

数学・物理通信

14 卷 5 号 2024 年 9 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2024 年 9 月 25 日

目次 (Contents)

1. 心柱モデル (2)	世戸憲治	3
2. $\chi^2 = -1$ の解の数	矢野 忠	14
3. 計算の順序	矢野 忠	19
4. 坂田模型管見	米澤 穰	24
5. 曾我見郁夫さんを偲ぶ	矢野 忠	26
6. 編集後記	世戸憲治	28

1. Model of Central Pillar (2)	Kenji SETO	3
2. Number of Solutions for $\chi^2 = -1$	Tadashi YANO	14
3. Order of Calculation	Tadashi YANO	19
4. My Point of View on Sakata Model	Minoru YONEZAWA	24
5. Memory of Prof. Ikuo SOGAMI	Tadashi YANO	26
6. Editorial Comments	Kenji SETO	28

心柱モデル (2)

世戸 憲治 *

Model of Central Pillar (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「心柱モデル (1)」(『数学・物理通信』14 巻 4 号) では、東京スカイツリーや五重塔に組み込まれている《心柱》を理解するための原理的なモデルを設定し、力学的に解析することで、その効果を確認してきた。そこで設定したモデルは、4 本の棒と 2 個の錘、それに 1 本のばねを組み合わせたもので、地震振動に建物が共振しなくなるための条件を求めることに成功した。しかし、そこでの解析には欠点もあって、錘を 2 個付けたにもかかわらず固有振動数は 1 個しか求まらず、また、2 個の錘の初期条件を設定するとき、地震が起こる前は 2 個とも完全静止という条件にすべきであったが、拘束条件が強すぎるためか、どちらか一方の錘しか、完全静止にできなかった。

今回は、この欠点を改良することを目的として、前回の 4 本の棒のうち 1 本を、棒からばねに入れ替えたモデルを解析してみた、これで初期条件設定時の矛盾は解消できるが、地震振動と建物振動が共振しなくなるための条件は前のものよりも厳しいものになってしまった。

2 モデルの設定とその力学的解析

2.1 方程式の導入

図 1 に示すよう最初に、1 本の棒を地面に対し垂直に立つように埋め込み、この地上に出ている部分の長さを ℓ_0 とする。つぎにこの棒の先に長さ ℓ_1 の棒を自由に回転できるように取り付け、この先には質量 m_1 の錘を付ける。さらにこの先に長さ ℓ_2 の棒をこれも自由に回転できるように取り付け、この先には質量 m_2 の錘を取り付ける。前回の論文では、この 3 番目に付けた棒の長さを地面に埋め込んだ棒の長さと同じとしていたが、今回は、この最後の棒の長さ ℓ_2 は自由に変化できるようにしておく。

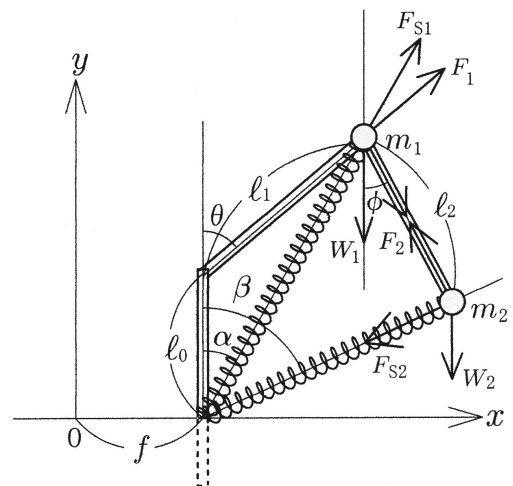


図 1 今回、考慮した心柱モデル

* 北海学園大学名誉教授

つぎに2本のばね S_1, S_2 を用意し、これらそれぞれのばねの一端は、両方とも地面に挿しこんだ棒の根本に繋ぎ、それぞれの他端は、 S_1 については錘 m_1 に、また S_2 については錘 m_2 と接続するものとする。ただし、ばね S_1 の自然長は $\ell_0 + \ell_1$ よりも大きく、錘 m_1 を上に押し上げるように作用し、他方、ばね S_2 の自然長は $\ell_0 + \ell_1 - \ell_2$ よりも小さく、錘 m_2 を下方向に引くように作用するものとする。つまり、この棒 ℓ_2 と錘 m_2 は、錘 m_1 にぶら下った振子の形となる。この振動系のうち、地面に挿しこんだ棒 ℓ_0 、これに繋いだ棒 ℓ_1 、錘 m_1 とばね S_1 が心柱に相当し、さらにこれに接続した棒 ℓ_2 、錘 m_2 とばね S_2 が建物本体に相当する。

以下、運動方程式を立てるにあたって、錘 m_1, m_2 の座標を、それぞれ、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。ただし、 x 軸は水平右向き、 y 軸は鉛直上方にとるものとする。さらに、水平方向の地震動によって、地面そのものが、元の位置から時刻 t に x 軸方向に動いた距離を $f(t)$ とする。また、このとき上の棒 ℓ_1 が鉛直軸から右方向に傾いた角度を θ 、下に付けた棒 ℓ_2 が同じく右方向に傾いた角度を ϕ とする。このとき、錘 m_1, m_2 の座標を、それぞれ、棒の長さ ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 と傾き角 θ, ϕ で表わすと

$$x_1 = f(t) + \ell_1 \sin \theta, \quad y_1 = \ell_0 + \ell_1 \cos \theta, \quad x_2 = x_1 + \ell_2 \sin \phi, \quad y_2 = y_1 - \ell_2 \cos \phi \quad (2.1)$$

となる。さらに、上に付けた棒 ℓ_1 が錘 m_1 に作用する力を F_1 、下に付けた棒 ℓ_2 が錘 m_1, m_2 に作用する力を F_2 とし、また、ばね S_1 が錘 m_1 に作用する力を F_{S1} とし、ばね S_2 が錘 m_2 に作用する力を F_{S2} とする。さらに、図1に示すように、2本のばね S_1, S_2 が鉛直線から傾いた角度を、それぞれ、 α, β とする。また、重力加速度を g とする。以上の設定の下に2個の錘の運動方程式を作ると、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_1 \sin \theta + F_2 \sin \phi + F_{S1} \sin \alpha, & m_1 \ddot{y}_1 &= F_1 \cos \theta - F_2 \cos \phi + F_{S1} \cos \alpha - m_1 g \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -F_2 \sin \phi - F_{S2} \sin \beta, & m_2 \ddot{y}_2 &= F_2 \cos \phi - F_{S2} \cos \beta - m_2 g \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。ここで用いた角度 α, β は角度 θ, ϕ に従属で、これらの値から決めることができる。そのためには、地中に埋めた棒 ℓ_0 、上に付けた棒 ℓ_1 と、ばね S_1 でできる三角形、および、2本のばね S_1, S_2 と下に付けた棒 ℓ_2 でできる三角形、それぞれに、三角関数の正弦定理を適用すると、

$$\frac{\sin \alpha}{\ell_1} = \frac{\sin \theta}{S_1}, \quad \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\ell_2} = \frac{\sin(\alpha + \phi)}{S_2} \quad (2.3)$$

となる。ここで、 S_1, S_2 は、それぞれのばねが装着されたときの長さを表わすものとする。

以上で解くべき方程式は出来上がったが、このまま解析的に解くにはあまりに難しすぎるので、ここでは微小振動に限定することにして、 θ, ϕ は小さいものとして近似式

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1, \quad \sin \phi \cong \phi, \quad \cos \phi \cong 1 \quad (2.4)$$

を用いることにする。これら θ, ϕ を微小量とすると、必然的に α, β も微小量となるので、これらと同様の近似式を用いることにする。この近似を用いて (2.1), (2.3) 式を書き直すと、

$$x_1 = f(t) + \ell_1 \theta, \quad y_1 = \ell_0 + \ell_1, \quad x_2 = x_1 + \ell_2 \phi = f(t) + \ell_1 \theta + \ell_2 \phi, \quad y_2 = y_1 - \ell_2 = \ell_0 + \ell_1 - \ell_2 \quad (2.5)$$

および、

$$\frac{\alpha}{\ell_1} = \frac{\theta}{\ell_0 + \ell_1}, \quad \frac{\beta - \alpha}{\ell_2} = \frac{\alpha + \phi}{\ell_0 + \ell_1 - \ell_2} \quad (2.6)$$

となる．ここで，(2.3) 式から (2.6) 式に移るとき， $S_1 \cong \ell_0 + \ell_1$ ， $S_2 \cong \ell_0 + \ell_1 - \ell_2$ と近似されることを用いた．さらに，この (2.6) 式から α ， β を θ ， ϕ を用いて，

$$\alpha = \lambda_0 \theta, \quad \beta = \lambda_1 \theta + \lambda_2 \phi, \quad \lambda_0 = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1 - \ell_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\ell_2}{\ell_0 + \ell_1 - \ell_2} \quad (2.7)$$

と求められる．ここで，あとの式の簡素化のため， α ， β の式の右辺の係数を，それぞれ λ_0 ， λ_1 ， λ_2 と定義した．以上の近似式 (2.4)，(2.5)，(2.7) を方程式 (2.2) に代入すると，

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1 \ddot{\theta} &= -m_1 \ddot{f} + (F_1 + \lambda_0 F_{S1}) \theta + F_2 \phi, & 0 &= F_1 - F_2 + F_{S1} - m_1 g \\ m_2 (\ell_1 \ddot{\theta} + \ell_2 \ddot{\phi}) &= -m_2 \ddot{f} - (F_2 + \lambda_2 F_{S2}) \phi - \lambda_1 F_{S2} \theta, & 0 &= F_2 - F_{S2} - m_2 g \end{aligned} \quad (2.8)$$

という 4 本の式を得る．これらの式で右辺に付く $-m_1 \ddot{f}$ ， $-m_2 \ddot{f}$ は地震動による慣性力である．ここで，「 $0 =$ 」で始まる 2 本の式から未知量の F_1 ， F_2 を

$$F_1 = F_{S2} - F_{S1} + (m_1 + m_2)g, \quad F_2 = F_{S2} + m_2 g \quad (2.9)$$

と求め，残る 2 本の式に代入すると，

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1 \ddot{\theta} &= -m_1 \ddot{f} - \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - F_{S2} - (m_1 + m_2)g \right] \theta + (F_{S2} + m_2 g) \phi, \\ m_2 (\ell_1 \ddot{\theta} + \ell_2 \ddot{\phi}) &= -m_2 \ddot{f} - \left[(1 + \lambda_2) F_{S2} + m_2 g \right] \phi - \lambda_1 F_{S2} \theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

という式になる．この 2 本の式が θ ， ϕ を求めるための連立微分方程式である．なおここで，採用した近似法では，2 本のばねの長さは一定値になるので，それらが錘を押す力 F_{S1} ， F_{S2} も一定値になることに注意する．ただし，このままでは，2 番目の式に θ と ϕ の 2 階微分が両方入っているので形が悪い．これを修正するために，第 1 式を $m_1 \ell_1$ で割り，第 2 式を $m_2 \ell_1$ で割ってから，辺々を引き算すると，方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta - \tau_1^2 \phi = -\frac{1}{\ell_1} \ddot{f}, \quad \ddot{\phi} + \omega_2^2 \phi - \tau_2^2 \theta = 0 \quad (2.11)$$

と変形される．ここに，時間の逆 2 乗の次元を持つ 4 個の定数 ω_1^2 ， τ_1^2 ， ω_2^2 ， τ_2^2 を

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{m_1 \ell_1} \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - F_{S2} - (m_1 + m_2)g \right], & \tau_1^2 &= \frac{1}{m_1 \ell_1} \left[F_{S2} + m_2 g \right] \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{m_1 \ell_2} \left[F_{S2} + (m_1 + m_2)g \right] + \frac{1}{m_2 \ell_2} (1 + \lambda_2) F_{S2}, & \tau_2^2 &= \frac{\ell_1}{\ell_2} \omega_1^2 - \frac{1}{m_2 \ell_2} \lambda_1 F_{S2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

と定義する．ただし後で説明するように，初めに力学系を作る段階で，これら定数がすべて正の量になるように設計されていないといけない．

この方程式 (2.11) を解く段階では，地震による地面の動きである $f(t)$ を与えなければならない．実際の地震動ではたくさんの振動数の波が混じっているはずであるが，ここでは，解析的に解くことでどのような特徴があるのかを試行するのが目的なので，地震振動を角振動数 ω_e の単振動と仮定することにして，

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (2.13)$$

と置くことにする．このときの方程式 (2.11) を行列形式で

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega_1^2 & -\tau_1^2 \\ -\tau_2^2 & d^2/dt^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega_e t) \quad (2.14)$$

と書いておく．

2.2 方程式の解法

先に方程式 (2.14) の特解を求めておこう．そのため， θ , ϕ が f_0/ℓ_1 に比例することは，初めから分かるので，

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} E_1 \sin(\omega_e t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} E_2 \sin(\omega_e t) \quad (2.15)$$

と置いて代入すると，

$$\begin{pmatrix} -\omega_e^2 + \omega_1^2 & -\tau_1^2 \\ -\tau_2^2 & -\omega_e^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \omega_e^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

と代数方程式になる．この方程式を解くにあたって，いったん，係数行列において ω_e^2 を ω^2 と置き換えたときの係数行列の行列式の値を

$$\begin{aligned} D(\omega^2) &= \begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\tau_1^2 \\ -\tau_2^2 & -\omega^2 + \omega_2^2 \end{vmatrix} = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \tau_1^2 \tau_2^2 \\ &= \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 - \tau_1^2 \tau_2^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

と定義しておく．方程式 (2.16) を解くと，この関数が分母 (Denominator) に $D(\omega_e^2)$ の形で表れて， E_1 , E_2 が

$$E_1 = -\frac{\omega_e^2(\omega_e^2 - \omega_2^2)}{D(\omega_e^2)}, \quad E_2 = \frac{\omega_e^2 \tau_2^2}{D(\omega_e^2)} \quad (2.18)$$

と求められる．結果として，非斉次方程式 (2.14) の特解が

$$\theta(t) = -\frac{f_0}{\ell_1} \cdot \frac{\omega_e^2(\omega_e^2 - \omega_2^2)}{D(\omega_e^2)} \sin(\omega_e t), \quad \phi(t) = \frac{f_0}{\ell_1} \cdot \frac{\omega_e^2 \tau_2^2}{D(\omega_e^2)} \sin(\omega_e t) \quad (2.19)$$

と求められたことになる．

つぎに求めるべきことは，方程式 (2.14) の一般解を求めることであるが，これはこの方程式の斉次部分の一般解を求めて，先の特解に加えるとよい．それ故，解くべき方程式は

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega_1^2 & -\tau_1^2 \\ -\tau_2^2 & d^2/dt^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

となる．ここで， θ , ϕ を

$$\theta = A_1 \sin(\omega t), \quad \phi = A_2 \sin(\omega t) \quad (2.21)$$

と置いて代入すると，

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\tau_1^2 \\ -\tau_2^2 & -\omega^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

と代数方程式となる．これから A_1, A_2 が両方ともゼロにならないためには，この方程式の係数行列式の値，すなわち，(2.17) 式で定義した $D(\omega^2)$ がゼロでなければならず，

$$D(\omega^2) = 0 \quad (2.23)$$

となる．これは ω^2 に関する 2 次方程式で容易に解け，

$$\begin{aligned} \omega_{(\pm)}^2 &= \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2 \omega_2^2 - \tau_1^2 \tau_2^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\tau_1^2 \tau_2^2} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

と求まる．逆に，この $\omega_{(\pm)}^2$ を用いると，(2.17) で定義した関数 $D(\omega^2)$ は

$$D(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_{(+)}^2)(\omega^2 - \omega_{(-)}^2) \quad (2.25)$$

と因数分解されることを注意しておく．

この 2 個の $\omega_{(+)}, \omega_{(-)}$ が固有角振動数となるが，これらの値は正の実数でなければならない．この (2.24) 式から分かるように， $\omega_1^2, \omega_2^2, \tau_1^2, \tau_2^2$ がすべて正であれば平方根の中は正になるので， $\omega_{(\pm)}^2$ は実数で求まる．このうち， $\omega_{(+)}^2$ は正になるが， $\omega_{(-)}^2$ が正で求まるためには，条件

$$\omega_1^2 \omega_2^2 - \tau_1^2 \tau_2^2 > 0 \quad (2.26)$$

が必要になることも理解される．

また，この (2.21) 式では sine 関数の前に係数 A_1, A_2 を用いたが，これらは独立ではなく，(2.22) 式の 1 行目，あるいは，2 行目から

$$(\omega^2 - \omega_1^2)A_1 + \tau_1^2 A_2 = 0, \quad \text{かつ} \quad \tau_2^2 A_1 + (\omega^2 - \omega_2^2)A_2 = 0 \quad (2.27)$$

という関係式が成立する．ただし，ここでの ω^2 は $\omega_{(\pm)}^2$ と決まっているので，以後，この式を，

$$A_1 = A_{(\pm)}, \quad A_2 = S_{(\pm)} A_{(\pm)}, \quad S_{(\pm)} = -\frac{\omega_{(\pm)}^2 - \omega_1^2}{\tau_1^2} = -\frac{\tau_2^2}{\omega_{(\pm)}^2 - \omega_2^2} \quad (2.28)$$

と書き直すことにする．ここで定義した $S_{(\pm)}$ の 2 つの式が等しいことは， $\omega_{(\pm)}^2$ が満たす方程式 (2.23) から明らかである．

ここでは，方程式 (2.14) の斉次部分の一般解を求めるのに (2.21) 式で sine 関数を用いたが，これは cosine 関数を用いても同じことができるので，解は cosine 関数でもよく，このときの cos に付く係数を， $B_{(\pm)}$ とする．

以上をまとめると，非斉次微分方程式 (2.14) の一般解は，

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + B_{(+)} \cos(\omega_{(+)} t) + A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) + B_{(-)} \cos(\omega_{(-)} t) + \frac{f_0}{\ell_1} E_1 \sin(\omega_e t), \\ \phi(t) &= S_{(+)} \left[A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + B_{(+)} \cos(\omega_{(+)} t) \right] + S_{(-)} \left[A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) + B_{(-)} \cos(\omega_{(-)} t) \right] \\ &\quad + \frac{f_0}{\ell_1} E_2 \sin(\omega_e t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

と長い式で求められる．

2.3 初期条件の設定

つぎに初期条件を設定することで、ここでの未定係数 $A_{(\pm)}$, $B_{(\pm)}$ を決定してみよう、初期条件は、地震が始まる前は 2 個の錘が完全に静止していたとして、

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad (2.30)$$

と設定する。このうちの 2 個の条件 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ を、 $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ とした (2.5) 式に適用すると、 $\theta(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ となる。これを (2.29) 式に適用すると、

$$B_{(+)} + B_{(-)} = 0, \quad S_{(+)}B_{(+)} + S_{(-)}B_{(-)} = 0 \quad (2.31)$$

となるが、 $S_{(+)}$ と $S_{(-)}$ は一般に異なる量なので、これから

$$B_{(+)} = 0, \quad B_{(-)} = 0 \quad (2.32)$$

でなければならない。これで (2.29) 式は少し簡単になり、

$$\theta(t) = A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) + \frac{f_0}{\ell_1} E_1 \sin(\omega_e t), \quad (2.33)$$

$$\phi(t) = S_{(+)} A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + S_{(-)} A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) + \frac{f_0}{\ell_1} E_2 \sin(\omega_e t)$$

となる。残る 2 つの未定定数 $A_{(+)}$, $A_{(-)}$ を決定するため、この式を、 $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ とした (2.5) 式に代入して、 x_1 , x_2 を作ると、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ell_1 \left[A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) \right] + f_0 (1 + E_1) \sin(\omega_e t), \\ x_2(t) &= \ell_2 \left[(\nu + S_{(+)}) A_{(+)} \sin(\omega_{(+)} t) + (\nu + S_{(-)}) A_{(-)} \sin(\omega_{(-)} t) \right] + f_0 (1 + E_1 + E_2/\nu) \sin(\omega_e t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

と計算される。ここで、第 2 式で用いた無次元数 ν は、 ℓ_1 の ℓ_2 に対する比で、

$$\nu = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (2.35)$$

と定義した。

ここで求まった $x_1(t)$, $x_2(t)$ に残る初期条件 $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ を適用すると、 $A_{(+)}$, $A_{(-)}$ を求めるための方程式

$$\begin{pmatrix} \omega_{(+)} & \omega_{(-)} \\ (\nu + S_{(+)})\omega_{(+)} & (\nu + S_{(-)})\omega_{(-)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{(+)} \\ A_{(-)} \end{pmatrix} = -f_0 \omega_e \begin{pmatrix} (1 + E_1)/\ell_1 \\ (1 + E_1 + E_2/\nu)/\ell_2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

が得られる。これを解くと、 $A_{(\pm)}$ が、符号同順で

$$A_{(\pm)} = \pm \frac{f_0 \omega_e}{\ell_1 \omega_{(\pm)} (S_{(+)} - S_{(-)})} \left[(1 + E_1) S_{(\mp)} - E_2 \right] \quad (2.37)$$

と求まる．これを (2.34) の x_1, x_2 の式に代入したものが最終的な解となり，あまりに長い式になるが，

$$x_1(t) = \frac{f_0}{S_{(+)} - S_{(-)}} \left[\frac{\omega_e}{\omega_{(+)}} \left[(1 + E_1)S_{(-)} - E_2 \right] \sin(\omega_{(+)}t) - \frac{\omega_e}{\omega_{(-)}} \left[(1 + E_1)S_{(+)} - E_2 \right] \sin(\omega_{(-)}t) \right] + f_0(1 + E_1) \sin(\omega_e t) \quad (2.38)$$

$$x_2(t) = \frac{f_0}{\nu(S_{(+)} - S_{(-)})} \left[\frac{\omega_e}{\omega_{(+)}} (\nu + S_{(+)}) \left[(1 + E_1)S_{(-)} - E_2 \right] \sin(\omega_{(+)}t) - \frac{\omega_e}{\omega_{(-)}} (\nu + S_{(-)}) \left[(1 + E_1)S_{(+)} - E_2 \right] \sin(\omega_{(-)}t) \right] + f_0(1 + E_1 + E_2/\nu) \sin(\omega_e t) \quad (2.39)$$

となる．この式の中で， x_1, x_2 はいずれも，3 個の振動項からなるが，角振動数 $\omega_{(+)}, \omega_{(-)}$ の項は，地震によって励起された固有振動項であり，最後の角振動数 ω_e の項は地震から直接受ける強制振動項である．これらの項も地震動の振幅 f_0 に比例していることに注目する．

2.4 心柱効果

これで， x_1, x_2 の最後の解は出たが，途中での変数変換があまりに多すぎて，この結果だけを見ても分かり難いことは確かである．それゆえ，ここでの計算を少し振り返って考察してみよう．これら (2.38) (2.39) 式には，どの項にも (2.18) 式で定義した E_1, E_2 が入ってくるが，これらの定義には分母に $D(\omega_e^2)$ が含まれる．この関数 $D(\omega^2)$ は (2.25) 式のように因数分解されるので，ここで表れる $D(\omega_e^2)$ は

$$D(\omega_e^2) = (\omega_e^2 - \omega_{(+)}^2)(\omega_e^2 - \omega_{(-)}^2) \quad (2.40)$$

と書き表せる．これは，地震の角振動数 ω_e が固有角振動数 $\omega_{(+)}$ または $\omega_{(-)}$ に等しくなると，(2.38) (2.39) のすべての項が発散することを意味する．つまり，地震動とこの心柱系が共振を起こすことになる．このような事態が起こることは避けなければならない．ここで関数 $D(\omega^2)$ について，もう少し詳しく調べてみよう．この関数は (2.17) 式で見るように， ω^2 の 2 次式で，

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \text{ のとき，最小値 } D(\omega^2) = -\frac{1}{4}[(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\tau_1^2\tau_2^2] \quad (2.41)$$

をとり，また，

$$D(\omega_1^2) = D(\omega_2^2) = -\tau_1^2\tau_2^2, \quad D(0) = \omega_1^2\omega_2^2 - \tau_1^2\tau_2^2 > 0 \quad (2.42)$$

となる関数である．この最後の $D(0) > 0$ なることは，(2.26) 式による．

これらの事情を考慮して，地震動との共振が起こらないようにするには，できるだけ ω_1 の値が大きくなるように，また， ω_2 の値は小さくなるように設計し，地震の角振動数がそれらの中間の値になるようにすべきである．このためには， ω_1^2, ω_2^2 の定義式 (2.12) から，2 個の錘を支えるばね S_1 のばね定数はできるだけ大きいものにし，ばね S_2 の方は弱いものでよいとする．このときの各振動数の大小関係は

$$0 < \omega_{(-)} < \omega_2 < \omega_e < \omega_1 < \omega_{(+)} \quad (2.43)$$

となる．

つぎに、この各角振動数の大小関係から、(2.28) 式で定義される $S_{(\pm)}$ のうち、 $S_{(+)}$ は負、 $S_{(-)}$ は正になることが理解される。それ故、(2.39) 式で求められた x_2 の固有振動のうち、振動数が大きい方の振動 $\sin(\omega_{(+)}t)$ に付く係数 $(\nu + S_{(+)})$ がゼロになることが期待される。この x_2 は、建物本体をモデル化した振動を表すものなので、これが本当にゼロになれば、正しく心柱効果といえるだろう。そこで、

$$\nu + S_{(+)} = 0 \quad (2.44)$$

と置くと、 $S_{(+)}$ の定義 (2.28)、および ν の定義 (2.35) 式を用いて $\omega_{(+)}^2$ を求めると、

$$\omega_{(+)}^2 = \omega_1^2 + \nu\tau_1^2 \quad (2.45)$$

となる。この左辺の $\omega_{(+)}^2$ に、定義式 (2.24) を代入して計算すると、

$$\omega_1^2 + \frac{\ell_1}{\ell_2}\tau_1^2 = \omega_2^2 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\tau_2^2 \quad (2.46)$$

となり、この式の ω_1^2 , ω_2^2 , τ_1^2 , τ_2^2 に、これらの定義式 (2.12) を代入し、さらに λ_1 , λ_2 に (2.7) 式を代入して計算していくと、ばね S_2 が錘 m_2 を下方向に引く力 F_{S2} が、錘 m_2 に作用する重力に比例する結果となり、

$$F_{S2} = C(p)m_2g, \quad C(p) = \frac{\ell_1(\ell_0 + \ell_1 - \ell_2)}{\ell_2^2 - \ell_1(\ell_0 + \ell_1)} \quad (2.47)$$

という式が得られる。以下では、このときの比例係数 $C(p)$ を、この第 2 式で定義する。また、このときの変数 p はこの後の式で定義する。この $C(p)$ には ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_2 の 3 個の変数が含まれるが、分母分子を $(\ell_0 + \ell_1)^2$ で割ってみると、

$$C(p) = \frac{\frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1} \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_0 + \ell_1}\right)}{\left(\frac{\ell_2}{\ell_0 + \ell_1}\right)^2 - \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1}} = \frac{\lambda_0(1-p)}{p^2 - \lambda_0}, \quad \lambda_0 = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1}, \quad p = \frac{\ell_2}{\ell_0 + \ell_1} \quad (2.48)$$

となるので、実際はこの第 2 式、第 3 式で定義する 2 個の変数 λ_0 , p の関数となる。なお、 λ_0 は (2.7) 式で定義したものである。ここでは、 λ_0 の方を固定して考え、 p を動かしたときに、 $C(p)$ がどのように変化するかを考察してみよう。最初に分かることは

$$C(0) = -1, \quad C(\lambda_0) = -1, \quad C(\sqrt{\lambda_0} \pm 0) = \pm\infty, \quad C(1) = 0 \quad (2.49)$$

である。この $C(p)$ を、 λ_0 を固定して、 p の関数としてグラフ化したものを、下の図 2 に示す。

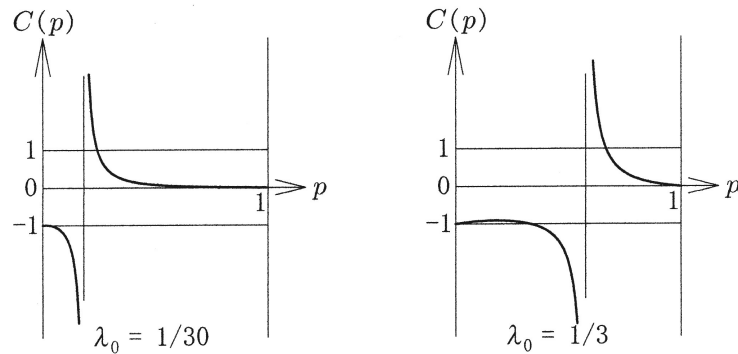


図 2 $C(p)$ のグラフ

このうち、左図は $\lambda_0 = 1/30$ の場合、右図は $\lambda_0 = 1/3$ の場合である。

この (2.47) 式の F_{S2} を (2.12) 式の τ_1^2 に代入すると、

$$\tau_1^2 = \frac{m_2 g}{m_1 \ell_1} [1 + C(p)] \quad (2.50)$$

となるが、 τ_1^2 は正でなければならないので、

$$-1 < C(p), \quad \text{すなわち,} \quad 0 < p < \lambda_0, \quad \text{または,} \quad \sqrt{\lambda_0} < p \quad (2.51)$$

という制限が付く。また、 τ_1^2 には (2.26) 式の制限、 $\omega_1^2 \omega_2^2 - \tau_1^2 \tau_2^2 > 0$ が付くので、大き過ぎてもいけない。したがってこの (2.51) の最後の式 $\sqrt{\lambda_0} < p$ という条件は、より狭い条件式になるはずである。実際に、この (2.26) 式に (2.12) 式の ω_1^2 , ω_2^2 , τ_1^2 , τ_2^2 を代入し、 F_{S2} の中に揃えた形にすると

$$(1 + \lambda_2 - \lambda_1) F_{S2}^2 - \left[(1 + \lambda_2) \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] + (\lambda_1 - 1) m_2 g \right] F_{S2} - \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] m_2 g < 0 \quad (2.52)$$

と長い式になる。これは、(2.47) 式を用いて、 F_{S2} を $C(p) m_2 g$ に替えて書き直すと

$$(1 + \lambda_2 - \lambda_1) m_2 g C(p)^2 - \left[(1 + \lambda_2) \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] + (\lambda_1 - 1) m_2 g \right] C(p) - \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] m_2 g < 0 \quad (2.53)$$

となる。この $C(p)$ に関する 2 次不等式を解くことになるが、ここで $C(p)$ の 2 次の項に付く係数について、(2.7) 式を用いて

$$1 + \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\ell_0}{\ell_0 + \ell_1 - \ell_2} > 0 \quad (2.54)$$

となることに注意する。ただし、 $\ell_0 + \ell_1 > \ell_2$ は仮定している。

この不等式 (2.53) を解くために、いったん左辺をゼロと置いて、 $C(p)$ を求めると

$$C^{(\pm)} = \frac{1}{2(1 + \lambda_2 - \lambda_1) m_2 g} \left[(1 + \lambda_2) \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] + (\lambda_1 - 1) m_2 g \pm \sqrt{R} \right] \quad (2.55)$$

ここで、平方根の中身は大変長い式になるので R と置いたが、これは

$$R = \left[(1 + \lambda_2) \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] + (\lambda_1 - 1) m_2 g \right]^2 + 4(1 + \lambda_2 - \lambda_1) m_2 g \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] \quad (2.56)$$

と定義する。この R は正になるので、 $C^{(\pm)}$ は実数となる。以上から不等式 (2.53) を解いた結果は

$$C^{(-)} < C(p) < C^{(+)} \quad (2.57)$$

と求められる。この結果から $C^{(+)}$ は正、 $C^{(-)}$ は負となることが分かるが、問題は $C^{(-)}$ と -1 の大小関係である。そのため、不等式 (2.53) の左辺で、 $C(p) = 0$ のときと $C(p) = -1$ のときの値を求めてみると、

$$C(p) = 0 \quad \text{のとき, (2.53) の左辺} = - \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - (m_1 + m_2) g \right] < 0 \quad (2.58)$$

$$C(p) = -1 \text{ のとき, (2.53) の左辺} = \lambda_2 \left[(1 - \lambda_0) F_{S1} - m_1 g \right] > 0 \quad (2.59)$$

となる．この結果から， $C^{(-)}$ は -1 と 0 の間に存在することになる．したがって，(2.57) で求めた $C^{(-)} < C(p)$ という条件は，(2.51) で示した $-1 < C(p)$ という条件よりもきつい条件であることが分かる．

なお，(2.51) で示した $C(p)$ が -1 より大きくなるための条件のうち， $0 < p < \lambda_0$ は，図 2 のグラフから分かるように，この範囲内で $C(p)$ が -1 より大きくなる量はほんの僅かで，実際に求めてみると

$$p = 1 - \sqrt{1 - \lambda_0} \text{ で極大値} \quad C(p) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \lambda_0}), \quad \left(< -\frac{1}{2} \right) \quad (2.60)$$

をとるので，ここでの条件式 (2.57) が適用されるためには $C^{(-)}$ がこの極大値より小さくならなければならないことと， $C(p)$ の値が負になることは，(2.47) 式から，ばねの力 F_{S2} が負になってしまう．ここでの解析は，錘 m_2 に作用する力 F_{S2} は下向きに作用することを前提として，下向きを正としてきた．したがって， F_{S2} が負になることは上向きに作用することになり，前提に反してしまう．なお，このことに関しては，次節の『おわりに』でも述べることにする．

(2.51) 式のもう一つの範囲 $\sqrt{\lambda_0} < p$ については， $C(p)$ の取り得る範囲が $0 < C(p) < C^{(+)}$ と制限されるので， p の値は $C(p)$ が発散する $\sqrt{\lambda_0}$ に近づくことはできない．より詳しくいうと， $C(p) = C^{(+)}$ となるとき p の値を $p^{(+)}$ としたとき，

$$p^{(+)} < p < 1 \quad (2.61)$$

という範囲に制限されるということである．このときは，建物本体の振動項を表わす (2.39) 式のうち振動数が高い方の $\sin(\omega_{(+)}t)$ の振動項に付く係数 $\nu + S_{(+)}$ を， $S_{(+)}$ が負であるために，(2.44) 式のようにゼロにすることができて，この項を完全に消し去ることができる．これが心柱効果というものである．なお，振動数が低い方の $\sin(\omega_{(-)}t)$ については $S_{(-)}$ が正のため，その振幅に付く $\nu + S_{(-)}$ をゼロにすることはできない．この振動数が低い方の振動は建物本体に被害をもたらすことは少ないと考えられるので，この振動項は消去するまでもないと考えてよいのだろう．

3 おわりに

今回の計算過程で一番悩んでしまったのは，(2.60) 式のところで述べたように， p の値が $0 < p < \lambda_0$ の範囲に入るとき， $C(p)$ が負，したがって，(2.47) 式から，ばね S_2 が錘 m_2 に作用する力 F_{S2} も負になるので，ばねは錘を上向きに押すことになってしまうことである．ひょっとすると，これは，棒 ℓ_2 と錘 m_2 が逆立ち振り子になって，安定した微小振動になるのではと，考えてしまった．その理由は，任意の ϕ について $\sin(\phi) = \sin(\pi - \phi)$ が成り立つからで，つまり，棒 ℓ_2 の傾き角 ϕ が， $\pi - \phi$ に置き換わって，真上方向の角 π から微小角 ϕ だけ傾いた微小振動に代わるのではと，思ってしまった．この考えに基づいて，もう一度計算をやり直してみると，cosine のところは， $\cos(\phi) = -\cos(\pi - \phi)$ となって，符号が逆転するが，このときは棒 ℓ_2 の上下が逆転しているので辻褄が合う．ただし，前にも述べたように，この逆立ち振り子を実現するには， $C^{(-)}$ が，区間 $0 < p < \lambda_0$ における $C(p)$ の極大値より小さくならないので，その可能性はかなり低いものと考えられる．

実は，五重塔に関して言うと，塔本体が振り子のようになって，心柱にぶら下がる形になっている．それに対し，東京スカイツリーに関しては，塔全体の中心にある心柱があたかも逆立ち振り子のように振動し，この心柱

の振動と塔本体の振動が逆位相で振動することで、全体の振動を和らげるようになっている。つまり、同じ心柱と言いながら、五重塔の心柱とスカイツリーの心柱とは原理的に異なるのではと思えてきた。この問題に関しては、次回以降で議論することにする。また、宿題が残ってしまった。

$\chi^2 = -1$ の解の数

矢野 忠^{*1}

Number of Solutions for $\chi^2 = -1$

Tadashi YANO

1 はじめに

小著『四元数の発見』 [1] において χ を未知数の四元数として $\chi^2 = -1$ の解の数が無限にあることを示した^{*2}. 2020 年にブルーバックス『数の世界』 [2] が発行されたので, それを読んでいたら, 四元数で $\chi^2 = -1$ の解の数が無限にあることの別の証明が書いてあった. それだけでなく $\chi^2 = -1$ の解は χ として何をとるかによって解の数が異なることも述べられていた. すなわち,

方程式 $\chi^2 = -1$ の解は

1. χ が実数ならば, 解は存在しない, すなわち, 解の数は 0
2. χ が複素数ならば, 解の数は 2 つある
3. χ が四元数ならば, 解の数は連続無限ある

このエッセイではそのことも含めてもう一度考えてみたい.

2 $\chi^2 = -1$ の解の数はいつでも 2 つか

$\chi^2 = -1$ は 2 次方程式の特殊な場合である. 私たちは中学校以来, 2 次方程式の解の数は 2 つだと思っていた. だが, それは未知数を何に取るかによって違ってくる.

まず未知数 χ を実数だとするとこのとき $\chi^2 = -1$ は解がない. このことは図 2.1 からわかるように放物線のグラフ $\psi = \chi^2$ は直線 $\psi = -1$ との交点をもたないことから明らかであろう.

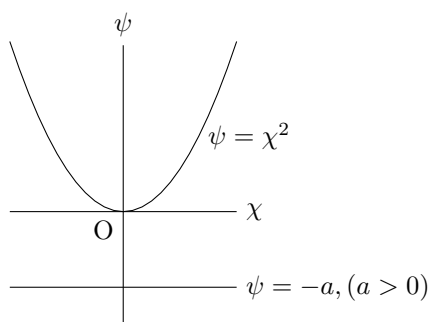


図 2.1 χ が実数のとき

それで 2 次方程式はかならず 2 つの解をもつようにと数 χ を実数から複素数に拡張すると, もちろん 2 次方程式 $\chi^2 = -1$ は 2 つの解をもつ. その解はよく知られているように

$$\chi = \pm i, \quad i := \sqrt{-1} \quad (2.1)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} [1] では χ の代わりに β を用いている.

である.

だが, 未知数として扱う数 χ を複素数から四元数に拡張するとこの解の個数は変わってくる. そのことを以下で調べてみよう.

3 χ が四元数のときの解の個数

まず未知数である四元数を $\chi = w + xi + yj + zk$ とおこう. ここで w, x, y, z はすべて実数とする. またここで i, j, k の間にはつぎのような積の規則が成り立っているとき,

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1 \quad (3.1)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (3.2)$$

$\chi = w + xi + yj + zk$ は四元数である.

このときに $\chi^2 = -1$ が成り立つためには w, x, y, z の間にはどのような関係がなければならないかを探ろう.

そのために $\chi = w + xi + yj + zk$ を方程式 $\chi^2 = -1$ に代入する. まず

$$\chi^2 = w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + 2w(xi + yj + zk) \quad (3.3)$$

が得られる. 計算の途中では xi と yj などの積も現れるが, これらは $xyij + xyji = xy(ij + ji) = 0$ というふうになって, 打ち消しあうので残る項はこれだけである*3. したがって $\chi^2 = -1$ が成り立つためには

$$w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = -1 \quad (3.4)$$

$$2wx = 0 \quad (3.5)$$

$$2wy = 0 \quad (3.6)$$

$$2wz = 0 \quad (3.7)$$

をみたと (w, x, y, z) の組を求めることになる.

まず $w \neq 0$ としよう. このときには (3.5)-(3.7) から

$$x = y = z = 0 \quad (3.8)$$

が得られる. したがって

$$w^2 = -1 \quad (3.9)$$

でなければならない. ところが w は実数であったから, この式は満たす w は存在しない.

すなわち, $w^2 = -1, x = y = z = 0$ である解は $w \neq 0$ のときには存在しない.

つぎに $w = 0$ の場合を考えてみよう. このとき

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (3.10)$$

が成り立つような (x, y, z) の数の組で表される四元数 $xi + yj + zk$ はすべて $\chi^2 = -1$ の解である. この解 (x, y, z) の数の組は半径が 1 の球の球面上の点である. こういう数の組は連続無限ある.

すなわち, $\chi^2 = -1$ の解は

$$w = 0 \quad (3.11)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (3.12)$$

*3 この (3.3) の計算を四元数になじみのない人のために付録に示す.

をみたす (w, x, y, z) の実数の組で表される四元数である．その中に

$$w = y = z = 0, \quad x = \pm 1, \quad (3.13)$$

$$w = x = z = 0, \quad y = \pm 1, \quad (3.14)$$

$$w = x = y = 0, \quad z = \pm 1, \quad (3.15)$$

も含まれる．

4 解が無数にあることの別の証明

ブルーバックス『数の世界』[2]にあった $\chi^2 = -1$ が無数にあることの別証明はつぎのようである．

$$\chi^2 = -1 \quad (4.1)$$

の解として

$$\chi = \pm i, \pm j, \pm k \quad (4.2)$$

があることはすぐにわかる．他にも解は存在する．

$$\chi = \alpha \quad (4.3)$$

が $\chi^2 = -1$ の解であるとする．このとき $\alpha^2 = -1$ である．たとえば， α としては上の (4.2) の解 $\alpha = \pm i$ をとればよい．もちろん，ほかの $\alpha = \pm j$ または $\alpha = \pm k$ をとってもよい．

ψ が $\psi \neq 0$ の四元数であるとすれば，逆数 ψ^{-1} が存在する．このとき

$$\psi \alpha \psi^{-1} \quad (4.4)$$

は $\chi^2 = -1$ の解であることをつぎのようにして示すことができる．

$$(\psi \alpha \psi^{-1})^2 = \psi \alpha \psi^{-1} \psi \alpha \psi^{-1} = \psi \alpha^2 \psi^{-1} = -\psi \psi^{-1} = -1 \quad (4.5)$$

したがって

$$\chi = \psi \alpha \psi^{-1} \quad (4.6)$$

は $\chi^2 = -1$ の解であるが， $\psi \neq 0$ の ψ は連続無限あるから， $\chi^2 = -1$ の解となる四元数は連続無限ある．

5 $\chi^2 = -1$ の解の例

3, 4 節で $\chi^2 = -1$ の解が連続無限にあることを示したが，その例を示すことはしなかった．[3] には訳書の補注として訳者によって，そのような例として i, j, k 以外にも

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(j + k) \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(k + i) \quad (5.3)$$

等があげられている．それでそれらの求め方を考えてみよう．

もちろん，これらの解が一度与えられるとこれらの四元数を 2 乗して，それらの四元数 χ が $\chi^2 = -1$ であることは直ぐに確かめられる．

しかし、こういった四元数の解がどうやって求められたかを知っておいた方がよいだろう。

図 5.1 は座標軸として (i, j, k) をとったときに $xi + yj + zk$ の (x, y, z) が半径 1 の単位球面上あることを表している。 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をみたす実数 x, y, z をとれば、実部のない四元数 $xi + yj + zk$ はどれも解の実例である。これについてはわざわざ実例を挙げるのはしないが、任意の実数 a, b, c をとり、

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (5.4)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (5.5)$$

$$z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (5.6)$$

とすればよい。

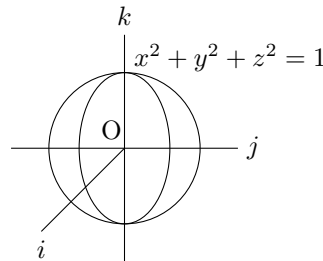


図 5.1 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

つぎに [3] の訳者補注に挙げられた例をどのようににつくるか考えよう。

まず (5.4) で $a = 1, b = 1, c = 0$ ととれば、 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ であるから (5.1) が得られる。つぎに、(5.5) で $a = 0, b = 1, c = 1$ ととれば、 $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}$ であるから (5.2) が得られる。最後に (5.6) で $a = 1, b = 0, c = 1$ ととれば、 $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}$ であるから (5.3) が得られる。

a, b, c をどのような実数に選んでも正規化されているから、解となる。

6 おわりに

2 次方程式は 2 つの解を持つというのが常識だと思っていたが、その常識は解をどのような数の範囲で求めるのかによることがわかった。これらはすでに知っていたことではあるが、それを意識的に認識していたわけではない。それでここにレポートしたいと考えた。

「そんなことわかっているよ」と言われるのがオチだろうが、解を求めるときにどういう数の範囲で求めるのかを意識する必要がある。これは『数の世界』 [2] から学んだことである。

7 付録 (3.3) の計算

四元数に慣れていない方のために (3.3) の計算を試みよう。このときに注意しなくてはならないのは実数 w は xi, yj, zk のいずれもと交換すること、また実数の x, y, z は i, j, k と交換するということである。この 2 つのことに注意して計算すれば、他に難しいことはなにもない。

$\chi = w + (xi + yj + zk)$ であるから

$$\begin{aligned} \chi^2 &= [w + (xi + yj + zk)]^2 \\ &= w^2 + 2w(xi + yj + zk) + (xi + yj + zk)^2 \end{aligned}$$

となる．ここで計算の順序が問題となるのは $(xi + yj + zk)^2$ の部分である．

ここの部分の計算をちょっと詳しく見てみよう．

$$\begin{aligned}(xi + yj + zk)^2 &= x^2i^2 + y^2j^2 + z^2k^2 + (xi yj + yj xi) + (xizk + zk xi) + (yj zk + zk yj) \\ &= -x^2 - y^2 - z^2 + xy(ij + ji) + kz(ki + ik) + yz(jk + kj) \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

ここで $ij + ji = 0, ki + ik = 0, jk + kj = 0$ であることを用いている．

この結果を用いると

$$\chi^2 = w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + 2w(xi + yj + zk)$$

となる．これが (3.3) である．

(2024.9.20)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 198
- [2] 松岡 学, 『数の世界』(講談社, 2020) 151-156
- [3] ポントリャーギン (宮本敏雄, 保坂秀正 訳) 『数概念の拡張』(森北出版, 2002) 123

計算の順序

矢野 忠^{*1}

Order of Calculations

Tadashi YANO

まえおき

これは以前に愛数協の機関誌「研究と実践」[1]に発表したものを改訂した。中学校で数学を学んだ後でも計算の順序で1節で述べた計算の順序の規則5はよくは知らなかったように思う。その後、研究をするようになってFortranなどでのプログラミングでの経験からそのことを事実としては知っていたのではないと思うが、きちんと認識をしていなかった。

1 はじめに

計算の順序に関係した誤りについて述べてみたいが、計算の順序の規則をまず示しておこう [2]。

1. 括弧の中の計算は優先的に計算する
2. 加減あるいは乗除のみの式においては、左から順に計算する
3. 加減と乗除のまざった式においては、乗除を先に計算する
4. 省略された演算記号は先に計算する^{*2}
5. べき乗、開法（開平、開立等を含む）の計算は乗除に先行する^{*3}

インターネットの掲示板の数学の質問箱であるDS数学BBS [3]に分数の割り算について、つぎのような質問があった。

A：例えば

$$5 \div 2/3 = 15/2 \quad (1.1)$$

であることは問題がないのだが、これを

$$5 \div 1/3 \times 2 \quad (1.2)$$

とすると答えが変わるような気がするが間違いなのでしょうかね？

これに対する掲示板での答えは

B： $2/3$ で割ることは逆数 $3/2$ を掛けることだから間違いで

$$5 \times 3 \div 2 \quad (1.3)$$

とすべきです。

A：間違いを一応は認めたものの、この回答に対して納得せず $2/3 = 1/3 \times 2$ であることは間違いではないから

$$5 \div 2/3 = 5 \div (1/3 \times 2) \quad (1.4)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} もちろん、省略されている括弧も演算記号に含む。

^{*3} ここは文字通りの引用ではない。言い換えとか補足を行っている。

と書けば答えも変わらないが、括弧をとれば答えが変わるのはなぜかと重ねて尋ねられた。

それに対する答えとして B さんは

B :

$$5 - (1/3 + 2) = 8/3 \quad (1.5)$$

だが、括弧をとると

$$5 - 1/3 + 2 = 20/3 \quad (1.6)$$

と答えが変わるが不思議だと思われますか*4と逆に質問をされたが、それに対しては A さんからの返答はなかった。ここまでのやりとりは 2005 年 5 月 16 日に行われており、そこからの議論の進展はなかった。

2 一つの考え方

私は 2005 年 6 月 9 日に上に述べたようなやり取りを見て (1.1) について、まずつぎのようなコメントをした。

Y : 直線上の 1 点はある一つの実数に対応しており、 $2/3$ は数直線上のある 1 点を指します。分数は割合を表す割合分数としても知られていますが、水道方式で知られる数学教育協議会の故遠山啓先生は量としての分数（量分数という）が基本だと言われます。そうすると $2/3 = 0.6666\cdots$ ですから、これは一つの数です。一つの数であるということは $(2/3)$ と括弧がついていると考えるべきで、その直前の割る演算よりも分数の演算が優先されるということでしょう。だから A さんの言われるようには括弧をとってはいけません。このことは分数が数でなくとも分数式の場合にもあてはまるのではないのでしょうか。（文の一部を改変した）

さらに、6 月 22 日には、さらにつぎのようなコメントをした。

Y : 昔の受験雑誌 [4] の記事にこんな記述がありました。「括弧の中の計算は先にすることは誰でも知っているが、その他に $ab, a/b$ および根号内の計算は他の計算に先立って行わなければならないことが見落とされやすい」。乗除が加減に先立って行われるということを知っており、 $a \div b$ と a/b とを同じとすると A さんのような疑問が起こってきますね。だから、上に引用したような規則があるのでしょう。根号のついた数または式の計算に関しても間違いを起こす例があります。

その後、調べてみたら私が大学受験勉強をしていたときに使用した受験参考書 [5] の中に挟み込んだ紙片に書きとめてあったのはつぎの例であった。

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

であって、

$$\sqrt{(-3)^2} = [(-3)^2]^{1/2} = (-3)^{2 \times 1/2} = -3$$

ではない。しかし、後のような計算の間違いを起こしそうである。この間違いも根号の中の計算を優先しなかったことから来ている。

冒頭に述べたような 5 つの計算の順序規則のうち 4, 5 を除いてよく知られているが、規則の 4, 5 となると学校で教わったのかもしれないが、どうもはっきりしない。

3 計算の順序規則

代数の初歩を学ぶときに計算の順序規則 4, 5 についてきちんと学んでいるのだろうか。それが気になってきた。古い高校の教科書や参考書を見てみたが、はっきりとは書いていない。これは教科書や参考書が順を追って、

*4 カッコを正しくはずせば $5 - 1/3 - 2 = 8/3$ であろうが、ここでは B さんの書いたままとしておく。

個々の演算について説明をしているので仕方がないのであろう。よく読めばどこかに書いてあるのかもしれないが、ちょっと探したくらいでは見つかりそうにない。

思い出して [2] を開いてみると計算の順序規則が pp.120-123 に述べてあった。このエッセイの冒頭で述べた計算の順序規則 1 は載っていないが、これはこの本の節の標題が「括弧の省略」となっているのです、仕方がない。それで完全を期すために規則 1 として追加しておいた。

銀林浩先生によるとこれらの計算の順序規則はその式中に計算の順序をはっきりさせるために括弧を書いておけば、あいまいさがなくなるが、表記が面倒になるので、括弧を省略するために生まれた規則だという。それでこれらの計算の順序規則を論じた節の標題が「括弧の省略」となっている。やはり、銀林先生のような数学教育の専門家ともなると問題点をちゃんと認識されているものだといまさらながら感心してしまった。

しかし、一般の人々には、計算の順序規則の

4. 省略された演算記号は先に計算する。
5. べき乗、開法の計算は乗除に先行する。

はそれほどはっきりと認識されている訳ではない。もう少し詳しく見てみよう。銀林さんの本 [2] には 4 の例として

$$2\frac{1}{3} \times 4 \quad \text{は} \quad \left(2\frac{1}{3}\right) \times 4$$

$$a \div bc \quad \text{は} \quad a \div (bc)$$

と書かれている。

ここで、一つ注意しておかなくてはならないことは計算の順序とは関係がないが、 $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ の意味であるが、 $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$ を表している。すなわち、分数の前の整数と直後の分数には + が省略されており、根号の前の整数と根号で表された無理数との間には $\times$ の記号が省略されている。もちろんこんなことは数学のよくできる人は絶対に間違わないことだが、凡人の私などは勘違いをしてしまいそうである。

さて、前にもちょっと述べたように

$$a \div \frac{b}{c} \quad \text{は} \quad a \div \left(\frac{b}{c}\right) = a \times \left(\frac{c}{b}\right)$$

の意味であることを再度述べておく必要がある。だからインターネット上での A さんの質問はこのような計算の順序を無視したものであった。

そういう誤解は昔から珍しくなかったのであろう。だから 40 年以上の昔の受験雑誌 [4] に「 ab は $a \times b$ と違う」とか「 $a \div b$ は $\frac{a}{b}$ とは違う」とか標語的に書かれたのであろう。これはあくまで標語的にということなので、これらの式は単独ではもちろん $ab = a \times b$ であり、 $a \div b = \frac{a}{b}$ であることは代数として間違いがない。しかし、つぎのように複合して現れたとき

$$a \div bc = \frac{a}{bc}$$

であって、したがって

$$a \div bc = a \div (b \times c) \neq a \div b \times c$$

である。 $a \div bc$ には $a \div (bc)$ と本来は括弧が書かれるべきだったが、あまりにも面倒なために括弧が省略されている。括弧のあるなしで結果が違ふことを確認するために括弧のついていない $a \div b \times c$ を計算してみると

$$a \div b \times c = \frac{ac}{b} \neq \frac{a}{bc}$$

となる。だから bc は単独でみれば、確かに代数的に $bc = b \times c$ なのだが、これが $a \div bc$ のような式中に現れるとそれはもはや

$$a \div bc = a \div b \times c$$

ではない。難しそうだが、表示されていない括弧を意識できるようになれば計算の間違いをしなくなる。

同様なことは

$$a \div \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

でも起こる。これはもちろん計算の順序規則 4 によって

$$a \div \frac{b}{c} = a \div (b \div c) \neq a \div b \div c$$

である。念のために $a \div b \div c$ を計算してみれば、計算は左から順に行われるので

$$a \div b \div c = \frac{a}{bc} \neq \frac{ac}{b}$$

である。計算の順序規則 4 を忘れてはならない。それが、もともと書くべき括弧を省略したために出てきたことを知っていれば忘れることはないだろう。

計算の順序規則 5 についても見てみよう。こちらの方はそれほど混乱を招くことはないだろう。しかし、前に挙げた例のように根号を分数指数で表すときには混乱を招くことがあるかもしれない。銀林さんはべき乗の計算での別の間違いの例として

$$ab^2 \text{ は } a(b^2)$$

であって、 $(ab)^2$ の意味ではないと注意されている。この間違いは「文字タイル」[6]を用いて代数の初歩を学んだ生徒はあまり間違えないかもしれないが、多くの生徒はいまだに「文字タイル」で代数の初歩を学んでいるわけではないので、結構頻繁に起こる誤りかもしれない。

4 おわりに

プログラム言語 Fortran とか C でべき乗の計算は乗除よりも優先されると規約されていたのは、このような計算の順序規則に従ったためであることが今になってやっとわかった。学校の教育の現場や教科書または学習参考書では主として個々の演算について教えているので、その複合された計算はあまりしなくてもいいかもしれないが、現実の問題ではどうしても複合されたものが一般的となるであろう。そうするとそれまであまり困難として表に現れていなかった、上記の計算の順序規則が必要になってくる。しかし、それらは括弧の省略をして簡単に数式を表そうとした結果として、つくられた計算の順序規則であったことを知っていれば、無用に混乱することはないだろう。それにしても中学校や高校の先生方にはこのことを十分にお教え頂いているのでしょうか。

5 補遺 なぜかけ算・わり算をたし算・引き算より先にするか

1 節のはじめにあげた計算の順序について述べた 5 項目のうち、3 番目の規則

3. 加減と乗除のまざった式においては、乗除を先に計算する

はどうして、この規則があるのだろうか。要するに、これは「かけ算、わり算」を「たし算、ひき算」よりも先に計算するという規則である。この理由を考えてみよう。

その理由は「たし算、引き算は同じ種類（または同じ単位）のものの間でしかできないのに対し、かけ算、わり算では異なった単位の量をかけたり、わったりすることができる」からである。いわば、かけ算、わり算は新しい量（単位）を創り出す能力がある [7], [8], [9]。

こういった説明だけではなかなかわかり難いので、例を 2 つほど挙げてみよう。

(問) 1 個 20 円のリンゴ 5 個と 1 個 30 円のみかん 7 個を果物店で買った。全部でいくらになりますか。

(答)

$$20 \text{ 円/個} \times 5 \text{ 個} + 30 \text{ 円/個} \times 7 \text{ 個} = 100 \text{ 円} + 210 \text{ 円} = 310 \text{ 円} \quad (5.1)$$

全部で 310 円支払うことになる。

この問題で 5 個と 30 円/個をたすことはできません。

(問) 車で高速道路を時速 90 km で 3 時間走り、サービスエリアで少し休んで、また時速 80 km で 4 時間走った。全体で何 km 走ったでしょうか。

(答)

$$90 \text{ km/h} \times 3 \text{ h} + 80 \text{ km/h} \times 4 \text{ h} = 270 \text{ km} + 320 \text{ km} = 590 \text{ km} \quad (5.2)$$

全体で 590 km 走ったことになる。

この問題でも時間の 3 時間 (3h) と速さの時速 80 km とを足すことはできません。

ちなみに上にあげた (5.1) と (5.2) をベクトルのスカラー積風に表せば、(5.1) は

$$(20 \text{ 円/個} \quad 30 \text{ 円/個}) \begin{pmatrix} 5 \text{ 個} \\ 7 \text{ 個} \end{pmatrix} = 310 \text{ 円} \quad (5.3)$$

と表され、(5.2) は

$$(90 \text{ km/h} \quad 80 \text{ km/h}) \begin{pmatrix} 3 \text{ h} \\ 4 \text{ h} \end{pmatrix} = 590 \text{ km} \quad (5.4)$$

と表される。

(2005.8.27)(2021.5.29 改訂)(2024.9.19 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 計算の順序, 研究と実践 (愛数協) No. 89 (2005.12) 1-5
- [2] 銀林浩, 『子どもはどこでつまづくか』 (国土社, 1994) 120 - 123
- [3] <http://www2.ezbbs.net/07/dslender/>
- [4] 雑誌, 蛍雪時代 (旺文社), 巻号および年月は未詳だが, 昭和 28 年から 32 年の間であろう。
- [5] 藤森良夫, 『解析の基礎』 (前編) (考え方研究社, 1953)
- [6] 矢野寛, 『矢野寛研究論文集』 (四国地区数学教育協議会, 1992) 146 - 157
- [7] 遠山啓, 『数学の学び方・教え方』 (岩波新書 G7) (岩波書店, 1972) 39
- [8] 数学教育協議会・銀林浩 編, 『算数・数学なぜなぜ事典』 (日本評論社, 1993) 58 - 59
- [9] 武藤徹, 『新しい数学の教科書』 (文一総合出版, 2010) 56

坂田模型管見

米澤 稯^{*1}

My Point of View on Sakata Model

Minoru YONEZAWA^{*2}

1 坂田模型

坂田模型の誕生の過程については、九後太一さんの田中正さんへの追悼文、日本物理学会誌 74 (2019) 734 に述べられています^{*3}。

坂田模型が、坂田－田中模型として、世に出なかったことは大変残念なことで感想を記されていますが、同感です。

一つの疑問があります。K 中間子をラムダ粒子と核子の複合系と考える可能性は 1953 年 Gell-Mann の論文に述べられています。この論文は Strangeness に関して引用されても、坂田模型に関して言及されたのを、私は存じません。

この段階では新粒子の整理が十分にされていないので、 Λ 粒子という言葉はまだ使用されていませんが、Strangeness を dynamical に生成するようなことは全く考えていないようです。

複合模型を積極的に示唆した論文でないからでしょうか。それとも、論文の最後に引用として小さな活字で印刷されているので、皆様が見過ごされてきたのでしょうか。

私がこの論文にいつ気づいたのかよく覚えていませんが、坂田模型が出る以前だったような気がします。Fermi-Yang 模型に興味を持っていた時期があります。

2 追悼記の引用

(田中) 先生は、新素粒子が続々と見つかる名大大学院時代の早い時期から、 π 中間子を核子 (p, n) と反核子の束縛状態と考えるフェルミ-ヤンの理論に注目し、新粒子の複合模型研究を一人で始めた。1955 年の 9 月後半のある日、11 月末に予定されている基研での場の理論研究会に向けて、準備の研究室発表会が E 研で行われた。田中先生は、中野-西島-Gell-Mann のストレンジネス量子数を核子のみを構成子とするフェルミ-ヤン模型からダイナミカルに出す自身の試みと、その困難について報告した。その後この報告をめぐって、坂田博士、山田英二氏、亀淵迪氏ら多くの E 研メンバー間の熱い議論があって深更にまで及んだ。最後に、山田氏が、「ストレンジネスをダイナミカルに出すのは無理である。何かそれを担う新しい実体が必要である」と議論を総括して解散した。翌日、坂田博士が研究室にやってきて、黒板に p, n, Λ とその量子数を書き、これを構成子とすれば全てうまくいくと言った。坂田モデルの誕生である。一時は、坂田博士は田中先生に『我々の模型』の論文は、一緒に書きましよう」と提案していたのだが、種々な経緯の末、結局は坂田博士の単名論文として発表され、この仕事は「坂田模型」として歴史に残ることになる。先生ご自身は生前一度もこのことで不平を口にされることは無かったが、この仕事が坂田-田中模型として世に出なかったのは誠に残念なことである。

^{*1} 広島大学名誉教授

^{*2} Professor Emeritus, Hiroshima University

^{*3} 追悼文のごく一部をつぎの節に引用する。全文はぜひ物理学会のサイトを参照されたい。

3 Gell-Mann の論文の注 4

We postulate the principle of invariance under the operation of charge conjugation, which carries every particle into its antiparticle. In the case of charged particles, such as the electron and the π^+ , it is obvious that the antiparticles are the positron and the π^- , respectively. A neutral particle, however, may or may not be identical with its antiparticle. Among neutral fermions, it is necessary that the neutron and the antineutron be distinct, while the question of whether the neutrino and antineutrino are distinct is one that must be settled by experiment. Among neutral bosons, the γ ray and π^0 are apparently identical with their respective antiparticles, but there is no reason to believe that this is a general rule. We suppose here that the τ^0 is a neutral boson which is not identical with its antiparticle. A model for such a situation is provided by picturing the τ particle as a complex of a nucleon and an anti- V_1 , while the $[\tau]$ is pictured as the corresponding complex of antinucleon and V_1 .

(注) τ^0 は現在では K^0 と呼ばれており, $[\tau]$ は現在の $\bar{K}^0$ と K^- のことをさしている. V_1 は Λ 粒子のことである. この注では $K^0 = (n\bar{\Lambda})$, $\bar{K}^0 = (\Lambda\bar{n})$ であることが述べられている.

曾我見郁夫さんを偲ぶ

矢野 忠^{*1}

Memory of Prof. Ikuo SOGAMI

Tadashi YANO^{*2}

2021 年 12 月 25 日（土）に私の友人知人の数人が集まって私の家で忘年会をしていたときに物理学者の江沢康生さんが素粒子論グループの情報として京都産業大学名誉教授の曾我見郁夫さんが急死されたとの知らせを教えてくださいました。

それも小沼通二（慶応大学名誉教授）さんが逝去の数日前に曾我見さんと電話で話をされたときにはお元気であったという。それで突然のご逝去であったことはまちがいない。

私くらいの歳になると友人や知人が亡くなっても不思議ではない歳になってはいるが、それでも友人や知人が亡くなるととてもさびしい。

曾我見さんの記憶という、学部とか大学院のころの記憶が私にはない。知り合ったのは大学院を終えて、短期ではあったが、基礎物理学研究所の非常勤講師をつとめていた 1968 年以降になる。

実は広島大学理学部の学部学生だったころ、京都大学の学生だった鈴木賢治さんがある種のオルグに広島大学に來られて、全日本物理科学学生協議会 (ZBK) に広島大学物理学科の学生も入ることになったので、私は鈴木賢治さんとは親しかったが、そのころに曾我見さんを何度もお見かけしたはずなのだが、あまりこれといった記憶がない。

鈴木さんとか曾我見さんとか、また私の高校の時の同級生の串部宏之君とかは京都大学物理学科の同期であった。だから私はすくなくともそれまでに曾我見さんになんとかお会いしているとまでは言えないとしても、お見かけするという機会は何度もあったはずである。

そこはいいとしても曾我見さんをはっきりと意識してきたのは、基礎物理学研究所に滞在する機会だったことは確かである。そのうちに曾我見さんが松山の出身であり、それも私の勤めていた愛媛大学の北門に近い伊予鉄の市内電車の環状線の鉄砲町停留所の前にある、古い門構えのある家が彼の生家であることを知った。私が愛媛大学に勤め始めたころにはまだ彼のお母さんがまだご健在でもあり、朝早くには門の外の通りを清掃されているのをお見かけたりもした。

私の高校生の頃（1950 年代後半）は愛媛県の高校は校区制であり、彼は彼の自宅からつい目と鼻の先の松山北高校が彼の母校であった^{*3}。それでも遅刻しそうになって、「曾我見は家が遠いからなあ」と高校の先生にからかわれたとかご本人から伺ったこともある。

曾我見さんが松山に帰省された際には、曾我見さんが愛媛大学工学部の私の同僚の岸さんの先輩だということもあって、数回お会いしたと思う。

最後の機会にお会いしたのは愛媛大学理学部で松山の帰省の機会に研究成果を話されると聞いてその講演に向いたことがあった。そのときに講演前であったが、私の顔を見たときに「矢野君、中西先生に会った？」と聞かれた。「いや、会ってないよ」と答えて、「中西先生は元気？」と尋ねると「うん、脚をわるくされているけど、元気だよ」とのことであった。

元高知大学理学部の数学者・新関章三さんと私とがはじめた「数学・物理通信」を中西先生の寄稿がときどきあったり、その送付先のメール・アドレスに中西先生の友人・知人・後輩の一人として曾我見さんが入っていた。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 曾我見さんの家から走っていけば、北高校の校門には 2、3 分で行けただろうか。

中西先生のご紹介の先生方には大栗博司さんのような著名人の方もおられて、その友人・知人・後輩の名簿に入るのはなかなか難しいことと思われた。それはともかくとして中西先生が私ごとき者の出しているサキュラーの後押しをしてくださっていることはありがたいことである。

それはともかくそのときの物理の講演ではパウリ行列の話が最初の方に出て来たが、そのとき松山ではパウリ行列ではなくて最近は四元数の方が好まれているらしいですが、とさりげなく言われた。そのころ私が四元数について「数学・物理通信」に連載していることを意識されていたのだろうか。

私自身は曾我見さんの物理学の業績については存じ上げないが、私の大学院時代の指導教官の小川修三さんがいつか言っていたのは、世間では牧と原の四元（カルテット）モデルと同じアイディアを出した人として優れた研究者だと評価されていた。

牧二郎さんと原康夫さんはこの素粒子のカルテット・モデルで仁科記念賞を受賞されているので、曾我見さんの実力を知る人は知っていたのだと思う。これはプロGRESSの2通のレターとして発表されている。

いつのころからか年賀状を曾我見さんと交換する間柄となっており、短いが「今年も研究に専念します」というふうなことが年賀状に手書きで書き添えられていた。研究至上主義というか、うらやましいような研究に対する情熱であった。

具体的に曾我見さんからお聞きしたことはなかったと思うが、生前の湯川先生のところにときどき研究上の議論に行かれていたともどこかから、もれ伺っていた。ただ、湯川先生の常に素粒子の世界の本質を目指すという研究姿勢は湯川先生ご本人にはそれが生き方の目標ではあられたのだろうが、電弱理論や QCD が確立されて行く過程で曾我見さんには反省することもあったと伺ったような気がする。

そういうことについては詳しいことをお聞きする機会は今もう持つ機会がない。残念である。

曾我見さんについては同窓の方で、どなたか彼をよくご存じの方に書いていただく依頼をしたいと思いながら、そのままになってしまった。それで急いで私の記憶にあることを記したので、もっと彼のことを書いて下さる方がおられるならば、喜んでこの「数学・物理通信」に掲載したいと考えている。

（補遺） 私の妻があるとき知人を通じて曾我見さんの実姉と知り合いになった。このとき妻がお姉さんから伺った話だと曾我見さんはポーランドに留学されたことがあるとかで、英語はもちろんだが、ポーランド語も話されるし、その他もう一つなにか外国語を話されると伺ったのだが、それがドイツ語であったのか、はたまた、ロシア語であったのかは覚えていない。

(2022.3.7)(2024.9.23 改訂)

編集後記

読者の皆さん、こんにちは。ようやく暑くてイヤな夏も終わりに近づいてきました。と言うか、私が住む札幌は、9月中旬から急激に涼しさ通り越して寒くなり、最高気温が20度に届かず、最低気温は10度以下という日が続きました。このため朝晩の寒さに耐えられず、9月22日には早くも、携帯ストーブを出してきて暖をとることになりました。いつもの年なら、ストーブを使うのは10月中旬からなのですが、今年の気候変動の激しさには驚くばかり、と思いきや、9月下旬には最高気温が20度を超え、平年並みになってきました。やれやれ。

さて、今号は、私の『心柱モデル (2)』という前回の続きが最初に載っています。これは五重塔に付いている心柱をできる限り単純化して、力学的、かつ数学的にその働きを解明しようとしたものです。

つぎに、編集長の矢野忠さんが書かれたものが3編ありますが、その最初のもは『 $\chi^2 = -1$ の解の数』というものです。これは、数そのものをどこに取るかで変わってきます。数を実数に限定すると解なしで、複素数にすると $\pm i$ の2個となり、数の範囲を四元数にまで広げると、ナント、..., その先はここで言わない方がよいでしょう。

つぎの『計算の順序』は、普段よく計算するときに使っている分数や $+$, $-$, $\times$, $\div$ などの記号は計算順序を良く考えてから計算しないと異なる結果がでてしまうという話です。確かにこの種のことはあたり前として知っているつもりでも、間違った書き方をすることがあり、注意すべきことです。

矢野さんの3つ目は『曾我見郁夫さんを偲ぶ』というもので、2021年12月25日に逝去された曾我見さんの思い出話を書いた物です。矢野さんは若いときに京大の基礎物理学研究所でよく曾我見さんにお会いしていたそうで、そのときの話ですが、矢野さんは、何十年も前のことをよくこれだけ覚えているものと感心してしまいます。

もう一つは、矢野さんの先生であった米澤穰さんの『坂田模型管見』というもので、これは京大名誉教授で、2019年4月3日に90才で亡くなられた田中正先生のことや Gell-Mann の strangeness の論文のことを書いた文章です。名大教授の坂田昌一先生が提唱した素粒子論の世界で有名な「坂田模型」というのがありますが、これには田中先生も関与していたはずなのに、何故、「坂田・田中模型」にならなかったのかとか、また、Gell-Mann の strangeness の論文の注に複合モデルを示唆することが書かれているのにそういうことに言及する方がいないのはなぜだろうかという疑問です。

最後に付け足しておきます。つぎの14巻6号には、今年7月7日に99才で亡くなられた武藤徹先生の追悼記念として、この数学の教育界で活躍された武藤先生のことを、朝日新聞の近藤康太郎記者とかその他の何人かの人に書いていただけたことになりました。ご期待ください。

(世戸憲治)