数学・物理通信

2巻1号　　2012年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2012 年 3 月 21 日

目 次

微分方程式の解の一意性：再考 **3**

1.1 はじめに 3
1.2 分数冪微分と微分の対数 4
1.3 積分変換 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}_+$ 5
1.4 $\mathcal{R}$ とボレル変換 6
1.5 $\dfrac{d^a y}{dx^a} = \lambda y$ の変換 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ による解 7
1.6 $E_{\lambda,0}$ の定義域と作用素 $T_{e_+^{\lambda x}}$ の拡張 8
1.7 $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}$ を使った発展方程式の解 9
1.8 補足 10
1.9 おわりに 12

四元数の発見へ 2 **14**

2.1 はじめに 14
2.2 Hamilton のノート 14
2.3 Euler の公式の四元数版 21
2.4 おわりに 23

指数関数の基本不等式とその応用 **25**

3.1 はじめに 25
3.2 基本不等式から導かれる指数関数 $\boldsymbol{e^x}$ の性質 25
3.3 Gauss 積分の計算と Γ 関数の Gauss 表示 27
3.4 おわりに 28

編集後記 **29**

Contents

1. Akira ASADA: Uniqueness of Solutions of Differential Equations: Revisited
2. Tadashi YANO: Discovery of Quaternion 2
3. Shozo NIIZEKI: Fundamental Inequality of the Exponential Function and its Applications
4. Tadashi YANO: Editorial Comments

微分方程式の解の一意性：再考

Uniqueness of Solutions of Differential Equations: Revisited

浅田　明[1]
Akira Asada[2]

1.1　はじめに

微分方程式の解の一意性は古くから多くの研究があり非専門家が新たな貢献をする余地はなさそうである．しかしこうした一意性は解の範囲を関数または（シュワルツや佐藤の意味の）超関数に限った場合で　それを超えた一般化関数では違う「解」があるように見える．この「解」は全く無意味な可能性もあるが　そうであってもある種の解の接続を与えると解釈できる．専門家の間では知られた事かも知れないが　あまり知られていないようなので紹介する．

始めに簡単にどのように一意性が破れるか述べる．取り扱う方程式は最も簡単な線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - \lambda y = 0 \tag{1.1}$$

とする．この方程式の解 y は　$\dfrac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y) = 0$ だから $y = Ce^{\lambda x}$, C は定数，と書ける．しかし

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

とすれば　超関数の意味で微分したとき $\dfrac{d}{dx}e_+^{\lambda x} = \lambda e_+^{\lambda x} + \delta$, δ はディラック関数，となることから以下のように見かけ上　別の解が作れる．

$\lambda \neq 0$ とする．形式的な和

$$E_{\lambda,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}\delta^{n-1}, \quad \delta^n = \frac{d^n\delta}{dx^n},\ \delta^0 = \delta \tag{1.2}$$

に意味があり項別微分が出来れば

$$\frac{d}{dx}(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}) = \lambda(e^{\lambda x} + E_{\lambda,0})$$

である．よって (1) に見かけ上 $Ce^{\lambda x}$ 以外の解が有ることになり一意性が破れるように見える．$E_{\lambda,0}$ はシュワルツの意味での超関数ではないが $|c| < |\lambda|$ なら $E_{\lambda,0}e^{cx}$ は意味がある．この場合 $e^{-\lambda x}E_{\lambda,0}$ は定義できない（5節参照）．

[1] asada-a@poporo.ne.jp
[2] Professor Emeritus, Sinsyu University

けれども　この議論には問題が残る．λ を実数とすれば

$$\int_0^\infty e^{\lambda x}e^{\mu x}dx = -\frac{1}{\lambda+\mu}, \quad \mu < -\lambda,$$
$$E_{\lambda,0}e^{\mu x} = \frac{1}{\lambda+\mu}, \quad |\mu| < |\lambda|,$$

だから $\lambda < 0$ の時　$\lambda < \mu < -\lambda$ であれば $\int_{-\infty}^\infty e_+^{\lambda x}e^{\mu x}dx + E_{\lambda,0}e^{\mu x}$ が定義できるがその値は 0 である．これはある種の関数空間の上の作用素（一般化関数）と見たとき $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} = 0$ であることを意味する．これが 0 でないような（一般化）関数としての意味づけが出来るかは今後の問題だろう．あるいは $E_{\lambda,0}$ が定義できる関数空間と　作用

$$T_{e_0^{\lambda x}} : f(x) \to \int_0^\infty e^{\lambda x}f(x)dx$$

が定義できる関数空間を合わせることにより $T_{e_+^{\lambda x}}$ の定義域を拡張できると解釈すべきかもしれない（詳しい議論は６節にある）．

この「解」は分数幂微分，特に分数幂微分を平行移動に移す積分変換 $\mathcal{R}$ と　（拡張された）ボレル変換との関係を調べる中で見つかった ([4])．そのため　まず２節から４節で簡単にその説明をし　５節から７節でこの「解」の意味づけ，発展方程式への「応用」などを述べる．

1.2　分数幂微分と微分の対数

$\Re a > 0$ のとき a-階の不定積分を

$$I^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x (x-t)^{a-1}f(t)dt \tag{1.3}$$

で定義する（積分は 0 から始めなくても良い)．. $I^a f(x)$ は正の実軸上で定義された関数だが x を複素変数として $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ での関数とみる場合もある．$\Re(a+c) > 0$ なら

$$I^a x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)}x^{a+c}$$

だがこの右辺は x, c, a について解析的だから以下では解析接続して任意の c でこの式が成り立つと見る．

分数幂微分は $\Re(n-a) > 0$ として

$$\frac{d^{n-a}}{dx^{n-a}}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}I^a f(x); \quad \mathrm{Riemann-Liouville} \tag{1.4}$$
$$\frac{d^{n-a}}{dx^{n-a}}f(x) = I^a(\frac{d^n f}{dt^n})(x), \quad \mathrm{Caputo} \tag{1.5}$$

の２種類の定義があり　これらは必ずしも一致しない．しかし f をミクシンスキの演算子 ([11]) とし超関数の意味での微分を使えば一致する．この場合定数の分数幂微分は定義できない（１はヘヴィサイド関数Ｙにおきかえられる）．

演算子の空間へ作用すると見れば $\frac{d^{-a}}{dx^{-a}} = I^a$, $a > 0$ として $\{\frac{d^a}{dx^a}|a\in\mathbb{R}\}$ は１経数群でその生成作用素は $\log(\frac{d}{dx})$;

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = -\big(\gamma f(x) + \int_0^\infty \log(x-t)\frac{df_+(t)}{dt}dt\big) \tag{1.6}$$

で与えられる ([3],[12])．ただし γ はオイラー定数，$\dfrac{df_+(t)}{dt}$ は $f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$ の超関数の意味での微分

$$\frac{df_+(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + f(0)\delta$$

である．

分数冪微分の定義が一意でないのは厄介だが $c,\, c-a$ がともに負の整数でなければ

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a} \tag{1.7}$$

が成り立つ．また x_+^c についても同じ式が成り立つ（この場合定義域は $x > 0$).

1.3 積分変換 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}_+$

定義１．積分変換 $\mathcal{R}$,$\mathcal{R}_+$ を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds \tag{1.8}$$

$$\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_+^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds \tag{1.9}$$

で定義する．

$\mathcal{R}[f](x)$ は $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ で定義されるが $\mathbb{R}_+[f](x)$ は $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ で定義されている．両側ラプラス変換 $\mathcal{L}[g(s)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}g(s)ds$ を使うと

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{L}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](\log x), \quad t = \log x$$

である．

定理１．$\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が急減少なら

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a), \tag{1.10}$$

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \mathcal{R}_+[\tau_a f(s)](x) \tag{1.11}$$

である．

証明．仮定から $\dfrac{d^a}{dx^a}$ と積分が交換できて

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} x^{s-a} f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} f(t+a)dt, \quad s-a = t \end{aligned}$$

となる．よって (10) が成立する．(11) も同様に証明される．

系．同じ仮定で次の式が成り立つ．

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{df}{ds}](x), \quad \log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \mathcal{R}_+[\frac{df}{ds}](x). \tag{1.12}$$

この証明は短いが天下り的である．[3] には何故 $\mathcal{R}$ が導入されたかわかるような証明がある．$\mathcal{R}_+$ の定義は [3] にはない（[4] にはある）．

a が複素数 $b+ci$ であれば

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty-ic}^{\infty+ic} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s+a)ds,$$

だが $|f(s)| \le Ae^{-t|s|^2}$, $A>0, t>0$, $|\Im s| < |c|+\epsilon$, $\epsilon>0$ が成立していればコーシーの積分定理から (10)，(11) が成立する．

この定理は f が関数でなくても成立する場合がある．特に $\delta_c = \delta(s-c)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_c](x) = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{R}_+[\delta_c](x) = \frac{x_+^c}{\Gamma(1+c)} \tag{1.13}$$

だから　c が負の整数でなければ (10),(11) が成り立つ．一方 c が負の整数 $-n$ であれば

$$\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0, \quad \mathcal{R}_+[\delta_{-n}] = \delta^{(n-1)}(= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\delta) \tag{1.14}$$

であり $\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[\delta_c]) = \dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}_+[\delta_c]$ は成立するが
$\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[\delta_c]) = \dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}[\delta_c]$ は必ずしも成立しない ([4] 参照).

1.4　$\mathcal{R}$ とボレル変換

原点の近傍での正則関数 $\phi(z) = \sum_n c_n z^n$ のボレル変換 $\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z)$ は

$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \sum_n \frac{c_n}{n!} z^n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{\frac{z}{\zeta}}}{\zeta}\phi(\zeta)d\zeta$$

で定義される ([1],[10])．定義から

$$\frac{d}{dz}\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\zeta^{-1}\phi(\zeta)](z), \quad \mathcal{B}[\zeta^{-n}](z) = 0, \tag{1.15}$$

である．また $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ を　積を $(f\sharp g)(x) = \dfrac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ で定義した有限指数型関数の環, $\mathcal{O}$ を原点での正則関数の芽の環とすれば

$$\mathcal{B} : \mathcal{O} \cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C}), \tag{1.16}$$

である．

ボレル変換の逆変換は

$$\mathcal{B}^{-1}[f(t)](x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)dt \tag{1.17}$$

で与えられるが　これは必ずしも有限指数型でない関数にたいしても定義できる．例えば

$$\mathcal{B}^{-1}[t^c](x) = \Gamma(1+c)x^c, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log t](x) = \log x - \gamma,$$

である．公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \overbrace{\log x \sharp \cdots \sharp \log x}^{n} = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1+t)} x^t$$

が成立するから

$$\mathcal{B}[\zeta^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{B}[\log\zeta](z) = \log z + \gamma$$

と定義してボレル変換を $F(\log z)$, $F(z)$ は整関数，となる関数にまで拡張できる ([1])．なお右半平面では広義一様に

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathcal{B}[(\zeta-\epsilon)^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathcal{B}[\log(\zeta-\epsilon)](z) = \log z + \gamma,$$

が成り立つ．この拡張されたボレル変換の像は $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$（の開集合の）関数である．

一方　ボレル変換の像を虚軸を含む）右半平面とすれば

$$\int_0^\infty e^{-t}\delta(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-s}\delta(s)ds = \frac{1}{x}$$

だから $\mathcal{B}^{-1}[\delta] = \dfrac{1}{x}$ となる．これからこのように定義域を狭めたボレル変換を $\mathcal{B}_+$ と書くことにすれば

定理２．次の式が成り立つ．

$$\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{B}[\zeta^c], \quad \mathcal{R}_+[\delta_c] = \mathcal{B}_+[\zeta^c]. \tag{1.18}$$

1.5　$\dfrac{d^a y}{dx^a} = \lambda y$ の変換 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ による解

$y = \mathcal{R}[f(s)]$ であれば (10) により $f(s+a) = \lambda f(s)$ のとき $\dfrac{d^a}{dx^a}y = \lambda y$ である．$f(s)$ が関数なら

$$f(s) = e^{\mu s}h(s), \quad e^{\mu a} = \lambda,\ h(s+a) = h(s)$$

でこのような f に対して $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ が関数として定義できれば (1) の解の関数の範囲での一意性が破れるので関数としては定義できない（適当な関数空間の上の一般化関数としての定義は可能である ([4]))．

一方シュワルツ超関数としては離散デルタ　ポテンシャル

$$h(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n\delta_{na+\beta},$$

(とその β についての和）が $h(s+a) = \lambda h(s)$ をみたす．以下では

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n\delta_{na+\beta} = h_{\lambda,\alpha;\beta}$$

とおく．特に $\beta = 0$ のとき $h_{\lambda,a;0} = h_{\lambda,a}$ と書く．$h_{\lambda,a,;\beta}$ で張られる空間は $\mathcal{Z}$ の $1\to\tau_a$ という作用で不変な空間である．

補題１．$\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a}]$ が定義できれば

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a}] = \lambda\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a}] \tag{1.19}$$

である．また a が無理数なら変換 $\mathcal{R}$ についても同じ式が成り立つ．

命題２．$h_{\lambda,1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n\delta_n$ については

$$\mathcal{R}[h_{\lambda,1}](x) = e^{\lambda x}, \quad \mathcal{R}_+[h_{\lambda,1}](x) = e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} \tag{1.20}$$

である．また $h_{\lambda,1}^+ = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\delta_n$ とすれば $\mathcal{R}[h_{\lambda,1}] = \mathcal{R}[h_{\lambda,1}^+]$ が成立する．

注意．$(\dfrac{d}{dx}-\lambda)e_+^{\lambda x} = \delta$ だから (19) が成立することは $(\dfrac{d}{dx}-\lambda)E_{\lambda,0} = -\delta$ を意味する．

$E_{\lambda,0}$ の定義域としては　例えば

$$\mathcal{D}(\mathbb{R})_c = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) | \limsup |c^{-n} \frac{d^n f}{dx^n}(0) = 0\},$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<c} = \cup_{c'<|c|}\mathcal{D}(\mathbb{R})_c$ として $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ が取れる．この場合 $e_+^{\lambda x}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とみて $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ 上の汎関数 $(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0})$ を

$$(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0})(\phi(x)) = \int_0^\infty e^{\lambda x}\phi(x)dx + \sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n} \frac{d^{n-1}\phi}{dx^{n-1}}(0)$$

で定義する．なお定義から $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ で $e^{-\lambda x}f(x) \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ となる f があるから $e^{-\lambda x}E_{\lambda,0}$ は定義できない．

1.6 $E_{\lambda,0}$ の定義域と作用素 $T_{e_+^{\lambda x}}$ の拡張

$E_{\lambda,0}$ が正則関数に対してだけ定義されているとし，逆ボレル変換を使えば $E_{\lambda,0}$ の $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ より意味がありそうな定義域（とその上の汎関数としての作用）がある．

まず f が $|\lambda|$ より広い収束半径を持つテーラー展開が出来れば

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n = f(\lambda)$$

となることに注意する．これから　もし u が $\frac{d^n u}{dx^n}(0) = n!\frac{d^n f}{dx^n}(0)$ をみたし $u(\lambda)$ が存在すれば

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n \frac{d^n f}{dx^n}(0) = u(\lambda)$$

である．f の逆ボレル変換が存在すれば $u = \mathcal{B}^{-1}[f]$ だから $E_{\lambda,0} = \sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n}\delta^{n-1}$ に注意すれば

定理３．f は正則とする．$\mathcal{B}^{-1}[f]$ が定義でき λ^{-1} がその定義域に入れば

$$E_{\lambda,0}f = \lambda^{-1}\mathcal{B}^{-1}[f](\lambda^{-1}) \tag{1.21}$$

である．

この定理から $E_{\lambda,0}$ は逆ボレル変換が λ^{-1} で定義されているような関数の空間の上の汎関数として意味がある．また逆ボレル変換が整関数になるような関数の空間 (=整関数のボレル変換像となる関数の空間）の上の汎関数（一般化関数）として　すべての $E_{\lambda,0}$ は意味がある．(21) からこうして定義される汎関数 $E_{\lambda,0}$ は**非局所的作用素**になる．

収束半径が c より大きい正則関数のボレル変換になる関数の全体を F_c, 整関数のボレル変換となる関数の全体を F_∞ とおく．定義から $\mathsf{F}_\infty = \cap_{c>0}\mathsf{F}_c$ である．また関数 f と $g \in \mathsf{F}_c$ に対し

$$T_f[g(x)] = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)dx$$

と置く．$x^n \in \mathsf{F}_\infty$ であり

$$T_{e_+^{\lambda x}}[x^n] = (-1)^n\lambda^{-n}n!, \quad E_{\lambda,0}x^n = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}n!$$

だから F_c の関数はテーラー展開できることにより

補題２．$g(x) \in \mathsf{F}_c,\ c \geq \dfrac{1}{\lambda}$ に対し $T_{e_+^{\lambda x}}[g(x)]$ が定義できれば

$$T_{e_+^{\lambda x}}[g(x)] = -E_{\lambda,0}(g(x)) \tag{1.22}$$

である．

補題２から

命題３．$\mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ の上の作用素（汎関数）として

$$T_{e_+^{\lambda x}} + E_{\lambda,0} = 0 \tag{1.23}$$

である．

注意．(22) と定理３から $g(x) \in \mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ であれば　積分 $\int_0^\infty e^{\lambda x} g(x)dx$ が発散していてもその正則化として

$$: \int_0^\infty e^{\lambda x} g(x)dx := \lambda^{-1}\mathcal{B}^{-1}[g](\lambda^{-1}) \tag{1.24}$$

が使える．

$\{g(x) | |T_f[g]| < \infty\} = \mathcal{D}_{T_f}$ とする．定義から $\mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}} \not\subseteq \mathsf{F}_c$ である．$\mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ と $\mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}}$ から張られた空間を $\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ とする．

定義２．$\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ の上の線形汎関数（一般化関数）$\widetilde{e^{\lambda x}}_+$ を

$$\widetilde{e^{\lambda x}}_+[f(x)] = \begin{cases} \int_0^\infty e^{\lambda x} f(x)dx,\ f(x) \in \mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}}, \\ E_{\lambda,0}(f(x)), \quad f(x) \in \mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}. \end{cases} \tag{1.25}$$

で定義する．同様に $\tilde{E}_{\lambda,0}$ も定義する．

定義から

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)\widetilde{e^{\lambda x}}_+ = \delta, \quad (\frac{d}{dx} - \lambda)\tilde{E}_{\lambda,0} = -\delta,$$

である．よってこれらは (1) の基本解になる．

$\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ の位相は大事な問題だがまだ考えていない．これからの課題である．

1.7　$e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}$ を使った発展方程式の解

D を空間 X 上の（正定値）楕円形方程式で固有値 $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$ とそれに属する固有関数 $\phi_n(x),\ D\phi_n = \lambda_n\phi$ をもちグリーン作用素 $G; Gf(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-1}(\phi_n, f)\phi_n(x)$ を持つとする．この仮定で　発展方程式

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - D_x U(t,x) = 0 \tag{1.26}$$

をフーリエの方法で解くとき

$$\frac{df(t)}{dt} = \lambda_n f(t) \tag{1.27}$$

の解として $e_+^{\lambda_n t} + E_{\lambda_n,0}$ を使えば

$$U(t,x)_0 = \sum_{n=1}^\infty C_n e_+^{\lambda_n t}\phi_n(x) + \sum_{n=1}^\infty C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n(x)$$

の形の解が得られる．ただし $\sum_{n=1}^\infty C_n\phi_n(x)=u(x)$ とする．比較のため初期条件 $U(0,x)=u(x)$ で (22) を解いた ((23) の解として $e^{\lambda_n t}$ を使った）解を

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^\infty C_n e^{\lambda_n t}\phi_n(x)$$

と置く．$n\to\infty$ で C_n が十分早く 0 に収束すれば

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n(x)&=\sum_{n=1}^\infty C_n\big(\sum_{m=1}^\infty \lambda_n^{-m}\delta^{m-1}\big)\phi_n(x)\\&=\sum_{m=1}^\infty \delta^{m-1}\big(\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-m}C_n\phi_n(x)\big)\end{aligned}$$

となる．ここで $C_n=(u(x),\phi_n(x))$ だから

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-m}C_n\phi_n=G^m u(x)$$

である．よって　同じ仮定で

$$\sum_{n=1}^\infty C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n=\sum_{n=1}^\infty \delta^{n-1}G^n u(x), \tag{1.28}$$

となる．形式的には

$$(\frac{\partial}{\partial t}-D)^{-1}=-G(I-\frac{\partial}{\partial t}G)^{-1}=-G(\sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^n}{\partial t^n}G\ n),$$

だから (9) は

$$\sum_{n=1}^\infty C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n=-(\frac{\partial}{\partial t}-D)^{-1}\delta\otimes u(x) \tag{1.29}$$

となって $(\dfrac{\partial}{\partial t}-D)U_{+,t}(t,x)=\delta\otimes u(x)$ を打ち消す項になっている．$U(t,x)_0=U(t,x)_{0,+}+U(t,x)_{0,0}$;

$$U(t,x)_{0,+}=\sum_{n=1}^\infty C_n e_+^{\lambda_n t}\phi_n(x),\quad U_(t,x)_{0,0}=\sum_{n=1}^\infty C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n(x),$$

とおけば

$$\big(\frac{\partial}{\partial t}-D\big)U(t,x)_{0,+}=\delta\otimes u(x),\quad \big(\frac{\partial}{\partial t}-D\big)U_{0,0}=-\delta\otimes u(x),$$

となり方程式 $\big(\dfrac{\partial}{\partial t}-D\big)U(t,x)=\delta\otimes u(x)$ の解の一意性も破れている．ただし補題 2 に従えば $\mathsf{F}_\infty\otimes C(X)$, $C(X)$ は X 上の適当な関数空間の作用素として $U(t,x)_{0,+}=-U(t,x)_{0,0}$ だから一意性が破れているとは言えない．この場合も

$$\tilde U(t,x)_{0,+}=\sum_{n=1}^\infty C_n\widetilde{e^{\lambda x}}_+\phi_n(x),\quad \tilde U(t,x)_{0,0}=\sum_{n=1}^\infty C_n\tilde E_{\lambda_n,0}\phi_n(x)$$

で作用素としての定義域の拡張が定義できる．

1.8　補足

1. 補題 1 から β が整数でないとき $\dfrac{d^\beta}{dx^\beta}(e_+^{\lambda x}+E_{\lambda,0})$ が定義できれば (1) の $e^{\lambda x}$, $e_+^{\lambda x}+E_{\lambda,0}$ と独立な解になる．しかし分数冪微分の積公式（ライプニッツの法則）は複雑なので ([2],[3]), 定理 3 にあたる式 ; 例えば

$$(\frac{d^a}{dx^a}E_{\lambda,0})(f)=\mathcal{B}^{-1}[\frac{d^a f}{dx^a})](\lambda^{-1}),$$

が $\dfrac{d^\beta}{dx^\beta}E_{\lambda,0}$ に対して成り立つかは解らない．

2．a が無理数であれば形式的に

$$\mathcal{R}[h_{\lambda,a}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{na}}{\Gamma(1+na)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-n} x^{-na}}{\Gamma(1-na)},$$

である（$\mathcal{R}_+$ についても同様な式が得られる）．$\Re a > 0$ からこの右辺第１項は収束するが第２項は発散する．しかし

$$\text{p.f.} \int_0^\infty x^{-na} f(x)dx = \frac{1}{(1-na)\cdots(m-na)} \int_0^\infty x^{m-na} \frac{d^m f(x)}{dx^m} dx,$$

$m = [n\Re a]$ であり

$$\frac{1}{\Gamma(1-na)(1-na)\cdots(m-na)} = \frac{\sin(na\pi)\Gamma(na)}{(1-na)\cdots(m-na)}$$

だから　適当な関数空間の上では $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\lambda^{-n}}{\Gamma(1-na)}\text{p.f.}\int_0^\infty x^{-na}f(x)dx$ が汎関数（一般化関数）として意味がある可能性がある．

3．(26) の右辺の逆ボレル変換は　それぞれ $\sum_{n=0}^\infty \lambda^n x^{na}$, $\sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n}x^{-na}$ である．ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^{na} = \frac{1}{1-\lambda x^a}, \quad |\lambda x^a| < 1, \tag{1.30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^{-na} = \frac{1}{\lambda x^a - 1}, \quad |\lambda x^a| > 1, \tag{1.31}$$

となるから　見かけ上 (26) の右辺第１項と第２項は打ち消しあうようだが　収束域に共通点がないので打ち消すとすぐには言えない．しかしこの事と「はじめに」で注意した　ある種の関数空間の作用素としては $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} = 0$ となること（命題３）とは関係するだろう．これがどのような意味を持つか調べるのは今後の課題である．**4**．

$$h^+_{\lambda,a;-m} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}\delta_{na-m}$$

とすれば　（一般化された）ミッターハ・レフラー関数 $E_{a,b}(x) = \sum_{n-0}^\infty \dfrac{x^n}{\Gamma(na+b)}$([6]) を使えば

$$\mathcal{R}[h^+_{\lambda,a,-m}](x) = x^{a-(1+m)}E_{a,a-m}(\lambda x^a)$$

であり　方程式

$$\frac{d^a}{dx^a}y = \lambda y, \tag{1.32}$$

の解である．m は a が有理数 $\dfrac{q}{p}$ であれば $1,\ldots,q$, 無理数であれば任意の自然数とする ([4])．

$$h_{\lambda,a,-m} = \lambda h^+_{\lambda,a,-m} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}\delta_{na-m} = \lambda h^+_{\lambda,a,-m} + h^-_{\lambda,a,-m},$$

とおけば $\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a,-m}] = \mathcal{R}[h_{\lambda,a,-m}]_+$ であり $\mathcal{R}_+[h^-_{\lambda,a,-m}]$ に意味が付けば５節から７節までと同じ議論が方程式 (32) に対して出来る．

1.9　おわりに

こうした議論が微分方程式論として意味があるかどうかは解らない．あるいは命題３が示すように全く無意味で　せいぜいある種の発散積分の正則化（(２ 4) の式）くらいしか意味がないかもしれない．６節の結果からはここでの議論は (1) の解ではなく　方程式

$$\frac{dY}{dx} + \lambda Y = \delta$$

の（一般化）関数解の定義域が拡張できるという事を問題にしているとも言えそうである． ただあえて解釈すれば（ＳＦ的だが）　時間があるとき発生すれば（他の物質・情報と相互作用を始めれば）　その影響は　それまで観測されていた世界と別の世界にあらわれいつまでも続くということだろうか？

ここでは整数階の微分方程式を主に扱ったが　こうした議論の出発点は分数冪微分の研究で方法的にも分数冪微分との関係は深い．その意味では方程式 (32) などをこの観点から見直すのも意味があるかもしれない.

また [4] では変換 $\mathcal{R}$ を通して関数の世界（連続な世界）と離散デルタ　ポテンシャルの世界（離散な世界）が結びついていることが示唆された．補題２は　さらにある種の一般化関数の世界では　関数がディラック関数とその導関数の級数に展開されることを示唆しているようにも見える．この方向の研究も意味があるかもしれない.

分数冪微分は最近応用面でかなり興味を持たれているようである．[5],[7],[8],[9] はこの小文に関係はないが最近の文献なので　この機会に紹介する事にした.

日本語の分数冪微分の文献はあまりないようなので拙著 [3] をあげておいた．役に立てば幸いである.

参考文献

[1] Asada,A.: Some extension of Borel transformation, J. Fac.Sci.Shinshu Univ. 9(1974),71-89. 有理型関数の Borel 変換,「フーリエ超関数と偏微分方程式」（森本光生編），数理研講究録 459(1982), 122-138.

[2] Asada,A.: Fractional calculus and infinite order differential operators, Yokohama Math. J. 55(2010), 129-147.

[3] Asada,A.: 関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する,「数理の玉手箱」（藤井一幸編），90-131　遊星社　2010.

[4] Asada,A.: 分数冪微分方程式と discrete delta potential, 「幾何学的力学系の新展開」　数理研講究録（岩井敏洋・山口義幸編），近刊

[5] Baleanu,D. Diethelm,K. Scalas,E. Trujilo,J.: Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, World Sci. 20211.

[6] Erdéli,A. Mgnus,W. Oberbettinger,F,Tricomi,F.G.: Higher Transcendental Functions, Chap.18. New York, 1981.

[7] Herrmann,R.: Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, World Sci. 2011.

[8] Hilfer,R.: Applications of Fractional Calculus in Physics, World Sci. 2011.

[9] Klafter,J.Lin,S.C. Metzleer,R.: Fractional Dynamics, World Sci.2011.

[10] Martineau,A.: Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. Math. 11(1963), 1-164.

[11] Mikusinski,J.: Operational Calculus, Pergamon, 1959.「演算子法」　上下　（上　松村英之訳　下　松浦重孝訳）裳華房　1985

[12] Nakanishi, N.: Logarithm type functions of the differential operators, Yokohama Math. J. 55(2010), 149-163.

四元数の発見へ2

Discovery of Quaternion 2

矢野　忠[3]
Tadashi YANO[4]

2.1　はじめに

すでに「四元数の発見へ」 [1] で Hamilton が 四つの元 $1, i, j, k$ の間の代数系を導いた推論の道筋を辿った．それは四元数へと導かれた Hamilton の推論 [2] の（一部の）解読であった[5]．

しかし，Hamilton は何回も彼の四元数の発見について書いている．その中で最初の記述と思われるものに Hamilton の 1843 年 10 月 16 日の研究ノートがあり， [3] にその日本語の訳がある[6]．このノートの記述は [2] と本質的に同じらしいが，その記述の仕方が初めの部分で少し違っている．

その異なる部分を中心にこのノートの解読をしてみたい．

2.2　Hamilton のノート

第３の元 j の発見の記述は [2] と同じで，すでに「四元数の発見へ」 [1] で述べた通りである．こうして第３の元が導入されると複素数における純虚数単位 i に加えて新しい元 j が得られたことになる．

複素平面上の一点 (x, y) は複素数としては $x + iy$ と表されるが，それと同様に３次元空間中の一点 (x, y, z) は $x + iy + jz$ と表されるであろう．これを仮に“ 三元数 ”と呼ぶことにしよう．

まず $x + iy + jz$ の２乗を考えてみよう．

$$(x + iy + jz)^2 = x^2 + (iy)^2 + (jz)^2 + 2ixy + 2jxz + ijyz + jiyz$$

となる．ここで，$ij = ji$ とすれば，

$$(x + iy + jz)^2 = x^2 - y^2 - z^2 + 2ixy + 2jxz + 2ijyz \tag{2.1}$$

となる．しかし，この右辺の最後の項 $2ijyz$ はちょっと都合が悪い．なぜなら，空間内の点は $(1, i, j)$ を元として表せると予想していたから．もちろん，(2.1) が導かれたのには $ij = ji$ という仮定があった．

ともかく $2ijyz$ があるとどうもしっくりこない．それは上に述べた空間的なイメージがつくり難いからである．

３次元空間中の点 $(1, 0, 0)$ は実軸上の原点からの長さ 1 の線分で表すことができる．また，３次元空間中の点 (x, y, z) は原点から空間内の点 (x, y, z) へと向う長さ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の線分で表すことができる．

[3]yanotad@earth.ocn.ne.jp
[4]Professor Emeritus, Ehime University
[5]なかなか全体の解読にはまだ至っていない．今後の問題である．
[6]四元数を解説した書籍は日本ではまだ多くない．堀の本 [3] は詳細で，多くの内容をカバーしており，貴重である．

３元数 $(x+iy+zj)^2$ を考えるために，複素数の場合を思い出して

$$x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

という極座標表示を考えよう．極座標表示で表した r と θ とは図２．１に表したようになる．すなわち，r は原点から点 (x,y) への距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ であり，θ は複素数 $(1,0)=1+0i$ と $(x,y)=x+iy$ との間のなす角である．

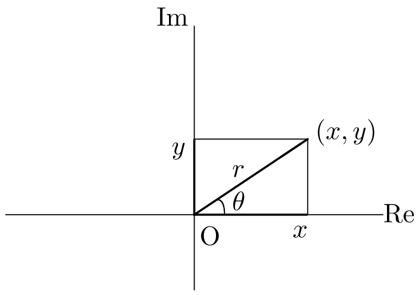

図 2.1: 複素数の極座標表示

さて，$x+iy$ の２乗 $(x+iy)^2$ を考えると

$$(x+iy)^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

が得られる．したがって，$(x+iy)^2$ と１との間のなす角は１と $x+iy$ の間のなす角の２倍になっている．

話をもとへ戻すと $(x+iy+jz)^2$ から出てくる項 $2ijyz$ があってはどうも幾何学的な解釈ができそうにない．それでこの ij のかかった項は何らかの理由で落ちてほしい．そのことを以下では考えてみよう．

いま

$$(x+iy+jz)^2=X+iY+jZ, \quad X=x^2-y^2-z^2, \quad Y=2xy, \quad Z=2xz$$

と表せるためには $ij=0$ であればよいが，これはどうも奇妙で落着きがわるいと Hamilton は考えた．

そこで i と j との積の順序に注意して $(x+iy+jz)^2$ を計算すれば

$$(x+iy+jz)^2=x^2-y^2-z^2+2ixy+2jxz+(ij+ji)yz$$

であるから，いま

$$ij+ji=0 \tag{2.2}$$

と要請すれば,

$$(x+iy+jz)^2=x^2-y^2-z^2+2ixy+2jxz \tag{2.3}$$

となり，これなら幾何学的な解釈も問題がなさそうである．

複素数の場合から類推して三元数１と $x+iy+jz$ との間のなす角を ϕ とすれば，１と $(x+iy+jz)^2$ とのなす角 ψ は，すなわち，$(1,0,0)$ と $(x^2-y^2-z^2,2xy,2xz)$ との間のなす角であり，$\psi=2\phi$ となるだろう[7]．

つぎに $(x+iy+jz)$ の２乗の $(x+iy+jz)^2$ よりほんの少しだけ一般化した，積 $(a+iy+jz)(x+iy+jz)$ を考えよう．それは

$$\begin{aligned}(a+iy+jz)(x+iy+jz)&=ax-y^2-z^2+i(a+x)y+j(a+x)z+(ij+ji)yz\\&=ax-y^2-z^2+i(a+x)y+j(a+x)z\end{aligned} \tag{2.4}$$

[7] この推論をここでは証明しない．しかし，この推論は確かに成立している．証明のしかたは以下の $(a+iy+jz)(x+iy+jz)$ の偏角の証明と同じである．またはその証明で $a=x$ とおいたと考えれば証明できる．

となる．

複素数の場合に $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta), x+iy=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ として

$$(a+ib)(x+iy)=rR[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)] \tag{2.5}$$

である．したがって，$(a+ib)(x+iy)$ の絶対値は

$$|(a+ib)(x+iy)|=rR$$

である．

これから類推して $a+iy+jz$ の絶対値を $|a+iy+jz|=\tau$ と表し，$x+iy+jz$ の絶対値を $|x+iy+jz|=\rho$ と表せば，$(a+iy+jz)(x+iy+jz)$ の絶対値 κ は

$$\kappa=|(a+iy+jz)(x+iy+jz)|=\tau\rho \tag{2.6}$$

と表せるであろう．そうすれば

$$|(ax-y^2-z^2)+i(a+x)y+j(a+x)z|=\tau\rho$$

が成り立つであろうか．

それには $\tau=\sqrt{a^2+y^2+z^2}, \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるから，$\kappa^2=\tau^2\rho^2$，すなわち，

$$(ax-y^2-z^2)^2+(a+x)^2(y^2+z^2)=(a^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2.7}$$

が成り立つかどうかを調べればよい．ところがこの式は確かに成り立っている．したがって，

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)} \\ T &= ax-y^2-z^2 \\ U &= (a+x)\sqrt{y^2+z^2} \end{aligned}$$

で定義された S,T,U は直角三角形の３辺であり，S が斜辺の長さになっていることは明らかであろう．

(2.5) で

$$(a+ib)(x+iy)=rR[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)] \tag{2.5}$$

と２つの複素数 $a+ib$ と $x+iy$ の積が極形式で表されることを見たが，このことは $(a+ib)(x+iy)$ の偏角が $a+ib$ の偏角と $x+iy$ の偏角の和に等しいことを示している．

同様に２つの“３元数”$a+iy+jz$ と $x+iy+jz$ との積 $(a+iy+jz)(x+iy+jz)$ の偏角は $a+iy+jz$ の偏角と $x+iy+jz$ の偏角の和になっているであろうか．そのことを確かめなくてはならない．

すなわち，いま $a+iy+jz$ の偏角を α とし，$x+iy+zj$ の偏角を β とし，$(a+iy+jz)(x+iy+jz)$ の偏角を γ とすれば,

$$\gamma=\alpha+\beta \tag{2.8}$$

が成り立つかどうか．

ここで，$a+iy+jz$ の偏角 α は

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a} \tag{2.9}$$

を満たす（図 2.2 参照）[8]．

また，$x+iy+jz$ の偏角 β は

$$\tan\beta=\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} \tag{2.10}$$

[8] 図 2.2 の直角三角形は３次元空間内のある平面上にある．３次元の図はわかり難いので，その平面上の三角形だけを取り出している．三角形の頂点 O, P, Q の座標を図の説明に示した．以下，図 2.3, 2.4 でも同様である．

を満たしている（図 2.3 参照）.

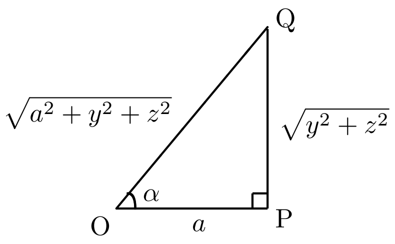

図 2.2: 三元数 $a+iy+jz$ のつくる直角三角形． 頂点 O, P, Q の位置は O(0, 0, 0), P(a, 0, 0), Q(a, y, z) である．

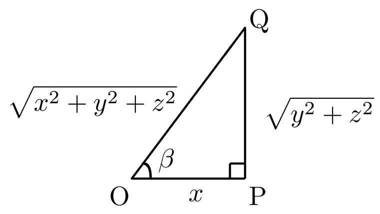

図 2.3: 三元数 $x+iy+jz$ のつくる直角三角形． 頂点 O, P, Q の位置は O(0, 0, 0), P(x, 0, 0), Q(x, y, z) である．

さらに，$(a+iy+jz)(x+iy+jz) = ax-y^2-z^2+i(a+x)y+j(a+x)z$ の偏角 γ は

$$\tan\gamma = \frac{(a+x)\sqrt{y^2+z^2}}{ax-y^2-z^2} \tag{2.11}$$

を満たしている（図 2.4 参照）.

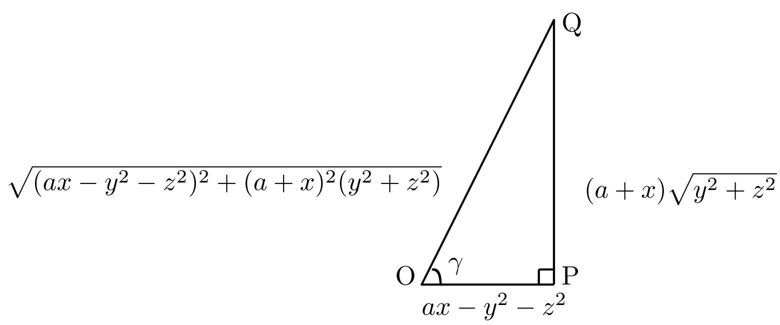

図 2.4: 三元数 $(ax-y^2-z^2)+i(a+x)y+j(a+x)z$ のつくる直角三角形． O, P, Q の位置は O(0, 0, 0), P($ax-y^2-z^2$, 0, 0), Q($ax-y^2-z^2, (a+x)y, (a+x)z$) である．

これらの式から $\alpha+\beta=\gamma$ は

$$\arctan\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a} + \arctan\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \arctan\frac{(a+x)\sqrt{y^2+z^2}}{ax-y^2-z^2} \tag{2.12}$$

と表される．

はたしてこの式 (2.12) が成り立つのだろうか．そのことを考えてみよう．

(2.7) が成り立つことを用いて，図 2.2, 2.3, 2.4 から

$$\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) \tag{2.13}$$

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) \tag{2.14}$$

であることを示せればよい．

まず，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$ であることを示そう．これは図 2.2, 2.3, 2.4 から

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{ax-y^2-z^2}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \cos\gamma
\end{aligned}$$

であることがわかる．ここで (2.7) を用いている．

つぎに，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$ であることを示そう．これはやはり図 2.2, 2.3, 2.4 から

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\
&= \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{(a+x)\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \sin\gamma
\end{aligned}$$

であることもわかる．ここでも (2.7) を用いている．

これらの結果から，(2.13),(2.14) が確かに成り立つことがわかる．したがって

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\gamma$$

であることが示された．これから直ぐに

$$\gamma=\alpha+\beta+n\pi, \quad n=\text{integer}$$

が導かれる．$0\le\alpha<2\pi$, $0\le\beta<2\pi$, $0\le\gamma<2\pi$ とすれば，n の値として $n=0$ しか許されないから，

$$\gamma=\alpha+\beta \tag{2.8}$$

が得られる．ここまでは幾何学的な解釈が難しいことはない．

さらに，一般的な 2 つの三元数 $a+ib+jc$ と $x+iy+jz$ との積を考えるが，この議論はすでに [1] で述べたことと同一である．しかし，ここでの記述が自己完結 (selfcontained) となるように [1] の繰り返しになるが，簡単に述べておこう．

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(bx+ay)+j(cx+az)+ij(bz-cy) \tag{2.15}$$

となる．ここで，$ji=-ij$ であることを用いた．

いま

$$(ax-by-cz)^2+(bx+ay)^2+(cx+az)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2.16}$$

が成り立つので，$ij=k$ を満たす新しい虚数単位 k をどうしても認めざるを得ないと Hamilton は考えるようになった．

なぜなら，式（2.15）で ij の項の係数 $(bz-cy)$ を無視した

$$(ax-by-cz)^2+(bx+ay)^2+(cx+az)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

は成立しないからである．

[1] で**絶対値の条件**という名をつけて呼んだ条件

$$|pq| = |p||q| \tag{2.17}$$

を満たすためには $ij = k$ を満たす新しい虚数単位 k が必要である．すなわち，２つの一般的な三元数の積は三元数では必ずしも表せないことを Hamilton は悟り，四元数の存在を認めざるを得なかった．

しかし，Hamilton にはまだいくつかの可能性が考えられ，それらを一つひとつ考えていった．それが以下の議論である．

$ij = k$ として，k は新しい虚数単位であると考えれば，

$$\begin{aligned} k^2 &= (ij)^2 = ijij = -i^2j^2 = -(-1)(-1) = -1 \\ ik &= i^2j = -j \\ ki &= iji = -i^2j = j \end{aligned}$$

であることが直ぐに考えられそうである．だが，Hamilton は 1843 年のノートでははじめ $k^2 = 1$ の可能性も考えたと述べている．

その記述を少し記号を変更して述べてみよう[9]．

もし，$k^2 = 1$ を仮定すれば，$i^2 = j^2 = -1$ と組み合わせて

$$\begin{aligned} &(a + ib + jc + kd)(x + iy + jz + kw) \\ &= (\underline{ax} - by - cz\underline{+dw}) + i(bx + ay + \cdots) + j(cx + az + \cdots) + k(\underline{dx + aw} + \cdots) \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} A &= \underline{ax} - by - cz\underline{+dw} \\ B &= bx + ay + \dots \\ C &= cx + az + \dots \\ D &= \underline{dx + aw} + \cdots \end{aligned}$$

とおけば，$A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ の中の A^2 から

$$(ax + dw)^2 = a^2x^2 + d^2w^2\underline{+2adxw}$$

の下線部の項が得られ，D^2 から

$$(dx + aw)^2 = d^2x^2 + a^2w^2\underline{+2adxw}$$

D の下線部が得られる．したがって，$2adxw$ の項が２つあるので，$A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ には $4adxw$ が現れる．

ところが，$k^2 = -1$ とすれば，

$$\begin{aligned} &(a + ib + jc + kd)(x + iy + jz + kw) \\ &= (\underline{ax} - by - cz\underline{-dw}) + i(bx + ay + \cdots) + j(cx + az + \cdots) + k(\underline{dx + aw} + \cdots) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} A &= \underline{ax} - by - cz\underline{-dw} \\ B &= bx + ay + \dots \\ C &= cx + az + \dots \\ D &= \underline{dx + aw} + \cdots \end{aligned}$$

[9] 記号の変更だけであるから，本質的には議論を変更していないが，ギリシア文字を用いないと式が見やすい．

とおけば，$A^2+B^2+C^2+D^2$ の中の A^2 から

$$(ax-dw)^2 = a^2x^2+d^2w^2\underline{-2adxw}$$

の下線部の項が得られ，D^2 から

$$(dx+aw)^2 = d^2x^2+a^2w^2\underline{+2adxw}$$

の下線部が得られる．この場合には

$$-2adxw+2adxw=0$$

と $A^2+B^2+C^2+D^2$ においては $2adxw$ の項は相殺される．

こうして

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

を仮定し，また

$$ij=k, \quad ji=-k$$

と仮定するようになったと Hamilton は述べている．

この $2adxw$ の項が相殺することが論理的にどれほど重要なのか Hamilton のここまでの記述からはもう一つはっきりしない．しかし，$|pq|=|p||q|$ という**絶対値の条件**を満たすためには $k^2=-1$ であることはどうしても必要である．

Hamilton はこの絶対値の条件を式では表していないが，文で**「乗積の絶対値は絶対値の乗積に等しい」**と書いている．だから三元数の積を考えるときに，絶対値の条件を重要な指導原理として考えていたことは間違いがない．

さらに

$$k=ij=-ji$$

から

$$\begin{aligned} jk &= jij = -ij^2 = i \\ kj &= ijj = ij^2 = -i \end{aligned}$$

も容易に得られる．

以上から 3 つの虚数単位 i,j,k の積の仮定（または定義）をまとめると

$$\begin{aligned} &i^2=j^2=k^2=-1 \\ &ij=k, \quad jk=i, \quad ki=j \\ &ji=-k, \quad kj=-i, \quad ik=-j \end{aligned}$$

となる．

これらから

$$\begin{aligned} &(a+ib+jc+kd)(x+iy+jz+kw) = A+iB+jC+kD \\ &A = ax-by-cz-dw \\ &B = bx+ay-dz+cw \\ &C = cx+dy+az-bw \\ &D = dx-cy+bz+aw \end{aligned} \tag{2.18}$$

が得られ，さらに

$$A^2+B^2+C^2+D^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \tag{2.19}$$

が成り立つことはすでに前に [1] で示した．

しかし，ここでは Hamilton [3] にしたがって (2.19) の証明を見てみよう．(2.16) が成り立つことはすでにわかっているので，(2.16) に現れない，d と w を因子として含むクロス項（項自身の 2 乗でない項）だけを (2.19) の $A^2+B^2+C^2+D^2$ の中から取り出し，それらの項の和が 0 となることをまず示す．

A^2, B^2, C^2, D^2 から d と w とを因子として含むクロス項を取り出してその和をとると

$$
\begin{array}{llll}
 & -2adxw & +2bdyw & +2cdzw \\
 & -2bdxz+2bcxw & -2adyz+2acyw & -2cdzw \\
+2cdxy & -2bcxw & +2adyz-2bdyw & -2abzw \\
-2cdxy & +2bdxz+2adxw & -2acyw & +2abzw \\
=0 & & &
\end{array}
$$

であることは xy, xz, xw, yz, yw, zw の項を縦に加えれば，すぐにわかる．

つぎに，(2.19) の左辺から得られる，d^2 と w^2 とを因子に含む項の和は

$$d^2w^2+d^2z^2+d^2y^2+d^2x^2+c^2w^2+b^2w^2+a^2w^2=d^2(x^2+y^2+z^2+w^2)+(a^2+b^2+c^2)w^2$$

となり，これは (2.19) の右辺から得られる，d^2 と w^2 とを因子に含む項の和に等しい．

したがって，(2.16) とあわせて考えると (2.19) が確かに成り立つことがわかる．

ここまで来て，ようやく

$$|pq|^2=|p|^2|q|^2 \tag{2.20}$$

を 2 つの四元数の積が満たしていることを Hamilton ははっきりと述べている．

2.3 Euler の公式の四元数版

この節では複素数で成り立っている，Euler の公式の四元数版を考えてみよう．その前に Euler の公式を思い出しておくと

$$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{2.21}$$

であった．それを四元数に拡張したものが成り立つかどうか．

そのためにいくつかの準備をする．まず $a+ib+jc+kd=(a,b,c,d), x+iy+jz+kw=(x,y,z,w)$ と表すことにする．そこで式 (2.18) で $x=s, y=t, z=u, w=v$ とおきかえれば，(2.18) は

$$(a,b,c,d)(s,t,u,v)=(as-bt-cu-dv, bs+at-du+cv, cs+dt+au-bv, ds-ct+bu+av) \tag{2.22}$$

と表すことができる．この式を使えば

$$(a,b,c,d)^2=(a^2-b^2-c^2-d^2, 2ab, 2ac, 2ad) \tag{2.23}$$

がすぐに得られる．

さらにこの式 (2.23) で $a=0, b=x, c=y, d=z$ ととれば $(0,x,y,z)$ のべき乗がつぎのように得られる．

$$
\begin{aligned}
&(0,x,y,z)\\
&(0,x,y,z)^2 = -(x^2+y^2+z^2)\\
&(0,x,y,z)^3 = -(x^2+y^2+z^2)(0,x,y,z)\\
&(0,x,y,z)^4 = (x^2+y^2+z^2)^2\\
&(0,x,y,z)^5 = (x^2+y^2+z^2)^2(0,x,y,z)\\
&(0,x,y,z)^6 = -(x^2+y^2+z^2)^3\\
&(0,x,y,z)^7 = -(x^2+y^2+z^2)^3(0,x,y,z)\\
&(0,x,y,z)^8 = (x^2+y^2+z^2)^4\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
(1,0,0,0) &= 1\\
(1,0,0,0)(0,x,y,z) &= (0,x,y,z)\\
(0,x,y,z)^2 &= -(x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}
$$

であることを繰り返し用いた．

さて，本題へと進むことにしよう．得られる結果を前もって与えておこう．それは

$$
\mathrm{e}^{(0,x,y,z)} = \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.24}
$$

である．さて (2.24) を求めていこう．e^{ix} の Maclaurin 展開を形式的に用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{(0,x,y,z)}\\
&= 1 + \frac{ix+jy+kz}{1!} + \frac{(ix+jy+kz)^2}{2!} + \frac{(ix+jy+kz)^3}{3!} + \frac{(ix+jy+kz)^4}{4!} + \cdots\\
&= 1 + \frac{1}{1!}(0,x,y,z) - \frac{1}{2!}(x^2+y^2+z^2)(1,0,0,0) - \frac{1}{3!}(x^2+y^2+z^2)(0,x,y,z)\\
&+ \frac{1}{4!}(x^2+y^2+z^2)^2(1,0,0,0) + \frac{1}{5!}(x^2+y^2+z^2)^2(0,x,y,z) - \frac{1}{6!}(x^2+y^2+z^2)^3(1,0,0,0) + \cdots\\
&= \left[1 - \frac{1}{2!}(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{4!}(x^2+y^2+z^2)^2 - \frac{1}{6!}(x^2+y^2+z^2)^3 + \frac{1}{8!}(x^2+y^2+z^2)^4 - \cdots\right]\\
&+ \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{5!}(x^2+y^2+z^2)^2 - \frac{1}{7!}(x^2+y^2+z^2)^3 + \frac{1}{9!}(x^2+y^2+z^2)^4 - \cdots\right](0,x,y,z)\\
&= \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}
$$

これで (2.24) が導出された．

Hamilton のノートの訳 [3] では最後の式の $\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ がミスプリントで $\cos(x^2+y^2+z^2)$ となっている．これは原著のミスプリントであるのか，それとも訳書で生じたのかは調べていない．

ここで，$|\mathrm{e}^{(0,x,y,z)}|=1$ であることを確かめておく．

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{e}^{(0,x,y,z)}|^2\\
&=\left[\cos r+\frac{1}{r}(ix+jy+kz)\sin r\right]\left[\cos r+\frac{1}{r}(ix+jy+kz)\sin r\right]^*\\
&=\cos^2 r+\sin^2 r\\
&=1,\quad \text{where}\quad r^2=x^2+y^2+z^2
\end{aligned}\tag{2.25}$$

したがって，$|\mathrm{e}^{(0,x,y,z)}|=1$ が成り立つ．ここで * は共役四元数であることを示す．

いま

$$\begin{aligned}
r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
x&=r\cos\phi\\
y&=r\sin\phi\cos\psi\\
z&=r\sin\phi\sin\psi
\end{aligned}$$

おけば（図 2.5 参照），

$$\mathrm{e}^{r(i\cos\phi+j\sin\phi\cos\psi+k\sin\phi\sin\psi)}=\cos r+(i\cos\phi+j\sin\phi\cos\psi+k\sin\phi\sin\psi)\sin r \tag{2.26}$$

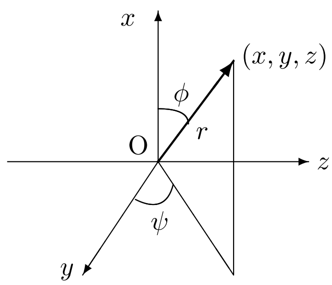

図 2.5: 3 次元極座標系

これは Euler の公式の四元数版になっており，$\phi=0$ のときには

$$\begin{aligned}
x&=r\\
y&=0\\
z&=0
\end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{e}^{ir}=\cos r+i\sin r$$

となり，Euler の公式になる．

2.4 おわりに

Hamilton の 1843 年 10 月 16 日の研究ノートは四元数の発見の当日の夜に書かれたものであり，論理的には十分洗練されていない．それで，解読が少し難しかったが，これでほぼ解読ができたのではなかろうか．

ユークリッド平面上の点 (x, y) を複素数 $x + iy$ と対応づけられることから類推して，Hamliton は 3 次元ユークリッド空間中の点 (x, y, z) を“ 三元数 ”$x + iy + jz$ と対応づけられるのではないかと考えた．

しかし，２つの“ 三元数 ”の積を 3 次元ユークリッド空間中の点として考えていく中で，虚数単位 i と j との積が交換せず，$ji = -ij$ となることを見出し，さらに一般の 2 つの“ 三元数 ”の積を考えるうちに $ij = k$ を満たす新たな虚数単位 k を認めざるを得なかった．そして，そこに四元数の発見があった．

(2012.2.29)

付録　3 次元極座標

物理数学の文献 [4] では伝統的には x, y, z 軸は図 2.5 でとったようにではなく $x \to z, y \to x, z \to y$ とした座標軸をとるのが普通である．ここで，ϕ を極角 (polar angle)，ψ を方位角 (azimuthal angle) という．

しかし，n 次元の極座標では

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\dots\\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

ととるのが慣例である．

ここで $n = 3$ として，3 次元に限定すれば

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \theta_1 = \phi, \theta_2 = \psi$ とすれば，Hamilton のとった座標系と一致する．

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数の発見へ，数学・物理通信　第 1 巻，第 11 号 (2011.12) 16-23

[2] W. R. Hamilton, Phil. Mag. 3rd series 25 (1844) 489-495

[3] 堀源一郎,「ハミルトンと四元数」（海鳴社，2007) 10-18

[4] たとえば，寺沢寛一,「自然科学者のための数学概論」増訂版（岩波書店，1983）58

指数関数の基本不等式とその応用

Fundamental Inequality of the Exponential Function and its Applications

新関章三[10]
Shôzô NIIZEKI [11]

3.1　はじめに

このノートでは，指数関数 e^x の基本不等式と呼ばれる命題 2.1 を微分法を使わずに証明し，つぎにこの不等式を用いて系 2.2 を証明する．これらの 2 つの不等式を基に指数関数 e^x の微分可能性を始め，多くの重要な性質はほとんど命題 2.1 から導くことができることを示す．さらに 3 節では，Gauss 積分の計算法と Γ に関する Gauss の公式とに対して基本不等式の威力を実感して頂く．このように，このノートでは基本不等式がその数々の応用をもち，とても有用であることを示す．

3.2　基本不等式から導かれる指数関数 e^x の性質

本節では，命題 2.1 の不等式から直ちに導かれる e^x の重要で，しかも応用性に富む性質を取り上げる．そして，得られた e^x の性質はいずれも解析学に関して必ずと言っていいほどお目にかかるものばかりである．

命題 2.1 (指数関数の基本不等式) 次の式が成り立つ：

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \Longrightarrow 1 + x \le e^x$$

証明 参考文献 [1] の定理 4.2 に与えてある．□

次の系は，上の命題から直ちに得られるが，これも応用上大変重要である．

系 2.2 次の不等式が成り立つ：

$$x \in (-1, \infty) \Longrightarrow e^{\frac{x}{1+x}} \le 1 + x \le e^x$$

証明 参考文献 [1] の系 4.4 に与えてある．□

[10] niizekishozo@gmail.com
[11] Professor Emeritus, Kochi University

今度は，関数 e^x が無限回微分可能で，これを何回微分しても形は変わらず e^x のままであることを示そう．このための基本を成す e^x の性質は次の補題である．この証明も命題 2.1 が直接に効いてくる．

定理 2.3 次の極限式が成り立つ：

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

証明 参考文献 [1] の系 4.3 に示してある．□

上の定理から次の定理は直ちに得られる．

定理 2.4 指数関数 e^x は無限回微分可能で次の式が成り立つ：

$$\forall n\in \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow \frac{d^n}{dx^n}e^x=e^x$$

証明 定理 2.3 から次の極限式：

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\frac{e^h-1}{h}\cdot e^x=1\cdot e^x=e^x$$

が成り立つ．これより定理は容易に得られる．□

さらに，指数関数 e^x の重要な性質として次の定理がある．

定理 2.5 関数 e^x は狭義増加関数で次の式が成り立つ：

$$\forall n\in \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\begin{cases} x^{-n}e^x=\infty \\ x^n e^{-x}=0\end{cases}$$

証明 前半は，定理 2.4 より $(e^x)'=e^x>0$ であることから分かる．後半は次のように考える．まず上段は，次のようにして分かる．すなわち，容易に確認できるように

$$\forall m\in \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow \left(1+\frac{x}{m}\right)^m\le e^x$$

が成り立つ．従って

$$\left.\begin{array}{l}\{m,n\}\subset \boldsymbol{Z}^+ \\ n<m\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x^{-n}\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^m\le x^{-n}e^x \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{-n}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\infty\end{cases}$$

が得られる．これより $\lim_{x\to\infty}x^{-n}e^x=\infty$ が示されて上段が証明された．下段は，同じような考えで証明できるが，むしろ上段の結果の逆数を考えたほうが証明は早い．□

注意 上の定理 2.5 の結果に関し，$n\in \boldsymbol{Z}^+$ の任意性により，上段または下段の性質はそれぞれ，関数 e^x の急増加性又は急減少性と呼ばれている．♦

関数 f は $\boldsymbol{R}$ 上で定義され，任意の区間 $J\subset \boldsymbol{R}$ で可積分とする．このとき，命題 2.1 の基本不等式は一様収束の問題を次の定理の形で解決してくれる．

定理 2.6 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\forall J\subset \boldsymbol{R} \\ \displaystyle\sup_{x\in J}|f(x)|<\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in J}\left|e^{f(x)}-\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right|=0$$

証明 参考文献 [1] の定理 4.6 に詳しい証明を与えた．□

命題 2.1 の不等式はさらに，指数関数の特徴付けの際にも大きな力を発揮する．

定理 2.7 (指数関数の特徴付け) 次の式が成り立つ：

$$f(x) = e^x \iff \begin{cases} 1 + x \leq f(x) \\ f(x+y) = f(x)f(y) \end{cases}$$

証明 参考文献 [1] の定理 4.10 に詳しい証明を与えた．□

3.3 Gauss 積分の計算と Γ 関数の Gauss 表示

前節で，命題 2.1 から得られた諸定理が如何に素晴らしい働きをするかは，以下に述べる Gauss 積分の計算法と Γ 関数の Gauss 表示を考えるとき，明らかになる．

初めに，Gauss 積分を計算する．

定理 3.1 (Gauss 積分) 次の式が成り立つ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

証明 参考文献 [2] の定理 4.2 に計算法を与えた．□

ここで，Γ 関数の Gauss 表示を求めるために補題を 1 つ準備する．

補題 3.2 $n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し次の式が成り立つ：

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

証明 部分積分を繰り返し行えば容易に確認できる．□

上の補題からつぎの定理は容易に得られる．

定理 3.3 (Gauss の公式) 次の式が成り立つ：

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

証明 命題 2.1 で与えた基本不等式により

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} \leq e^{-x} x^{s-1}$$

を得る．従って，$\forall K \in \boldsymbol{R}^+$ を取ってこれを固定すれば $K \leq n$ なる $n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し

$$\int_0^K \left(1 - \frac{n}{x}\right)^n x^{s-1} dx \leq \int_0^n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^n x^{s-1} dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \Gamma(s)$$

を得る．ここで $n \to \infty$ とすれば，定理 2.6 及び補題 3.2 により

$$\int_0^K e^{-x} x^{s-1} dx \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \leq \Gamma(s)$$

を得る．そして $K \to \infty$ とすれば，定理は証明された．□

3.4　おわりに

命題 2.1 の基本不等式は，2 節では e^x の性質を調べるのに役立ち，また 3 節では Gauss 積分の計算及び Gauss の公式を示す際の基礎としてその威力を発揮した．実際，定理 3.2 はこのノートのように証明すれば簡単となるのに，Γ 関数について書いてあるほとんどの文献では，例えば参考文献 [3] で示されたような証明である．

命題 2.1 で与えた基本不等式は，指数関数の世界では中心的な極めて重要な立場にありながらその重要性を強調した書には今まで出会ったことがない．これは不思議なことである．この理由は命題 2.1 の証明の仕方にあるのではなかろうか．

参考文献 [3] の定理 4.2 では基本不等式の証明は，Napier (ネーピア 1550−1617) 数 e の構成法に沿う形で成されている．基本不等式をこのノートのような考えで証明すれば基本不等式の意義が理解しやすいし，理工系学部の数学教育にも貢献するところ大ではないかと密かに思っている．

参考文献

[1] 新関章三・岩崎 正春，数学・物理通信　第 1 巻，第 11 号 (2011.12) 3-15

[2] 新関章三・荒木　真，数学・物理通信　第 1 巻，第 5 号 (2010.12) 21-27

[3] 垣田高夫 他 3 名，微分積分 (現代応用数学の基礎), (日本評論社）， (1993) 245-247

編集後記

2012年3月になった．巻を改めた数学・物理通信2巻1号を発行する．

浅田　明先生にはすでに昨年の12月には原稿を頂いていたが，約3ヶ月も待って頂いたことをお詫びしたい．これは投稿原稿がそんなに多くはないから，３ヶ月に１回の発行しかできないという事情もあるが，やはり個人で運営している，このサキュラーの限界でもある．

また，新関さんには一度投稿して頂いた原稿を編集者（矢野）の意見によって書き直して頂いた．その労に厚く御礼を申し上げる．その原稿を待ったために予定よりも2巻1号の発行が遅れたが，新関さんの論文の教育的な価値が高いと思うので，読者の方々にその遅れをお許しを頂けるのではないかと考えている．

昨年の9月，12月と2回も続けて月に2号づつ発行したが，ああいう無理をするとずいぶん疲れる．だから，できればあれはあくまで例外であってほしい．

それはともかく今年もみなさんの気楽に発表できる場でありたいと念じている．(矢野 忠)

正誤表

数学・物理通信，1巻11号　の21p　下から16行目 (2.14) のミスプリ

$$\text{誤}\quad (a+bi+cj+dk)(x+yi+zk+wk)=\cdots$$
$$\text{正}\quad (a+bi+cj+dk)(x+yi+zj+wk)=\cdots$$