

数学・物理通信

14 卷 7 号 2024 年 12 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2024 年 12 月 17 日

目次 (Contents)

1. 心柱モデル (4)

世戸憲治 2

2. シングル j 殻モデルにおける超伝導 (2) – 変形とエネルギーギャップ –

岩崎正春 15

3. 代数の基礎

矢野 忠 23

4. 編集後記

世戸憲治 40
矢野 忠

1. Model of Central Pillar (4)

Kenji SETO 2

2. Superconductivity in the Single- j Shell Model (2) – Shape Deformation and Energy Gap –

Masaharu IWASAKI 15

3. Foundation of Algebra

Tadashi YANO 23

4. Editorial Comments

Kenji SETO 40
Tadashi YANO

心柱モデル (4)

世戸 憲治 *

Model of Central Pillar (4)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「心柱モデル (3)」(『数学・物理通信』14 巻 6 号) では、東京スカイツリーに付いている心柱をモデルとして解析したつもりであったが、塔と心柱の間にダンパー (damper 減衰器) を入れたときの解析がまだ残されたままであった。今回はこのダンパー効果について解析してみよう。

次節では、ダンパー付き心柱の最も単純化したモデルとして、塔の方はそれ自体が固有の振動を起こすが、心柱の方は地震時の地面と同じ振動はするが、それ自体の固有振動は起こさないモデルで解析してみる。また、第 3 節では、塔と心柱の構造をまったく同じものにしたときは、どのような振動を起こすかを解析してみる。ここで取り上げたモデルは、解析解を求めやすくするために、スカイツリーとは構造的に離れてしまったかもしれない。しかし、ダンパーがどのような効果を持つかを解析的に理解するには良いモデルと言えるはずである。

2 最も単純なダンパー付き心柱モデル

2.1 方程式の導入

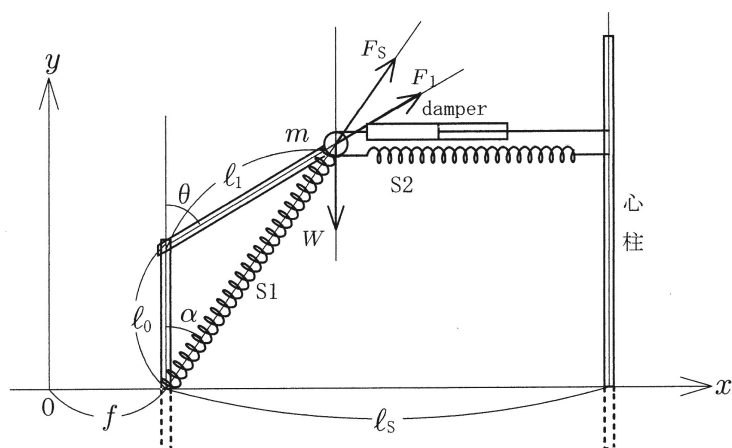


図 1 最も単純なダンパー付き心柱モデル

* 北海学園大学名誉教授

図 1 に示すように、1 本の棒を地面に垂直に埋め込み、地上に出ている部分の長さを ℓ_0 とする。この棒の先には長さ ℓ_1 の棒を、自由に回転できるように取り付け、この先には質量 m の錘を取り付ける。このままでは ℓ_1 の棒は倒れてしまうので、最初に地中に埋め込んだ棒の根本と錘の間に、自然長が $\ell_0 + \ell_1$ より長いばね S1 を取り付け、錘を付けた棒が倒れないようにしておく。これが振動系で、他に、長さが $\ell_0 + \ell_1$ より長い棒を用意し、最初に立てた ℓ_0 の棒から距離 ℓ_S 離れた所に、地面に垂直に立てる。これが、このモデルの心柱である。さらに、ばね定数が k で、自然長が、棒 ℓ_0 と心柱の距離と同じ ℓ_S のばね S2 を用意し、心柱と錘 m の間に水平になるように取り付ける。さらにもう一つ、ダンパー係数 c のダンパーを用意し、錘と心柱の間にこれも水平に取り付ける。

この錘の運動方程式を立てるにあたり、水平右方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。なお、原点は、地震が起こる前の棒 ℓ_0 の根元とする。いま、地震が起こって、ある時刻 t に、地面が水平右方向に動いた距離を $f(t)$ とし、そのとき、棒 ℓ_1 が傾いた角度を θ とする。このときの錘 m の座標を (x, y) とすると、

$$x = f(t) + \ell_1 \sin \theta, \quad y = \ell_0 + \ell_1 \cos \theta \quad (2.1)$$

となる。また、棒 ℓ_1 が錘を押す力を F 、ばね S1 が錘を押す力を F_S とする。ただし、このばねの傾き角は α とする。このときの運動方程式は

$$m\ddot{x} = F \sin \theta + F_S \sin \alpha - k(x - f) - c(\dot{x} - \dot{f}), \quad m\ddot{y} = F \cos \theta + F_S \cos \alpha - W \quad (2.2)$$

と書かれる。この第 1 式右辺の 3 項目、4 項目は、それぞれ、ばね S2 とダンパーによる x 方向の力である。また、第 2 式右辺最後の W は錘に作用する重力で、重力加速度を g としたとき、 $W = mg$ である。

ここで、ばねの傾き角 α は棒 ℓ_1 の傾き角 θ に従属で、2 本の棒 ℓ_0 , ℓ_1 とばね S1 が作る三角形に三角関数の正弦定理を適用すると、

$$\frac{\sin \alpha}{\ell_1} = \frac{\sin \theta}{S_1}, \quad S_1 = \sqrt{\ell_0^2 + \ell_1^2 + 2\ell_0\ell_1 \cos \theta} \quad (2.3)$$

という関係式が成り立つ。この第 1 式の S_1 は、ばね S1 の装着時の長さで、余弦定理から、この第 2 式で与えられる。

この (2.1) (2.2) (2.3) 式から、地震振動 $f(t)$ を与えたとき、棒 ℓ_1 の傾き角 θ を求めることが目的である。しかしこのまま議論を進めると三角関数が複雑に入り込み解析的に解くことは、ほぼ不可能になる。ここでは、棒 ℓ_1 の振動は微小振動であるとして、角度 θ , α も微小量として、近似式

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1, \quad \sin \alpha \cong \alpha, \quad \cos \alpha \cong 1 \quad (2.4)$$

を採用することにする。このとき (2.3) 式は

$$\alpha = \lambda \theta, \quad \text{ここに} \quad \lambda = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1} < 1 \quad (2.5)$$

と書き直される。ここでは、(2.3) (2.4) 式から $S_1 = \ell_0 + \ell_1$ と置いた。これらの近似式 (2.4) (2.5) を用いて (2.1) (2.2) の各式を書き直すと、

$$x = f(t) + \ell_1 \theta, \quad y = \ell_0 + \ell_1 \quad (2.6)$$

$$m\ell_1 \ddot{\theta} = -m\ddot{f} + [F + F_S \lambda - k\ell_1] \theta - c\ell_1 \dot{\theta}, \quad 0 = F + F_S - W \quad (2.7)$$

となる．この「0 =」で始まる第2式から F を求め、第1式に代入すると、

$$m\ell_1\ddot{\theta} = -m\ddot{f} - [(1-\lambda)F_S + k\ell_1 - W]\theta - c\ell_1\dot{\theta} \quad (2.8)$$

となるが、ここで式の簡素化のため、時間の逆数の次元を持つ2個の定数 ω , γ を

$$\omega^2 = \frac{1}{m\ell_1} [(1-\lambda)F_S + k\ell_1 - W], \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad (2.9)$$

と定義しておく．ここで、ばね S1 が錘を押す力 F_S は、微小振動を仮定したときばねの長さは一定なので、その力も一定になることに注意する．この2個の定数を用いて方程式 (2.8) は、

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{1}{\ell_1}\ddot{f} \quad (2.10)$$

と書き直される．これは θ に関する2階の非斉次線形微分方程式である．

2.2 方程式の解法

ここでの解析は、建築物に対し心柱がどのような効果を持つかということをテストすることが目的である．したがって、地震振動としては、最も簡単な角振動数 ω_e の単振動として、

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (2.11)$$

を仮定する．このとき方程式 (2.10) は

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{f_0\omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \quad (2.12)$$

となる．以後この方程式の一般解を求めることになるが、非斉次方程式の一般解は、斉次部分の一般解と非斉次部分の特解との和になることに注意する．ここでは先に斉次部分

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (2.13)$$

の一般解を求めることにする．この方程式で、

$$\theta = e^{\Omega t} \quad (2.14)$$

と置いて代入すると、 Ω を求めるための代数方程式

$$\Omega^2 + 2\gamma\Omega + \omega^2 = 0 \quad (2.15)$$

となり、これから Ω が、

$$\Omega = -\gamma \pm i\omega_S, \quad \omega_S = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad (2.16)$$

と決定される．ただし、ここでは、 ω は γ よりも大きいものと仮定して、この第2式で ω_S を定義している．これは (2.9) 式から分かるように、ばね S1 の強度を大きくすれば、その力 F_S はいくらでも大きくできるからである．これで方程式 (2.13) の解は

$$\theta = e^{\Omega t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega_S t} = e^{-\gamma t} [\cos(\omega_S t) \pm i \sin(\omega_S t)] \quad (2.17)$$

と得られたことになるが、この解は、実部、虚部のそれぞれが解になると言い換えることもできる。したがって、斉次方程式 (2.13) の一般解は、この実部、虚部に適当な係数 A, B を付けて、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} e^{-\gamma t} \left[A \sin(\omega_S t) + B \cos(\omega_S t) \right] \quad (2.18)$$

と得られたことになる。ここで全体に係数 f_0/ℓ_1 を付けたのは、後の式を簡素化するためで、現段階では意味はない。なお、この式がこの振動系の固有振動を表わす式で、このときの ω_S を固有角振動数と呼ぶ。

つぎに、非斉次方程式 (2.12) の特解を求めてみよう。このときの θ を

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} \left[E_1 \sin(\omega_e t) + E_2 \cos(\omega_e t) \right] \quad (2.19)$$

と置いて、方程式に代入し、両辺で $\sin(\omega_e t), \cos(\omega_e t)$ それぞれの係数合わせをすると、 E_1, E_2 を求めるための連立方程式が

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_e^2 & -2\gamma\omega_e \\ 2\gamma\omega_e & \omega^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

と得られる。これを解くと、 E_1, E_2 が

$$E_1 = \frac{\omega_e^2(\omega^2 - \omega_e^2)}{D}, \quad E_2 = -\frac{2\gamma\omega_e^3}{D}, \quad D = (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2 \quad (2.21)$$

と求められる。ここで、分母の D はこの第3式で定義するが、この D は、ダンパーが入ったために、 $\omega^2 = \omega_e^2$ のときでもゼロにならないで済むということに注意されたい。

以上で、非斉次方程式 (2.12) の一般解を書き下す準備ができた。その解は、斉次方程式の一般解 (2.18) と、非斉次方程式の特解 (2.19) に (2.21) 式の E_1, E_2 を代入したものとの和になるので、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} e^{-\gamma t} \left[A \sin(\omega_S t) + B \cos(\omega_S t) \right] + \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1 D} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega_e t) - 2\gamma\omega_e \cos(\omega_e t) \right] \quad (2.22)$$

と与えられる。この段階で残された未定定数 A, B はつぎの小節の初期条件で決めることになる。

2.3 初期条件の設定

ここでは初期条件として、地震が発生する直前まで鍾は完全静止していたものとして、

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.23)$$

と設定しておく。この2つの条件式を適用するためには、先に $x(t)$ の一般解を作っておく必要がある。このためには $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ とした (2.6) 式と (2.22) 式から、 x の一般解は

$$x(t) = f_0 e^{-\gamma t} \left[A \sin(\omega_S t) + B \cos(\omega_S t) \right] + f_0 \sin(\omega_e t) + f_0 \frac{\omega_e^2}{D} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega_e t) - 2\gamma\omega_e \cos(\omega_e t) \right] \quad (2.24)$$

となる。この式に初期条件 (2.23) を適用すると

$$B - \frac{2\gamma\omega_e^3}{D} = 0, \quad \omega_S A - \gamma B + \frac{\omega_e}{D} \left[\omega^2(\omega^2 - \omega_e^2) + 4\gamma^2\omega_e^2 \right] = 0 \quad (2.25)$$

となり，これから A, B は

$$A = -\frac{\omega_e[\omega^2(\omega^2 - \omega_e^2) + 2\gamma^2\omega_e^2]}{\omega_S D}, \quad B = \frac{2\gamma\omega_e^3}{D} \quad (2.26)$$

と求まる．これを (2.24) 式に代入すると x の最終解が，長い式になるが，

$$x(t) = f_0 \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_S D} \left[-\omega_e [\omega^2(\omega^2 - \omega_e^2) + 2\gamma^2\omega_e^2] \sin(\omega_S t) + 2\gamma\omega_S\omega_e^3 \cos(\omega_S t) \right] \\ + f_0 \sin(\omega_e t) + f_0 \frac{\omega_e^2}{D} \left[(\omega^2 - \omega_e^2) \sin(\omega_e t) - 2\gamma\omega_e \cos(\omega_e t) \right] \quad (2.27)$$

と求められる．

この式から最初に気が付くことは，どの項にも地震振動の振幅 f_0 が付くことである．これは，地震がなければ何も起こらないのだから，当然と言えば当然である．地震動から直接受ける振動は 2 項目の $f_0 \sin(\omega_e t)$ だけで，1 項目と 3 項目は，これに誘発されて起こる振動である．1 項目の角振動数 ω_S で振動する固有振動部分には減衰因子 $e^{-\gamma t}$ が付くので，その振幅は，時間の増加に伴い小さくなりゼロに近づいていく．これは真にダンパー効果と言えるものである．また，この固有振動部分の振幅の分母に ω_S が付くために $\omega_S \rightarrow 0$ になる 때가問題になる．このとき $\cos(\omega_S t)$ の方は分子にも ω_S が付くので，分母と相殺され問題は無い．しかし， $\sin(\omega_S t)$ の方は， $\lim_{\omega_S \rightarrow 0} \sin(\omega_S t)/\omega_S = t$ となるので， ω_S がゼロに近づくとき，その振幅は時間とともに増大してしまう．このため， ω_S の値はできるだけ大きくなるように設定しなければならない．

3 項目の角振動数が ω_e で振動する部分は，地震が続く限り一定振幅の振動が続くことになる．ただし，この項は，係数の分母に (2.21) 式で定義した D があり，これは γ^2 を含んでいる．それ故，この γ の値を大きくすると，この項は小さくできる．これもダンパー効果の一つである．ただし， γ の値を大きくすると (2.16) で定義した ω_S が小さくなってしまうので， ω の値をさらに大きくしなければならない．

3 心柱の振動も考慮したモデル

前節では，計算の煩雑化を避けるため，心柱自体は固有振動を起こさないものとして解析してきた．しかし，実際の心柱はそれ自体も固有の振動を起こしている．この節では，心柱も振動系本体と同じような構造を持つとしたときの解析を試みよう．

3.1 方程式の導入

ここでは次ページの図 2 に示すように，前節の振動系を 2 つ用意し，距離 ℓ_S だけ離して設置する．ただし，2 本の棒の長さ ℓ_0, ℓ_1 は，それぞれの振動系で同じとするが，ばねについては，S1, S2 とし，錘についてもその質量は m_1, m_2 としておく．さらに，ここでは，この 2 つの振動系を繋ぐものとして，ばね定数 k , 自然長がこれら 2 つの振動系の距離と同じ ℓ_S のばね S3 と，ダンパー係数 c のダンパーを取り付けておく．以下では，この図で，左にある振動系を「振動系 I」，右にある方を「振動系 II」と呼ぶことにする．

運動方程式を立てるにあたって，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，原点は地震が始まる前の振動系 I の棒の根元にとることにする．この座標設定で，振動系 I, 振動系 II の錘 m_1, m_2 の座標を，それぞれ， (x_1, y_1) , (x_2, y_2) とする．地震が起こったときは地面全体が水平方向に動くので，時刻 t における地震による

動きを, 前節に習って, $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ としておく. また, 地震が起きたときの時刻 t における錘 m_1, m_2 を付けている棒の傾き角を, それぞれ, θ, ϕ とし, ばね S1, S2 の傾き角を, それぞれ, α, β とする.

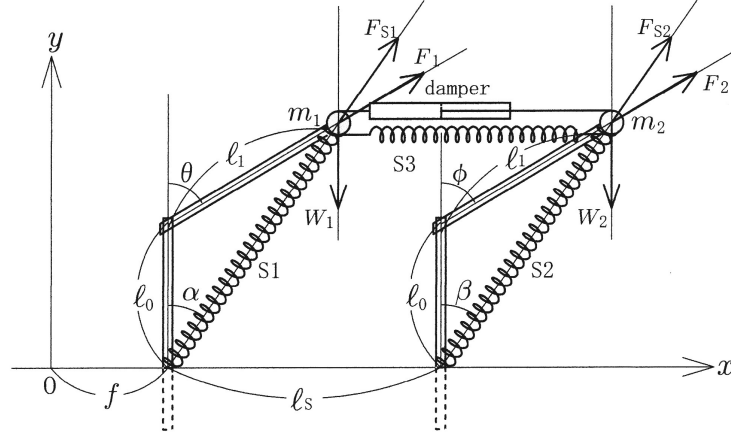


図 2 心柱の振動も考慮したモデル

この設定で, これら 2 個の錘 m_1, m_2 の座標は, それぞれ,

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0 \sin(\omega_e t) + \ell_1 \sin \theta, & y_1 &= \ell_0 + \ell_1 \cos \theta, \\ x_2 &= f_0 \sin(\omega_e t) + \ell_1 \sin \phi + \ell_s, & y_2 &= \ell_0 + \ell_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

と表わされる.

ここで, 振動系 I, 振動系 II で上に付けた棒が, これら 2 個の錘 m_1, m_2 に作用する力の大きさを, それぞれ, F_1, F_2 とする. また, 2 個のばね S1, S2 が錘 m_1, m_2 を押す力を, それぞれ, F_{S1}, F_{S2} とする. 以上の準備の基に, 振動系 I, 振動系 II の 2 個の錘の運動方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_1 \sin \theta + F_{S1} \sin \alpha + k(x_2 - x_1 - \ell_s) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & m_1 \ddot{y}_1 &= F_1 \cos \theta + F_{S1} \cos \alpha - W_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_2 \sin \phi + F_{S2} \sin \beta - k(x_2 - x_1 - \ell_s) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & m_2 \ddot{y}_2 &= F_2 \cos \phi + F_{S2} \cos \beta - W_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる. ここでは, 2 つの振動系 I, II とともに, 微小振動しか考えないので, これら振動系の間に付けたばね S3 とダンパーによる力は水平方向にしか作用しないものとし, y 方向の運動方程式には入れていない. また, y 方向の方程式に含まれる W_1, W_2 は, 錘に作用する重力で, 重力加速度 g を用いて, $W_1 = m_1 g, W_2 = m_2 g$ と書かれる.

さらに, 前節の (2.3) 式のところで述べたように, ばね S1, S2 の傾き角 α, β は, それぞれ, θ, ϕ によって決まる量で,

$$\frac{\sin \alpha}{\ell_1} = \frac{\sin \theta}{S_1}, \quad \frac{\sin \beta}{\ell_1} = \frac{\sin \phi}{S_2} \quad (3.3)$$

の関係式が成り立つ. ここに, S_1, S_2 は, それぞれ, ばね S1, S2 の装着時の長さである.

以上で, 求めるべき方程式はすべて求めたが, 以下前節同様, 2 個の振動系ともに微小振動だけを扱うことにするので, 棒の傾き角 θ, ϕ は微小量として, 三角関数の線形近似式

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1, \quad \sin \phi \simeq \phi, \quad \cos \phi \simeq 1 \quad (3.4)$$

を採用する．また，ばねの傾き角 α, β もこれに準じるものとし，このときは，2本のばねの装着時の長さ S_1, S_2 は $S_1 \simeq S_2 \simeq \ell_0 + \ell_1$ と近似されることを考慮して，(3.3) 式を

$$\alpha = \lambda \theta, \quad \beta = \lambda \phi, \quad \lambda = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1} < 1 \quad (3.5)$$

と書き換えるものとする．

以上の近似式を用いて，(3.1) (3.2) 式を書き直すと，

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0 \sin(\omega_e t) + \ell_1 \theta, & y_1 &= \ell_0 + \ell_1, \\ x_2 &= f_0 \sin(\omega_e t) + \ell_1 \phi + \ell_S, & y_2 &= \ell_0 + \ell_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

および，

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1 \ddot{\theta} &= m_1 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t) + F_1 \theta + \lambda F_{S1} \theta + k \ell_1 (\phi - \theta) + c \ell_1 (\dot{\phi} - \dot{\theta}), & 0 &= F_1 + F_{S1} - W_1, \\ m_2 \ell_1 \ddot{\phi} &= m_2 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t) + F_2 \phi + \lambda F_{S2} \phi - k \ell_1 (\phi - \theta) - c \ell_1 (\dot{\phi} - \dot{\theta}), & 0 &= F_2 + F_{S2} - W_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる．ここで「 $0 =$ 」で始まる2つの式から未知数 F_1, F_2 は，

$$F_1 = W_1 - F_{S1}, \quad F_2 = W_2 - F_{S2} \quad (3.8)$$

となるので，これを残る2式に代入し，整理すると，

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1 \ddot{\theta} &+ \left[(1 - \lambda) F_{S1} + k \ell_1 - W_1 \right] \theta + c \ell_1 \dot{\theta} - k \ell_1 \phi - c \ell_1 \dot{\phi} = m_1 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t), \\ m_2 \ell_1 \ddot{\phi} &+ \left[(1 - \lambda) F_{S2} + k \ell_1 - W_2 \right] \phi + c \ell_1 \dot{\phi} - k \ell_1 \theta - c \ell_1 \dot{\theta} = m_2 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる．これら2式の右辺にある $m_1 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t)$, $m_2 f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t)$ は，それぞれの錘に作用する地震動の慣性力である．

ここで，方程式の簡素化のための変数の置き換え，

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{m_1 \ell_1} \left[(1 - \lambda) F_{S1} + k \ell_1 - W_1 \right], & \omega_2^2 &= \frac{1}{m_2 \ell_1} \left[(1 - \lambda) F_{S2} + k \ell_1 - W_2 \right], \\ \tau_1^2 &= \frac{k}{m_1}, & \tau_2^2 &= \frac{k}{m_2}, & \gamma_1 &= \frac{c}{m_1}, & \gamma_2 &= \frac{c}{m_2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

をする．以上の仮定のもとに， θ, ϕ に関する方程式 (3.9) を行列形式にすると，

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 d/dt & -\tau_1^2 - \gamma_1 d/dt \\ -\tau_2^2 - \gamma_2 d/dt & d^2/dt^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

と書き直される．これが最終的に解くべき方程式である．なお，ここで用いた定数 $\omega_i, \tau_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$) は，すべて時間の逆次元を持つ量である．

3.2 方程式の解法

ここで求めた方程式 (3.11) は線形方程式ではあるが，そのまま解こうとすると大変面倒なことになってしまう．そこで今回はこの方程式をさらに単純化したものを解くことにし，これをそのままの形で解くことは次回以降で議論することにする．

その簡単化とは、2 個の錘の質量を同じ m とし、2 個のばね S1, S2 の強度、すなわち、自然長とばね定数を同じとしてしまうことである。このときは、 $F_{S1} = F_{S2}$ となるので、

$$\omega_1 = \omega_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} \omega \right), \quad \tau_1 = \tau_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} \tau \right), \quad \gamma_1 = \gamma_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} \gamma \right) \quad (3.12)$$

と置くことにして、方程式 (3.11) を、添え字無しの

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & -\tau^2 - \gamma d/dt \\ -\tau^2 - \gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

と置き換えることにし、以下この方程式を解くことにする。

非斉次方程式 (3.13) の一般解は、斉次部分の一般解に、非斉次部分の特解を加えたものになる。ここでは先に、斉次部分

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & -\tau^2 - \gamma d/dt \\ -\tau^2 - \gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

の一般解を求めることにする。そのため、後の式を簡素化するため無次元数 f_0/ℓ_1 を付けて

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} A_1 e^{\Omega t}, \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} A_2 e^{\Omega t} \quad (3.15)$$

とにおいて、(3.14) 式に代入すると A_1, A_2 を求めるための方程式、

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega & -\tau^2 - \gamma \Omega \\ -\tau^2 - \gamma \Omega & \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

を得る。ここで、 A_1, A_2 が両方ともゼロにならないためには、係数行列の式の値がゼロでなければならない。そのため、

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \begin{vmatrix} \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega & -\tau^2 - \gamma \Omega \\ -\tau^2 - \gamma \Omega & \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega \end{vmatrix} = (\Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega)^2 - (\tau^2 + \gamma \Omega)^2 \\ &= (\Omega^2 + 2\gamma \Omega + \omega^2 + \tau^2)(\Omega^2 + \omega^2 - \tau^2) = [(\Omega + \gamma)^2 + \omega^2 + \tau^2 - \gamma^2] [\Omega^2 + \omega^2 - \tau^2] \end{aligned} \quad (3.17)$$

と置いたとき、

$$D(\Omega) = 0 \quad (3.18)$$

でなければならない、これは簡単に解けて、

$$\Omega_{H(\pm)} = -\gamma \pm i\omega_H, \quad \Omega_{L(\pm)} = \pm i\omega_L, \quad \text{ここに,} \quad \omega_H = \sqrt{\omega^2 + \tau^2 - \gamma^2}, \quad \omega_L = \sqrt{\omega^2 - \tau^2} \quad (3.19)$$

と 4 個の解が求められる。ただしここで、 ω_H, ω_L は固有振動数になるもので、これらの定義式の平方根の中身は正とし、添え字の H, L は振動数が高い方を ω_H 、低い方を ω_L とした。なお、ここで述べたことが成立するためには、不等式

$$\omega^2 > \tau^2 > \frac{1}{2}\gamma^2 \quad (3.20)$$

が条件となることを注意しておく。

これで、(3.15) 式で導入した Ω の値として 4 個の $\Omega_{H(\pm)}$, $\Omega_{L(\pm)}$ が求められたが、これらは複素数なので、これを (3.15) 式の $e^{\Omega t}$ に代入すると、これも複素数になってしまう。しかし、ここで扱っている方程式 (3.14) は実係数の線形斉次方程式なので、これら複素数解の実部、虚部のそれぞれが解になるはずである。初めに、 $\Omega_{H(\pm)}$ を挙げると、

$$e^{\Omega_{H(\pm)} t} = e^{(-\gamma \pm i \omega_H) t} = e^{-\gamma t} [\cos(\omega_H t) \pm i \sin(\omega_H t)] \quad (3.21)$$

となるので、この実部 $e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t)$ 、虚部 $e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t)$ のそれぞれで、解を構成できるはずである。そこで、改めて、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} A_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} A_2 e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) \quad (3.22)$$

とにおいて、方程式 (3.14) に代入すると、行列の各行から、

$$\begin{aligned} \left[(-\omega_H^2 + \omega^2) A_1 - (\tau^2 - \gamma^2) A_2 \right] \sin(\omega_H t) - \gamma \omega_H (A_1 + A_2) \cos(\omega_H t) &= 0 \\ \left[(-\omega_H^2 + \omega^2) A_2 - (\tau^2 - \gamma^2) A_1 \right] \sin(\omega_H t) - \gamma \omega_H (A_1 + A_2) \cos(\omega_H t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

という式が出る。ただし、ここで、すべての項に付くファクター $e^{-\gamma t}$ は取り除いてある。この式が任意の時間 t で成立するには、 $\sin(\omega_H t)$, $\cos(\omega_H t)$ の各係数がゼロでなければならないので、この式の 1 行目から、

$$(-\omega_H^2 + \omega^2) A_1 - (\tau^2 - \gamma^2) A_2 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0 \quad (3.24)$$

という式が出る。この 2 式から、

$$A_2 = -A_1, \quad \omega_H^2 = \omega^2 + \tau^2 - \gamma^2 \quad (3.25)$$

という式が得られるが、この第 2 式は (3.19) 式で定義した ω_H そのものである。また、この第 1 式は、 θ と ϕ が逆位相で振動することを意味し、以下では、 A_1 の添え字 1 は付けずに、単に A と書き、 A_2 は $-A$ と記すことにする。なお、(3.23) 式の 2 行目の式からもまったく同じ結果が得られる。

(3.22) 式では sine 関数を用いて定義したが、これを cosine 関数に変えて

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} B_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} B_2 e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) \quad (3.26)$$

とすると、途中の計算は省略するが、まったく同じように計算ができて、結果も、sine 関数が cosine 関数に替わり、 A が B に替わるだけで、同じ形になる。これで、斉次部分の方程式 (3.14) の解として、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} [A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t)], \quad \phi = -\frac{f_0}{\ell_1} [A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t)] \quad (3.27)$$

が求まったことになる。この式から、振動数が ω_H の振動は、sine と cosine 両方ともに、 θ と ϕ とで、逆位相の振動になることが分かる。

つぎに、(3.19) 式の $\Omega_{L(\pm)}$ の方では、

$$e^{\Omega_{L(\pm)} t} = e^{\pm i \omega_L t} = \cos(\omega_L t) \pm i \sin(\omega_L t) \quad (3.28)$$

と、減衰項が付かない三角関数になる。そこで、この虚数部をとって、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} C_1 \sin(\omega_L t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} C_2 \sin(\omega_L t) \quad (3.29)$$

として、方程式 (3.14) に代入すると、

$$\begin{aligned} \left[(-\omega_L^2 + \omega^2)C_1 - \tau^2 C_2 \right] \sin(\omega_L t) + \gamma \omega_L (C_1 - C_2) \cos(\omega_L t) &= 0, \\ \left[(-\omega_L^2 + \omega^2)C_2 - \tau^2 C_1 \right] \sin(\omega_L t) + \gamma \omega_L (C_2 - C_1) \cos(\omega_L t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる．ここで、(3.23) 式のとくと同じく $\sin(\omega_L t)$, $\cos(\omega_L t)$ に付く各係数をゼロと置くと、この 2 本の式のどちらから、

$$C_1 = C_2, \quad \omega_L^2 = \omega^2 - \tau^2 \quad (3.31)$$

という式が得られる．この第 2 式は (3.19) 式の ω_L の定義そのものであり、また、第 1 式は θ , ϕ が同位相、同振幅で振動することを意味する．このときダンパーの伸縮はなくなるので、減衰することなく振動が続くことになる．以下、 C_1 , C_2 には添え字無しの C と書くことにする．

もう 1 つの解は、(3.28) 式で実数部の $\cos(\omega_L t)$ を採用した場合であるが、これは sine 関数が cosine 関数に替わるだけで、まったく同様に計算できるので、詳細は省略するが、このときの振幅は D とし、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} D \cos(\omega_L t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} D \cos(\omega_L t) \quad (3.32)$$

という解が得られる．

以上で、斉次部分の方程式 (3.14) には 4 個の解が求められたので、これらをまとめて書くと、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) \right], \\ \phi &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[-A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) - B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

と、斉次部分の一般解が求められる．ここで、減衰項 $e^{-\gamma t}$ が付く、振動数が高い部分は、 θ と ϕ が逆位相で振動するが、それに対し、減衰項が付かない、振動数が低い方は、同位相、同振幅で振動することになる．

つぎに求めなければならないのは、非斉次方程式 (3.13) の特解である．ここでは、

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} E_1 \sin(\omega_e t), \quad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} E_2 \sin(\omega_e t) \quad (3.34)$$

とて、(3.13) 式に代入すると、2 本の方程式

$$\begin{aligned} \left[(-\omega_e^2 + \omega^2)E_1 - \tau^2 E_2 - \omega_e^2 \right] \sin(\omega_e t) + \gamma \omega_e (E_1 - E_2) \cos(\omega_e t) &= 0, \\ \left[(-\omega_e^2 + \omega^2)E_2 - \tau^2 E_1 - \omega_e^2 \right] \sin(\omega_e t) + \gamma \omega_e (E_2 - E_1) \cos(\omega_e t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

を得る．ここで、 $\sin(\omega_e t)$, $\cos(\omega_e t)$ の各係数をゼロと置くと、これら 2 本の式のどちらから、

$$E_1 = E_2, \quad E_1 = \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \tau^2 - \omega_e^2} \quad (3.36)$$

という、同じ式を得る．以下では、 ω_L の定義式 (3.19) を用いて、この式を

$$E_1 = E_2 = \frac{\omega_e^2}{\omega_L^2 - \omega_e^2} \equiv E \quad (3.37)$$

とおくことにする．ここで，低い方の固有振動数 ω_L が地震の振動数 ω_e と等しいときは分母がゼロとなり発散してしまう．このことに関しては後で詳しく述べることにする．

これで非斉次方程式 (3.13) の特解 (3.34) 式が求められたので，その一般解は，この特解を斉次部分の一般解 (3.33) 式に加えるとよく，

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) + E \sin(\omega_e t) \right], \\ \phi(t) &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[-A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) - B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) + E \sin(\omega_e t) \right]\end{aligned}\quad (3.38)$$

と求まったことになる．ここで，5 個の係数 A, B, C, D, E のうち， E だけは (3.37) 式で決定済みであるが，残る 4 個の係数は未決定である．この残りの係数は，次節の初期条件から決めることになる．

3.3 初期条件の設定

θ, ϕ の一般解が求まったので，(3.6) 式から，2 個の錘の x 座標が，

$$\begin{aligned}x_1(t) &= f_0 \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) + (1 + E) \sin(\omega_e t) \right], \\ x_2(t) &= f_0 \left[-A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) - B e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + D \cos(\omega_L t) + (1 + E) \sin(\omega_e t) \right] + \ell_S\end{aligned}\quad (3.39)$$

と求められる．ここでは，地震が始まる前は，2 個の錘を支える棒は両方とも真つすぐに立っていたものとして，

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \ell_S \quad (3.40)$$

という初期条件を設定しておく．これを (3.39) 式に適用すると，

$$B + D = 0, \quad -B + D = 0, \quad \text{すなわち,} \quad B = D = 0 \quad (3.41)$$

となるので，(3.39) 式は少し簡単になり，

$$\begin{aligned}x_1(t) &= f_0 \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + (1 + E) \sin(\omega_e t) \right], \\ x_2(t) &= f_0 \left[-A e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + C \sin(\omega_L t) + (1 + E) \sin(\omega_e t) \right] + \ell_{12}\end{aligned}\quad (3.42)$$

と書き換えられる．

つぎに初速度の設定であるが，2 個の錘の両方とも静止していたとすると，(3.42) 式の中の係数 A がゼロになってしまい，高い方の振動数 ω_H の振動が消えてしまう．これではせっかくダンパーを付けた意味がなくなる．それ故ここでは，振動系 I の方の錘だけが初速度 v_0 を持っていたとして

$$\dot{x}_1(0) = v_0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (3.43)$$

とおくことにする．この条件を (3.42) 式に適用すると，

$$\begin{aligned}f_0 \left[A \omega_H + C \omega_L + (1 + E) \omega_e \right] &= v_0, \\ f_0 \left[-A \omega_H + C \omega_L + (1 + E) \omega_e \right] &= 0\end{aligned}\quad (3.44)$$

となり、これから A, C を

$$A = \frac{v_0}{2f_0\omega_H}, \quad C = \frac{v_0 - 2f_0(1+E)\omega_e}{2f_0\omega_L} \quad (3.45)$$

と求めて、(3.42) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{v_0}{2\omega_H} e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + \frac{v_0 - 2f_0(1+E)\omega_e}{2\omega_L} \sin(\omega_L t) + f_0(1+E) \sin(\omega_e t), \\ x_2(t) &= -\frac{v_0}{2\omega_H} e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + \frac{v_0 - 2f_0(1+E)\omega_e}{2\omega_L} \sin(\omega_L t) + f_0(1+E) \sin(\omega_e t) + \ell_S \end{aligned} \quad (3.46)$$

と最終解が求められる。この結果から分かることは、2 つある固有振動のうち、振動数が高い方 ω_H の振動は、ダンパーによる減衰ファクター $e^{-\gamma t}$ が付くので、 θ から ϕ から、時間が経つと消えてしまい、振動数が低い方 ω_L の振動だけが残ることになる。

なお、(3.37) 式から

$$1 + E = \frac{\omega_L^2}{\omega_L^2 - \omega_e^2} \quad (3.47)$$

となるので、(3.46) 式の右辺、2 項目、3 項目のうち、この $1 + E$ を含む部分は、

$$f_0(1+E) \left[\sin(\omega_e t) - \frac{\omega_e}{\omega_L} \sin(\omega_L t) \right] = f_0\omega_L \frac{\omega_L \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega_L t)}{\omega_L^2 - \omega_e^2} \quad (3.48)$$

と変形されるので、l'Hôpital の定理を用いて、 $\omega_L \rightarrow \omega_e$ の極限をとると、

$$\lim_{\omega_L \rightarrow \omega_e} f_0\omega_L \frac{\omega_L \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega_L t)}{\omega_L^2 - \omega_e^2} = \frac{f_0}{2} [\sin(\omega_e t) - \omega_e t \cos(\omega_e t)] \quad (3.49)$$

となって、時間とともに発散してしまう、つまり、共振が起こる。このようなことは避けなければならない。そのためには、 ω_L^2 と ω_e^2 は一致しないようにしなければならないが、地震振動の周期 ω_e には、大小種々の値が有りえるので、振動系の設計段階で、 ω_L の値ができるだけ小さくなるようにして、

$$\omega_L^2 \ll \omega_e^2 \quad (3.50)$$

となるようにするのが良いと考えられる。このとき、(3.47) 式から、 $1 + E$ は負になるので、地震から直接受けられる強制振動項 $f_0(1+E) \sin(\omega_e t)$ は、地震とは逆位相の振動になる。

ここで参考までに、初期条件をさらに一般化して、

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} + \ell_S, \quad \dot{x}_1(0) = v_{10}, \quad \dot{x}_2(0) = v_{20} \quad (3.51)$$

としたときの解は、途中の計算過程は省くが、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{v_{10} - v_{20} + \gamma(x_{10} - x_{20})}{2\omega_H} e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) + \frac{x_{10} - x_{20}}{2} e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) \\ &\quad + \frac{v_{10} + v_{20} - 2f_0(1+E)\omega_e}{2\omega_L} \sin(\omega_L t) + \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \cos(\omega_L t) + f_0(1+E) \sin(\omega_e t), \\ x_2(t) &= -\frac{v_{10} - v_{20} + \gamma(x_{10} - x_{20})}{2\omega_H} e^{-\gamma t} \sin(\omega_H t) - \frac{x_{10} - x_{20}}{2} e^{-\gamma t} \cos(\omega_H t) \\ &\quad + \frac{v_{10} + v_{20} - 2f_0(1+E)\omega_e}{2\omega_L} \sin(\omega_L t) + \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \cos(\omega_L t) + f_0(1+E) \sin(\omega_e t) + \ell_S \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる．これから，減衰項 $e^{-\gamma t}$ が付く項は， x_1 と x_2 とで，逆符号になるが，減衰項が付かない項は， x_1 と x_2 とで，同符号になる．この減衰項が存在するのは，2つの振動系に初期条件における差異があった場合だけで，十分に時間が経過した後では，これらの項は消えてしまうので，残るのは固有振動のうち低い方 ω_L の振動と地震から直接受ける ω_e の振動のみとなる．

4 おわりに

今回の2節では，1つの振動系と，それ自体はまったく振動しないものを心柱として，これらをばねとダンパーで繋ぎ地震時の振動を解析した．この結果は，ダンパー効果がうまく表現されたものになり，成功例と言えるものになった．しかし，実際の心柱はそれ自体も振動をしている．そこで次の3節では，2つの振動系ⅠとⅡを，ばねとダンパーで繋いだモデルを設定し，ダンパーの働きを理解することを目的とした．ただしここでは，できるだけ簡単に解けるようにとの思いから，振動系Ⅰと振動系Ⅱとで，錘の質量，および，ばねの強度を同じにして，実行してみた．しかしながら，結果は散々たるもので，2つの振動系をまったく同じ構造にしてしまうと，これら振動系が，地震が起きる前，両方とも静止していたとすると，地震後は，同周期，同位相，同振幅で振動してしまう．これでは，ダンパーは伸び縮みすることなく左右に動くだけで，ダンパーを付けた意味がなくなってしまう．つまり，ダンパー効果を出すためには，2つの振動系に何かの違いがなければならない．ここではそれがなくなってしまったので，初期条件に違いを持たせ，無理にダンパー効果を出したということである．以上のことを知らしめてくれたという意味では，失敗作とも言えないのだが，次回は2つの振動系Ⅰ，Ⅱに構造的違いを持たせた解析を試みるつもりである．しかし，どの程度，成功するかは，いまのところ未知数である．

話は変わるが，東京タワー（竣工 1958 年，高さ 333 m）やパリのエッフェル塔（竣工 1889 年，高さ 330 m）は裾広がり形状になっていて，地震や風に対して倒れにくくなっている．それに対し，東京スカイツリー（竣工 2012 年，高さ 634 m）は高さが2倍近くもあるのに，全体が細そりとした形状になっていて．これでは地震や台風に遭ったとき倒れるのではないかと心配になってくる．そのための対策はいくつかとってあり，1つ目に，地下に非常に大きな基礎部分が付いていること，2つ目に，塔の中心に，高さ 375m 直径 8m の鉄筋コンクリート製の円筒形心柱が付いていて，この心柱と塔部分が96個ものダンパーで繋がれていること，3つ目に，溶接技術の進歩で鉄塔の接続部分が強固になったこと，などが挙げられる．それと，コンピュータとシミュレーターが進歩したおかげで，設計段階における模擬テストが詳しくできるようになったことが挙げられる．ということで，塔として世界一高い東京スカイツリーではあるが，地震と台風が多い日本においても，倒壊の心配はないものと安心してよいのであろう．

シングル j 殻モデルにおける超伝導 (2)

——変形とエネルギーギャップ——

Superconductivity in the Single- j Shell Model (2)

– Shape Deformation and Energy Gap –

岩崎正春 *

Masaharu IWASAKI

1 はじめに一変形と超伝導

超伝導はフェルミオン多体系に共通する普遍的な概念である。その一つの原子核は「有限量子多体系」という物性の多体系と違った多体系であることからくる新しい超伝導状態が期待される。そのため有限多体系のモデルとして比較的正確な取り扱いが可能な「シングル j 殻モデル」を用いて原子核超伝導を調べるシリーズを始めた。前論文 [1] (論文 I と記す) では最も簡単な対相互作用のみが存在する場合を、厳密解および平均場近似 (BCS 理論) を用いて調べた。両者を比較することにより、基底状態は対相互作用の大きさにかかわらず粒子対の凝縮した状態 (BCS 状態) で表されることがわかった。またこの場合、厳密解と比べ N^{-1} の誤差の範囲で一致することも示された。

今回の論文ではより現実的な相互作用の下で超伝導状態がどうなるかを調べる。具体的には原子核でよく使われる「対相関 + 四重極力模型」を採用し、超伝導状態がどう変化するかを検討した [2]。対相関力が核を球形にするのに対して、逆に四重極力は核を四重極変形させる力である。対相関力だけなら論文 I で明らかにされたように、核は常に球形になることがわかる。一方、四重極力を加えることにより核は四重極変形することが期待される。そのとき球形-変形の相互転移の振る舞いはどうなっているのだろうか。このことを解明することが本論の目標である。なお以後四重極変形を単に変形と表し、記号等は論文 I のものを踏襲する。

* 高知大学名誉教授 (miwasaki@cure.ocn.ne.jp)

2 対相関＋四重極力模型

シングル j 殻模型において，粒子間に対相互作用および四重極相互作用するハミルトニアンは次のように表される．

$$H = \sum_m \varepsilon_0 a_m^\dagger a_m - \frac{G}{4} P_0^\dagger P_0 - \frac{\chi}{2} \sum_\mu Q_\mu^\dagger Q_\mu \quad (2.1)$$

右辺の第 1 項は一粒子エネルギー（縮退している）を表し，第 2 項が対相互作用，最後の項が今回新たに導入する四重極相互作用を表す．定数 G_0 および χ はそれぞれの相互作用の強さを表し，正の数であると仮定する．ここに現れる粒子対演算子は次式で定義されている．

$$P_0^\dagger = \sum_m a_m^\dagger s_m a_{-m}^\dagger \quad (2.2)$$

右辺の位相因子は $s_m \equiv (-1)^{j-m}$ を意味する．また今回，新たに導入する密度型の対演算子，

$$Q_\mu^\dagger = \sum_m \sum_{m'} (jm \ j - m' | 2\mu) s_{m'} a_m^\dagger a_{m'} \equiv \sum_{m,m'} q_{mm'}^\mu a_m^\dagger a_{m'} \quad (2.3)$$

は系の四重極能率を表している．右辺の括弧で表された量はクレブシュ-ゴルダン係数である．ハミルトニアン (2.1) に対して平均場近似を導入しよう．各項の平均値（基底状態の期待値）を次式で定義する．

$$\Delta \equiv \frac{G_0}{2} \langle P_0 \rangle = \frac{G_0}{2} \sum_m s_m \langle a_{-m} a_m \rangle \quad (2.4)$$

および

$$\bar{Q}_\mu \equiv \langle Q_\mu^\dagger \rangle = \sum_{m,m'} q_{m,m'}^\mu \langle a_m^\dagger a_{m'} \rangle \quad (2.5)$$

ここで通常よく採用される回転楕円型の変形を仮定する．つまり，平均値として書くつつぎのようになる．

$$\bar{Q}_\mu = \delta_{\mu,0} \bar{Q}_0 \quad (2.6)$$

各対演算子を「平均値＋ゆらぎ」の形に変形する．

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle P_0 \rangle + (P_0 - \langle P_0 \rangle) \equiv \langle P_0 \rangle + \delta P_0 \\ Q_0 &= \langle Q_0 \rangle + (Q_0 - \langle Q_0 \rangle) \equiv \langle Q_0 \rangle + \delta Q_0 \end{aligned}$$

これらをハミルトニアン (2.1) へ代入し，ゆらぎの 2 次の項を無視すると次式を得る．

$$\begin{aligned} H' &\equiv H - \lambda \sum_m a_m^\dagger a_m \\ &= \mathcal{E}_0 + \sum_m \tilde{\varepsilon}_m a_m^\dagger a_m - \frac{1}{2} \sum_m (\Delta s_m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger + \Delta s_m a_{-m} a_m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

右辺の第 1 項は基底状態のエネルギーを表し，次式で定義される．

$$\mathcal{E}_0 \equiv \frac{1}{G_0} \Delta^2 + \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 \quad (2.8)$$

また、第2項の $\tilde{\varepsilon}_m$ は相互作用により補正された1粒子エネルギーを表している。

$$\tilde{\varepsilon}_m \equiv \varepsilon_m - \lambda \equiv \varepsilon_0 - \lambda - \chi \bar{Q}_0 q_m \quad (2.9)$$

ここで λ は化学ポテンシャルである。また、 $q_{m,m}^0 \equiv q_m$ と略記した。

さて、我々のハミルトニアン (2.7) を通常の手続きで対角化しよう。ボゴリユーボフ変換

$$a_m = u_m \alpha_m + v_m s_m \alpha_{-m}^\dagger \quad (2.10)$$

により準粒子の生成消滅演算子を導入し、(2.7) へ代入して準粒子の自由粒子系に変換する。そのためにはボゴリユーボフ変換係数が次式を満たせばよい。

$$u_m^2 + v_m^2 = 1, \quad \tilde{\varepsilon}_m u_m v_m - \frac{\Delta}{2} (u_m^2 - v_m^2) = 0$$

この連立方程式の解は次式で与えられる。

$$u_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m} \right), \quad v_m^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m} \right)$$

結局、系のハミルトニアン (2.1) はつぎのように書ける。

$$H' = \mathcal{E}_0 + \sum_m E_m \alpha_m^\dagger \alpha_m \quad (2.11)$$

E_m は1個の準粒子のエネルギー $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_m^2 + \Delta^2}$ を表し、基底状態の補正されたエネルギーは次式で与えられる。

$$\mathcal{E}_0 \equiv \sum_m \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m} \right) + \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 - \frac{\Delta^2}{G_0} \quad (2.12)$$

ここまでをまとめてみよう。対相関-四重極力モデルでは平均場近似により四重極変形場の中の準粒子の集まりとなった。ただし、エネルギーギャップや変形パラメータはまだ決まっていないので系は超伝導状態か、また変形しているかどうかは不明である。それらを調べるためには自己無撞着条件の方程式を解かなければならない。

3 自己無撞着方程式

前節の平均場理論においてまだ決められていないパラメーターとして、エネルギーギャップ Δ 、変形度 $\bar{Q}_0$ および化学ポテンシャル λ の3つが残されている。これらを決める自己無撞着方程式 (2.4), (2.5) および粒子数の条件を改めて書くと、

$$\Delta = \frac{G_0}{2} \sum_m \langle s_m a_{-m} a_m \rangle = \frac{G_0}{2} \sum_m u_m v_m = \frac{G_0}{4} \sum_m \frac{\Delta}{E_m} \quad (3.1)$$

$$\bar{Q}_0 = \sum_m q_m \langle a_m^\dagger a_m \rangle = \sum_m q_m v_m^2 = \frac{1}{2} \sum_m q_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m} \right) \quad (3.2)$$

$$N = \sum_m \langle a_m^\dagger a_m \rangle = \sum_m v_m^2 = \frac{1}{2} \sum_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m} \right) \quad (3.3)$$

最後の方程式が粒子数の自己無撞着式に対応している．我々の課題は 3 つの未知数 $\Delta, \bar{Q}_0, \lambda$ を上記連立方程式から求めることにある．連立方程式を解く前にそれぞれの極限の場合について調べておく．

(i) $G_0 = 0$ の場合：

このとき方程式 (3.1) は $\Delta = 0$ となりエネルギーギャップをもたない．残りの方程式はつぎのようになる．

$$\bar{Q}_0 = \frac{1}{2} \sum_m q_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{|\tilde{\varepsilon}_m|} \right) = \sum_{\varepsilon_m < \lambda} q_m \equiv A \quad (3.4)$$

$$N = \frac{1}{2} \sum_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{|\tilde{\varepsilon}_m|} \right) = \sum_{\varepsilon_m < \lambda} 1 \quad (3.5)$$

つまり個々の粒子は，一粒子エネルギーが化学ポテンシャル λ より小さい状態を占有することになる．このときの変形度を A と表す．ただし，占有の仕方に 2 通りある．prolate 型と oblate 型であり，全エネルギーの低いほうが実現されるが，ここではその議論は省く．基底状態のエネルギーはつぎのようになる．

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\varepsilon_m < \lambda} \tilde{\varepsilon}_m + \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 = \sum_{\varepsilon_m < \lambda} \varepsilon_m + \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 - \lambda N$$

したがって全系のエネルギーは

$$\mathcal{E}_0 + \lambda N = \sum_{\varepsilon_m < \lambda} \varepsilon_0 - \chi \bar{Q}_0 \sum_{\varepsilon_m < \lambda} q_m + \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 = \varepsilon_0 N - \frac{\chi}{2} \bar{Q}_0^2 \quad (3.6)$$

となり，これはハートリー近似の基底状態のエネルギーになっている．四重極力のため系は常に四重極変形している．

(ii) $\chi = 0$ の場合：

この場合は論文 I の復習になるが，連立方程式は

$$\Delta = \frac{G_0}{4} \sum_m \frac{\Delta}{E_0} \quad (3.7)$$

$$\bar{Q}_0 = \frac{1}{2} \sum_m q_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{E_0} \right) \quad (3.8)$$

$$N = \frac{1}{2} \sum_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{E_0} \right) \quad (3.9)$$

となる．右辺に出てくる $E_0 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_0^2 + \Delta^2}$ は準粒子のエネルギーを表す．恒等式 $\sum q_m = 0$ に注意すると，第 2 方程式は $\bar{Q}_0 = 0$ となり系は球形になる．残りの方程式からはギャップ Δ と化学ポテンシャル λ が求まる．

$$\Delta = \frac{G_0 \Omega}{2} \sqrt{\frac{N}{\Omega} \left(1 - \frac{N}{\Omega} \right)} \quad (3.10)$$

$$\lambda = \varepsilon_0 - \frac{G_0}{4} (\Omega - 2N) \quad (3.11)$$

右辺の $\Omega \equiv 2j + 1$ はこのモデルの全状態数を表している．このとき系は常にギャップをもち，球形になっていることがわかる．また，ギャップと準粒子エネルギーの比は

$$\frac{\Delta}{E_0} = 2\sqrt{\frac{N}{\Omega} \left(1 - \frac{N}{\Omega}\right)} \quad (3.12)$$

となり対相互作用の強さに無関係となる．

4 変形とエネルギーギャップの関係 — 相図

さて，いよいよ一般の場合の考察に移ろう．3個の連立方程式 (3.1), (3.2) および (3.3) は粒子数 N ，力の強さ G_0, χ 等を与えて $\Delta, \bar{Q}_0, \lambda$ を求める形になっている．改めて整理して書き直すと，

$$\frac{4}{G_0} = \sum_m \frac{1}{E_m} \quad (4.1)$$

$$\bar{Q}_0 = \frac{1}{2} \sum_m q_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m}\right) \quad (4.2)$$

$$N = \frac{1}{2} \sum_m \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{E_m}\right) \quad (4.3)$$

粒子数 N ，四重極力の強さ χ を一定に保って考える．対相互作用の強さ G_0 が零から大きくなり，エネルギーギャップが非負になる境界の値 $G_0^{(1)}$ を求めておく．ギャップ方程式 (4.1) において $\Delta = 0$ と置くと，

$$\frac{4}{G_0} = \sum_m \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_m|} \equiv \frac{4}{G_0^{(1)}} \quad (4.4)$$

右辺は一粒子状態が連続の場合無限大になり，どんなに小さい引力でも超伝導になるが，今の場合一粒子状態は離散的だから有限になる．つまり相互作用の強さが $0 < G_0 < G_0^{(1)}$ において正常状態（ハートリー状態で変形度は $\bar{Q}_0 = A$ ）， $G_0^{(1)} < G_0$ において超伝導状態になっている．

つぎに超伝導状態（ $G_0 > G_0^{(1)}$ ）において状態はどう変化するか議論しよう．上記連立方程式で G_0 が現れるのは第1式の左辺のみであることに注意しよう．そこで見方を変えて第一式を G_0 を決める式とみなす．つまり，独立変数を G_0 からギャップ Δ に変える．第二，三式から $\bar{Q}_0, \lambda$ を Δ の関数として求めることになる．第2式の変分をとると次式が得られる．

$$\delta \bar{Q}_0 = \sum_m \frac{q_m}{2E_m^3} \{ \Delta^2 (\delta \lambda + \chi q_m \delta \bar{Q}_0) + \Delta (\varepsilon_0 - \lambda - \chi q_m \bar{Q}_0) \delta \Delta \} \quad (4.5)$$

同様に第3式の変分から

$$\delta N = \sum_m \frac{1}{2E_m^3} \{ \Delta^2 (\delta \lambda + \chi q_m \delta \bar{Q}_0) + \Delta (\varepsilon_0 - \lambda - \chi q_m \bar{Q}_0) \delta \Delta \} = 0 \quad (4.6)$$

いま粒子数一定としているから $\delta N = 0$ である．ここで次の重要な近似を行う．

$$\sum_m \frac{q_m}{E_m^3} \approx 0 \quad (4.7)$$

左辺の和の中の項の分母 E_m が m に依存しなければこの式は厳密に正しい．実際はこの依存性は弱いのでこの論文ではこの近似を採用する．(4.6) に上の近似を施すと次の簡単な関係が得られる．

$$\Delta \delta \lambda + (\varepsilon_0 - \lambda) \delta \Delta = 0$$

この式を (4.5) へ代入して $\delta \lambda$ を消去すると次式が得られる．

$$\delta \bar{Q}_0 = \sum_m \frac{q_m}{2E_m^3} \{ \Delta^2 \chi q_m \delta \bar{Q}_0 - \Delta \chi q_m \bar{Q}_0 \delta \Delta \}$$

これを微分方程式に書きなおすと、

$$\frac{d\bar{Q}_0}{d\Delta} = - \left(\chi \sum_m \frac{q_m^2}{2E_m^3} \Delta \bar{Q}_0 \right) \left(1 - \chi \sum_m \frac{q_m^2}{2E_m^3} \Delta^2 \right)^{-1} \quad (4.8)$$

この微分方程式は見かけと異なり複雑な形をしていることに注意しよう．なぜなら右辺の E_m 中にもまた $\bar{Q}_0$ と Δ が含まれているからである．しかし、もし仮に右辺に出てくる級数が定数 K と近似できるとするとこの微分方程式は簡単に解ける．つまり微分方程式 (4.8) はつぎのように書ける．

$$\frac{d\bar{Q}_0}{d\Delta} = - \frac{K \Delta \bar{Q}_0}{1 - K \Delta^2} \quad (4.9)$$

この微分方程式は変数分離型なので簡単に解ける．右辺は特異点 $\Delta_c \equiv K^{-1/2}$ を含むので、領域に分けて考える． $0 < \Delta < \Delta_c$ において、

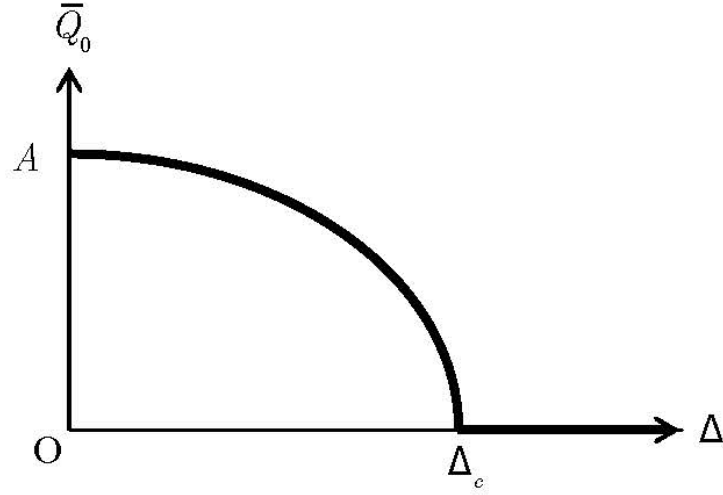
$$\bar{Q}_0 = C \sqrt{1 - K \Delta^2} \quad (4.10)$$

右辺の積分定数 C は $\Delta = 0$ での条件および (3.4) より $C = A$ となる．また、 $\Delta_c < \Delta$ においては

$$\bar{Q}_0 = C' \sqrt{K \Delta^2 - 1} \quad (4.11)$$

となるが、(3.2) より $\Delta \rightarrow \infty$ での極限が $\bar{Q}_0 \rightarrow 0$ となるから $C' = 0$ としなければならない．最終的に $\bar{Q}_0$ と Δ の関係は次頁の概略図で表される．

一般の場合、 K は変数であるから微分方程式 (4.8) は数値計算に頼らざるを得ない．図の実際の曲線はつぎのように描かれる．微分方程式を差分方程式で近似する．初期値 ($\Delta = 0, \bar{Q}_0 = A$) から順次繰り返し計算により曲線を求めていく．そのとき同時に方程式 (4.1) により対相互作用の強さ G_0 を求める．結果として 2 つの関係式 $\bar{Q}_0(\Delta)$ および $G_0(\Delta)$ を得たことになる．逆に相互作用の強さ G_0 が与えられた場合、上記の関係式から対応するギャップ Δ と変形 $\bar{Q}_0$ を求めることができる．



最後に系の変形が零になる臨界点のギャップの値 Δ_c とそれに対応する対相互作用の強さ $G_0^{(2)}$ を求めておこう．臨界点は微分方程式 (4.8) の右辺が発散する点であるから

$$1 - \frac{\chi}{2} \sum_m \frac{q_m^2}{E_0^3} \Delta^2 = 1 - \frac{\chi}{2} \frac{\Delta^2}{E_0^3} = 0 \quad (4.12)$$

右辺では恒等式 $\sum_m (q_m)^2 = 1$ を用いた．この方程式の解が Δ_c を与える．つまり上式から方程式

$$\frac{2}{\chi} = \frac{\Delta^2}{(\tilde{\varepsilon}_0^2 + \Delta^2)^{3/2}} \quad (4.13)$$

を解けばその解が臨界値 Δ_c である．従って臨界点でのエネルギーギャップは四重極力が大きくなると小さくなる．これを (4.1) へ代入すると臨界点を与える対相互作用の強さ $G_0^{(2)}$ を求めることができる．

$$\frac{1}{G_0^{(2)}} = \sum_m \frac{1}{4\sqrt{\tilde{\varepsilon}_m^2 + \Delta_c^2}} = \frac{\Omega}{4\sqrt{\tilde{\varepsilon}_0^2 + \Delta_c^2}} \quad (4.14)$$

右辺の Ω は系の全状態数である．

5 まとめ

最後に、この論文において得られた結論をまとめておこう．シングル j 殻模型において、対相互作用に四重極相互作用を加えることにより系の基底状態がどのように変化するか議論した．議論の進め方として四重極力の強さ χ を一定に保ち対相互作用の強さ G_0 を変化させ、エネルギーギャップと変形度がどのように変わっていくかに注目した．このモデルでは 2 種類の相転移が存在する．一つは超伝導であり、他は系の変形度である．それぞれの秩序変数は前者がエネルギーギャップ Δ であり、後者は変形度 $\bar{Q}_0$ である．それらの振る舞いは対相互作用の強さとともに次のようにまと

めることができる.

$$\begin{array}{ccc} 0 < G_0 < G_0^{(1)} & G_0^{(1)} < G_0 < G_0^{(2)} & G_0^{(2)} < G_0 \\ \hline \Delta = 0 & \Delta \neq 0 & \Delta \neq 0 \\ \bar{Q}_0 = A \neq 0 & \bar{Q}_0 \neq 0 & \bar{Q}_0 = 0 \end{array}$$

特にエネルギーギャップが大きくなるにつれ変形度は単調に減少し, ある点で系は球形に転移することが示された. 本論文では平均場近似を用いて基底状態のみについて調べたが, 励起状態については次回に取り上げる予定である.

参考文献

- [1] 岩崎正春, 数学・物理通信, 13巻3号 (2023.6) 11-18
- [2] 高木修二, 丸森寿夫編, 『原子核論』(岩波講座 現代物理学の基礎 (第2版) 9)

代数の基礎

矢野 忠^{*1}

Foundation of Algebra

Tadashi YANO

1 はじめに

2024 年 4 月から愛媛県退職教員組合の行っている「ただ塾」の中学校数学の教師となった。この塾に来る生徒にはなかなか塾に来たときに私のする数学の話を聞いてもらえないという状況が続いている。それでもなんとか話を聞いてもらえる工夫を試みてはいるのだが、まだ成功したとは言えない。そういう試みの一環としてこの学習資料をつくった。

さらに、これは以前につくった e-Learning のコンテンツ「代数」の 3 章にかなりの追加と変更を加えたものである [1]。

2 代数とは

中学校ともなると代数を学ぶようになる。それでまず国語辞典 [2] で数学とは、代数とは、数式とはどういうものかとの説明がされているかを調べた。

数学とは

数・量・図形・関数などの性質や相互の関連およびそれらの間に成立する法則を研究する学問（得られた結果の全体を論理的体系にまとめる努力が行われる。扱う対象により、代数・幾何・解析の三大部門に分かれる）

1. 代数

代数学の略。数の代わりに文字を記号として使い、数の性質や関係を研究する学問

2. 幾何

幾何学の略。数学の一部門。物の形・大きさ・位置、その他一般に空間に関する性質を研究する学問

3. 解析

解析学の略。代数学・幾何学に対し、極限の概念を基礎として研究する数学の諸部門

式とは

1. 一定の順序・作法で行う行事。儀式

2. 前から決まっている、一定のやりかた

3. 数式（の略）

- [数学で] その（数量を求め）計算の手順を簡潔に表すために、数字・文字と加減乗除等の演

^{*1} 元愛媛大学工学部

算記号とを一定の約束にしたがって書き連ねたもの

- [数学・物理学・化学などで] その関連を連ねて書いたもの [等号・不等号など2つのものの間の関係を表す記号を含む]

数式とは

数・量を表す数字や文字を、演算の記号で結びつけ、全体が数学的に意味があるもの

3 文字は何を表すか

代数では、 a, b, c, t, x, y, z 等の文字をもちいて数を表す。とりあえずはこれらの文字は実数を表すことにするが、次第に複素数も表すことが多くなる*²。

では、文字はどのような数を表すか。

1. 定数

定数にはパラメーター（任意定数）と未知数（未知の定数）とがある

2. 変数

変数には独立変数と従属変数（関数）とがある

4 等式の種類と性質

まず等式 (equation) には2つの種類がある*³。それは

1. 恒等式 (identity)

2. 方程式 (equation)

である*⁴

英語の equation は一般的な等式の意味にも方程式の意味にも使われる。これらの例を挙げて説明をしよう。

$$m(a+b) = ma + mb \quad (4.1)$$

は等式の両辺で m, a, b にどんな (任意の) 値を代入しても成り立つので、恒等式といわれる。

一方

$$3x + 4 = 7 \quad (4.2)$$

は $x = 1$ のときにしか等号は成立しない。それでこのような等式を方程式という。このとき、文字 x は未知の定数を表しており、この未知の定数を求めることを方程式を解くという。

*² 実数 a は $a^2 \geq 0$ の数である。実数でない数 $b^2 < 0$ の数もあるが、それらと実数とを合わせた数を複素数という。複素数は二つの実数 a, b を用いて $a + bi$, ($i = \sqrt{-1}$) と表される。

*³ この節の内容は [3] の記述に大いに依拠している。

*⁴ 等式に対応した不等式には

1. 絶対不等式

2. 条件付き不等式

がある。もちろん、絶対不等式が恒等式に対応し、条件付き不等式が方程式に対応している。

(4.1) は数や量といった “もの” を表すが, (4.2) は “2 つのもののどうしの関係 (相等、大小)” を表す.

(4.1) は英語の文法のフレーズ (句, phrase) に相当し, (4.2) はセンテンス (文, sentence) に相当する. フレーズは「何々に何々して … したもの」という名詞句 (noun phrase) であり, センテンスは「何々が何々に等しい」といった内容であり, 主部と述部からできている.

恒等式はフレーズ型の式であり, 方程式はセンテンス型の式である. またはフレーズ型の式は「ものやことを表す式」, センテンス型の式は「命題を表す式」といってもよい.

まとめると

恒等式: フレーズ型の式であり, ものやことを表す式である

方程式: センテンス型の式であり, 命題を表す式である

である.

例として, (4.1) を言葉で表せば, 「 a と b とをたしたものに m をかけたもの」となり, (4.2) を言葉で表せば, 「 x を 3 倍して 4 を足したものは 7 に等しい」となる. フレーズ型の式とセンテンス型の式という意味がこの例によって少しは理解できただろうか.

数式を変形するルールは

1. 恒等式を変形するときのルール
2. 方程式を変形するときのルール

とがある.

それぞれの数式変形のルールについて説明をしよう.

4.1 恒等式の変形のルール

まずはじめに

(a) 恒等式の変形のルール

1. 交換法則

$$a + b = b + a \quad (4.3)$$

$$ab = ba \quad (4.4)$$

2. 結合の法則

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (4.5)$$

$$a(bc) = (ab)c \quad (4.6)$$

3. 分配の法則

$$m(a + b) = ma + mb \quad (4.7)$$

4. 倍分と約分

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \quad (\text{倍分}) \quad (4.8)$$

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}, \quad (m \neq 0) \quad (\text{約分}) \quad (4.9)$$

5. 指数法則

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a > 0) \quad (4.10)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (a > 0) \quad (4.11)$$

$$(ab)^m = a^m b^m, \quad (a > 0, b > 0) \quad (4.12)$$

6. 対数法則

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \quad (a \neq 1, a > 0, x > 0) \quad (4.13)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \quad (a \neq 1, a > 0, x > 0, y > 0) \quad (4.14)$$

$$\log_a x^m = m \log_a x, \quad (a \neq 1, a > 0, x > 0, y > 0) \quad (4.15)$$

三角関数の公式も同様に恒等式の変形に用いられる．たとえば，加法定理や倍角公式，また半角公式等が知られている．

7. 三角関数の公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.16)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.17)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (4.18)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (4.19)$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (4.20)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (4.21)$$

これらはすべて三角関数の公式はすべて恒等式の変形に用いられる*5。

8. 公式として知られているものは恒等式の変形にすべて使うことができる。

*5 私自身はこの半角の公式はいつも

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

を辺々たしたり、引いたりして求めている．

恒等式の変形では「式の展開」のときは上の 3. の分配法則を左から右へと適用している。それも因数 m が実は $(a+b)$ のように 2 項の和であったり、 $(x+y+z)$ のように 3 項の和であったりもする。

一方、「因数分解」では 3. の分配法則を右から左へと適用しており、それも一見したところ明らかではない、隠れている因数 m を探し出すという操作をしている。

同類項をまとめる

同類項をまとめる（同類項の簡約する）について述べておこう。これは恒等式の変形ルール 3. の分配の法則を右辺から左辺に変形することになる。

まず、同類項とは何であったか。たとえば

$$2a^2 + 3ab - 4b^2 - ab + 3a^2 + b^2 + 2ab \quad (4.22)$$

という式で $2a^2$ と $+3a^2$ とは同類項とよばれる。この二つの項は数係数はちがうが文字の部分は a^2 と同じだからである。この 2 つの項はつぎのようにまとめられて

$$2a^2 + 3a^2 = (2+3)a^2 = 5a^2$$

となる。(4.22) の中に現れる同類項は他にもある。また $+3ab$, $-ab$ と $+2ab$ も同類項であり、

$$3ab - ab + 2ab = (3-1+2)ab = 4ab$$

とまとめられる。さらに $-4b^2$ と b^2 も同類項であり、これらもまとめると

$$-4b^2 + b^2 = (-4+1)b^2 = -3b^2$$

それらをあわせれば、(4.22) は全体として

$$2a^2 + 3ab - 4b^2 - ab + 3a^2 + b^2 + 2ab = 5a^2 + 4ab - 3b^2 \quad (4.23)$$

とまとめられる。こういうふうに通類項をまとめれば整式はより簡単な式になる。

上にあげた例で同類項の意味が分かったかと思うが、同類項の定義を文章でも述べておく。

1. 一つの多項式の中で着目した文字の部分が同じ項を同類項という [4]
2. 多項式において数係数以外はすべて一致する項を同類項という [5]

参考のために付言すれば、同類項でないものを異類項といい、異類項はまとめることができない。単に、たとえば

$$5a^2 + 4ab - 3b^2 \quad (4.24)$$

と $5a^2$, $4ab$ と $3b^2$ とを $+$, $-$ の記号を用いて上に示したように表すしかない。こんなことは当然であるが、確認をしておきたい。

4.2 方程式の変形のルール

つぎに方程式の変形のルールについて述べよう。

(b) 方程式の変形のルール

これは等式の性質として知られているものである。

1.

$$a = b \text{ ならば } a + c = b + c \quad (4.25)$$

$$a = b \text{ ならば } a - c = b - c \quad (4.26)$$

$$a = b \text{ ならば } ka = kb \quad (4.27)$$

$$a = b, (k \neq 0) \text{ ならば } \frac{a}{k} = \frac{b}{k} \quad (4.28)$$

等式のルールはこれに尽きるのだが、すこし言い換えたものを 2. 以下に述べておこう.

2. 2つの等式を辺々加えても、減じても等号は成り立つ. すなわち,

$$\begin{aligned} a = b, c = d \text{ が成り立つとき} \\ a + c = b + d \text{ または } a - c = b - d \end{aligned} \quad (4.29)$$

3. 2つの等式を辺々かけても、わっても等号は成り立つ. ただし、わるときは「わる式 $\neq 0$ でなければならない」. すなわち,

$$a = b, c = d \text{ が成り立つとき } ac = bd \quad (4.30)$$

$$a = b, c = d (\neq 0) \text{ が成り立つとき } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (4.31)$$

4. 両辺を 2 乗, 3 乗, $\dots$ しても等号は成り立つ.

$$a = b \text{ ならば } a^n = b^n, (n = 2, 3, \dots) \quad (4.32)$$

5. 両辺の逆数をとっても等号は成り立つ.

$$a = b \text{ ならば } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}, (a = b \neq 0) \quad (4.33)$$

これは $a = b$ の両辺を $ab \neq 0$ でわれば,

$$\frac{a}{ab} = \frac{b}{ab} \text{ ならば } \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$$

が得られるから.

6. 両辺のサインをとる, 対数をとる, 微分をする, $\dots$ 等をしてても等号は成り立つ.

しかし,

7. 両辺に同じ操作をしてても等号は成り立つという法則は一般的には成立しない.

8.

$$a^2 = b^2 \text{ ならば } a = b$$

ではもちろんなく,

$$a^2 = b^2 \quad (4.34)$$

のときに両辺の平方根をとれば

$$a = \pm b \quad (4.35)$$

となるのが正しい*6.

また

$$\sin A = \sin B \quad \text{ならば} \quad A = B$$

が成立すると早合点しそうになるが、もちろん $\sin$ 関数の多価性から正しくはない。したがって、両辺に同じ操作をするといっても個々の操作については個別に正しい理解が必要である。

移項とは？

方程式の変形のときに移項という考え方をよく使う。これがどうして成り立つのか。そのわけを考えてみよう。

例を挙げよう。 $4x - 15 = 9$ という 1 次方程式を解くときに、左辺の -15 を符号を変えて 15 にして右辺に移項すると $4x = 9 + 15$ となる。すなわち $4x = 24$ となり、両辺を 4 でわって $x = 6$ が得られる。

この移項という考え方は便宜的な考え方であり、本当は等式の性質を使っている。そのことを以下に示しておこう。

$$\begin{aligned} 4x - 15 &= 9 \\ 4x - 15 + 15 &= 9 + 15 \\ 4x &= 24 \\ x &= 6 \end{aligned} \tag{4.36}$$

という風に $4x - 15 = 9$ の両辺に 15 を加えているのだが、これは結果だけを見ると左辺にあった -15 を符号を代えて $+15$ にして右辺に足しているように見えるだろう。

このやり方はいかにも一方の辺にある項を符号を変えて他方の辺に加えているように見える。これを移項するという。

くり返しになるが、移項は便宜的な考え方ではあるが、役に立つのでよく使われる考え方である。

4.3 恒等式の変形と方程式の変形のちがい

方程式の変形のときに用いられる等式の性質は左辺と右辺に同じ操作をする（天秤の両側の皿の上のっている物体と錘のつりあいイメージとして思い浮かべるとよい）のに対して、恒等式の式変形は左辺から右辺へと一方向的にしか式変形を行わない。

しかし、注意を要するのは和や積の交換則や結合則、あるいは分配則にしても、等式の性質として書いた式の左辺が、いま現に式変形しようとしている式の左辺に必ずしも現れるというわけではなく、右辺の形

*6 むしろ

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \\ a^2 - b^2 &= 0 \\ (a + b)(a - b) &= 0 \\ a + b &= 0 \quad \text{または} \quad a - b = 0 \\ a &= -b \quad \text{または} \quad a = b \end{aligned}$$

とする方がよいかもしれない。

が現われていることも多い。文章で述べるとわかり難いから式で表すと

$$\begin{aligned}b + a &= a + b \\(ab)c &= a(bc) \\ma + mb &= m(a + b)\end{aligned}$$

のように (3.3), (3.6) や (3.7) 等の交換法則, 結合法則, 分配法則の右辺と左辺が入れ替わった式変形も同じように現れる。たとえば, $m(a + b) = ma + mb$ は式の展開のときに現れるが, 左辺と右辺とが入れ替わった $ma + mb = m(a + b)$ のような式変形は式の因数分解をするときに現れる。それも因数分解のときには共通因数 m が一目でわかるほど明らかではないような場合も多い。

しかし, いずれにしても恒等式の式変形は一方的であって, 両辺を同時に同じ操作をすることは直ぐ後で述べる主格変換の場合を除いてない。

4.4 主格変換

上に述べたことを直ぐにひっくり返すようなことがある。恒等式でも等式の性質を使った式変形をすることもある。これは恒等式を書きかえるときに用いられる。

(主格変換)

等式の性質は一般には方程式 (すなわちセンテンス型の式) の変形に用いられる。しかし, 恒等式にも用いられることがある。このような場合の式の変形を「主格変換」という。これは数学公式等で, 例えば,

$$V = Sh \quad \text{と表された式を } h \text{ で解け。}$$

というような場合で, 主語が V であった文を h を主語とする文に書き換える, 式の変形で「公式の変形」である。

このような公式の変形以外に主格変換と考えられるものは文字係数の 1 次方程式の解や 2 次方程式の解の公式を導く式変形, 陰関数表示 ($F(x, y) = 0$ の形の式) を陽関数表示 ($y = f(x)$ の形の式) にする, または逆関数の式を求めるもの等がある。

まとめると主格変換の場合として

1. 公式の変形
2. 文字形式の 1 次方程式の解
3. 2 次方程式の解の公式
4. 陰関数非表示を陽関数表示にする
5. 逆関数を求める

等である。数学ができない, わからないと思う人の中でかなりの割合でこの「主格変換」がわかっていないために物理学や工学等での式変形がわからなくなっている人がいるのは残念である。

特に 1. の場合は頻繁に物理や工学で用いられるので, 公式そのものは恒等式であるが, 注目する変数を変えときの式変形には「センテンス型の式変形 (等式の性質)」を用いることを注意しておこう。

いくつかの例を挙げよう。Cauchy-Lagrange の恒等式といわれる

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \quad (4.37)$$

という恒等式がある．

この式を

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \quad (4.38)$$

と書き直すことができるが，このときに (4.37) の両辺に $-(ax + by + cz)^2$ を加えても等式が成り立つという等式の性質を用いている．

また，底面積 ab で高さが h の直方体の体積 V は

$$V = abh \quad (4.39)$$

と表されるが，これを底面積 ab と体積 V がわかっており，この直方体の高さ h を求めたいとき， h で解けば

$$h = \frac{V}{ab} \quad (4.40)$$

となる．

$V = abh$ は直方体の体積 V を表す恒等式であるが，このときにも等式の性質 (4.28) を用いて (4.39) の両辺を底面積 ab でわって，直方体の高さ h を求める式を出している．それでこのような式変形を主格変換といっている．

主格変換の別の例を挙げよう．距離 d とその距離を行くのに要する時間 t が与えられたとき，その距離を行くときの平均の速さ v は $v = d/t$ で定義される．逆にその平均の速さで時間 t 進むとすれば，その時間に行くことのできる距離 d は $d = vt$ で与えられる．さらに進んだ距離 d とその平均の速さ v が分っていれば，その距離 d を進むに要した時間 t は $t = d/v$ で与えられる*7．これらはいずれも「主格変換」である．

時間 t とか距離 d は外延量といわれる量で広がりを示す量であり，基本的にたし算ができる量である．一方，速さ v は内包量といわれる量であり，性質や状態の強さを示す量である．この内包量はたし算ができる場合もあるが，基本的にはたし算ができない量である*8．

物理学の熱力学では外延量のことを示量変数 (extensive variable) といい，内包量のことを示強変数 (intensive variable) という．速さとか圧力とか温度とか濃度とかは内包量である*9．40℃の水 100g に 60℃の水 100g を加えたときに 100℃の水 200g が得られるということはないので，明らかにこの場合の温度はたすことができない．

では，まったく温度はたすことができないかということそうでもなくて，午前 10 時に 20℃だった気温が午後 2 時には 10℃だけ上がったというようなときには午後 2 時の気温はたし算ができ，気温は 30℃となるといったふうなたし算のできる場合もある．だから内包量はいつでもたし算ができないということでもない．

速さについても同じことがいえる．1 台の車が時速 80km で走れるとし，もう 1 台の車は時速 100km で走ることができるとする．このときにこの 2 台の車をつないで走っても速度は 180km とはならない．水の温度もそうだったが，水を合体させても 2 つの水の温度をたした水の温度とはならず，車をつないで走らせても全体の車の速さはそれぞれの車の速さのたし算にはならない．こういう性質を持つ量が内包量である．

一方，相対速度とか相対温度とかは，たすことができる．

*7 ここで速さ $v = d/t$ は内包量の第 1 用法といわれている． $d = vt$ は内包量の第 2 用法であり， $t = d/v$ は内包量の第 3 用法といわれる．これについては [6] を参照せよ．

*8 量の体系については [7]，[8] を参照せよ．また付録 4 に特に外延量と内包量について述べた．

*9 日本語で度とか率という名前のつく量は基本的に内包量である．

5 主格変換の例

以下に、主格変換の例をいくつか挙げておこう。

(例 5.1) $V = \frac{kq}{r}$ を q について解け。

(解 5.1) $V = \frac{kq}{r}$ の両辺に r をかければ、

$$Vr = kq$$

両辺を $k \neq 0$ でわれば、

$$q = \frac{Vr}{k}$$

(例 5.2) $V = RI$ を I について解け。

(解 5.2) $V = RI$ の両辺を R でわれば、

$$I = \frac{V}{R}$$

となる。

(例 5.3) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ を R_1 について解け。

(解 5.3)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$$

この右辺を通分すれば、

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2}$$

この式の両辺に $R_1 R_2 R$ をかければ、

$$RR_2 = (R_2 - R)R_1$$

両辺を $R_2 - R (\neq 0)$ でわって

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$$

が得られる。

(例 5.4) $W = I^2 R$ を I について解け。

(解 5.4) 与えられた式の両辺を R でわれば、

$$I^2 = \frac{W}{R}$$

両辺の平方根をとれば、

$$I = \pm \sqrt{\frac{W}{R}}$$

となるが、ここで I が電流の強さで、 W が電力、 R が電気抵抗とすれば、電流の強さは $I \geq 0$ であるので正の符号の方をとって

$$I = \sqrt{\frac{W}{R}}$$

が得られる。

(例 5.5) $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ を h について解け.

(解 5.5) 両辺を mg でわれば

$$h = \frac{mv^2}{2mg}$$

が得られる.

6 おわりに

このエッセイで「等式の種類と性質」について、なぜわざわざ説明したのか. ちょっと説明をしておいた方がいだろう.

高校生になると

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{3x+5}{2} = 4x+2+9x+15$$

といった間違いをすることがある. 分数方程式の解を求める方法を学ぶまでは

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{3} + \frac{3x+5}{2} &= \frac{4x+2}{6} + \frac{9x+15}{6} \\ &= \frac{4x+2+9x+15}{6} \\ &= \frac{13x+17}{6}\end{aligned}$$

と正しく分数式の変形ができていた生徒が, 分数方程式の解を求める方法を学んだ後で, 上に述べたようなまちがいをするようになることがある.

他人事ではなく, 私自身が高校1年のころにはそういうまちがいを平気でしていた. そういう風になると高校数学でさえもまったくわからなくなってしまう, 何を聞いてもうなにがなんだかわからなくなる.

私は高校2年生になって, 丁寧に書かれたある学習参考書を一から勉強しなおして, やっと等式には恒等式と方程式とがあり, またこれらの式の変形の規則は異なっているのだということを知って, この混乱からやっと脱出することができたが, そういう区別があることも知らなかったのだから不勉強といえば不勉強である.

かつての私だけではなく, 代数の初歩を学ぶときにある程度の割合の生徒がこういう誤りをするようになるのではなかろうか. それで老婆心ながらこのことを強調するためにこのエッセイを書いた.

また, 付録として本文には入り難かったいくつかの話題について触れた. 折に触れて読んで頂けたら, いいと思っている.

7 付録1 いくつかの特殊な恒等式の変形

恒等式の変形ルールからはずれているわけではないが, 2, 3 の恒等式変換の特殊な例を示しておこう.

7.1 2次関数の平方完成

一つは2次関数の平方完成という式変形である. いま2次関数

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \tag{7.1}$$

を考えよう。これを

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad (a \neq 0) \quad (7.2)$$

と式変形することを 2 次関数の平方完成という。

これはどういう式変形をするのか。そのことをここで見てみよう [9], [10].

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \\ &= a \left[x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned} \quad (7.3)$$

いま上の式の変形で $\frac{b}{a} = 2\left(\frac{b}{2a}\right)$ とか $0 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ はなかなか思いつかない式の変形だと思う。
 $\frac{b}{a} = 2\left(\frac{b}{2a}\right)$ では $1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ を用いている。

(7.3) をつぎのように変形して

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \quad (7.4)$$

ここで

$$Y = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad X = x + \frac{b}{2a} \quad (7.5)$$

と変数変換すれば, (7.4) は

$$Y = aX^2 \quad (7.6)$$

と簡単な形となる。すべての 2 次関数は変数変換すれば, $y = ax^2$ の形に表すことができることがわかる。

7.2 2つの単振動の合成

もう一つの恒等式変換の特殊な例は 2 つの単振動の合成である [11]。いま 2 つの単振動 $a \sin x$ と $b \cos x$ とがあり, この 2 つの単振動を合成する。すなわち $a \sin x + b \cos x$ を考えよう。

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \sin x + \sin \theta \cos x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \end{aligned} \quad (7.7)$$

と表すことができる。なぜかという

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \quad (7.8)$$

が成り立つので,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta \quad (7.9)$$

となる角 θ が存在するからである (図 7.1 参照)。(7.7) の 1 行目でも $1 = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ を用いている。このような式の変形はなかなか自分では思いつかないものだが, 先人の知恵を味うのがよい。

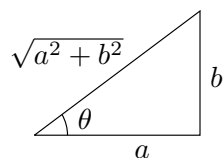


図 7.1 単振動の合成

8 付録 2 交換法則，結合法則，分配法則の図示

まず加法の交換法則，結合法則から図示しよう^{*10}。

加法の交換法則と結合法則は

$$a + b = b + a \quad (3.3)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (3.5)$$

である。たし算の図式（シェーマ）はテーブル図である^{*11}。これは図 8.1 と図 8.2 で表すことができる。

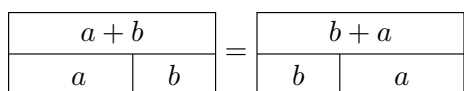


図 8.1 加法の交換法則

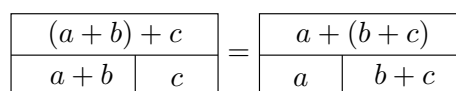


図 8.2 加法の結合法則

かけ算の交換法則と結合法則は

$$ab = ba \quad (3.4)$$

$$(ab)c = a(bc) \quad (3.6)$$

である。かけ算の図式（シェーマ）は面積図（または直方体図）である。これらは図 8.3 と図 8.4 で表すことができる。これらは長方形の面積 S は横長にしても縦長にしても変わらないとか直方体の体積 V も直方

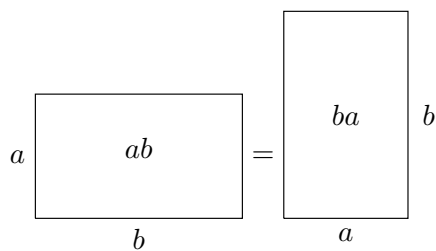


図 8.3 加法の交換法則

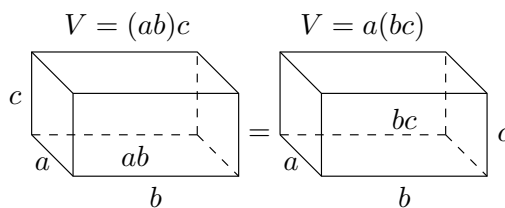


図 8.4 加法の結合法則

体を横においても縦においても変わらないだけでなく，縦 a ，横 b ，高さ c の長さをどの順序にかけても体積 V が変わらないことを表している。

^{*10} 交換法則，結合法則，分配法則を図示した説明をあまり見たことがない。[12] に数の計算における，この 3 法則の図示があり，これが先例の一つである。

^{*11} シェーマという語が一般にはあまりなじみがないということで査読者から日本語で言い換えることを提案された。一応「図式」と言い換えておく。数学教育協議会の中でよく使われるシェーマはたし算・ひき算のときのテーブル図，かけ算・わり算のときの面積図，関数を表すときのブラック・ボックス等である。

最後に分配法則

$$m(a + b) = ma + mb \quad (3.7)$$

は図 8.5 のように縦の長さが m で、横の長さが $a + b$ の長方形の面積 S は縦の長さが m で横の長さが a の長方形の面積 S_1 と縦の長さが同じ m で横の長さが b の長方形の面積 S_2 の和になっている．すなわち、 $S = S_1 + S_2$ であることを示している．

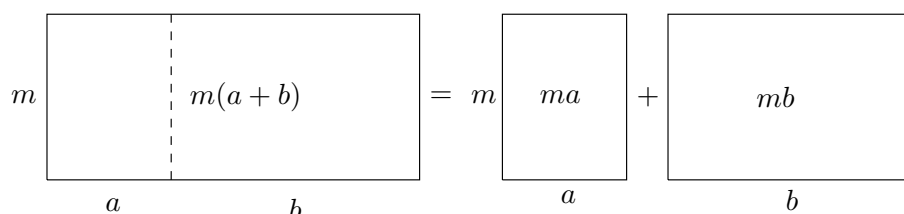


図 8.5 分配法則

9 付録 3 交換法則，結合法則，分配法則の意義

数の実数、複素数はこの和と積の交換法則，結合法則，分配法則にしたがうので，この法則の意義がわかり難い．なんでわざわざわかりきった法則について述べるのだろうと不思議に思ったことを覚えている．だから，高校でこの法則を学んだとき，その意義をまったく理解できなかった．

またその意義についての説明も付言も高校で私の教わった先生からはまったくなかった．これが恒等式の変形のルールであり，他に方程式の式変形のルールもあるとの説明も受けた覚えがない．

大学ではじめて，行列（マトリックス）の積とかベクトル代数のベクトル積が積の交換法則をみたしていないと知ったときにはじめて，これらの法則の意義をすこしわかった気がしたと思う．また四元数の積は交換法則をみたしていないとか，八元数では積の交換法則だけでなく，結合法則も成り立たないということが知られるようになっていく．

この 3 つの法則をみたさない代数系を知ってようやくこの法則の意義が分るのだと思う．そういう代数系を知らない方はそれが出てくる場合を楽しみにして待っていてほしい．

10 付録 4 量の体系と物理学

量はまず

$$\text{量} \left\{ \begin{array}{l} \text{分離量} \\ \text{連続量} \left\{ \begin{array}{l} \text{外延量} \\ \text{内包量} \left\{ \begin{array}{l} \text{度} \\ \text{率} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (10.1)$$

のように分けられる．

これを「量の体系」という。もちろん、これは大雑把な分類であり、実際に現れる量には2次内包量とかもっと複雑なものがある。しかし、はじめからあまり詳しく量を分類して述べると全体の見通しが得られ難い。だからこういう大枠の理解から始めるのがいいのだろう。

もっと詳細な量の分類については [7] に詳しい表がある。また [8] は量の体系への入門としてわかりやすい。

外延量と内包量という語はあまり聞いたことがない言葉かもしれない。私もはじめこの語を見たときには新語をつくることの好きな遠山啓さんのつくった言葉だと思った。しかし、以前からある語だそうで、遠山さんのつくった新語ではない。

まずは外延量である。広辞苑によると外延とは「ひろがり、延長、一般に空間の性質とされる」とある。他の哲学的な意味の説明もあるが、ここに述べた意味にとってほしい。外延量とは「広がりのある量の意で、一般に、同一種類の小さい量を加え合わせて大きな量をつくりだせることのできる量のこと。度量衡によって測ることのできる量はこの種の量である」という。

つぎに内包量である。これも広辞苑によると内包とは、哲学的な意味も述べてあるが、ここでは単に「内部に含み持つ」としておこう。内包量とは「同一種類のものを加えても大きさはふえず量的には意味のないもので強度の変化のみが問題となる量。たとえば、熱でこれは温度計の装置によって外延量に翻訳される」と説明されている。

ただ、「熱でこれは温度計の装置によって外延量に翻訳される」という箇所はちょっと誤解を招くかもしれない。この文章が本当は何をいいたいのか真意がつかめかねるからである。

まず第1に温度は内包量である。もちろん相対温度はたすことができるが、一般には温度は内包量で加法性をもたない。

第2に物質のもつ熱の量が大きく（小さく）なると温度計で測る温度は一般にはあがる（さがる）のだが、固体が液体になるとか液体が気体になるとかの変化、またはその反対の変化、いわゆる相変化を起こすときには物質が熱を吸収とか放出していてもその相変化の途中では温度が変化しないことがあることを忘れてはならない。

ただ辞書の編者にはそのことまでには眼が行き届かなかっただけであろう。

話が突然変わるが、大学の4年生になって素粒子論の研究室に入ったときに先生の小川修三さんからまず言われたのは大学の物理では巨視的（マクロスコピック）なものの見方をするのではなく、微視的（ミクロスコピック）なものの見方をしなくてはいけないということだった。

巨視的と微視的なものの見方とはどちらがうか。要するに物質は原子と分子からできているというものの見方が微視的なものの見方とっていいだろう。それまでは物質も物体も連続的な物からできているという見方だったが、それを一変するものの見方である。

確かに物質が原子・分子からできているといってもその大きさは私たちの眼には見えないほど小さいし、またその物質を構成する原子とか分子の数は莫大であるので、熱力学や統計力学のような学問分野でも巨視的な物理量のみを取り扱っているかもしれない。しかし、基本的に微視的なものの見方ができないと大学の物理の学生としては不十分だという教えであった。

ところで遠山啓氏が中心として認識された上に述べた「量の体系」は巨視的世界観にもとづくものである。ではこの「量の体系」は古いのかといわれれば、そうとはいえない。古いから捨て去るべきだとは言えない新しさをもっている。

愛媛県数学教育協議会の長年のリーダーだった故矢野寛（ゆたか）先生がいつもくりかえし強調されて

いたことだが、確かに高校レベル以上の数学や物理での議論では上に述べた量の体系ではすまなくなってくるが、小学校・中学校レベルの数学での「量の体系」の重要性と有用性は揺るがないと。

量を分離量と連続量に分ける。一つ、二つと数えることのできる量を分離量といい、一つ、二つと数えることのできない量を連続量という。

連続量の大きさを測るためには測定のための単位が必要である。現在では連続量の測定のための国際単位系が制定されており、SI 国際単位系といわれている。

長さの単位を m（メートル）、質量の単位を kg（キログラム）、時間の単位を s（秒）、電流の強さの単位は A（アンペア）をもとにして SI 国際単位系がつくられている。

質量、長さ、時間はいずれも外延量である。ところが長さ（距離）と時間から定義される速さ（速度）は内包量であり、内包量の中の「度」といわれる内包量である。

速さとか速度とかいわれるが、物理では速度とは大きさと方向をもったベクトルで、その速度の大きさを速さといって、速さと速度を区別しているが、一般人にとってはその区別はあまり明白ではないだろう。

速度は m/s として、距離 m を時間 s でわって得られる量である。この例でわかるようにわられる量とわる量とがちがった単位で測られる量が内包量の「度」と名付けられた量である。速度は典型的な「度」と呼ばれている内包量である。

内包量には「率」と呼ばれる内包量もある。これの典型的な例は利率である。銀行に預金すれば、いくらか利息をもらうことができる。その元金に対する利息をもらえる率のことを利率と呼んでいる。逆に、住宅ローン等で銀行からお金を借りた場合も利率にしたがって借りたローンの額のみならず利息も払わなくてはならないことを知らない人はいないだろう。

この利率のことを考えてみよう。いま、銀行からお金を 10,000 円借りたときに 1 年に 300 円の利息を支払わなくてはならないとしよう。このときの利率は

$$\frac{300 \text{ 円}}{10,000 \text{ 円}} = 0.03 \quad (10.2)$$

であるから利率は 3 分（3 %）ということになる。こういう風に分子も分母も同じ単位の場合には、単位も分子と分母でお金の単位が約分されて出てくる量には単位は何もつかない量となる。これも内包量であるが、「度」よりも理解が難しい、「率」と呼ばれている内包量である。

率の別の例を挙げてみよう。それは濃度と「度」と名前についているが、実は率と呼ばれる内包量である。

いま食塩水の濃度を考えてみよう。食塩と水の質量の合計が 100g の食塩水に食塩が 5g 含まれているときに、濃度が 5% の食塩水という。すなわち、

$$\frac{5\text{g}}{100\text{g}} = 0.05$$

このときもわり算の分子と分母に同じ単位の g がついていて、この場合にも分子と分母に共通にあった質量の単位 g が約分されてなくなっている。それで 5% の食塩水の濃度はまったく単位がついていない量である。

物理学では加速度という物理量がある。これは内包量である速度の変化の割合を表す量であり、 $\text{m/s}^2 = (\text{m/s})/\text{s}$ の単位を持つ量である。こういう量のことを 2 次の内包量というが、小学校とか中学校程度の初等数学ではこの 2 次の内包量はあまり取り扱われていない。もっとも物理学では加速度は力と関係した基本的に重要な量である。

これは工作機械のメーカーの技術者だった義弟から聞いたことだが、加速度の時間的な変化量が工作機械の運転にとって重要であり、その量は加加速度と呼ばれているという。

参考文献

- [1] 矢野忠，和田武編，e-Learning（愛媛大学，2010.7）
- [2] 山田忠雄編，『新明解国語辞典』第5版（三省堂，1998）
- [3] 矢野寛，愛数協ブックレット『中学・高校における水道方式』（愛媛県数学教育協議会，1995）32-36, 53-56
- [4] 数学教育協議会編，『算数・数学百科』（日本評論社，2005）241
- [5] 武藤徹，三浦基弘編著，『算数・数学用語辞典』（東京堂出版，2010）150
- [6] 遠山啓編，『現代化数学指導法事典』（明治図書，1971）16-21
- [7] 遠山啓編，『現代化数学指導法事典』（明治図書，1971）4
- [8] 遠山啓，『数学の学び方・教え方』（岩波新書，1972）9-42
- [9] 藤森良夫，『解析の基礎』前編（考え方研究社，1953）54
- [10] 田島一郎，『よくわかる数学 I』（旺文社，1963）142
- [11] 小林道正，『三角関数』（ベレ出版，2020）96-100
- [12] 矢野健太郎，『代数入門』（岩波全書，1955）1-5

編集後記

読者の皆さん、こんにちは。私が住む札幌は、11 月の中頃から、雪が積もったり溶けたりをくり返していましたが、12 月に入ってからはずいぶん寒くなり、早くも春まで解けない根雪になりそうです。12 月 7 日には、最高気温がマイナスになる真冬日になりました。それ以来、気温が平年値を下回る日が続いています。ところで、この気温の平年値というのは、どのようにして求めているのかが気になって調べてみました、これは過去 30 年間の平均をとるのだそうですが、直近の過去 30 年ではなく、この平均は 10 年ごとに、西暦の下 1 桁が「1」の年しか改訂されないようです。今年は 2024 年ですから、今の平年値は 1991 年から 2020 年までの 30 年間の平均値ということです。いまどきはどこにでも計算機があるので、直近の 30 年の平均でよさそうですが、なぜこのようなことになっているのかは、分かりません。

話は変わって、今号には、私 (世戸) の「心柱モデル (4)」, 岩崎正春さんの「シングル j 殻モデルにおける超伝導 (2)」と編集長の矢野忠さんの「代数の基礎」の 3 つの記事が載っています。

私は、東京スカイツリーを見て以来、あれほど細い塔が、何故に地震や台風で倒れないのかということに、取りつかれてしまいました。これをでき得るかぎり簡単化したモデルで解析的に理解できたらと、頑張っているところです。

つぎの岩崎さんについて、前回の「シングル j 殻モデルにおける超伝導 (1)」(数学・物理通信 13 巻 4 号) では、原子核のシェルモデルにおいて、対相関力を入れて原子核が球形になることを確かめるものでした。今回はこれにさらに、四重極力を入れることで、四重極変形 (回転楕円体変形) が起こることを確かめるものです。この種の研究が、原子核理論の発展に寄与することを願っています。

最後の矢野さんのものは、普段我々がよく使っている数式を、分類学的に整理することを試みたものです。ここで使われている数式は中学、高校レベルのものばかりで、まったく問題はないものです。しかし、量には「外延量」「内包量」の 2 種類があると言われると何のことか分からなくなってしまいます。これらには別名があって、それぞれ、「示量変数」「示強変数」ということで、「量を表す変数」「強さを表す変数」と分かってきます。例えば単位系で規定されている長さ、質量、時間などは、「示量変数」で、これらを組み合わせてできる速度や圧力は「示強変数」になります。私は数式を使う文章を書いていて、ここは「変数」と書くべきか、「定数」とすべきか、または「助変数 (パラメータ)」かと迷うときがあります。やはりこういったことも、しっかり勉強しておくべきと反省しました。

(世戸憲治)

ご家族からのお知らせによると、この数学・物理通信にご寄稿頂いたことのある元名古屋大学の森田克貞さんが去る 10 月に逝去されたそうです。『四元数・八元数とディラック理論』(日本評論社) の著書があります。森田さんは日本人で八元数というタイトルが入った著書を始めて書いた人ではないかと思えます。ご冥福をお祈りします。

編集者の都合によって、この 14 巻はこの 7 号をもって終わります。次号は 15 巻となり、2025 年 3 月発行の予定です。少し早いですが、皆様には楽しいクリスマスとよい新年お迎えください。

Also, frohe Weihnachten und guten Rutsch ins neue Jahr.

(矢野 忠)