

数学・物理通信

15卷2号

2025年3月31日

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

目次 (Contents)

1. 心柱モデル (6)	世戸憲治	2
2. 余弦定理の導出 1	矢野 忠	14
3. 余弦定理の導出 2	矢野 忠	22
4. 古くて新しい概念「エンタングルメント」	風乃小路	25
5. 編集後記	世戸憲治	31
1. Model of Central Pillar (6)	Kenji SETO	2
2. Derivation of Cosine Rule 1	Tadashi YANO	14
3. Derivation of Cosine Rule 2	Tadashi YANO	22
4. Entanglement: An Old Yet New Concept	Kouji KAZENO	25
4. Editorial Comments	Kenji SETO	31

心柱モデル (6)

世戸 憲治*

Model of Central Pillar (6)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の『心柱モデル (5)』(『数学・物理通信』15 巻 1 号)の「おわりに」のところ、より簡単に解けるダンパー付心柱モデルはないものかという話を、2 つのモデルを宿題として挙げておいた。その一つは「振子モデル」、もう一つは「1次元モデル」である。これらモデルは両方とも、一般的に解こうとすると前回同様に難解な問題になってしまうが、パラメータの設定を簡単化し、特別な場合に限定すると容易に解くことができる。このうち、次節で述べる「振子モデル」については、この方法で大成功であった。しかし、もう一つの「1次元モデル」の方は、大失敗という結果になってしまった。これについては3節の「1次元モデル」で詳しく述べることにする。また、4節の「おわりに」で、このモデルを改良しようとしたが、やはりうまくいかなかったということ述べる。

2 振り子モデル

2.1 方程式の導入

前回は、2つの同種の振動系をダンパーで繋いだものであったが、今回は図1に示すように、2個の振動系のうち左側のものは前回と同じものとし、右側のものを振り子式に変えたものを考える。この振子は長さ $2l_1$ の棒の中間点を地中に埋めた棒の先端に自由に回転できるように固定し、その下端に質量 m_2 の錘、上端にダンパーを結び付けたものである。その他の棒の長さや錘の質量に関しては図1に示すとおりとする。左に付いているばね S のばね定数と、ダンパー定数は、それぞれ、 k, c とする。座標の取り方に関しては前回同様、地震が起きる前の左の振動系の地面に挿した棒の根元を座標原点 O として、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。

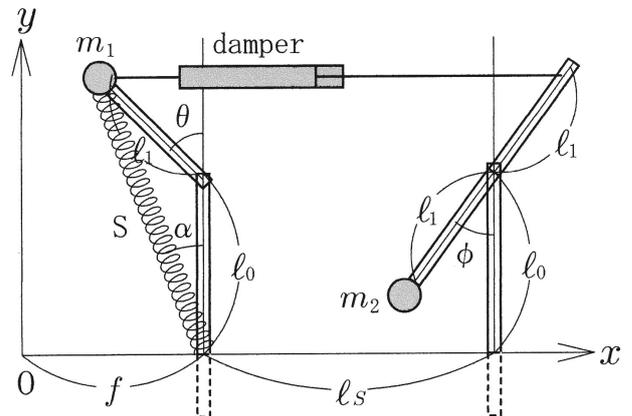


図1 振り子モデル

* 北海学園大学名誉教授

いま地震が起きて、時刻 t に地面が水平右方向に動いた距離を $f(t)$ とし、このときの錘 m_1, m_2 が付いている棒の傾き角度を、図 1 に示すように、それぞれ、 θ, ϕ とする。地震が起きてから時刻 t における 2 個の錘 m_1, m_2 の座標を、それぞれ、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると、これら座標と 2 本の棒の傾き角 θ, ϕ との関係は、

$$\begin{aligned} x_1 &= f(t) - l_1 \sin \theta, & y_1 &= l_0 + l_1 \cos \theta \\ x_2 &= f(t) + l_S - l_1 \sin \phi, & y_2 &= l_0 - l_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる。ここに、 l_S は、2 つの振動系間の距離である。

ここで、左の振動系で棒 l_1 が錘 m_1 を押す力を F_1 とし、ばね S がこの錘を押す力を F_S とする。ただし、このばねの自然長は 2 本の棒の長さの和 $l_0 + l_1$ よりも長く、錘を上向きに押すものとし、このときのばねの傾き角を α とする。さらに、右の振動系で、棒 l_1 が錘 m_2 を引く力を F_2 とする。ダンパーに関しては、これが伸びた長さは、 $l_1(\sin \theta + \sin \phi)$ となり、このダンパーが振子になっている錘に与える力はテコの原理を利用すると、棒の上側と下側では力の向きが逆になることに注意して求められる。以上から、2 個の錘の運動方程式を立てると

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -F_1 \sin \theta - F_S \sin \alpha + c l_1 \frac{d}{dt}(\sin \theta + \sin \phi), & m_1 \ddot{y}_1 &= F_1 \cos \theta + F_S \cos \alpha - W_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_2 \sin \phi + c l_1 \frac{d}{dt}(\sin \theta + \sin \phi), & m_2 \ddot{y}_2 &= F_2 \cos \phi - W_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。ここに、 W_1, W_2 は錘 m_1, m_2 に作用する重力で、重力加速度 g を用いて $W_i = m_i g$, ($i = 1, 2$) と書ける。この式に (2.1) 式の x_1, x_2 を代入すると、 θ, ϕ を求めるための方程式が得られる。しかしながらこのまま議論を進めることは、三角関数が複雑に入り込むので、解析的に解くことは不可能と思われる。

ここでは、両振動系とも微小振動に限定することにし、以下では、

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1, \quad \sin \phi \simeq \phi, \quad \cos \phi \simeq 1 \quad (2.3)$$

を仮定する。また、ばね S の傾き角 α については、2 本の棒 l_0, l_1 とばね S が作る三角形に三角関数の正弦定理を適用して

$$\frac{\sin \alpha}{l_1} = \frac{\sin \theta}{S} \left(= \frac{\sin(\pi - \theta)}{S} \right) \quad (2.4)$$

となる。ここで右辺の S は、ばね S の装着時の長さであるが、 α, θ が微小量と仮定したときは一定値 $S \simeq l_0 + l_1$ としてよく、この式は

$$\alpha = \lambda \theta, \quad \lambda = \frac{l_1}{l_0 + l_1} < 1 \quad (2.5)$$

と書き直される。以上の近似の基に、(2.1) (2.2) の両式を書き直すと、

$$\begin{aligned} x_1 &= f(t) - l_1 \theta, & y_1 &= l_0 + l_1 \\ x_2 &= f(t) + l_S - l_1 \phi, & y_2 &= l_0 - l_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

および、

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{f} - l_1 \ddot{\theta}) &= -(F_1 + F_S \lambda) \theta + c l_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), & 0 &= F_1 + F_S - W_1 \\ m_2(\ddot{f} - l_1 \ddot{\phi}) &= F_2 \phi + c l_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), & 0 &= F_2 - W_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる．ここで，この (2.7) 式の「 $0 =$ 」で始まる 2 本の式から F_1, F_2 を求め，残る 2 本の式に代入すると，

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{f} - \ell_1\ddot{\theta}) &= [(1 - \lambda)F_S - W_1]\theta + c\ell_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), \\ m_2(\ddot{f} - \ell_1\ddot{\phi}) &= W_2\phi + c\ell_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

と θ, ϕ を求めるための 2 本の線形連立微分方程式を得る．この式ではばねの力 F_S がまだ残っているが，微小振動に限定したときは，このばねは振動中も一定の長さを保つと考えられるので， $F_S = k(\text{ばねの自然長} - \ell_0 - \ell_1)$ となり，これは設計段階で決まる定数としてよい．

この (2.8) 式をさらに簡素化するために，ここでの定数を，

$$\omega_1^2 = \frac{(1 - \lambda)F_S - W_1}{m_1\ell_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{W_2}{m_2\ell_1}, \quad \gamma_1 = \frac{c}{m_1}, \quad \gamma_2 = \frac{c}{m_2} \quad (2.9)$$

と置き換える．ただし， $(1 - \lambda)F_S - W_1$ は正とする．これで方程式 (2.8) を行列形式で書き換えると

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 d/dt & \gamma_1 d/dt \\ \gamma_2 d/dt & d^2/dt^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{\ddot{f}}{\ell_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

となる．

この非斉次方程式の一般解は，斉次部分の一般解と非斉次部分の特解との和になる．そこで，この方程式の斉次部分

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 d/dt & \gamma_1 d/dt \\ \gamma_2 d/dt & d^2/dt^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

を解くために，

$$\theta = A_1 e^{\Omega t}, \quad \phi = A_2 e^{\Omega t} \quad (2.12)$$

と置くと，係数 A_1, A_2 を求めるための方程式

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 \Omega & \gamma_1 \Omega \\ \gamma_2 \Omega & \Omega^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

を得る．この式で A_1, A_2 が両方ともゼロにならないためには，係数行列の行列式の値がゼロにならない．すなわち，

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \begin{vmatrix} \Omega^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 \Omega & \gamma_1 \Omega \\ \gamma_2 \Omega & \Omega^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 \Omega \end{vmatrix} = (\Omega^2 + \omega_1^2 + \gamma_1 \Omega)(\Omega^2 + \omega_2^2 + \gamma_2 \Omega) - \gamma_1 \gamma_2 \Omega^2 \\ &= \Omega^4 + (\gamma_1 + \gamma_2)\Omega^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + (\gamma_1 \omega_2^2 + \gamma_2 \omega_1^2)\Omega + \omega_1^2 \omega_2^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

と置いたとき，

$$D(\Omega) = 0 \quad (2.15)$$

でなければならない．これによって固有振動数としての Ω の値が決まるはずであるが，これは一般の 4 次方程式なので，解析的に解けなくはないが大変面倒な式になってしまう．この方程式の一般の場合の解は，前回の『心柱モデル (5)』で議論したように，

$$\Omega = -\gamma_H \pm i\omega_H, \quad \Omega = -\gamma_L \pm i\omega_L \quad (2.16)$$

となるはずである．この後の斉次部分の一般解，非斉次部分の特解，初期条件の適用に関しては，前回のものとほぼ同様に実行されるが，大変面倒なことになり，労多くして益なしということが目に見えている．したがって，これ以上このままでの議論はしないことにし，以下では特別な場合に限定して議論することにしよう．

2.2 簡単に解ける特別な場合

ここでは最も簡単に解ける特別な場合として，

$$m_1 = m_2, \quad \text{かつ} \quad \frac{(1-\lambda)F_S - W_1}{m_1 \ell_1} = \frac{W_2}{m_2 \ell_1} \quad (2.17)$$

という条件を仮定した場合を考えてみる．このときは (2.9) 式から，

$$\omega_1 = \omega_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} \omega \right), \quad \gamma_1 = \gamma_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} \gamma \right) \quad (2.18)$$

となるので，解析がし易くなる．もう一つはこれまで $f(t)$ としてきた地震振動を単振動の

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \quad (2.19)$$

と置き，(2.18) 式を考慮して，解くべき方程式 (2.10) をもう一度書き直すと

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & \gamma d/dt \\ \gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = -\frac{f_0 \omega_e^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

となる．また，この斉次部分の方程式は，

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & \gamma d/dt \\ \gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

となる．なおここで付け加えておくと，このときの 2 個の錘に作用する重力は同じになるので， $W_1 = W_2 \left(\stackrel{\text{def}}{=} W \right)$ とすると，(2.17) の 2 式から

$$(1-\lambda)F_S = 2W \quad (2.22)$$

となり，これが設計段階ではねの力 F_S を決める式になる．

このときの (2.14) 式の $D(\Omega)$ は，

$$D(\Omega) = (\Omega^2 + \omega^2 + \gamma\Omega)^2 - \gamma^2 \Omega^2 = (\Omega^2 + \omega^2 + 2\gamma\Omega)(\Omega^2 + \omega^2) \quad (2.23)$$

となり， $D(\Omega) = 0$ としたときは，簡単に解けて，

$$\Omega = \pm i\omega, \quad \Omega = -\gamma \pm i\omega', \quad \text{ここに} \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad (2.24)$$

という解が得られる．なおここでは $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ と仮定している．この Ω を (2.12) に戻すと，例えば $\Omega = -\gamma + i\omega'$ のときは，Euler の定理から

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 e^{(-\gamma + i\omega')t} = A_1 e^{-\gamma t} [\cos(\omega' t) + i \sin(\omega' t)] \\ \phi &= A_2 e^{(-\gamma + i\omega')t} = A_2 e^{-\gamma t} [\cos(\omega' t) + i \sin(\omega' t)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

と複素数の解になる．ここで解くべき方程式 (2.21) は斉次線形方程式なので，この解のうち実部，虚部が，それぞれ独立に解とすることができる．したがって，このときの解は， $A_i, B_i, (i = 1, 2)$ を任意定数として，

$$\theta = A_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega' t), \quad \phi = A_2 e^{-\gamma t} \sin(\omega' t) \quad (2.26)$$

$$\text{あるいは } \theta = B_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t), \quad \phi = B_2 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t)$$

と置くことができる．同様のことを (2.24) 式の $\Omega = \pm i \omega$ に対して実行すると， $C_i, D_i, (i = 1, 2)$ を任意定数として，

$$\theta = C_1 \sin(\omega t), \quad \phi = C_2 \sin(\omega t) \quad (2.27)$$

$$\text{あるいは } \theta = D_1 \cos(\omega t), \quad \phi = D_2 \cos(\omega t)$$

が解になる．これで 4 通りの解が求められたが，これらの解を方程式 (2.21) に代入すると，

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = -C_1, \quad D_2 = -D_1 \quad (2.28)$$

の条件の基に成立することが確かめられる．このことを考慮して，以下では， A_1, A_2, B_1, B_2 については添え字を付けなくて，それぞれ， A, A, B, B と書き， C_1, C_2, D_1, D_2 については，それぞれ， $C, -C, D, -D$ と書くことにする．

以上で，斉次部分の方程式 (2.21) の一般解は，4 個の未知定数 A, B, C, D を用いて，

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right] \quad (2.29)$$

$$\phi = \frac{f_0}{\ell_1} \left[A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + B e^{-\gamma t} \cos(\omega' t) - C \sin(\omega t) - D \cos(\omega t) \right]$$

と求められる．全体に f_0/ℓ_1 を付けたのは，後の式を綺麗にするためである．

つぎに求めるものは非斉次方程式 (2.20) の特解である．この式を解くためには， θ, ϕ をまったく同じ形

$$\theta = \phi = K \sin(\omega_e t) + L \cos(\omega_e t) \quad (2.30)$$

と置くことにし，方程式 (2.20) に代入すると， K, L を求めるための方程式

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_e^2 & -2\gamma\omega_e \\ 2\gamma\omega_e & \omega^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = -\frac{f_0}{\ell_1} \omega_e^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

を得る．これを解くと

$$K = -\frac{f_0}{\ell_1} \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega_e^2}{\Delta}, \quad L = \frac{f_0}{\ell_1} \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta}, \quad \Delta = (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2 \quad (2.32)$$

と求められる．以下では式簡素化のため， Δ についてはこの記号のまま使うことにする．

以上で、非斉次方程式 (2.20) の一般解は (2.29) と、(2.32) の K, L を用いた (2.30) 式の和として、

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega_e^2}{\Delta} \sin(\omega_e t) + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} \cos(\omega_e t) \right] \\ \phi &= \frac{f_0}{\ell_1} \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) - C \sin(\omega t) - D \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega_e^2}{\Delta} \sin(\omega_e t) + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} \cos(\omega_e t) \right]\end{aligned}\tag{2.33}$$

と求められたことになる。

2.3 初期条件の設定

初期条件を設定する前に、(2.6) (2.33) 式から 2 個の錘の x 座標 x_1, x_2 を

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -f_0 \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}{\Delta} \sin(\omega_e t) + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} \cos(\omega_e t) \right], \\ x_2(t) &= -f_0 \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) - C \sin(\omega t) - D \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}{\Delta} \sin(\omega_e t) + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} \cos(\omega_e t) \right] + \ell_S,\end{aligned}\tag{2.34}$$

と求めておく。初期条件として、これら 2 個の錘は地震の前は完全に静止していたものとして、

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \ell_S, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0\tag{2.35}$$

を設定しておく。この条件のうち、最初の 2 条件を (2.34) 式に適用すると、

$$B + D + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} = 0, \quad B - D + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} = 0\tag{2.36}$$

となり、これから、

$$B = -\frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta}, \quad D = 0\tag{2.37}$$

と決まる。さらに、残る 2 条件を適用すると、

$$\omega' A - \gamma B + \omega C - \frac{\omega_e[(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 4\gamma^2\omega_e^2]}{\Delta} = 0, \quad \omega' A - \gamma B - \omega C - \frac{\omega_e[(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 4\gamma^2\omega_e^2]}{\Delta} = 0\tag{2.38}$$

となるので、これから

$$A = \frac{\omega_e[(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 2\gamma^2\omega_e^2]}{\omega' \Delta}, \quad C = 0\tag{2.39}$$

と決まる．これですべての未定定数が求められたので，これを (2.34) 式に代入すると，

$$x_1(t) = f_0 \left[-\frac{\omega_e[(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 2\gamma^2\omega_e^2]}{\omega'\Delta} e^{-\gamma t} \sin(\omega't) + \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} e^{-\gamma t} \cos(\omega't) \right. \\ \left. + \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)\omega^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}{\Delta} \sin(\omega_e t) - \frac{2\gamma\omega_e^3}{\Delta} \cos(\omega_e t) \right],$$

$$x_2(t) = x_1(t) + l_S \tag{2.40}$$

と求められる．特に， x_2 は x_1 に l_S がプラスされるだけで，あとはまったく同じ形になる．これが最終解である．ここでは，地震から直接受ける振動数が ω_e の振動項は地震が続かぎり残ってしまうが，(2.34) 式にあった振動数 ω の振動は完全に消えてしまう．残った振動数が ω' の振動は減衰因子 $e^{-\gamma t}$ のために，時間が経つと消えてしまう．これは正しくダンパ - 効果が発揮された結果である．

2.4 もう1つのモデル

ここで扱ったものと似て非なるもう1つのモデルを紹介しておこう．図1で示した左側の振動系にある錘は，ばねの力で上向きに支えられていた．もしこのばねの力が弱いと，この錘を支えている棒は倒れてしまい，いわゆる座屈現象が起こる．このとき錘は下にさがって振子のようにになってしまう．ここに示す図2は，この左側の振動系を，右の振動系と同じように振子式に変えたものである．この図で示すように，ダンパーが水平に動くようにするために，地中に立てた2本の棒の地上部分の長さは左右で違っており，それぞれ， l_0 と

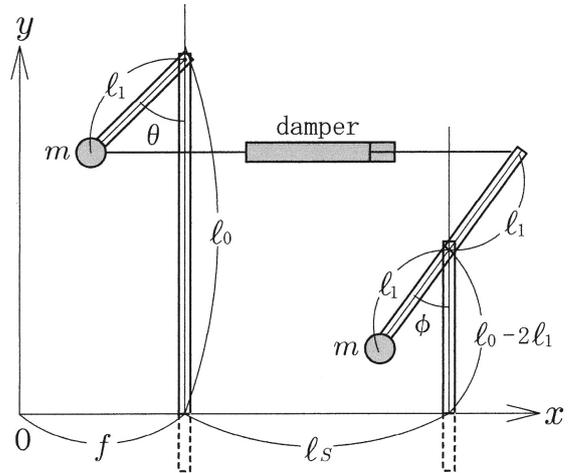


図2 左の振動系も振子にした場合

$l_0 - 2l_1$ とする．他の棒の長さは図に示すとおりとし，2個の錘の質量は初めから同じ m とする．地震が起きて地面が右方向に動いた距離を $f(t)$ とし，左右の錘が付いている棒の傾き角度を，それぞれ， θ ， ϕ とする．座標の取り方は前と同じとして，このときの2個の錘の座標を，それぞれ， (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) とする．前と同じく，微小振動に限定すると，(2.3) 式がそのまま使えるので，棒の傾き角と座標の関係は

$$x_1 = f(t) - l_1\theta, \quad y_1 = l_0 - l_1 \tag{2.41}$$

$$x_2 = f(t) + l_S - l_1\phi, \quad y_2 = l_0 - 3l_1$$

となる．ただしここで， $l_0 - 3l_1$ は正と仮定する．また，微小振動を仮定したときは，ダンパーは振動中でも水平を保つことに注意する．このとき，2個の錘を支えている棒が，これら錘を引く力を，それぞれ， F_1 ， F_2 とし，錘の運動方程式を作ると，

$$m\ddot{x}_1 = F_1\theta + c l_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), \quad m\ddot{y}_1 = F_1 - W \tag{2.42}$$

$$m\ddot{x}_2 = F_2\phi + c l_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), \quad m\ddot{y}_2 = F_2 - W$$

となる．ここに， W はそれぞれの錘に作用する重力である．この式に (2.41) 式の x_1, y_1, x_2, y_2 を代入すると

$$\begin{aligned} m(\ddot{f} - l_1\ddot{\theta}) &= F_1\theta + cl_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), & 0 &= F_1 - W \\ m(\ddot{f} - l_1\ddot{\phi}) &= F_2\phi + cl_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}), & 0 &= F_2 - W \end{aligned} \quad (2.43)$$

となり，この「 $0 =$ 」で始まる 2 式から， F_1 も F_2 も重力 W に等しくなる．さらに定数の置き換え

$$\frac{W}{ml_1} = \omega^2, \quad \frac{c}{m} = \gamma \quad (2.44)$$

を実施し，地震振動の $f(t)$ を (2.19) 式のように $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ と置くと，この式は，

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & \gamma d/dt \\ \gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = -\frac{f_0\omega_e^2}{l_1} \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

となって，(2.20) 式とまったく同じものになる．したがってこれ以降は，前に議論したとりに進めることができ，(2.35) 式の初期条件を設定すると，(2.40) 式と同じ解が求められる．つまりこれら 2 つのモデルは，前者が上向き振子で，後者は下向き振子という違いはあるが，等価なモデルと言える．

3 1次元モデル

これは，ダンパー効果をより理解しやすくするために，一番初めに考えたものであるが，結果としてはまったくの失敗であった，したがってこのようなことをしても意味がないということを知ってもらうための反例として書くものである．

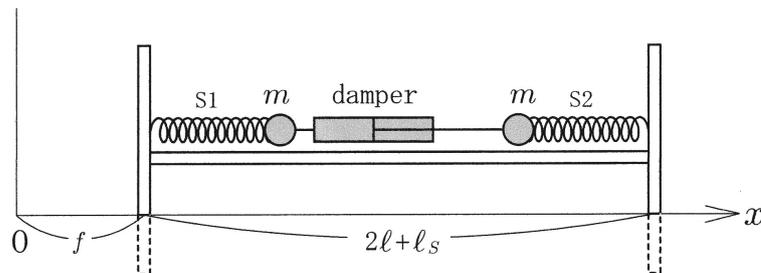


図 3 1次元モデル

心柱からは離れてしまうが，図 3 に示すような 1 次元の力学系を考えてみる．すなわち，自然長 l ，ばね定数 k の 2 本のばね S1, S2，質量 m の 2 個の錘，他にダンパー係数 c のダンパーを用意する．なおここでは，2 節で議論したように，2 本のばね，および 2 個の錘について，それらの自然長，ばね定数，および質量を，それぞれ，初めから同じ値とした場合を考えることにする．これらを，図 3 に示すように，地面に固定された水平方向の長さが $2l + l_s$ の台の上に接続する．ここに， l_s は地震が起きる前の 2 個の錘間の長さ，すなち，ダンパーの最初の長さでもある．

ここで，地震が起きる前の台の左足の根元を座標原点 O として，水平右方向に x 軸をとる．いま地震が起きて，時刻 t に地面が水平右方向に移動した距離を $f(t)$ とする．このとき 2 個の錘は台の上で摩擦無しに動き，

それぞれの座標が, x_1, x_2 になるものとする. このとき, 2 個のばねとダンパーの伸び縮みは,

$$\begin{aligned} [\text{ばね S1 の伸び}] &= x_1 - f(t) - \ell, \\ [\text{ばね S2 の縮み}] &= x_2 - f(t) - \ell - \ell_S, \\ [\text{ダンパーの伸び}] &= x_2 - x_1 - \ell_S \end{aligned} \quad (3.1)$$

となることを考慮して, これら 2 個の錘の運動方程式を作ると

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -k(x_1 - f - \ell) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - f - \ell - \ell_S) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる. ただし, この方程式をそのまま解こうとすると, 定数の部分が扱いにくくなるので, ばね S1 の伸びと, ばね S2 の縮みを, それぞれ, 新しい変数

$$y_1 = x_1 - f(t) - \ell, \quad y_2 = x_2 - f(t) - \ell - \ell_S \quad (3.3)$$

と置くことにして, 方程式 (3.2) を書き直すと,

$$m[\ddot{y}_1 + \ddot{f}] = -ky_1 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \quad m[\ddot{y}_2 + \ddot{f}] = -ky_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad (3.4)$$

となる. ここで, さらに簡素化するための定数変換

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \gamma = \frac{c}{m} \quad (3.5)$$

および, 2 節と同じく, 地震振動を $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ と置き直して, 方程式を行列形式で表わすと

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & -\gamma d/dt \\ -\gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_0 \omega_e^2 \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と書き換えられる.

この式と 2 節の θ, ϕ に対する方程式 (2.20) と比べてみると, 左辺の行列の中の 1 行 2 列と 2 行 1 列の要素の符号が替わったのと, 右辺では $-f_0/\ell_1$ が f_0 に置き換わっている. この先, 斉次部分の一般解を求めようとする, (2.21) 式に代わって,

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt & -\gamma d/dt \\ -\gamma d/dt & d^2/dt^2 + \omega^2 + \gamma d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる. この方程式を解くために

$$y_1 = A_1 e^{\Omega t}, \quad y_2 = A_2 e^{\Omega t} \quad (3.8)$$

と置くと,

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega & -\gamma \Omega \\ -\gamma \Omega & \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

となる. ここで, A_1, A_2 が両方ともゼロにならないためには, 左辺の行列の行列式の値がゼロでなければならない,

$$D(\Omega) = \begin{vmatrix} \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega & -\gamma \Omega \\ -\gamma \Omega & \Omega^2 + \omega^2 + \gamma \Omega \end{vmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

となる．これは2節のときのものとは，1行2列と2行1列の要素の符号が変わっているが，行列式としては同じになるので，2節のときと同じ Ω が求められる．この後，2節の(2.23)式から(2.27)式までの議論が， θ, ϕ を y_1, y_2 に置き換えて，そのまま成り立つ．この(2.26)(2.27)と同じ形の解を，方程式(3.7)に代入すると，

$$A_2 = -A_1, \quad B_2 = -B_1, \quad C_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 \quad (3.11)$$

となり，符号の付き方が前のときとは変わってくる．これで斉次部分の方程式(3.7)の一般解は

$$\begin{aligned} y_1 &= f_0 \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right] \\ y_2 &= f_0 \left[-Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) - Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

と任意定数 A, B, C, D を用いて表わされる．なお，後の式のために，全体に f_0 を付けておいた．

この斉次部分の一般解(3.12)に，非斉次方程式(3.6)の特解である

$$y_1 = y_2 = f_0 \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \quad (3.13)$$

を加えると，非斉次方程式の一般解が，

$$\begin{aligned} y_1 &= f_0 \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) + \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \right] \\ y_2 &= f_0 \left[-Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) - Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) + \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

と求まる．

あとは，初期条件の設定であるが，その前にこの式と， $f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ とした(3.3)式から， x_1, x_2 を

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0 \left[Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) + Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \right] + \ell \\ x_2 &= f_0 \left[-Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t) - Be^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \right] + \ell + \ell_S \end{aligned} \quad (3.15)$$

と求めておく．ここで初期条件を，地震が始まる前は，2個の錘とも完全に静止しているものとし，

$$x_1(0) = \ell, \quad x_2(0) = \ell + \ell_S, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (3.16)$$

を設定しておく．これらの4条件を(3.15)式に適用すると，未定定数 A, B, C, D が，

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{\omega \omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2}, \quad D = 0 \quad (3.17)$$

と決まるので，最終的な解は，

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_0 \left[-\frac{\omega \omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega t) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \right] + \ell \\ x_2(t) &= x_1(t) + \ell_S \end{aligned} \quad (3.18)$$

と求められる。ただし、 x_2 の方は最後に l_S が余分に付くだけで、後は x_1 とまったく同じ形になる。

以下、この式の欠点とも言うべき特徴を、2つ挙げておく。

1つ目は、地震の振動数 ω_e と同じ振動は、地震が続くかぎり減衰することなく続くが、固有振動数 ω の振動も永久に続いてしまうことである。この場合は2個の錘が、まったく同周期、同位相で振動するために、ダンパーは伸び縮みすることなく、左右に動いているだけで、ダンパー効果がまったく効いていない。

2つ目は、この式のどの項も分母に $\omega^2 - \omega_e^2$ が付くため、 ω が ω_e に近づくと発散してしまう。実際、大括弧の中の極限をとると、l'Hôpital の定理を用いて、

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_e} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_e^2} [\omega \sin(\omega_e t) - \omega_e \sin(\omega t)] = \frac{1}{2} [\sin(\omega_e t) - \omega_e t \cos(\omega_e t)] \quad (3.19)$$

となって、経過時間 t に比例して振幅が増大してしまうという、いわゆる共振現象が起こってしまう。

結局のところ、ダンパー効果が発揮されるようなものを、1次元の動きだけで作ることは無理と思われる。

4 おわりに

ダンパー付き心柱モデルとして、2節で扱った「振子モデル」では、2個の錘は同周期、同位相で振動するが、ダンパーに接続する部分は逆位相の振動になるため、ダンパー効果が発揮され、この場合が最も理想的なモデルと言えるであろう。それに対し、3節で述べた「1次元モデル」では、2個の錘は同周期、同位相になり、これがそのままダンパーに接続されるので、ダンパーは伸び縮みすることなく左右に動くだけなので、これを付ける意味がなくなってしまう。なお、ここで述べた1次元モデルは前々回の『心柱モデル(4)』の3節で述べたモデルと本質的に同じで、そのときも、失敗例として挙げておいた。これは、解きやすさのために、2つの振動系の周期を同じにしたために起こる現象で、もしこれを異周期にすれば、それなりのダンパー効果はでるはずである。しかしこれは前回の『心柱モデル(5)』と同じく、解析が非常に困難になり、無理に解いても解析的に見通しが立たないものになってしまう。

「1次元モデル」のこの欠点を回避し、2節の「振子モデル」のときと同じように錘とダンパーが逆位相で動くように出来ないものかと考えてみた。以下では、3節の図3を用いて説明していく。この2つある錘のうち、左の錘は図の通り直接ダンパーに接続しておき、右の錘については、直接ダンパーには接続しないで、いったん糸を付け、この糸を右の壁に固定した滑車に通してからダンパーに繋ぐ。この方法で、2つの振動系が載る台から見て、2個の錘が左に動いたときは、ダンパーに付けた糸は引っ張られてピストンは右に動き、ダンパー効果が発揮される。しかしその逆に、2個の錘が台から見て右に動いたときは、糸は弛んでしまい滑車から外れてしまうだろう。これを救うために、糸の替わりにばねにすると良いだろうと考えてみた。すなわち、ばねを台の右壁に固定した滑車に通してからダンパーに接続するという方法である。ただしばねにしても、伸びるときは直線状に伸びても、縮むときは直線状に縮まないで弛んでしまうことがある。これを避けるには、ばね、および、錘、ダンパーも含めて、台に固定したパイプの中に通しておく方が良いだろう。この設定で、解析しようと計算を初めてみたが、このときは2個の錘の位置座標 x_1, x_2 のほかに、ダンパーのピストンの位置 x_3 も変数にしなればならず、方程式は3元連立微分方程式になってしまう。さらに面倒なことに、この振動系の固有振動を求めようとすると、解析的には解けないはずの一般5次方程式を解かなければならない。これでは、ダンパー効果が発揮される簡単なモデルを作ろうとしたことが、かえって仇になってしまう。

話しは変わるが、これまで「心柱モデル」というタイトルで6編ものものを書いてしまった。これは心柱に詳しくなかったから書けたのではなく、実際はその逆で、心柱のことを、ほとんど知らなかったために、心柱の本質に迫るのに6回もかかってしまったということである。これまでやったことは、質量を持たず曲がりもしない棒と、点と見なせる錘と、一定のばね定数を持つばね、および、質量が無視できるダンパーを用いたモデルである。これでやれることには限界があるし、今回のもので一応の結論に達したと思うので、心柱に関してはこれで一休みとしたい。もしこれから先をやるとすれば、曲がりやすさと質量を持った弾性棒、すなわち、Timoshenko 梁の理論を用いた解析をすべきであろう。有限の長さを持つ Timoshenko 梁の固有振動は可附番の番号が付けられる振動モードになり、梁の上端部の振動は、奇数番と偶数番とでは、それぞれ、逆位相の振動になる。これを利用して、ここでの理論に当てはめると、2節で扱った左右2つの振動系は、それぞれ、Timoshenko 梁の第1、第2振動モードに対応するようにもっていくとよい。しかしこの理論を展開するには、現在の私の知識では荷が重すぎるし、将来的には頑張るつもりであるが、すぐに取り掛かれるようなものではない。

余弦定理の導出 1

矢野 忠¹⁾

Various Derivation of Cosine Rule 1

Tadashi YANO

まえおき

このエッセイはすでに発表したエッセイの改訂版である [1].

1 はじめに

先日、学生と量子力学のゼミをやっていたら、たまたま余弦定理を用いる必要があった。そのときゼミの当番だった学生に余弦定理を知っているかとたずねたら、知らないとのことであった。それで余弦定理を証明しようと思ったが、その証明のしかたをすぐには思いつかなかったので、各自が勉強しておくように言ってその場は済ませておいた。

そのゼミの終了直後に雑誌「数学教室」の最近号が届いたので、見ていたら余弦定理の公開授業記録が出ている。また、「研究と実践」(愛数協)の最近号にも佐伯淳先生(元愛数協委員長)の研究が載っている。

さらに、私の子供たちが受験勉強していたころに大学入試のための学習参考書として有名な『解法の探求 I』 [2] に、ベクトルの内積を用いた余弦定理の簡潔の証明がでていたことだけは覚えていたが、その証明法は頭には残っていなかった。そういった訳で、余弦定理の証明にどんなものがあるのかという関心がわいてきた。それについて少し調べてみた結果を、以下に述べておこう。

2 ベクトルのスカラー積による導出

まず、私は大学の教師であったから、ベクトルの内積を用いた導出を一番初めに述べよう²⁾。2つのベクトル b と c (すなわち、ベクトル b と c の長さとその間のなす角 $\angle A$) が

1) 元愛媛大学工学部

2) この証明は [2] によった。大学レベルのベクトル解析の本を数冊見てみたが、実質的に余弦定理の証明となる「三角形の第 3 辺の長さを他の 2 辺を表すベクトルの差の内積で表した式」を載せたものが 1 冊だけあった。他には「ベクトルの内積と余弦定理」を述べているものはなかった。大学生になれば、もう余弦定理は既知であるから、どうでもいいのかもしれないが、高校で学んだことも大学で学ぶことも一つに統一されていることがやはり望ましい。

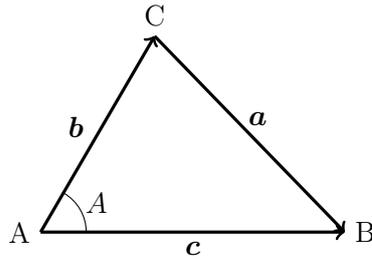


図 2.1: ベクトルのスカラー積による余弦定理の導出

わかっているならば、ベクトル b の終点からベクトル c の終点へとひいたベクトル a が

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b} \quad (2.1)$$

で与えられることはベクトルの減法からすぐわかる (図 2.1). ここで、ベクトル a の自分自身とのスカラー積 (内積ともいう) を考えると、ベクトルの内積の分配法則を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ベクトルのスカラー積の定義を用いれば、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (2.3)$$

が得られる。ここで、 a, b および c はそれぞれベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} および \mathbf{c} の長さ、すなわち、

$$a = |\mathbf{a}|, \quad b = |\mathbf{b}|, \quad c = |\mathbf{c}| \quad (2.4)$$

である。たしかに

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{c} \quad (2.5)$$

から、

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b} \quad (2.6)$$

とし、ベクトルのスカラー積の定義やスカラー積についての分配の法則を用いれば、余弦定理は全く自明といってもよいだろう。

3 幾何学的な導出

3.1 孝山博の証明

余弦定理の幾何学的な導出としてはじめに、雑誌「数学教室」に載っている孝山博さんの授業記録 [3] の証明を見てみよう。

授業の導入は「三角形 ABC の隣り合う 2 つの辺の長さ、および、その間の角が分かっているとき、第 3 辺の長さがこれら 3 つの量から決まるだろうか (図 3.1(a))」という設問からなされる。

幾何学的な直観によれば、この設問の答が肯定的であることは明らかだろうが、設問をより明確に「辺の長さ $CB = a$ を、他の 2 辺の長さ $CA = b, AB = c$ とそれらの辺のはさむ角 A を用いて、どのように表すことができるか」という形に設定しよう。いま、三角形の 1 つの頂点 C から AB に垂線を下し、その垂線の足を H として三角形 ABC を 2 つの直角三角形に分ける (図 3.1(b))。このとき直角三角形 BCH の斜辺の長さ a はピタゴラスの定

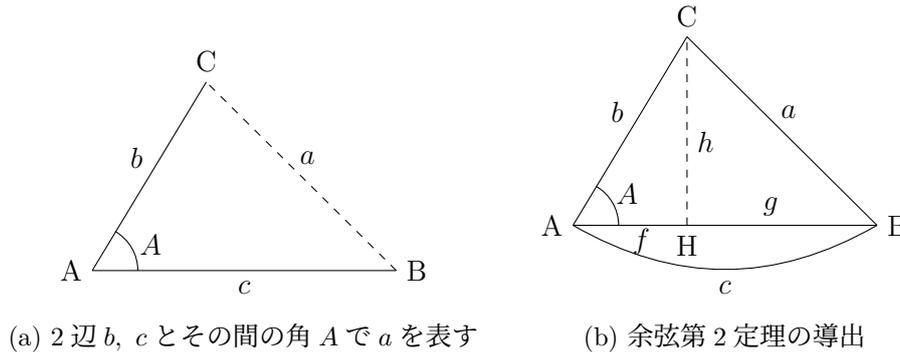


図 3.1: 余弦定理の導出

理より、 $CH = h$ と $HB = g$ を用いて

$$a^2 = h^2 + g^2, (g = c - f) \quad (3.1)$$

と表される。一方、直角三角形 CAH の斜辺の長さ b はやはりピタゴラスの定理を用いれば、 $AH = f$ と h とから

$$b^2 = h^2 + f^2 \quad (3.2)$$

となる。(3.1) から (3.2) を辺々引いて h^2 を消去すれば、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cf, (c = f + g) \quad (3.3)$$

となる。が、ここで f は

$$f = b \cos A \quad (3.4)$$

であるから、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (3.5)$$

となり、余弦定理が得られる³⁾。ここで、特徴的なことは余弦定理を証明するのにピタゴラスの定理を 2 度用いることである。

3) 途中で省略した計算の詳細は付録に示す。またちょっとだけ違った江沢による計算法も付録で示す [4]。

3.2 昔の高校教科書の導出

余弦定理の幾何学的な導出の 2 番目として、私の一年下の学年の生徒が学んだ昔の高校教科書 [5] の証明を見てみよう。三角形 ABC の辺の長さ $BC = a$, $AC = b$ および $AB = c$

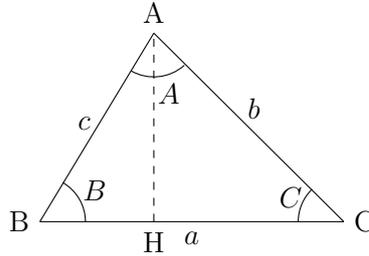


図 3.2

と三角形の角 A, B, C を図 3.2 のようにとれば、頂点 A から辺 BC に垂線を下して、その足を H とし、辺 BH の長さとして CH の長さを

$$BH = c \cos B, CH = b \cos C \quad (3.6)$$

と表せば、辺 a は

$$a = c \cos B + b \cos C \quad (3.7)$$

と表される。同様に

$$b = a \cos C + c \cos A \quad (3.8)$$

$$c = b \cos A + a \cos B$$

が成立する。(3.7)-(3.8) を余弦第一定理という。

この第一法則において、(3.7) の両辺に a をかけ、(3.8) の 2 つの式を用いて、 $a \cos B$ と $a \cos C$ とを消去すれば、

$$\begin{aligned} a^2 &= ac \cos B + ab \cos C \\ &= c(c - b \cos A) + b(b - c \cos A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned} \quad (3.9)$$

となり、余弦第二定理が導出される⁴⁾。

すなわち、余弦第二定理は

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (3.10)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (3.11)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (3.12)$$

4) 上の $a \cos B$ と $a \cos C$ とを求める計算も付録に計算を示しておく。

である。

3.3 佐伯淳の導出

最後に佐伯淳先生の研究報告 [6] では、ピタゴラスの定理の最も標準的な証明法を応用した証明が自由の森学園の増島高敬先生によるものとして与えられている。すなわち、三角形の合同と等積変形を基本的に用いて証明がなされているが、直角三角形の場合と基本的に異なるのは三角形の2つの辺の上に描かれた正方形の面積の全部ではなくその一部のみが、残ったもう1つの辺上に描かれた正方形の面積の上に移っていくところである。その差し引く必要のある面積が全体として $2bc \cos A$ となっている。証明は佐伯先生の与えたものでよいのだが、ここではその余弦定理の証明を少し形式的にまとめておこう。

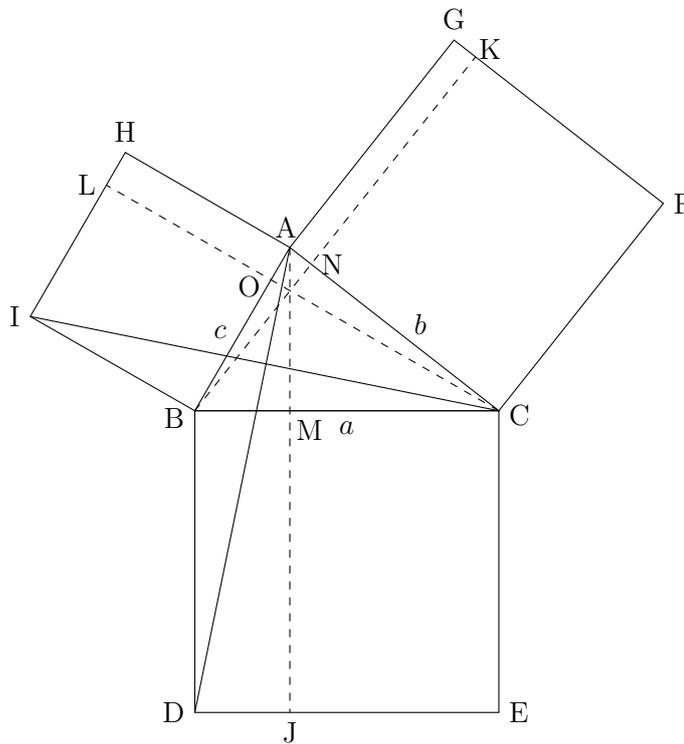


図 3.3: 第2余弦定理の証明: 面積の等積移動による

まず, 図 3.3 において

$$AB = IB = c, BC = BD = a, \angle ABD = \angle IBC \quad (3.13)$$

であるから, 三角形の合同条件によって

$$\triangle ABD \equiv \triangle IBC \quad (3.14)$$

つぎに、三角形の等積変形によって

$$\triangle ABD \text{の面積} = \triangle MBD \text{の面積} \quad (3.15)$$

$$\triangle IBC \text{の面積} = \triangle IBO \text{の面積} \quad (3.16)$$

である。したがって

$$\square BDJM \text{の面積} = \square OLIB \text{の面積} \quad (3.17)$$

となる。同様にして、

$$\square MJEC \text{の面積} = \square CFKN \text{の面積} \quad (3.18)$$

したがって

$$\square BDEC \text{の面積} = (\square OLIB + \square CFKN) \text{の面積} \quad (3.19)$$

ところで、 $AO = b \cos A$, $AN = c \cos A$ を用いれば、

$$\square BDEC \text{の面積} = a^2 \quad (3.20)$$

$$\square OLIB \text{の面積} = c^2 - bc \cos A \quad (3.21)$$

$$\square CFKN \text{の面積} = b^2 - bc \cos A \quad (3.22)$$

であるから、結局

$$a^2 = c^2 - bc \cos A + b^2 - bc \cos A \quad (3.23)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (3.24)$$

となり、余弦定理が証明された。佐伯先生も注意されているように、この形で余弦定理の証明を見ると「余弦定理はピタゴラスの定理の一般化である」ということが見えてくる。余弦定理が歴史的にどの形ではじめて世の中に出現したのかは知らないが、この最後の形ではじめて発見されたのではないかと思われる。

4 おわりに

高校の数学で余弦定理をどうしても、教える必要があるかどうかは私にはわからない。上で見たように大学になって、ベクトルの内積を学んだ後だとその証明はとても簡単である。だから、高校で余弦定理など知らなくてもいいのかもしれない。現に私のゼミの学生も高校で余弦定理を学んだと思われるのに大学で数年間過ごしているうちに忘れてしまったのか知らないとのことであった。もっとも、授業中などに学生に何かたずねるとよく考えもしないで何でも「知らない、わかりません」と答えるのが普通だから、知らないという答はあまり意味がないのだろう。

5 付録 省略した計算と江沢の方法

孝山博の証明で省略した計算をここで補っておく．その後で江沢の示した方法も示す [4]．

まずは省略した箇所の計算を示しておく．

(3.1) から (3.2) を辺々引き算すれば、

$$a^2 - b^2 = g^2 - f^2, \quad (g = c - f)$$

となる．したがって、

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + g^2 - f^2 \\ &= b^2 + (c - f)^2 - f^2 \\ &= b^2 + c^2 + f^2 - 2cf - f^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cf \end{aligned}$$

である．ここで $f = b \cos A$ を用いれば、余弦定理となる．

同じ図 3.1(b) を用いた江沢の方法も示しておく．

$h = b \sin A$, $f = b \cos A$ であることと $g = c - f$ であることに注意して、三角形 BCH の斜辺の長さ a の 2 乗 a^2 を $a^2 = g^2 + h^2$ から求める．

$$\begin{aligned} a^2 &= g^2 + h^2 \\ &= (c - f)^2 + h^2 \\ &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= c^2 + b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + b^2 \sin^2 A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

これは余弦定理である．

この付録の最後に (3.8) の 2 つの式から $a \cos B$, $a \cos C$ とを求めておく．(3.8) の上の式を $a \cos C$ について解けば、

$$a \cos C = b - c \cos A$$

であり、また (3.8) の下の式を $a \cos B$ について解けば、

$$a \cos B = c - b \cos A$$

これらの式を用いればよい．

(1994.5.16) (2002.3.13 改訂)(2025.3.22 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 余弦定理の証明いろいろ, 研究と実践 (愛数教) 50号 (1994.6) 13-18
- [2] 『解法の探求 I』(東京出版, 1984) 155-157
- [3] 孝山 博, 数学教室 (国土社) (1994.6) 57
- [4] 江沢康生, 私信
- [5] 田島一郎, 中村幸四郎 編, 教科書『数学 1』(幾何編) (好学社, 1957) 118-123
- [6] 佐伯 淳, 高校数学迷いある記 3 三角比, 研究と実践 (愛数協) 49号 (1994.3) 15-20

余弦定理の導出 2

矢野 忠¹⁾

Various Derivations of Cosine Theorem 2

Tadashi YANO

まえおき

これはすでに [1] に掲載した数学エッセイの改訂版である。以前、「研究と実践」に余弦定理のいろいろな導出法を紹介したが [2], その補足である。

1 はじめに

最近インターネットの古書籍販売で『図形と式』 [3] を購入した。昔、書店にこのシリーズの本があったときに覗いてみて矢野健太郎氏の著書としてはあまり特色がないと思ったのでそのときは購入しなかったが、今度購入してみたら、いくつかの細かなところで教えられるところがあった。その一つが極座標を用いた余弦定理の証明である。

また、『数学読本』 2 [4] には解析幾何学での証明も載っている。これもこの「余弦定理の導出 2」につけ加えておきたい。

2 極座標による証明

まず、『図形と式』 [3] にしたがって極座標表示での余弦定理の証明を述べておこう。

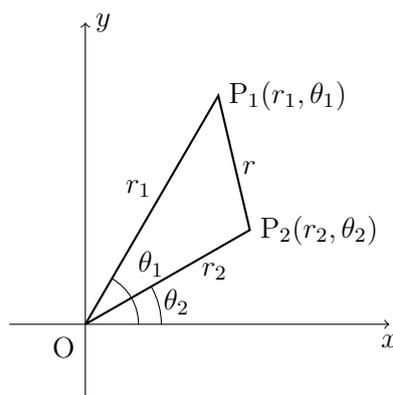


図 2.1 極座標による余弦定理の証明

1) 元愛媛大学工学部

図 2.1 のように 2 点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ を極座標で表せば,

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1 \quad (2.1)$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2 \quad (2.2)$$

である。図 2.1 の三角形 OP_1P_2 で P_1P_2 の距離の 2 乗は

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)^2 \\ &= r_1^2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + r_2^2(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) - 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで, $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ は三角形 OP_1P_2 で辺 OP_1 と OP_2 の間の角 θ であるから, $\overline{P_1P_2} = r$ とおけば,

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta \quad (2.4)$$

となり, 余弦定理が導出された。

3 解析幾何学による証明

『数学読本』 2 [4] にはつぎのような解析幾何学による証明が載っている。

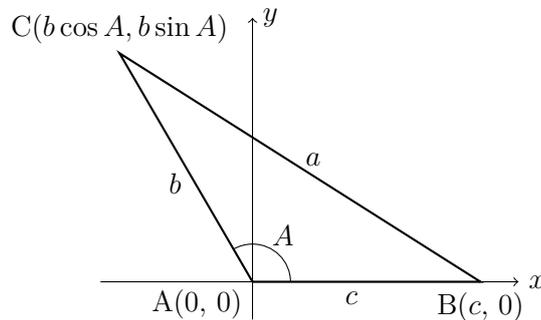


図 3.1 解析幾何による余弦定理の証明

三角形 ABC に対して図 3.1 のように座標軸を定めれば, 三つの頂点の座標はそれぞれ

$$A(0, 0), \quad B(c, 0), \quad C(b \cos A, b \sin A) \quad (3.1)$$

となる。 $\overline{BC} = a$ であるから,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned} \quad (3.2)$$

したがって、余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (3.3)$$

が導出された。

4 おわりに

以前のエッセイではベクトルのスカラー積を用いた導出と初等幾何学的な証明をいくつか紹介したが、ここに解析幾何学的な証明が2つ追加された訳である。どの定理でもその定理が正しいことを理解するためには一つの証明を知っていれば十分であろうが、いろいろな証明を知っておくことは理解に深みを増すことになるであろう。事実の一つでも理解の仕方はいろいろである。

ちなみに矢野健太郎先生は極座標による上を与えた証明を余弦定理の別証明だとは書かれてはいないが、そのことは先刻ご承知のことであつたらう。

学生のころ、物理実験の指導を受けた故大内先生が東京大学で矢野健太郎先生の数学の講義を聞かれた方であり、その先生が「数学の講義が楽しくて、その授業時間が短く感じられるのだよ」と言われていたことを懐かしく思い出している。

(2005.12.11)(2021.5.10 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 余弦定理の証明いろいろ再論, 研究と実践 (愛数協) No. 93 (2007.3) 14-16
- [2] 矢野 忠, 余弦定理の証明いろいろ, 研究と実践 (愛数協) No. 50 (1994.6) 13-18
(『数学散歩』(国土社, 2005) 57-62 に所収)
- [3] 矢野健太郎, 『図形と式』(講談社, 1979) 84-85
- [4] 松坂和夫, 『数学読本』 2 (岩波書店, 1989) 384-385

古くて新しい概念「エンタングルメント」

風乃小路

Entanglement: An Old Yet New Concept

Kouji Kazeno

1 はじめに

皆様初めまして。早大理学修士卒のコウジです。この度はネットを通じた活動の中で編集者さんから寄稿の機会を頂き、数学・物理通信への投稿に挑戦させて頂きます。今回題材としているエンタングルメントは大きなテーマではありますが、私自身が出来るだけ深く理解咀嚼したい言葉です。

本文が掲載された際には多様な方々との議論をする契機としたいと思います。学生であれ社会人であれ物理を考えて欲しい。そんな議論ができる理論がよい理論なのだろうと思います。そして個人的に責務と意義を感じている訳です。その議論の中で少しでも理論が進んでいくことを望みます。私自身は物理の世界から離れて久しいのですが、その視線がネットの世界では大事だとも思えます。大筋で間違いがないか、主張が筋違いではないか不安は尽きません。ただ皆様、時間のある時にご一読頂き、率直なご意見を下さい。機会があればこうした活動は今後も継続していきます。

2023年のノーベル賞でベルの不等式の破れが話題になっています。直接この事実が量子論の有効性を議論しているわけではないと私は考えますが、古典力学・電磁気学で話が収まらない領域だと誰しも考えることでしょう。そこで議論の焦点として1935年を中心に考えています。

また、量子コンピュータの中でエンタングルメントが大きな役割を果たしており、基本に帰って考えることでその性能指標を少しでも向上出来る足掛かりとなるはずだと考えます。そうした視点でご一読下さい。

本稿は重ね合わせ・エンタングルメントの概念を中心に考えていて、応用的側面の考察まで及んでいない点も明記しておきます。また文章形式でウェブライティングに染まっている部分がありますが、ご了承下さい。

以下が原稿で、私の運営しているブログは「<https://www.nowkouji226.com/> 物理学への道標【科学史から】」です。

2 重ね合わせとエンタングルメント

本稿では物理学での重要な概念である

「重ね合わせとエンタングルメント」

について3つの角度から掘り下げていきます。1925年のハイゼンベルグの行列力学の論文以後に生まれ、様々な解釈が続き、エンタングルメントも段々に実態を現していきます。

多くの人が議論して育んでいる概念です。会社員兼ブロガーとして活動している私・コウジが、一般の人に出来るだけ分かり易く「重ね合わせとエンタングルメント」という興味深い物理現象をご紹介しますと挑戦します。エンタングルメントに関心を持っている方はじっくり読んでみてください。そしてご意見を頂けたら幸いです。

視点1. シュレディンガー【1935年発表「量子論と測定」】

さて、シュレディンガーによる1935年発表の「量子論と測定」に出てきた重ね合わせとエンタングルメントの概念に着目し、ご紹介します。

その論文はいわゆるアインシュタイン達のEPR(Einstein-Podolsky-Rosen)相関が提唱された直ぐ後に提起され、後の時代の視点で考えたら、量子力学における局所性に対しての土壌を示したとも考えられます。

シュレディンガーは量子力学の限界を問題としていた、とも解釈されます。量子力学は優れたモデルですが、シュレディンガーが疑問に思ったように完全に物理現象が把握出来ているかどうか吟味解釈し続けなければなりません。

当該論文(1935年)で「シュレディンガーの猫」の思考実験が使われます。絡み合った量子力学的な事象が観測事実と関連されていくのか、シュレディンガーは疑問を呈したのです。

念のために実験環境を再現しておく、

1. 箱の中に猫がいて、毒物で猫が死ぬかもしれない
2. 放射性物質の崩壊といういつ起こるか予測できない量子力学的な事象がガイガーカウンターと連動している
3. ガイガーカウンターが猫の毒殺装置と連動している

結局のところは、思考実験の環境を作っておけば箱を開けるまで猫が死んでいるか生きていたか分からないので普通(⇒巨視的(常識的))に考えたら判断しかねる(⇒もつれあった)現象が箱を開けるまではっきり言えないということになり、どちらなのか量子力学と巨視的な猫の状態で「説明してみて御覧なさい」というのがシュレディンガーの疑問提起です。

ここでの絡み合いが「量子多体問題における相関」ではない点にも注意が必要です。猫は沢山の量子から構成されますが実験の結果に関わる量子はガイガーカウンターに「崩壊してますよ!!」とあるタイミングで情報を発信する放射性原子です。対象原子が他の原子と相関している想定ではありません。

とはいえ、私自身がシュレディンガーの原文を読みこなせていたか再考してみても良いかも知れません。昔は英訳版があった気がするのですが今もあるのでしょうか。センサーと崩壊する原子間のエンタングルメントは灰のめかされていないでしょう。論文の主題は隠れた変数へとつながる量子力学の全体像への問題提起だと理解しています。

時間平均・空間平均といった概念をシュレディンガーは波動関数に対してどのようにとらえていたのでしょうか。興味は尽きません。ディラックの表現によれば波動関数は統計的側面を持つと言えます。特定の観測値を持つ波動は確率で表現されます。

1930年に初版が書かれた教科書【Dirac「量子力学」】から一文を引用します。

「観測結果の計算には避けられない不定さがあり、そして理論のなしうことは、一般には、われわれが観測をするときに**ある特定の結果が得られることの確率**を計算することだけである」(太字は私が強調したい所です) 波動関数を使う議論では結果として猫が死んでいるかもしれないのです。量子力学の立場では確率波を扱っているのです。

視点2. 2000年に Jonathan R. Friedman

さらに時代は進み、20世紀後半となって A.J.Leggett が洗練された手法で磁束やジョセファソン効果などを巨視的量子現象として議論します。いわゆるトンネル現象を使うのです。そして2000年に Jonathan R. Friedman が「Detection of a Schrodinger's Cat State in an rf-SQUID」【Quantum superposition of distinct macroscopic states Jonathan R. Friedman, Vijay Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, J. E. Lukens ([https://people.umass.edu/bvs/Friedman paper.pdf](https://people.umass.edu/bvs/Friedman%20paper.pdf) Nature 稿)】で重ね合わせを再度取りあげます。ここでの状態は広い意味でのエンタングルメントであって二つの状態の重ね合わせの状態であるとも言えます。**重ね合わせとエンタングルメントは近い概念ですが、現代の議論の中では一緒の概念ではありません。** ご紹介している Friedman の説明の中では「シュレディンガーの猫」に対応して「基底状態の磁束と第一励起状態の磁束」が現れます。引用している Friedman の論文での実験セッティング(図C)において「A separate SQUID acts as a magnetometer, measuring the flux state of the sample.」という部分に注目してみてください。磁気計(SQUID)がサンプル(SQUID)内での巨視的な姿をとらえて**重ね合わせが観測できる**のです。こうした実験を人類は何百年も続け、議論を深めて技術を進化させています。外部環境との相互作用が無視出来る適切な条件下では巨視的な実在は十分に量子的に振舞います。ここで猫の入った環境と外部環境は生死を判別することだけが接点でしたが、SQUIDの系と外部環境は十分に切り離されてコントロールされ重ね合わせの様子が感じられると言えるのです。

こうした状況で20世紀後半には実験的に巨視的な量子効果と言える状況が実現しています。Friedmanらは巨視的効果が見える状況下で重ね合わせの状況を観測にかけたのです。具体的には10の10乗(10^{10})個程度の数の電子が位相を揃えて運動する「超電導状態」で現象が生じていて、実際に観測にかかっています。2022年にアスペ等がベルの不等式([https://ja.wikipedia.org/w/index.php?title=CHSHCHSH 不等式](https://ja.wikipedia.org/w/index.php?title=CHSHCHSH%20不等式))の破れを実験的に説明しノーベル賞を受賞しましたが、様々な形で観測にかかる形でエンタングルメントも具現化していると言えます。厳密には「古典的解釈が成立しないという証明に過ぎない」という見解は必要です。しかし、エンタングルメントという言葉が明快に実験の事実と数学上での干渉項を解釈していくのです。もはやエンタングルメントの状態は巨視的現象として存在しています。そして、なにより今、量子コンピューターではエンタングルメントを想定して、超並列計算をしています。

視点3. 量子コンピューターの進化

本稿では最新の活用事例として量子コンピューターをご紹介します、このタイミングでエンタングルメントの状態を再解釈します。

応用されている状態であるエンタングルメントは「多体量子系でのもつれあいの状態」です。そして、歴史的な概念成立に鑑み、今まさに活用されている現代の量子コンピューターでの進化をえています。1994年にベル研のW.Shorが量子Turing機械を活用して「因数分解問題と離散型対数問題を非常に小さな誤り確率で高速に解ける」という事実を明らかにして技術的な可能性を明示しました。この意義は深く、現在の全ての暗号化技術を凌ぐ性能の新型コンピューターが具現化している過程であるとも言えます。量子コンピューターでの基本素子QBITを考えるうえでとても大事な概念となるのがコヒーレンスと、その反対の概念デコヒーレンスです。

「重ね合わせの状態」をQBITの中で活用して「並列計算」を進めていく手法が重要です。並列計算が既存コンピューターと量子コンピューターで大きく異なります。そして重ね合わせの状態が保たれているコヒーレンスが壊れる概念であるデコヒーレンスがとても大事です。その時間の長さは演算可能な時間に関わってきます。日本語で表現すれば「干渉状態の喪失」とも言えるでしょう。

重ね合わせ状態が外部環境などとのやりとりで壊れていく姿は自然に思えます。ただし、可逆な古典理論での枠組みでは説明がつかない現象です。「ニュートン力学は可逆で、現実世界は不可逆です。」水中のボールが減速していく様子はニュートン力学では再現出来ません。

微視的に考えていくと沢山の水分子がボールに弾性衝突をくりかえすのです。その可逆な過程は、統計的に考えていく時点で不可逆な要素が出てくるのです。水の中のボールは速度を増しません。

統計的な作業は本質的であるとも言えるので別項を設けて数学的に説明したいと思います。ただ、そうした作業の中で何故か不可逆性が出てくる所が話の妙です。何故か出てきます。出てくるものです。

「シュレディンガーの猫」の現代的解釈でもデコヒーレンスは大きな役割を果たし、干渉喪失の時間が観測時間に対して非常に短いことから「重ね合わせが成立しない」と表現されます。対して「Freidmanの実験系」では干渉喪失の時間上での問題が生じていないで「重ね合わせの状態が観測できていた」訳です。

量子コンピューターでもこの「デコヒーレンス時間」が大きな役割を果たします。量子コンピューターの回路でキーとなるのは新しい素子である量子ビット（Quantum bitからQUBITとも呼ばれます）です。新しいビットの中では従来型と異なった情報を保持します。すなわち、従来型の「0」か「1」という情報の他に量子コンピューターはその「重ね合わせ」の状態を持つことができその「重ね合わせ状態」がいわゆる、「Shorのアルゴリズム」を可能にします。

3 理研の中村泰信さんの論文から

私は最近、中村さんに注目していて、そこから話を続けます。先に引用している Friedman の論文で引用されている Y.Nakamura が、ここに出てきている中村さんでしょう。特に私が最近稼働を始めた量子コンピューターを勉強していて今まで分かりづらかった情報読み出し機構について明快に 2021 年の論文で説明をしています。

ジョセフソン接合ユーチューブで公開されていますが、理化学研究所導入の量子コンピューターでは「線幅 100nm 200nm のジョセフソン接合」を使い量子ビットの回路を作り上げています。ジョセフソン接合は具体的に超伝導体（例えば Al）で絶縁体（例えば Al_2O_3 ）を挟みます。これを使い従来型の回路である LC 共鳴回路を発展させていくことができます。

【以下、応用物理第 90 巻より引用（太字部）】超伝導体と超伝導体の中のトンネル接合であるジョセフソン接合の寄与により、強い非線形性を導入することができる。ジョセフソン接合は回路上で非線形なインダクタンスとして振る舞う。理化学研究所で導入している量子コンピューターを始めとして世界中で今開発されているほとんど全ての量子コンピューターでは回路量子電磁力学の考え方に基づき、以下で述べるアイデアを応用しています。超伝導共振器を使うアイデア 技術的にもう一つ特徴的な点はマイクロ波で量子ビットを制御する点です。回路内のジョセフソン接合が実効的に非線形の LC 回路として動作する点が重要です。ジョセフソン接合は絶縁体を超伝導体で挟んでいるので「キャパシタとして働く」事情は容易に理解できますが、同時にジョセフソン効果によって非線形のインダクターとしても機能します。故に非線形 LC 回路を構成します。

【以下、応用物理第 90 巻より引用（太字部）】量子情報を非調和的な量子ビット回路に蓄えるのではなく、超伝導共振器に蓄えようというアプローチである。後者の利点として、ジョセフソン接合を必要としないため、電磁場モードが空間中に広がり表面・界面 欠陥の影響を受けにくい 3 次元的な空洞共振器を用いるなどして、量子ビットと比べて高い Q 値すなわち長いコヒーレンス時間を実現することが容易であることが挙げられる。加えて、共振器中のデコヒーレンスは光子の損失によるエネルギー緩和が支配的で位相緩和がほぼ無視できること、また調和振動子特有の等間隔に並んだ多数のエネルギー準位によって形成される大きな状態空間を用いた量子誤り訂正符号を実装可能 であることも利点である。

（中略）

量子ビット状態の非破壊射影読み出し機構としてこの回路量子電磁力学のアイデアが使われている。すなわち、量子ビットにそれと Δ だけ離調した読み出し用共振器を結合させ、量子ビットの状態に応じた読み出し用共振器の共鳴周波数シフト（分散シフト $\sim (g^2) / \Delta$ ）を、読み出し用マイクロ波パルスを受ける反射位相の変化として検出することによる。

記号詳細のご説明は主題から大きくズレていきそうなので控えます。もともとの考えは

A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio,

J. Majer, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf

等によって Phys. Rev. Lett. 95, 060501 (2005). にて議論されていた内容です。中村氏が SQUID などと合わせて全体像を解説してくれている中で紹介されています。

私はこの考えに教えられ、今まで見てきたユーチューブなどで不可解だった量子コンピュータ基盤のパターンが段々と納得出来るようになりました。共振側の回路でのコヒーレント時間が確保できれば実用上、量子コンピュータの計算が進められます。私は「(電源ではない)情報のトランスミッター」といったイメージで共振器を考えています。そして音波の共振が共振体に介在する媒質に左右されるのに対して超伝導共振器の挙動はどう異なるのでしょうか??機会があればさらに検討したい事項です。ここでのエンタングルメントは定量的に評価出来るのでしょうか? [関連論文を読みなさい!]と言われそうですが、もちろん、これから(後ほど)読んでいく積りです。

中村氏の論文の中でも「シュレディンガーの猫状態」なる表現は使われ、QUBIT の中で分かる状態(0か1か)と混在した状態(0または1)が議論の上で区別されています。現代の解釈の中ではエンタングルメント状態は観測で最終的に確定するという立場をとっている点を大事に考えてみて下さい。観測のタイミングが大事です。そしてまた、共振をしている QUBIT と共振器も同じ状態を保ちながら演算に関わります。共振を始めた時点で古典力学的な振り子運動がイメージ出来て離散的な2準位系で $|0\rangle$ と $|1\rangle$ という2つの状態(ケット)が共振していくのです。重ねあわされた量子ビットが動きます。そして、こうした技術の進展を積み重ねて、量子コンピュータは開発されていきます。

今もまた、開発は進んでいます。

4 おわりに

そして知的な活動の発展(積み重ね)の重要性を最後に強調させていただきます。学ぶこと、語り合うこと、合意として「概念」を作っていくことは楽しいものです。知的探求心こそ人が作り上げた喜びです。そんな楽しさを知っている人間たち(特に物理学者)は「AIが概念を自己生成」していくようになって議論を続けている事でしょう。そして、AIと人間が競うように考え続けられれば、更に楽しく議論は続く事でしょう。楽観論でしょうか。楽しみましょう。

★

★

★

(2023.07.08 初稿)

(2025.03.13 改訂)

編集後記

読者の皆さん，こんにちは．私が住む札幌でのこの冬は，過去に例のないおかしなものでした．例年の積雪量の最大値は 1m 程度なのですが，2 月の中旬になってもその半分に満たない 30~40 cm しかありません．このまま春になってくれると，雪掻きもしなくてすむので，楽な年になると思っていました．ところが 2 月の下旬から 3 月の中旬にかけ，寒さも，雪の量もそれを挽回せんとばかりに，真冬に戻ってしまいました．3 月の中旬といえ，春のきざしの「三寒四温」のはずですが，「三寒四寒」，「暑さ寒さは彼岸過ぎても」と言わんばかりです．北国で生まれ育った私は，暑さには弱かったが，寒さには強いつもりでした．しかし，最近は何のせいか，寒さが身に染みるようになりました．「春よコイ，早くコイ」といったところです．

話し変わって，今号には，私（世戸）の『心柱モデル (6)』，編集長の矢野忠さんの『余弦定理の導出 1』『余弦定理の導出 2』，それと，風乃小路さんの『古くて新しい概念「エンタングルメント」』の 4 つのものが載っています．

私が書いたものは，前にも書いたかもしれませんが，東京スカイツリーは，あれほど高く，あれほど細いのに，地震や台風で倒れてしまわないのかということに，興味を持ったことが始まりです．これをでき得る限り簡単化したモデルを作って，物理的に説明できたらと思ったのですが，今回の 6 回目で，ようやく結論らしきものに到達できました．それは塔と心柱の間に付けるダンパー（減衰器）の付け方にあったのです．これ以上現実のものに近づけるには弾性体力学が必要になるので，このテーマはここで一旦お休みということにします．

矢野さんが書かれた「余弦定理」は高校の数学で習う簡単な定理ですが，この「導出 1」と「導出 2」を合わせると，実に 6 通りもの方法が紹介されています．の中には簡単なものもありますが，三平方の定理の証明法を，さらに拡張することで，余弦定理を証明したものが，こんな方法があったのかと感心してしまいました．確かに，余弦定理というのは三平方の定理の拡張版だったのですね．

風乃さんのところにある「エンタングルメント」は「entanglement = 纏れ (もつれ)」で，辞書を引くと，「もめごと，ごたごた，葛藤」とあります．確かに，量子力学では，粒子性と波動性を両立させるために，未来のことを一通りに決めるはずの物理学に，確率などという変なものを持ち込んで，粒子の位置は確率的にしか求められないという，なんともおかしなことになってしまいました．私も初めて量子力学を学んだときは，このことにひどく悩んでしまいました．つまり，Schrödinger 方程式というのは，その奥により基本的な方程式が存在して，そこから近似式として出てくるものではないかとか，この方程式は何故に線形方程式なのか，単に解きやすくするためなのかと，この方程式を見るたびに疑心暗鬼な気分になってしまいました．この風乃さんの表題にある「古くて新しい」というのは，「Schrödinger の猫」から始まって「量子コンピューター」に至るまでのこの種の未解決問題を引きずっていることを指すものと思われます．

（世戸憲治）