 月なのでよく調べれば, ここに述べたことは既知のことであったことになるが, 私のエッセイ [4] の発行当時 (1985 年 3 月) はこの [10] の存在を知らなかった.

藤井昭彦先生の「Levi-Civita 記号の縮約公式の導出」では同じ Levi-Civita 記号中に現われる添字の反対称性を用いて Kronecker の δ の可能な組み合わせを前もって制限するという手段で, ここで与えたものより簡潔に関係式が導かれている. また, 本質的なことではないが, 私のここで採用した Pauli metric ではなく Bjorken-Drell metric が用いられている. しかし, 考え方は私の先生, 米沢穰さんの考え方と本質的に同じである.

(1998.1.8)(2024.6.11 改訂)

表 4.1 (4.1) の係数の表

α	β	γ	δ	$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$
1	2	3	4	$a_1 = 1$
			4	$a_2 = -1$
	3	2	4	$a_3 = -1$
			4	$a_4 = 1$
	4	2	3	$a_5 = 1$
			3	$a_6 = -1$
2	1	3	4	$b_1 = -1$
			4	$b_2 = 1$
	3	1	4	$b_3 = 1$
			4	$b_4 = -1$
	4	1	3	$b_5 = -1$
			3	$b_6 = 1$
3	1	2	4	$c_1 = 1$
			4	$c_2 = -1$
	2	1	4	$c_3 = -1$
			4	$c_4 = 1$
	4	1	2	$c_5 = 1$
			2	$c_6 = -1$
4	1	2	3	$d_1 = -1$
			3	$d_2 = 1$
	2	1	3	$d_3 = 1$
			3	$d_4 = -1$
	3	1	2	$d_5 = -1$
			2	$d_6 = 1$

参考文献

- [1] 矢野 忠, Levi-Civita の記号の縮約再論, 研究と実践 (愛数協), 第 64 号 (1997.12), 2-10
(『数学散歩』(国土社, 2005), 『物理数学散歩』(国土社, 2005) 所収)
- [2] 矢野 忠, Levi-Civita の記号の縮約再々論, 数学・物理通信, 第 11 巻 7 号 (2021.12.9) 13-20
(『数学散歩』(国土社, 2005), 『物理数学散歩』(国土社, 2011) 所収)
- [3] 矢野 忠, Levi-Civita の記号とベクトル解析, 数学・物理通信, 第 9 巻 9 号 (2020.1.9) 19-32
- [4] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践 (愛数協), 第 18 号 (1985.3), 7-17
- [5] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点 (改訂版), 研究と実践 (愛数協), 第 65 号 (1998.3), 2-17
(『数学散歩』(国土社, 2005), 『物理数学散歩』(国土社, 2011) 所収)
- [6] L. B. Okun, *Weak Interaction of Elementary Particles* (Pergamon Press, 1965) 25-26 and 28-29

- [7] P. Roman, *Theory of Elementary Particles* (North Holland, 1964), 57
- [8] H. Pietschmann, *Weak Interactions-Formulae, Results and Derivations* (Springer-Verlag, 1983), 7
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 3rd ed. (Pergamon Press, 1971), 17-18
ランダウ＝リフシッツ著（広重徹、恒藤敏彦訳），『場の古典論』 原書第 6 版（東京図書, 1964）, 20-21
- [10] I. J. R. エイチスン, A. J. G. ヘイ著（藤井昭彦訳），『ゲージ理論入門 II』（講談社, 1984）, 21 の [問題 5.3] とその解答 223-225

ネイピア対数から指数関数へ

From Napier's Logarithm to Exponential Function

嶋 喜一郎 *

Kiichiro SHIMA

1 はじめに

ネイピアの対数の定義は難解だった。志賀浩二『数の大航海』や 山本義隆『小数と対数の発見』*¹に定義が引用されていたが、さっぱりわからなかった。それでも定義とその解説を行き来しているうちに、なんとか読みとれるようになってきた。「定義」に至る「等比数列と等差数列の対応」からたどると分かりやすくなるのではないと思う。

ネイピア対数の全貌は先の 2 著に詳しいが、ここでは全体ではなく、数直線（線分と半直線）上の点の運動として「対数」を定義するネイピアの発想の 1 点に絞って考察する。

ネイピアは等差数列の進行に時間の規則的な経過を対応させることによって定義を導いている。時間の規則的な進行は、ネイピア以降、小数表記の確立とともに、間隔が縮小し、そして連続していくようになる。ここに実数と関数の考えが確立していき、無限解析が可能になっていった。

10^7 から 0 へと減少していく等比数列が、減衰していく指数関数になる過程に着目する。

2 ネイピア対数の定義を導く

ネイピアの試みは三角表にある数の演算に対して、シュティーフエルの方法（乗法を加法に対応させる）を適用することであった。当時、三角表の数は精密になっており、 10^7 を半径としてとった場合、正弦表の精度は 7 桁になっていた。それに合わせて、ネイピアは対数表の精度も有効数字 7 桁を目標にした。

整数（三角表の 7 桁の数）間の掛け算を足し算に変換する方法を正確に追究しようとしたとき、ネイピアは無限に続く数（無限小数、実数）の存在と直面することになった。ネイピアの作ろうとした対数表は正弦 $10^7 \sin \theta$ の 1 分刻みの表である。 θ が 90° から 0° へ動くとき、正弦 $\sin \theta$ は 1 から 0 となる。ネイピアは 10^7 から 0 へと減少していく等比数列を考えた*²。

$$x = 10^7 \sin \theta = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y.$$

ネイピアは x を「自然的数」、 y を最初「人工的数」、のちに「対数」と呼んだ*³。

* kiichiro-s@cg8.so-net.jp

*¹ [1], [2]

*² この表記は現代のものである。ネイピア自身がこの式を書いているわけではない。ネイピアには指数概念はなかった。[2] p.133 参照。

*³ 与えられた正弦を「自然的数」と呼び、そのかけ算を工夫して足し算で可能にする数を「人工的数」(artificial number) と呼ぶのは妥当な命名だろう。「対数」(logarithm) は logos (論理) と arithmos (数) から創案されている。「対数」(logarithm) が当初持っていたのは、正弦の計算をしやすくするため「論理的に作った数」という意味だったろう。「対数」は「真数」(自然的数) と対 (つい) になっていく。

いま、初項 10^7 、公比 $1 - \frac{1}{10^7}$ で進行していく数列の最初の 101 項を取り上げると、次のようになる*4 (表 1)。

x_0	10000000.0000000
	<u>1.0000000</u>
x_1	9999999.0000000
	<u>0.9999999</u>
x_2	9999998.0000001
	<u>0.9999998</u>
x_3	9999997.0000003
	<u>0.9999997</u>
x_4	9999996.0000006
$\vdots$	$\vdots$
x_{100}	9999900.0004950

表 1

ここで y の列は整数 (0,1,2,3,...) だが、 x の項には無限に続いていくような小数が出てくる (近似でまるめてあるが)。このうち ネイピアの関心は 7 桁の整数 (三角表の表示) である。

例えば $x_{100}=9999900.0004950$ である。これに近い整数 9999900 の y の値を計算してみると、 $x_0=10000000.0000000$ と $x_{100}=9999900.0004950$ の線形補間より、100.000495 となる*5。

これは

$$9999900 = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100.000495}$$

ということだが、 y の値の方にも無限に続く小数が出現してくる。ネイピアが直面したものは 志賀の表現を借りていえば、「対数概念にとって最も重要な点は、整数間の演算としての乗法を加法に変換する規則を数学的に正確に記述するためには、無限小数—実数—が必然的に現れてくることにある」*6。ネイピアは自然的数 x にも人工的数 y にも無限に続く小数の出現に直面したのである。

数と数の間に見え隠れする無限小数をどのように対処すればいいのか、ネイピアは数ではなく量に着目する。

当時、正弦は比というよりは半弦の長さとして捉えられていた。だから、正弦を数字 (数) ではなく長さ (量) として見ることはネイピアの理解の基礎にあったのである。正弦の変化は三角表では離散的だが、正弦自体は長さとして連続的に変化していくだろう。正弦 (自然的数) に対応する人工的数 (対数) も同じである。この 2 つは数としては離散的に変化していくが、量としては連続的に変化していく。数は近似値にほかならない。これを正確に保存するには数直線上の点の動きとして表象するのが妥当だと思われた。

志賀浩二はネイピアの対数の定義には「実数概念や関数概念へ向けての最初の胎動がある」と言っている*7。実数への胎動は等比数列と等差数列を「数直線」に位置づけることに現れ、関数への胎動は等比数列と等差数列の「対応」に現れているといえるだろう。志賀はネイピアが「幾何数列と算術数列との対応という最初のモチベーションを、数直線から数直線への対応という連続関数の概念の中に溶けこませることに成功した」と述べて

*4 [1] p.154, [2] p.156 参照。

*5 $y = 100 \frac{x_{100}-x}{x_{100}-x_0} = 100 \times \frac{100}{99.999505} = 100.000495$

*6 [1] p.79

*7 [1] p.87

いる^{*8}．ここに着目する．

まず，初項 1，公比 $1-s$ の等比数列を考えてみよう． $s = 10^{-7}$ とする．この数列の一般項は

$$x = (1-s)^y$$

である．これはネイピアの等比数列の初項 10^7 を 1 としたものである^{*9}．この式で正弦の値 (x) は 1 以下 (小数) になるが， y は整数のままである． y には初項を 1 にした影響はない．この数列を次のように並べてみよう (図 1)．

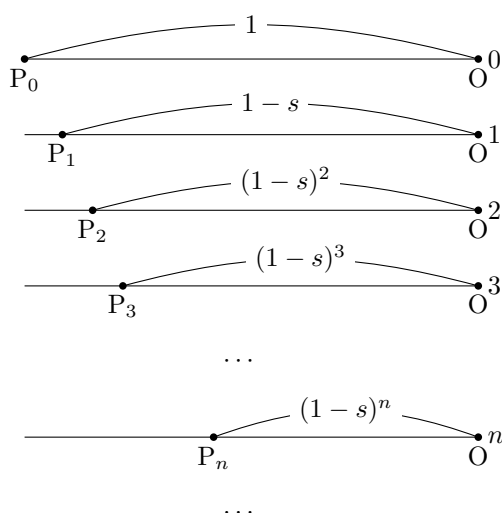


図 1 等比数列と等差数列の対応 (静止図)

等比数列の項は線分として並置されている．これは定点 O からの距離として等比数列を見たものである．

$$x: 1, 1-s, (1-s)^2, (1-s)^3, \dots$$

が等比数列に対応する．また，

$$y: 0, 1, 2, 3, \dots$$

が等差数列を表わしている．

これはシュティーフルの表示 (初項 1，公比 2 の等比数列) を稠密にしたものである^{*10}．「乗法を加法に変換する原理」は保存されている．例えば $1-s$ と $(1-s)^2$ の積を求めるとき，直接 $(1-s)(1-s)^2 = (1-s)^3$ と求めるのではなく， $1+2=3$ と加法を媒介にして 3 と対応する $(1-s)^3$ として求まるのである．ここには時間的要素は含まれていない．等比数列 (公比 $1-s$) と等差数列 (公差 1) が空間的に配置してあるだけである．等比数列を生み出すのは公比 $1-s$ の冪指数 y である．これは 1 ずつ増加していく．

図 1 の線分 (等比数列の項) を 1 つの線分の上に並べてみると次のようになる (図 2)．

点 P はパラパラ漫画のように動き始めるように見える^{*11}．1 ずつ増加していく冪指数 y に時間の経過を想定してみよう．

^{*8} [1] p.80

^{*9} これは線分の表示を簡潔にするためだが，真数の小数表示を先取りしていることになる．

^{*10} 公比 2 の等比数列では，例えば $2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, \dots$ となり，2 つの項 (冪) の間隔が大きくて，その間の数の計算にはまったく対処できない．1 に近い公比 ($1 - 10^{-7} = 0.9999999$) を設定して，「冪」の間隔を密にしたもの．初項を 1 としたとき， $10^{-7} = 0.0000001$ 以下の間隔で数が並んでいく．

^{*11} 「しかし，なによりも厄介なのは当時連続的に動く動点，また動点の速さという概念が記述できなかったことにある．ネイピアの頭の中にはたぶん明確な描像として捉えられていた動点の動きも，取り出して説明しようとする，このように 1 回目，2 回目，3 回目の瞬間のように離散的な表現となってくる．」 ([1], p.93.)

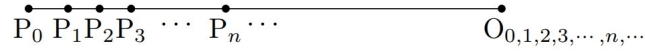


図2 線分上の等比数列と等差数列（点の集合）

最初の1単位で、Oは0から1になる。P₀OはP₁Oになる。

$$\begin{aligned} P_0P_1 &= P_0O - P_1O \\ &= 1 - (1-s) \\ &= s \end{aligned}$$

次の1単位で、Oは1から2となり、P₁OはP₂Oになる。

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= P_1O - P_2O \\ &= (1-s) - (1-s)^2 \\ &= (1-s)(1-(1-s)) \\ &= (1-s)s \end{aligned}$$

ここで、P₀P₁ = s = 1 × s と考え、P₁P₂ = (1-s) × s と対応させると

1単位進む時間間隔は s = 10⁻⁷ で、速さは

P₀P₁ では、P₀O の1

P₁P₂ では、P₁O の(1-s)

と考えれば、線分上の点Pを運動として整合的に把握できる。この考えを P₂ → P₃ に適用してみると、ここでは P₂O = (1-s)² の速さで、時間間隔 s だけ進み

$$(1-s)^2s$$

だけ移動することになる。実際

$$\begin{aligned} P_2P_3 &= P_2O - P_3O \\ &= (1-s)^2 - (1-s)^3 \\ &= (1-s)^2(1-(1-s)) \\ &= (1-s)^2s \end{aligned}$$

である。数列の移行に時間経過を想定する解釈が成り立つことがわかる。時間が n 単位後ならば P_n は (1-s)ⁿ の速さで時間 s だけ進むのである^{*12}。

y の変化を可視化できるように半直線 O を、始点を P₀ と揃えて（出発点として）追加し、線分 P₀O 上の P_nO = (1-s)ⁿ と半直線 O 上の n を対応させてみよう。それが図3である^{*13}。矢印の先の数が対数を表わしている。これが最初の関数といえるだろう。

^{*12} 時間の刻み 10⁻⁷ は初項を1にした影響である。10⁷ の場合、この刻みは1である。なお、対数表の最初の4項とその対数を示せば、次のようになる。ネイピアは有効数字を多くするため、また誤差を吸収するため、10⁷ を 1000000.0000000 と表記している。この表記に山本義隆はネイピアがレギオモンタヌスを越えているとみている。真数、(速度)、対数の順で示す ([2], p.165 参照)。

x ₀ = P ₀ O =	10000000.0000000,	(1.0000000),	0
x ₁ = P ₁ O =	9999999.0000000,	(0.9999999),	1.00000005
x ₂ = P ₂ O =	9999998.0000001,	(0.9999998),	2.00000010
x ₃ = P ₃ O =	9999997.0000003,	(0.9999997),	3.00000015

^{*13} これは [1] に示してある図 (p.87) を参考にして描いている。また、この図は [2] の図 5.5 (ネイピア対数 X = D ln x の図解, p.133) に対応している。

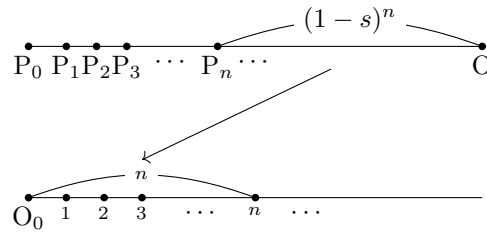


図3 ネイピア対数の定義（離散的）

ネイピアは『構成（Construction）』（1619年）で次のように説明している^{*14}。

1. 算術的に増加するとは、同一時間につねに同量だけ増加することである。
2. 幾何学的に減少するとは、同一時間に、最初は全量が、その後はそれぞれの残りが、常に同一の比率で減少することである。
3. したがって、定点に接近する幾何学的に運動する点は、その定点からの距離に比例した速度を有する。

まだ離散的だが、動きは次のように確認できる。

1. O は、つねに 1 ずつ増加する。
2. P は、最初は 1，その後は $1-s$ の比率で減少する。
3. P_n の速度は $(1-s)^n$ である。

図3は連続的な正弦の変化を離散的な数列で表示したものである。正弦は線分の上にプロットした点を離散的に動くのではない。ネイピアは正弦の値は線分上を連続的に動くことを見抜いていた。ネイピアは、線分上のある1点に着目しその速さを表現しようとしていた。次のような表現がある。

「ある運動よりも、一層ゆっくりした運動も、また一層速い運動も与えられ得るということを知るときは、そのことからその運動に等しい速さをもつ運動も存在するということが結論できる（それをわれわれは速くも遅くもない運動という）。」^{*15}

これはある区間（例えば P_1P_2 ）の間のある1点に注目して、その瞬間の速さを表現しようとしたもののように見える。着目する P_1P_2 の間のある1点において、この速さは、 P_1 における「一層速い運動」と P_2 における「一層ゆっくりした運動」に対して、「その運動に等しい速さをもつ運動」であり「速くも遅くもない運動」と捉えていのように見える。

正弦の動きは連続的である。自然の数も人工の数（対数）も連続的である。離散的な数列の対応を連続的な長さ（距離）の対応に置き換えたものが図4である^{*16}。ネイピアの説明は次のようである^{*17}。

4. 与えられた正弦の対数とは、半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度と終始同一の速度

^{*14} [2], pp.150–151 より引用。山本義隆によれば、没後に出版された『構成』の定義の方が、「連続関数としての対数」の理解が明確だという。『記述』（1614年）では、定義1と定義2は次のようになっている。1. 直線〔半直線〕が一様に伸張するといわれるのは、その直線を描く点在同一時間に同一の距離を進む場合である。2. 直線〔線分〕が比例的に短くなるように縮小するといわれるのは、その直線を記述する点在同一時間に切り取る部分が、そこからその部分が切り取られる直線〔線分の長さ〕とつねに一定の比にある場合である ([2], p.129 参照)。

^{*15} [1], p.93 より引用。『記述（Description）』（1614年）の定義5。

^{*16} これは [2] の図 6.3（ネイピア対数 $X = N \ln x$ の定義, p151）に対応している。

^{*17} [2], p.132 『記述』では定義6として次のようになっている。「任意の正弦の対数は、全正弦を表す〔線分〕直線がその正弦に比例して縮小するとき、その間に一様に伸張する直線〔の長さ〕をきわめて近く表現するところの数である。ただし、双方の運動が同時におなじ速度で始まるとする。」

で、半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少するのと同じ時間の間に算術的に増加する量である。

ここで「量」という表現は、ネイピアにおいて、「数」（離散的整数）と対比して使われる連続量を指示する表現である*18。

「与えられた正弦の対数」とは $x \rightarrow$ の矢印が示す y である。「半径〔全正弦〕」とは $P_0O = 1$ 、「与えられた正弦」とは $10^7 \sin \theta$ （図3では $(1-s)^n$ ，図4では x ）である。「半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度」は1，「半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少する（のと同じ）時間」は P_0 が P に移動する時間である。「同じ時間の間に算術的に増加する量」は $y = L_0L$ である。

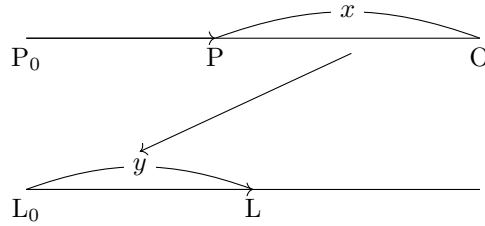


図4 ネイピア対数の定義（連続的）

与えられた正弦（等比数列）は速さが一定の割合で減少していく線分上の運動として、その対数（等差数列）は一定の速さで進む半直線上の点の運動として捉えられた。ネイピアは「等比数列と等差数列との対応」という最初のモチベーションを「数直線から数直線への対応という連続関数の概念の中」に内在させたのである。

3 ネイピア数 e が隠れていた

ネイピアは、数列に出現した無限小数に対処するため、等比数列と等差数列の各項を線分上に位置づけた。そしてその数列の変化を「速さ」の変化として捉えた。速さもまた連続的に変化する量である。速さの概念には距離と時間が必要である。距離の変化に対しては等比数列の位置（長さ、真数 x ）の変化が着目された。時間の経過に対しては等差数列の項（対数 y ）の規則的な増加が対応した。

図3に戻る。図3はネイピアの関係式

$$x = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

において、初項を1におきかえた

$$x = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

の表示だった*19。 x の方は小数表記を先取りした形だったが、 y は整数のままだった。 P_n の速度は $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ である。この表記を基礎にして、真数 x の速度の変化を1つの線分で表示する。対数の変化は数直線（半直線）上の点の運動として分離されたが、これを結合する。そして、このとき y を t に置き換える。対数の進行は時間 t の経過と対応させることができる。

$$x = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^t$$

*18 [2], pp.149–150. 参照.

*19 s を $\frac{1}{10^7}$ で表示.

である。 P_t の速度を図 5 に示す。

右端 t の添字（下付き数字）1 は、対数（時間）が離散的に 1 ずつ増加していることを表わしている。対数は一定の速度で進んでいく。 t_1 は時間が 1 を単位として進行していることを表わしている。ネイピアの 4 の定義において対数（時間）は連続的になっているが、直観的に展望されているだけで実質は離散的である。

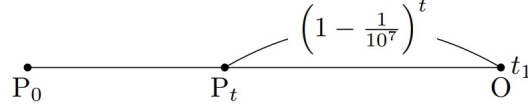


図 5 対数 t が 1 ずつ増加するときの速度

さて、小数が普及するにつれて、ネイピアが想定した等比数列

$$x = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

の x, y が見直され、小数表記（小数点の位置が 7 桁左に移動する）されるようになった。 $x/10^7$ と $y/10^7$ の関係が着目されるようになってきたのである。

その関係式は

$$\frac{x}{10^7} = \left(\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \right)^{\frac{y}{10^7}}$$

である*20。

等比数列と等差数列の項の進行を小数表記し、そして対数（等差数列）の進行を時間 t の経過と対応させると、数直線（線分）上の「定点からの距離に比例した速度」は図 6 のようになる。

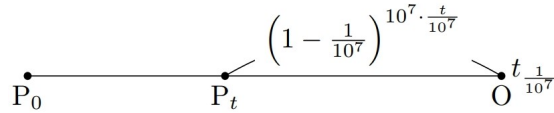


図 6 対数 t が $\frac{1}{10^7}$ ずつ増加するときの速度

$t \frac{1}{10^7}$ は時間が $\frac{1}{10^7}$ を単位として進行していることを表わしている。ここで「定点からの距離に比例した速度」の大きさ $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^t$ は変わらない。点 P_t の位置も同じである。

違いは対数が進行していく刻みが $\frac{1}{10^7}$ になり、それに対応して真数の刻みも $\frac{1}{10^7}$ になっていることである。数直線上の点 P の稠密性が増加していることである。そして、定数

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

が出現していることである*21。

ここで

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

*20 ネイピアが想定した関係式から導ける。「あとがき」参照。

*21 これは対数や指数の「底」として把握されていくもので、この大きさは

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \frac{1}{2.718281964\dots} = 0.36787922\dots$$

程である ([2], p.153 参照)。この値は $1/e$ (e はネイピア数) にほぼ等しい。

は

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i$$

の形である． $\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i$ という冪構造が，数直線上の点の運動の表示のなかに現れてきたのである．
他方

$$\frac{1}{10^7}$$

は

$$\frac{1}{i}$$

の形である．

ここで， i を無限大数 ($i \rightarrow \infty$) と考えると， $\frac{1}{i}$ は無限小数 ω ($\frac{1}{i} \rightarrow 0$) となり^{*22}， t_ω は連続的な時間経過を表わすようになっていく．また，真数の方も同じように連続的になり， $\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i$ は $\frac{1}{e}$ に接近していく．ここに無限解析が可能になっていったのである．

離散的な段階で把握された図 3，連続性を展望した図 4 の「定点からの距離に比例した速度」は，連続的な段階では「どの瞬間においても位置に比例する速度」に変わる．

図 7 は，初速度 1 で運動を始めた点 P が t 時間経過したときの図である． x は t の関数である．点 P での速度は，「どの瞬間においても位置に比例する速度」であり

$$-\frac{dx}{dt} = x$$

である． $t = 0$ のとき $x = 1$ である．

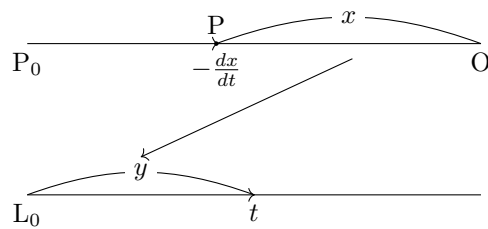


図 7 実数上でのネイピア対数の定義（連続的）

この微分方程式を解くと^{*23}

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x} &= dt \\ -\int \frac{dx}{x} &= \int dt \\ -\log_e x &= t + C \end{aligned}$$

^{*22} i （無限大数）， ω （無限小数）はオイラーの無限解析における用語である．

^{*23} 直角双曲線の面積が自然対数である．

$t = 0$ のとき $x = 1$ より $C = 0$. したがって

$$-\log_e x = t$$

となる. 底を変換すると

$$\log_{\frac{1}{e}} x = t$$

である*24. $y = t$ だから

$$y = \log_{\frac{1}{e}} x$$

である. これは実数上のネイピア対数である. また

$$\log_{\frac{1}{e}} x = t \iff e^{-t} = x$$

である*25. ここで

$$x = e^{-t}$$

は減衰していく指数関数を表わしている.

この関数は, ふりかえれば, ネイピアが想定した 10^7 から 0 へと減少していく離散的な等比数列

$$x = 10^7 \sin \theta = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

が源なのである.

4 あとがき

等比数列と等差数列の対応が関数の最初の姿だった. この対応を点の運動として表象するとき, ネイピアは数列の進行に時間を導入した. ここに定義が成立した. そしてこの時間を離散的なものから連続的なものへと稠密化していく過程でネイピア数 e が現れてきた.

時間とともに減少する等比数列が減衰する指数関数に変化する過程を次の 2 節で構成した.

1 ネイピア対数の定義を導く

2 ネイピア数 e が隠れていた

1 はネイピアの対数の発想を端的に捉えたもの, 2 は「運動現象の数学的取扱い」*26 の端緒 (ガリレイの先駆者) に着目したものである. 2 に, ネイピアが想定した等比数列を小数表記 (小数点の位置を 7 桁左に移動する) する際の式変形が出て来るが, この変形の背景にふれる必要があると感じるようになった. ここを補完しておきたい.

ネイピアの対数概念の提出以降, 対数は 2 つの道に分かれている. 常用対数と自然対数である.

ネイピアによる対数の提起は数計算を簡略することにあった. しかし, ネイピア対数は十進記法と相性が悪かった. 例えば, 同じ数字の配列の数で小数点の位置が違う数に対する補整が複雑になっていた. 改善が求められた. 数計算の方はブリッグスの常用対数にとって代わった. 常用対数にはネイピアも関係していた*27.

*24 $-\log_e x = -\frac{\log_{\frac{1}{e}} x}{\log_{\frac{1}{e}} e} = -\frac{\log_{\frac{1}{e}} x}{-1} = \log_{\frac{1}{e}} x$

*25 $\log_{\frac{1}{e}} x = t \iff \left(\frac{1}{e}\right)^t = x$

*26 [2]p152 参照

*27 このとき, ネイピアは等比数列と等差数列の対応というアイデアを完全に放棄していると志賀浩二は述べている. そして, そこにネイピアのすごさをみている. [1]p140.

ブリッグスの常用対数は 10 と 1 の間の連続的幾何平均によって作られている。10 と 1 の幾何平均，その結果と 1 の幾何平均，という操作が次々と 54 回繰り返えされている。

$$10^1, 10^{1/2}, 10^{1/4}, 10^{1/8}, \dots, 10^{1/2^{53}}, 10^{1/2^{54}}$$

常用対数は「底」という概念を準備し，底・指数・対数・真数の関係を明確にしていく契機となったと思う。

$$a^b = c \quad \log_a c = b$$

において， a は底， b は指数＝対数， c は真数である。 $a^b = c$ は，ネイピアが対数を提起したときの発想，「等比数列と等差数列の対応」と無関係に見えるかもしれない。しかし，初項 1，公比 a の連続的な等比数列の項 (c) と連続的な等差数列 (b) と考えることができる。底・指数・対数・真数の関係は等比数列と等差数列の連続的な対応を 1 点で取り上げたものとみることができる。常用対数の方から「底」は出現している。

他方，等比数列と等差数列の直接の連続的な対応は，数ではなく幾何（直角双曲線の面積と横座標）に現れてきた。ヴィンセント（発見，端緒）にはじまり，メンゴリは区間縮小法によって対数の存在を実数上で確認する。また，メルセンヌは対数を無限級数で表し，双曲線のグラフの面積として与えられる対数を自然対数と命名する。そして，ニュートンは双曲線の面積を無限級数と積分を通して明確にした^{*28}。自然対数の方から，連続複利の形（ヤコブ・ベルヌーイ，1683 年）として，また，対数が 1 となる数 c （ヨハン・ベルヌーイ，1697 年）として，ネイピア数は出現してきている。

常用対数が簡便な計算方法としてネイピア対数を駆逐して，底・指数・対数・真数の関係を明確にしていった方向を「等比数列と等差数列の対応」の「抽象」としてみることができるだろう。他方，自然対数による双曲線の面積の把握は「等比数列と等差数列の対応」の「具体」化とみることができる。ネイピアの等比数列（初項 10^7 ）を小数表記（小数点の位置を 7 桁左に移動する）する際の式の変形は，2 つの「等比数列と等差数列の対応」，「底」と「ネイピア数」が結びつくことによって可能になったといえるだろう。

ネイピアの等比数列は

$$x = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

だった。ここで x を小数表記（小数点の位置を 7 桁左に移動する）すると

$$\frac{x}{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y.$$

次に y を小数表記すると

$$\frac{x}{10^7} = \left(\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \right)^{\frac{y}{10^7}}.$$

ここに「底」の形が出現する。いま簡単のために，

$$E := \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

とにおいて，これを対数で表記すると

$$\frac{y}{10^7} = \log_E \frac{x}{10^7}$$

となる。底

$$E = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

^{*28} [1] 6 章無限解析への序曲

は

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \left(1 + \frac{(-1)}{i}\right)^i = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

となり*29, ネイピア対数にネイピア数 e が隠れていたことがわかる.

参考文献

- [1] 志賀浩二, 『数の大航海』, 日本評論社, 1999
- [2] 山本義隆, 『小数と対数の発見』, 日本評論社, 2018

*29

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{i}\right)^i$$

ここで $h = \frac{-1}{i}$ とおくと,

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{-\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

自然対数の底とその逆数

矢野 忠^{*1}

The Base of Natural Logarithm and its Inverse

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

嶋さんの論文「ネイピア対数から指数関数へ」[1]の末尾に

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \left(1 + \frac{(-1)}{i}\right)^i = e^{-1} \quad (1.1)$$

と書かれているのを読んで引っかけってしまった．というのは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (1.2)$$

はもちろん知っていたが、これから

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.3)$$

をどう理解したらいいのかわからなかったからである．

2 自然対数の底の逆数

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad (2.1)$$

であるが、これと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (2.2)$$

とを結びつけて理解できなかった．

しかし、しばらく考えているうちに、 n が十分大きいときには二項展開を用いて

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \sim 1 - \frac{1}{n} \quad (2.3)$$

と考えられることに気がついた．

そうすれば、

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \sim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (2.4)$$

とできる．これで私の疑問は一応の解決をしたのだが、嶋さんの論文の脚注 29 にもあるように

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \quad (2.5)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

となる。もちろん、ここでは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x)} \quad (2.6)$$

という、どの微分積分学のテキストのはじめの方に書かれている定理を用いている。

3 指数関数

節のタイトルとして指数関数としたが、ここでは一般の指数関数 $y = a^x$ を意味していない。自然対数の底を底とする指数関数のつもりである。つまり $y = e^x$ を意味している。

この節で議論したいことは嶋さんの式の後半の部分

$$\left(1 + \frac{(-1)}{i}\right)^i = e^{-1} \quad (3.1)$$

の理解に関係している。志賀先生の書かれたところでは

$$\left(1 + \frac{(-1)}{i}\right)^i \sim \frac{1}{e} \quad (3.2)$$

は当然のことと思われる。これをどう考えたらいいのであろうか。

そこで『数学入門』下 [2] を取り出して読んでみた。ここには次のようなことが書かれている。

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ の二項展開をしてみれば、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} x^2 + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} x^3 + \cdots \end{aligned} \quad (3.3)$$

上の $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ の二項展開の式で、 $n \rightarrow \infty$ のときに

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right), \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right), \dots \quad (3.4)$$

はそれぞれ大きくなるが、それぞれは

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \rightarrow 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \rightarrow 1, \dots \quad (3.5)$$

と 1 に近づいていく。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (3.6)$$

となる。この無限級数は n が 0 または正の整数のときは収束半径が無限大で、収束することが知られていて、

$$e^x := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (3.7)$$

と表される。この式の右辺は自然対数の底 e を底とする指数関数 e^x のマクローリン展開である。

こう考えると

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (3.8)$$

と定義してよいことがわかる。

この式で $x = 1$ ととれば

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3.9)$$

であり, また $x = -1$ ととれば

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n \quad (3.10)$$

である.

志賀先生はこのことを重々承知されておられたから,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad (3.11)$$

と書かれていたのであろう*3.

とんだお粗末の一件であった.

4 おわりに

以上で, このエッセイを書いた目的の自然対数とその逆数の話は終わりであるが, 以前に私の書いたエッセイの PR をさせて頂きたい.

『数学入門』下で知った連続複利法による自然対数の底の定義については [3] で述べている. また双曲線関数 $\frac{1}{x}$ による自然対数の底の定義については [4] で述べている.

また, これはこのエッセイのテーマからは外れるが, もともと指数と対数とは同じものを異なった観点から見たものであることをすでに [5] に指摘しておいた. ただあわてて付言しておかなければならないのは対数関数は指数関数の逆関数であり, 指数関数と対数関数とは同じ関数ではないことである.

それはともかくとして, 「指数と対数とは同じものだ」という認識は昔から数学教育に関係した人々には明確な認識があったのだが, 私はそのことをきちんとは認識をしていなかった.

(2024. 6. 14)

参考文献

- [1] 嶋 喜一郎, 数学・物理通信 14 巻 4 号 (2024.6.) 10-20
- [2] 遠山 啓, 『数学入門』下 (岩波新書, 1960) 104-107
- [3] 矢野 忠, 自然対数の底, 数学・物理通信 8 巻 2 号 (2018.3.15) 11-15
- [4] 矢野 忠, 自然対数の底再論, 数学・物理通信 9 巻 7 号 (2019.9.29) 12-17
- [5] 矢野 忠, 指数と対数とは同じ?, 数学・物理通信 8 巻 3 号 (2018.3.26) 12-16

*3 こう書いたのだが, 志賀先生の本にはどうも $\left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1}$ は書かれていないようだ. これは著者の嶋さんの挿入した式らしい. それならそうと上に書いたようなことにちょっと言及してほしかった.

心柱モデル (1)

世戸 憲治 *

Model of Central Pillar (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

これまでに、「座屈現象のモデル」として、3編のものを書いてきた (『数学・物理通信』14 巻 1 号, 14 巻 2 号, 14 巻 3 号). 今回はこれをさらに発展させて, 前回のモデルに地震振動を組み込むとどうなるかを解析してみた. これはあくまでもモデルであって, 実際の建築物にそのまま適用はできないが, 数学的な理論としての意味は持つものと考えられる. ここではさらに, 東京スカイツリーや五重塔に組み込まれている《心柱》の役目を解明するための数学モデルについて解析してみる.

2 地震を考慮したモデル

2.1 方程式の導入

図 1 に示すように, 水平な地面の上に, 地上に出ている部分の長さが ℓ_0 の棒を鉛直に立てる. ただし, この棒は地面に埋め込まれていて, 地面に対し固定されているものとする. さらに, この棒の先端には長さ ℓ_1 の質量が無視できる棒が自由に回転できるように結び付けてあり, この棒の先には質量 m の錘が取り付けられている. さらに, この上に付けた棒が倒れないように, 下にある棒の根元と上に付けた棒の先端にある錘とをばね定数 k , 自然長 L のばねで結んでおく. ただしここでは, このばねの自然長 L はこれら 2 本の棒の合計の長さより大きいものとし, $L > \ell_0 + \ell_1$ とする. このとき, ばねは伸びようとして上の棒の先端に結び付けた錘を上向きに押し付けるので, ばねがある程度強ければ倒れることなく, たとえ, 錘が多少ぐらついても立ったままの状態を保つはずである. ただし, ここでは, ばねと棒はぶつかることなく立体的にすり抜けるものとする. ここまでは前回と同じ設定であるが, 今回は, 横振動の地震のために, この地面に埋めた棒が時刻 t に x 軸方向に動いた距離を $f(t)$ とする.

つぎに, この錘の運動方程式を立てなければならないが, その前に, この錘の座標を (x, y) とし, この座標と

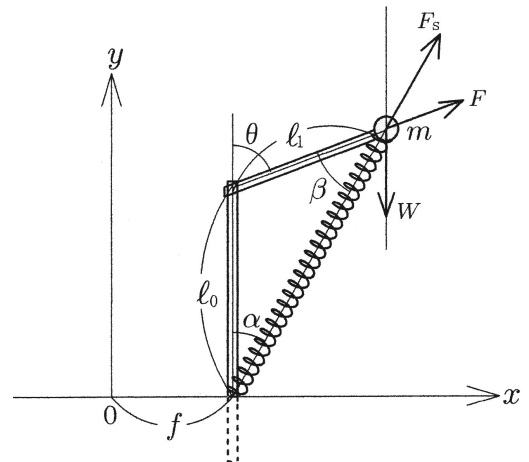


図 1 地震を考慮したモデル

* 北海学園大学名誉教授

上の棒が傾いた角度 θ との関係求めておくと、

$$x = f(t) + \ell_1 \sin \theta, \quad y = \ell_0 + \ell_1 \cos \theta \quad (2.1)$$

となる。ただしここでは、地震が始まる前の地中に埋め込んだ棒の根本を座標原点に取ることとする。

この錘は、ばねと棒の両方から力を受けるので、ばねから受ける力を F_S とすると¹⁾、

$$F_S = k \left[L - (\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta) \right] \quad (2.2)$$

となる。ここで、角度 α, β は、ばねが棒 ℓ_0, ℓ_1 と、それぞれ、なす角であり、 $\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta$ は、装着されたばねの長さである。図から分かるように、当然ながら、

$$\alpha + \beta = \theta \quad (2.3)$$

である。つぎに、錘の x, y それぞれの運動方程式を立てるが、以後、時間微分は、数式簡素化のため Newton 流のドットで表わすことにして、

$$m\ddot{x} = F_S \sin \alpha + F \sin \theta, \quad m\ddot{y} = F_S \cos \alpha + F \cos \theta - W \quad (2.4)$$

となる。ここに、 F は錘が長さ ℓ_1 の上の棒から受ける力、また、 W は重力で、重力加速度を g として、 $W = mg$ である。これら 2 式に (2.1) 式の x, y を代入すると、

$$\begin{aligned} m \left[\ddot{f} + \ell_1 (-\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2) \right] &= F_S \sin \alpha + F \sin \theta, \\ m \left[\ell_1 (-\cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2) \right] &= F_S \cos \alpha + F \cos \theta - W \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここで、錘が棒から受ける力 F は未知量なので、これを消去するため、第 1 式に $\cos \theta$ 、第 2 式に $\sin \theta$ を掛けて、辺々を引算すると、

$$m\ell_1 \ddot{\theta} = -m\ddot{f} \cos \theta - F_S \sin(\theta - \alpha) + W \sin \theta \quad (2.6)$$

という式になる。この右辺第 1 項は、地震による振動のために発生する慣性力 $-m\ddot{f}$ の θ 方向成分であり、また、右辺最後の項は、重力 W の同じく θ 方向成分である。

ここで、この右辺 2 項目に付いている $\sin(\theta - \alpha)$ については、(2.3) 式を用いると $= \sin \beta$ となるが、これを θ で表わす方法を考えてみる。そのため、ばねと 2 本の棒からなる三角形に正弦定理を用いると、

$$\frac{\sin \alpha}{\ell_1} = \frac{\sin \beta}{\ell_0} = \frac{\sin \theta}{\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta} \quad (2.7)$$

となる。これから $\sin \beta$ を求めると、

$$\sin \beta = \frac{\ell_0 \sin \theta}{\ell_0 \cos \alpha + \ell_1 \cos \beta} = \frac{\ell_0 \sin \theta}{\sqrt{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta}} \quad (2.8)$$

と求まる。この最後の項の分母は、ばねを装着したときの長さを余弦定理を用いて表わしたものである。これを (2.6) 式に代入すると、棒の傾き角 θ に関する非線形の微分方程式

$$m\ell_1 \ddot{\theta} = -m\ddot{f} \cos \theta - F_S \frac{\ell_0 \sin \theta}{\sqrt{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta}} + W \sin \theta, \quad F_S = k \left[L - \sqrt{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta} \right] \quad (2.9)$$

¹⁾ F_S の添え字 s は spring の s である。

が得られる。しかし、この θ に関する非線形の微分方程式を解析的に扱うのはあまりに難しすぎるので、ここでは θ の微小振動のみに限定して近似解を求めることにする。すなわち、

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1 \quad (2.10)$$

と置くことにして、(2.9) 式は

$$m\ell_1\ddot{\theta} + \left[\frac{\ell_0 F_S}{\ell_0 + \ell_1} - mg \right] \theta = -m\ddot{f}, \quad F_S = k[L - (\ell_0 + \ell_1)] \quad (2.11)$$

となる。このときばねの力 F_S もこの第2式のように定数の値で近似されるので、これは θ に関する非斉次線形微分方程式である。この方程式をより解きやすくするために、固有角振動数 ω を

$$\omega = \sqrt{\frac{\ell_0 F_S}{(\ell_0 + \ell_1)\ell_1 m} - \frac{g}{\ell_1}} \quad (2.12)$$

と定義しておくと、方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = -\frac{1}{\ell_1} \ddot{f} \quad (2.13)$$

と書き換えられる。

2.2 方程式の解法

この式を一般の地震振動 $f(t)$ に対し解くには Fourier 変換が必要になるが、ここでは簡単に、地震振動を単一の角振動数 ω_e で書けるものと仮定し²⁾、

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (2.14)$$

と置くことにする。ここに、 f_0 は長さの次元を持つ定数である。このとき方程式は、

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \quad (2.15)$$

となり、この一般解は、非斉次部分の特解と斉次部分の一般解の和となるので、 A, B を任意定数として、

$$\theta(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1 (\omega^2 - \omega_e^2)} \sin(\omega_e t) \quad (2.16)$$

と求まる。ここで、地震が起きた $t = 0$ のとき、錘は静止していたものとし、初期条件を、

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.17)$$

と設定し、これを (2.1), および、(2.14) 式を用いて、 θ の条件に書き直すと、

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = -\frac{f_0 \omega_e}{\ell_1} \quad (2.18)$$

となる。この条件に添うように (2.16) 式の中の定数 A, B を決めると、

$$A = -\frac{f_0 \omega \omega_e}{\ell_1 (\omega^2 - \omega_e^2)}, \quad B = 0 \quad (2.19)$$

²⁾ ω_e の添え字 e は earthquake の e である。

と決まり、このときの解 θ は

$$\theta(t) = \frac{f_0 \omega_e}{\ell_1 (\omega^2 - \omega_e^2)} \left[\omega_e \sin(\omega_e t) - \omega \sin(\omega t) \right] \quad (2.20)$$

と求められる．この式は、 $\omega = \omega_e$ のとき $0/0$ の形になるので、 $\omega \rightarrow \omega_e$ の極限をとると

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_e} \theta(t) = -\frac{f_0}{2\ell_1} \left[\sin(\omega_e t) + (\omega_e t) \cos(\omega_e t) \right] \quad (2.21)$$

と時間と共に発散する解、つまり、《共振 (resonance)》が起こってしまい、微小振動では済まなくなることを示す．

なお、このときは (2.12) 式で ω を定義したときの平方根の中身は正、すなわち、

$$F_S > \frac{\ell_0 + \ell_1}{\ell_0} mg \quad (2.22)$$

ということを仮定している．もしこれが逆符号になると、 ω は虚数になってしまうので、このときの解は $\sinh$, $\cosh$ の組み合わせになり、これは微小振動では済まなくなる．これがまさしく座屈現象 (buckling phenomenon) である．

3 心柱モデル

3.1 心柱とは

高層建築物の地震時における揺れを少なくするための装置として、《心柱》がある．その有名なものは、京都にある東寺の五重塔や東京スカイツリーに付いている心柱である．この装置は、東寺の五重塔でいうと、1階の床面から一番高い階の天井まで1本の心柱と言われるものが通っているが、この柱は途中の階の床や天井には固定されておらず、地震時に建物本体が揺れると、この心柱が本体の揺れとは、逆位相で揺れるので、建物全体の揺れが少なくなるというものである．なぜ、建物本体と心柱とが逆位相で揺れるのか、今回はこの心柱効果を原理的に理解するものとして、2つの振動系が絡み合ったときに、逆位相になって振動がやわらぐ例を解析してみる．前節で考慮した装置の錘の質量を m_1 とし、この錘にさらに質量が無視できる棒を自由に回転できるように取り付け、その先に質量 m_2 の錘を付ける．さらにこの先にもう一つの棒をこれも自由に回転できるように取り付け、この棒の先は初めの長さ ℓ_0 の棒の根本に、これも自由に回転できるように取り付ける．このモデルを心柱の構造物に当てはめると、地面に挿した長さ ℓ_0 の棒とその上に付けた長さ ℓ_1 の棒、および、質量 m_1 の錘が、心柱部分になり、この錘に後で取り付けた2本の棒と錘が、建物本体に相当することになる．

3.2 座標の取り方

以下このモデルの解析をするに当たり、計算を無用に煩雑化することを避けるため、この後で示す図2、あるいは、図3に示すように、初めの錘 m_1 に付ける棒の長さを、地中に挿した心柱の長さと同じ ℓ_0 とし、2番目に付けた錘に付ける棒の長さは心柱の上の方の棒の長さと同じ ℓ_1 と仮定して話を進める．この最初に付けた質量 m_1 、および、その先に付けた質量 m_2 の錘の座標を、それぞれ、 (x_1, y_1) および、 (x_2, y_2) とする．このうち、 (x_1, y_1) は、前節と同じく棒 ℓ_1 の傾き角を θ とし、地震による x 軸方向の変位を $f(t)$ としたとき、(2.1) 式と同じく、

$$x_1 = f(t) + \ell_1 \sin \theta, \quad y_1 = \ell_0 + \ell_1 \cos \theta \quad (3.1)$$

となる．また，錘 m_2 の座標 (x_2, y_2) は，錘 m_1 からの距離が ℓ_0 ，地面に挿した棒の根本からの距離が ℓ_1 という条件

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_0^2, \quad (x_2 - f)^2 + y_2^2 = \ell_1^2 \quad (3.2)$$

から決まる．このときは 2 個の円の交点になるので，一般には，2 個の点が求められる．この解き方について詳しくは述べないが，これら 2 式の差をとると， $(x_2 - f)$, y_2 に関する 1 次式ができるので，これから y_2 を $(x_2 - f)$ の式として，

$$y_2 = \frac{1}{y_1} \left[\ell_1(\ell_1 + \ell_0 \cos \theta) - (x_1 - f)(x_2 - f) \right] \quad (3.3)$$

と表わしておき，これを (3.2) の第 2 式に代入すると， $(x_2 - f)$ だけの 2 次方程式になるのでそれを解くとよい．結果は，

$$x_2^{(\pm)} = f(t) + \frac{\ell_1 \sin \theta}{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta} \left[\ell_1(\ell_1 + \ell_0 \cos \theta) \pm \ell_0(\ell_0 + \ell_1 \cos \theta) \right] \quad (3.4)$$

と 2 個の解が求まるが，これから，これらの座標は，

$$\begin{aligned} x_2^{(+)} &= f(t) + \ell_1 \sin \theta, & y_2^{(+)} &= \ell_1 \cos \theta \\ x_2^{(-)} &= f(t) - \frac{\ell_0^2 - \ell_1^2}{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta} \ell_1 \sin \theta, & y_2^{(-)} &= \frac{(\ell_0^2 + \ell_1^2) \cos \theta + 2\ell_0 \ell_1}{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0 \ell_1 \cos \theta} \ell_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

と， θ の関数として求められる．この後，錘 m_1 , m_2 の運動方程式を立てて解くことになるが，このような三角関数が複雑に入り込んだ方程式は解析的には扱えなくなるので， θ は微小量として，前節の近似式 (2.10) を用いると，これらの座標は，

$$\begin{aligned} x_1 &= f(t) + \ell_1 \theta, & y_1 &= \ell_0 + \ell_1, & x_2^{(+)} &= f(t) + \ell_1 \theta, & y_2^{(+)} &= \ell_1 \\ x_2^{(-)} &= f(t) - \varepsilon \ell_1 \theta, & y_2^{(-)} &= \ell_1, & \varepsilon &= \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0 + \ell_1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

と近似される．ここに， ε はこの最後の式で定義するが，その範囲は， $|\varepsilon| < 1$ である．

3.3 $x_2^{(+)}$, $y_2^{(+)}$ の場合の運動方程式とその解

この小節では， x_2, y_2 の解のうち， $x_2^{(+)}$, $y_2^{(+)}$ の方を考察する．このときは図 2 に示すように，4 本の棒は並行四辺形になる．なお，この小節に限って， x_2, y_2 に付ける上付きの (+) を省略して書くことにする．

このときの運動方程式は前節で導いた方程式 (2.4) のほんのわずかの拡張ですむ．初めに，錘 m_1 の方は，

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_S \sin \alpha + F_1 \sin \theta, \\ m_1 \ddot{y}_1 &= F_S \cos \alpha + F_1 \cos \theta - F_2 - W_1, \\ W_1 &= m_1 g \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる．ここで， F_1, F_2 は，それぞれ，長さ ℓ_1 の上の棒，長さ ℓ_0 の右側の棒から受ける力である．

また，錘 m_2 の運動方程式は，

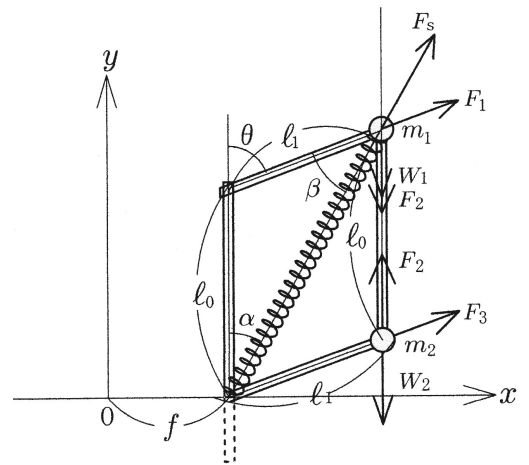


図 2 $x_2^{(+)}$, $y_2^{(+)}$ を採用したとき

$$m_2\ddot{x}_2 = F_3 \sin \theta, \quad m_2\ddot{y}_2 = F_2 + F_3 \cos \theta - W_2, \quad W_2 = m_2g \quad (3.8)$$

となる．以下，前節同様，微小振動に限定した解析をすることにして， θ に対し (2.10) 式， α に対しては後で述べる (3.10) 式，さらに， x_1, y_1, x_2, y_2 に対し (3.6) 式を用いることにすると，これら方程式は，

$$\begin{aligned} m_1\ell_1\ddot{\theta} &= -m_1\ddot{f} + F_S\lambda\theta + F_1\theta, & 0 &= F_S + F_1 - F_2 - W_1, & \lambda &= \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1} \\ m_2\ell_1\ddot{\theta} &= -m_2\ddot{f} + F_3\theta, & 0 &= F_2 + F_3 - W_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

と近似される．ここで，微小振動のときの y_1, y_2 は定数になるので，時間微分がゼロになることに注意する．同じく，微小振動のとき， θ, α, β を微小として (2.7) 式から導かれるこれら変数間の関係式

$$\alpha = \lambda\theta, \quad \lambda = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1}, \quad \beta = \frac{\ell_0}{\ell_0 + \ell_1}\theta = (1 - \lambda)\theta \quad (3.10)$$

を用いた．ここで α の式の右辺に付く係数を λ と定義した．また， β の方は，ここでは使用しないが，後の使用のために書いておいた．なお，(3.6) 式の最後で定義した ε と，ここで定義した λ の間には $2\lambda + \varepsilon = 1$ という関係が成り立つことを注意しておく．

この (3.9) 式の 4 本の式から 3 個の未知数 F_1, F_2, F_3 を消去すると，未知変数 θ だけを含む微分方程式が得られる．その結果は，

$$(m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\theta} + \left[(1 - \lambda)F_S - (m_1 + m_2)g \right] \theta = -(m_1 + m_2)\ddot{f} \quad (3.11)$$

となる．実は，この式と前節の (2.11) 式と比べてみると，錘の質量 m が，ここでは 2 個の錘の質量 $m_1 + m_2$ に変わっただけで，あとはまったく同じ形になっていることが分かる．ちなみに，ばねの力 F_S に付く係数は，前節では $\ell_0/(\ell_0 + \ell_1)$ になっていたが，ここでは $1 - \lambda = \ell_0/(\ell_0 + \ell_1)$ となって，これは同じものである．したがって，ここでは (2.12) 式に替わって，固有角振動数 ω を

$$\omega = \sqrt{\frac{(1 - \lambda)F_S}{(m_1 + m_2)\ell_1} - \frac{g}{\ell_1}} \quad (3.12)$$

と定義すると，前節の (2.13) 式とまったく同じ方程式

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{1}{\ell_1}\ddot{f} \quad (3.13)$$

になってしまう．したがって，以下の議論は前節の「2.2 方程式の解法」とまったく同じになり，固有角振動数 ω と地震の振動数 ω_e が一致するときは，共振が起ってしまうことも同じである．これでは，わざわざ，心柱構造にした意味がなくなる．

3.4 $x_2^{(-)}, y_2^{(-)}$ の場合の運動方程式とその解

錘 m_2 の座標 (x_2, y_2) のもう一つの解である $(x_2^{(-)}, y_2^{(-)})$ の方の解析をしてみよう．このときの座標 $(x_2^{(-)}, y_2^{(-)})$ は，この右に示す図 3 の点線で示した前小節の座標 $(x_2^{(+)}, y_2^{(+)})$ を，ばねが存在する直線に関し線対称に移した位置になる．以下では座標の上付き添え字 $(-)$ は省略して単に (x_2, y_2) と記すことにする．

図3を参照しながらこのときの運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_S \sin \alpha + F_1 \sin \theta - F_2 \sin(2\alpha), \\ m_1 \ddot{y}_1 &= F_S \cos \alpha + F_1 \cos \theta - F_2 \cos(2\alpha) - W_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_2 \sin(2\alpha) - F_3 \sin(\beta - \alpha), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= F_2 \cos(2\alpha) + F_3 \cos(\beta - \alpha) - W_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる．ここで、力 F_S, F_1, F_2, F_3 は前小節と同じであるが、 F_2, F_3 に関しては作用する角度が変わることに注意する．この式に微小振動を仮定して、(3.6) 式、および、 α, β については、(3.10) 式を適用すると、

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1 \ddot{\theta} &= -m_1 \ddot{f} + \lambda F_S \theta + F_1 \theta - 2\lambda F_2 \theta, & 0 &= F_S + F_1 - F_2 - W_1 \\ -\varepsilon m_2 \ell_1 \ddot{\theta} &= -m_2 \ddot{f} + 2\lambda F_2 \theta - \varepsilon F_3 \theta, & 0 &= F_2 + F_3 - W_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる．ここで、 $\beta - \alpha = (1 - 2\lambda)\theta = \varepsilon \theta$ となることを用いた．この4本の式から未知変数の F_1, F_2, F_3 を消去すると、 θ が満たすべき方程式

$$(m_1 + \varepsilon^2 m_2) \ell_1 \ddot{\theta} + [(1 - \lambda)F_S - (m_1 + \varepsilon^2 m_2)g] \theta = -(m_1 - \varepsilon m_2) \ddot{f} \quad (3.16)$$

を得る．これは前小節の $x_2^{(+)}, y_2^{(+)}$ で求めた方程式 (3.11) と比べると、左辺に入っていた $m_1 + m_2$ が $m_1 + \varepsilon^2 m_2$ に変わって、右辺の $\ddot{f}$ に付く係数が $m_1 + m_2$ から $m_1 - \varepsilon m_2$ に変わったことである．ここで、方程式簡素化のため定数の置き換えを

$$\mu = \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + \varepsilon^2 m_2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{(1 - \lambda)F_S}{(m_1 + \varepsilon^2 m_2)\ell_1} - \frac{g}{\ell_1}} \quad (3.17)$$

とし、地震の振動を単振動として、(2.14) 式と同じ

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (3.18)$$

とする．これで方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \frac{\mu f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \quad (3.19)$$

となる．これは前節の (2.15) 式と似てはいるが、右辺に係数 μ が付く分だけ違っている．しかも、この μ の値は正にも負にもなりえ、もちろん、ゼロにもなることである．

この方程式の一般解は、 A, B を任意定数として

$$\theta(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{\mu f_0 \omega_e^2}{(\omega^2 - \omega_e^2)\ell_1} \sin(\omega_e t) \quad (3.20)$$

と簡単に求められる．この $\theta(t)$ と (3.18) の $f(t)$ を (3.6) の x_1 の式に代入すると、

$$x_1(t) = f_0 \sin(\omega_e t) + \ell_1 \left[A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \right] + \frac{\mu f_0 \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \quad (3.21)$$

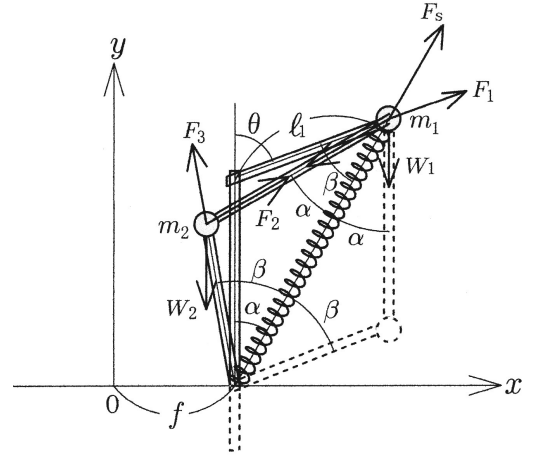


図3 $x_2^{(-)}, y_2^{(-)}$ を採用したとき

となり、この未定定数 A, B は初期条件で決められる。ここでは、錘 m_1 は初め完全に静止していたものとして、

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad (3.22)$$

と条件を付けると、

$$A = -f_0 \frac{\omega_e [\omega^2 - \omega_e^2 + \mu \omega_e^2]}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)\ell_1}, \quad B = 0 \quad (3.23)$$

と決まるので、 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = -\frac{f_0}{\ell_1} \frac{\omega_e}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega t) - \mu \omega_e [\omega \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega t)] \right] \quad (3.24)$$

となる。これを (3.6) 式に代入して、2 個の錘の x 座標 $x_1(t), x_2(t)$ が、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_0 \sin(\omega_e t) - f_0 \frac{\omega_e}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega t) - \mu \omega_e [\omega \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega t)] \right] \\ &= f_0 \frac{\omega^2 - \omega_e^2 + \mu \omega_e^2}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} [\omega \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$x_2(t) = f_0 \sin(\omega_e t) + f_0 \frac{\varepsilon \omega_e}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega t) - \mu \omega_e [\omega \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega t)] \right]$$

と求まったことになる。ここで注意すべきことは、これら 2 個の錘の振動について、地震振動による変位 $f_0 \sin(\omega_e t)$ を取り除いた動く地上から見た変位 $x_1 - f_0 \sin(\omega_e t), x_2 - f_0 \sin(\omega_e t)$ は、 x_2 の方に ε が付くが、この値が正のときは、お互いに逆符号になっている。これが心柱の 1 つの効果で、心柱と建物本体が逆位相で振動するため地震動を和らげることになる。

さらに、(3.17) 式で定義される μ の値は、4 本の棒の長さで決まる ε と、2 個の錘の質量 m_1, m_2 で決まり、正にも負にもゼロにもなりえる量である。もしこの値 μ がゼロのときは、係数の分母分子で $\omega^2 - \omega_e^2$ が消えてしまい

$$x_1(t) = f_0 \left[\sin(\omega_e t) - \frac{\omega_e}{\omega} \sin(\omega t) \right], \quad x_2(t) = f_0 \left[\sin(\omega_e t) + \frac{\varepsilon \omega_e}{\omega} \sin(\omega t) \right] \quad (3.26)$$

となるので、共振そのものが起こらなくなる。これぞ正しく心柱効果であろう。なお、この $\mu = 0$ という条件は (3.17) 式から、 $m_1 = \varepsilon m_2$ となり、これは地震の振動数 ω_e の値に関係なく、初めに設定した力学系で決まる条件であるということが重要である。

また、(3.25) x_1 の第 2 式で、 $\mu = 1 - (\omega^2/\omega_e^2)$ のとき、係数の分子がゼロになるので振動そのものが起こらなくなる。しかし、実際の地震動ではいろいろな振動数 ω_e が混ざっているため、これら振動数の重ね合わせになるので、特定の振動数だけ消えても効果は薄いものと思われる。

もう 1 つ注意しておくことは、(3.25) 式から、錘 m_1, m_2 の初速度を求めると、

$$\dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = (1 + \varepsilon) f_0 \omega_e \quad (3.27)$$

となって、この錘 m_1 の方は、初期設定で初速度をゼロとしたので当然ゼロであるが、錘 m_2 の初速度は、 ε の範囲 $|\varepsilon| < 1$ から、ゼロにはならない正の値を持つてしまう。

4 おわりに

今回のものを書き終えるにあたって、気になる未解決問題が3つ残ってしまったので、先にこのことについて述べておく。

その1つ目は、初めの錘 m_1 の位置 (x_1, y_1) を決めてから、2個目の錘 m_2 の位置を決めるときに、必然的に2個の位置 $(x_2^{(+)}, y_2^{(+)})$ と $(x_2^{(-)}, y_2^{(-)})$ が決まってしまうことである。このうち、 $(x_2^{(+)}, y_2^{(+)})$ の方は、まったく心柱効果がなく、効果があるのは $(x_2^{(-)}, y_2^{(-)})$ の方である。しかし、この2つの可能性がある位置のどちらを選ぶかという基準がまったく見えてこないことである。今回のモデルをもう少し改良して、 $(x_2^{(-)}, y_2^{(-)})$ の方だけ選択できるとよいのだが、現段階ではまだこの先が見えてこない。

2つ目は、初期条件の設定の仕方に任意性があることである。初めは、2個の錘が両方とも完全に静止していたとして、これら2個の x 座標に関し、 $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$ としようと考えたが、地震の振動を $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ としたとき、 $x_2^{(-)}$ の方は (3.27) 式で示したように、ゼロではない初速度を持ってしまう。これは地震の振動の方が $f_0 \omega_e$ という初速度を持ってしまうため、この一つの解決法として、地震の振動も初速度がゼロになるように、例えば、 $f(t) = f_0 \tanh(kt) \sin(\omega_e t)$ あるいは、 $f(t) = f_0(1 - e^{-kt}) \sin(\omega_e t)$ 、 $k > 0$ と変えてしまう方法が考えられる。計算は面倒になるが、それで良いのかどうか、これについても思案中である。

3番目にという訳でもないが、今回の反省点として思うことは、錘が2個あるのに、固有振動数が (3.17) 式で定義する1個の ω しか存在しないことである。これは2個の錘を4本の棒でつないだために、拘束が強すぎて自由度が減ってしまったことによる。この棒の本数を1つ減らして3本にし、棒の替わりにばねにしたときは、どうなるであろうか。どこの棒をばねにするかで問題は違ってくるが、そのときは固有振動数が2個になるであろう。このときは、はたして、共振を起こらなくできるであろうか。これについては、次回以降の問題として残しておく。

話し変わって、何年か前に、京都の東寺を参拝したことがあり、そのとき五重塔の内部に入り、ここで議論した心柱を見学したことがある。しかしそのときは、何のためにこんな太い柱があるのか理解できずに、あまり関心も持たずに通り過ぎてしまった。いまになって、もっと良く見ておくべきだったと後悔している。この東寺について調べたことを簡単に述べておく。この寺は平安時代初期の796年に建立され、その後、823年に弘法大師空海によって、真言密教の根本道場、かつ、総本山として栄えた。ただし建物そのものは、落雷や戦火によって4度にわたり焼失し、現在の5代目の建物は江戸時代の1644年に作られたものである。この五重塔は高さが55メートルあり、木造建築物としては日本一の高さということである。この建物には、各階の4隅に3本ずつ計12本の側柱が立っていて、さらに、この内側に4本の四天柱と言われる柱が立っている。これら合計16本の柱は各階ごとに床と天井に固定されているので、その総本数は5層分で、 $16 \times 5 = 80$ 本となる。これに加え建物の中心を1階の床から5階の天井までを貫く心柱が立っているが、この心柱は途中の階の床や天井には固定されていない。なぜこのような構造になっているのか不思議であるが、これはおそらく心柱が建物本体を吊るすように作られているのであろう。この結果として、地震が起きたとき、心柱の振動と建物本体の振動が逆位相になり、全体の振動が和らげられるものと考えられる。

ここではこの効果を、4本の棒、1本のばねと2個の錘で作られる力学モデルという初歩的、かつ、原理的モデルになぞらえて解析してみた。この心柱が千年以上も前に建てられた五重塔に装着されたのは、心柱効果のこ

とを本当に正しく理解していたのか、不思議に思えてきた。そこで良く調べてみたところ、心柱が作られた理由は、地震振動の制御とは関係なく、真相はまったく別の所にあった。すなわち、木材で高い建築物を建てたとき、年数がたつと乾燥のため木材が収縮し、一様に収縮するのなら良いのだが、実際は不均等に収縮するために建物が傾いてしまうのを防ぐというのが、本来の目的であつたらしい。それが、偶然にも地震振動の制御にも役にたったということである。実際、日本には千年以上前からたくさんの五重塔が作られてきたが、これまでに地震で倒壊した例は一つもないということである。

.

編集後記

読者の皆さん、こんにちは。最近、新聞やテレビを見ていて、カタカナ言葉の多いことに驚いています。先日も新聞に「コンプライアンス」というのが出ていて、英和辞書で調べようとしたが、綴りが分からないため、ようやく compliance 「追従、へつらい」というのを見つけた。そんなに英語を使いたいならカナ文字など使わずに英語の綴りそのもので書いてくれと言いたくなる。「インボイス」というのもその類で、はじめはこれを in voice と思い「声に出して言うこと」と思っていたらまったく別物で、invoice とは「適格請求書」のこととある。これは、本当は消費税がかからないのに、いかにも消費税がかかるかのごとくに請求してくるのを防ぐためのものらしい。「エスデージェーズ」というのも最近よく聞く言葉である。これを SDGs と英語そのもので書いてくれるのならまだしも、これも良くは分からない言葉である。何度か聞いているうちに漠然と意味は分かってきたが、よく調べてみると、Sustainable Development Goals 「持続可能な開発目標」の略語ということであった。日本には日本語があるのだから、こんな英語の省略語を使わないで日本語で言ってくれと言いたくなる。そのほか、「セクハラ、パワハラ、カスハラ、コスパ、フラゲ、PTSD、GPTA、LGBT、SNS」など数え上げるときりがない。そのうち、私のような旧人類はいまどきの Z 世代の人間とは会話ができなくなるのではと、心配になってくる。またまた、無駄話が長くなってしまいました。

話し変わって、今号は、私（世戸）のもの 1 編を含め全部で 4 編の論文が載ることになりました。最初は編集長矢野忠さんの「Levi-Civita の記号の縮約」再論 1 で、これは 4 個の添え字を持つ Levi-Civita 記号の縮約の計算方式を丁寧に展開したものです。Levi-Civita の記号というと、添え字が 3 個のものが普通ですが、これが 4 個になると急激に計算が煩雑になり、こんな長い計算をよくやるなど、感心しながら眺めていました。通常、行列や行列式というと、縦横、つまり 2 次元的に数字が並んだものを言いますが、これが、縦横高さと 3 次元的に数字が並んだ行列というものがあっても良いのではと、ときどき考えていました。そうすればこの矢野さんが書いたものも、よりコンパクトな形で表わせるのではと思ってしまうのですが、しかし、3 次元的に並んだ行列を紙の上で、どう書き表すかが問題になってしまいます。

つぎの嶋喜一郎さんの「ネイピア対数から指数関数へ」は、ネイピアが、等比数列と等差数列の関係式を議論するなかで、対数関数や指数関数をどのように導出したかという話です。これは、初めから対数関数、指数関数を知っている現代人から見ると、かえって面倒なことをいまさらと思ってしまうのですが、歴史的意味はあるのだと思います。この等比数列と等差数列の関係で思い出すのは、昔々、私の父がヘンミ計算尺というものを使っていたことです。これは、対数目盛りが付いた 2 つの尺をずらし合わせることで、和を積に変えたり、あるいは、差を商に変えたりして、近似値を求めるものです。しかし、この計算尺というものは、電卓がこれだけ普及したいまとなっては、ほとんど見かけることもなくなったので、いまどきの若い人はその存在さえ知らないと思います。

つぎの矢野さんの「自然対数の底とその逆数」は、嶋さんが書いた物に対する補足です。

最後の私が書いた「心柱モデル」は、五重塔などに装備されている心柱をモデル化して、地震時の振動方程式を解こうとしたものです。東京スカイツリーは、高さが 634 m もあるのに、パリのエッフェル塔や東京タワーのように裾広がりにならずに、全体がほっそりした塔になっています。皆さんは、あんなに細くてよく地震や台風で倒れないものかと、心配になりませんか。それは東京スカイツリーにも心柱が装備されているからです。これを、できるだけ単純化したモデルで解明しようと考えているが、この先どうなることやら。

（世戸憲治）