

# 数学・物理通信

2卷2号      2012年6月

編集 新関章三・矢野 忠

2012年6月28日

# 目次

3.1.1 地震の統計解析 (II)	3
1.1 序	3
1.2 有感地震の推移	4
1.3 マグニチュード分布	4
1.4 震央地別解析	7
1.5 まとめ	9
集合の対称差と集合列の極限定理 (I)	11
2.1 はじめに	11
2.2 記号と準備	11
2.3 対称差の算法とその諸性質	13
2.4 対称差の結合法則	14
2.5 おわりに	17
四元数と空間回転 1	19
3.1 はじめに	19
3.2 目的の提示	19
3.3 四元数とその積	20
3.4 四元数による空間回転	22
3.5 四元数の虚部と3次元空間	24
3.6 簡単な例	25
3.7 おわりに	25
編集後記	30

# Contents

1. Fujio TAKAGI: Statistical Analysis of the Earthquake on 3.11 (II)
2. Shozo NIIZEKI: The symmetric difference of sets and  
some limit theoremes of sequence of sets (I)
3. Tadashi YANO: Quaternions and Rotations 1
4. Tadashi YANO: Editorial Comments

## 3.11 地震の統計解析 (II)

# Statistical Analysis of the Earthquake on 3.11 (II)

高木富士夫<sup>1</sup>  
Fujio TAKAGI<sup>2</sup>

### 1.1 序

今回は気象庁がホームページ上で発表している地震情報を用いて、主に数理的興味から3.11地震に伴う余震活動を解析した結果を報告した。<sup>[1]</sup> その主要部分は2011年3月中旬から6月下旬までの98日間の地震活動の統計解析であった。所が2012年1月5日付けで、気象庁は2011年3月11日から同年5月末までの分として3596件の有感地震データを追加した。非常に多くの地震が発生したため、当初解析作業が完了できなかったというわけである。従って実際の観測データの解析結果としては前回の報告は全く無意味になってしまった。ただしそこで用いた単純統計モデルとデータの解析方法は意味があるだろう。

2011年3月11日に三陸沖を震央地として発生したマグニチュード9の巨大地震（以下本震と呼ぶ）の余震活動はその激しさと長期間続いていることのいずれの点でも我が国の地震観測史上前例のないものと思われる。そこで今回の解析では余震活動の特徴を見出すことを目的とした。できれば地震発生メカニズムの解明と予知に結びつくような情報を得たいので、個々の地震を特徴付ける最も重要な情報であるマグニチュードと震央地に関する解析に重点を置いた。なお以下の解析では2011年3月、4月分の追加データは考慮したが、5月分の追加データ8件は考慮していない。気象庁は2012年3月27日付けで、2011年3、4月分として、さらに112件のデータを追加したが、きりがないのでこれも考慮しない。従って以下に示す解析結果にはこれに伴う誤差が入る。

以下の各節では、有感地震発生回数の推移（2節）、マグニチュード分布（3節）、震央地別解析（4節）について述べ、5節で解析結果全体をまとめる。

各節で共通に用いられる用語と記号：

$S$ : ある地震について日本各地の観測点で観測された震度の最大値（最大震度）

有感地震： $S \geq 1$  を満たす地震

無感地震： $S = 0$  を満たす地震

$M$ : 地震の規模を表す指標マグニチュード

<sup>1</sup>ftakagi@jn3.so-net.ne.jp

<sup>2</sup>Former Professor, Tohoku University and Ishinomaki Senshu University

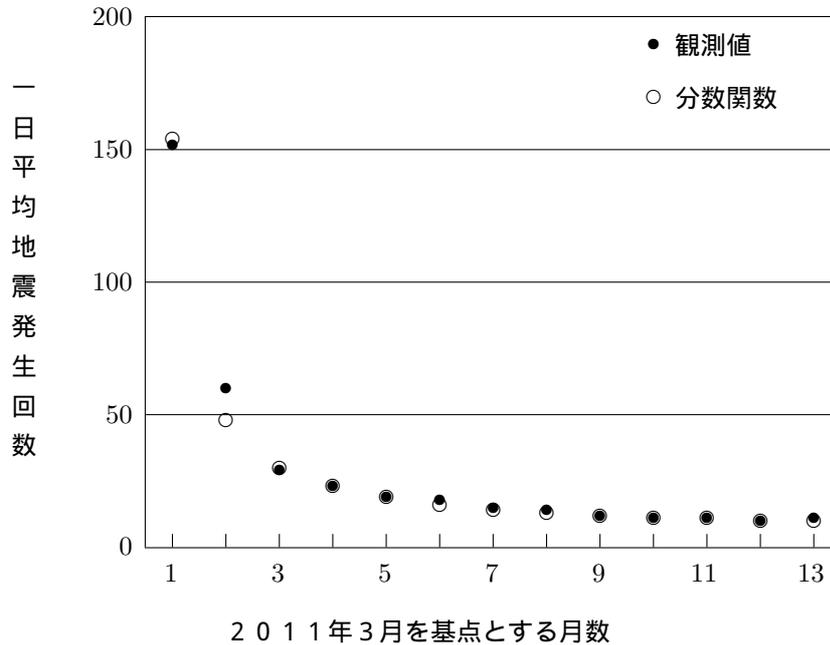


図 1.1: 各月の平均地震発生回数 / 日

## 1.2 有感地震の推移

2011年3月11日から2012年3月31日までに少なくとも10236回の有感地震が発生した。各月毎に1日当たりの平均有感地震発生回数を求めた結果を図 1.1 に示す。観測値はきれいに単調減少している。その振る舞いは1個や2個の指数関数で合わせるの難しいが、次の形の分数関数で簡単に合わせられる。

$$f(t) = \frac{59.5}{t - 0.6} + 5.0 \quad (1.1)$$

ここで  $t=1$  は2011年3月11日から3月31日までの期間に対応し、 $t=2$  は同じく4月1日から4月30日までの期間に対応し、以下順に各月に対応。2012年3月現在、余震活動は依然活発で、1日平均10.7回の有感地震が発生している。これが1日平均5回という定常状態に向かってゆっくりと減衰しているように見える。比較のため、地震活動が平穏で定常的であった2010年1月から6月までの地震発生頻度を調べると、平均で3.33回/日であった。5回/日はそれより50%増である。

## 1.3 マグニチュード分布

有感地震のうち、まずマグニチュード4以上 ( $M \geq 4$ ) の地震に注目する。有感地震に占める  $M \geq 4$  地震の割合を各月毎に計算した結果を図 1.2 に示す。割合は2011年3月11日から同月31日までの期間においては40%近くに達したが、翌月には減少して、それ以降多少のゆらぎはあるものの、一定値  $1414/5241 = 0.270$  に収束したように見える。この値は2010年1～6月の平均値 ( $M \geq 4$  地震回数)/(有感地震回数) =  $162/603 = 0.269$  とほとんど同じである。従って  $M \geq 4$  地震の割合は2011年4月以降急速に平常値に戻ったように見える。これはすぐ示すように、ゲーテンベルグ・リヒター則 (GR則)<sup>[2]</sup> と呼ばれる経験則が本震直後の数週間は大

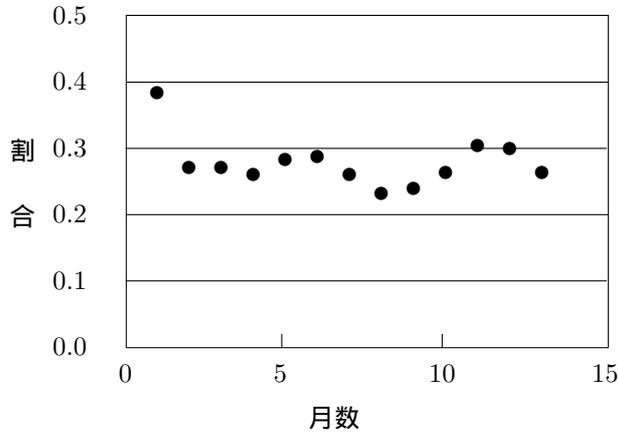


図 1.2: 有感地震中の  $M \geq 4$  地震の割合

きく破れたけれど、本震から1ヶ月経って特に  $M \geq 4$  の領域で急速に回復したことに対応する。2011年3月と2011年4月以降で  $M \geq 4$  地震の発生頻度の割合が異なることが分かったので、それぞれの期間についてマグニチュード分布を詳しく調べてみる。結果を図 1.3 に示す。2011年3月1日～3月31日の期間（期間Ⅰ）についてはマグニチュード  $M = 4$  以上の有感地震の頻度を、2011年5月1日から2012年3月31日までの11ヶ月間（期間Ⅱ）については  $M = 0$  以上の有感地震の頻度を半対数表示で示した。2011年4月も期間Ⅱに含めるべきであるが、大量の追加データを処理するのが容易でないので省いた。

図 1.3 において横座標  $M_a$  は幅1の  $M$  の範囲の左端の値を表す。したがって例えば  $M_a = 4$  上のデータ点は範囲  $4.0 \leq M < 5.0$  に入る有感地震の発生回数を表す。期間Ⅰにおいては  $M = 4$  以上でマグニチュード分布は直線にならず、上向きに凸の分布になる。この振る舞いは期間Ⅰにおける  $M \geq 4$  地震の有感地震に占める割合が平常値（約27%）を大きく上回る40%近くだったことを反映している。一方、期間Ⅱにおいては  $M = 4$  以上のマグニチュード分布はきれいに1つの直線に乗る。所でGR則によれば、マグニチュード  $M$  の地震の発生頻度を  $n$  とすると

$$\log_{10} n = a - bM \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (1.2)$$

となって、定数  $b$  は0.9～1.0程度になる。すなわちマグニチュードが1増えると発生頻度はおよそ10分の1に減るといわけである。したがって期間ⅠにおいてはGR則は成り立っていない。一方、期間Ⅱの場合  $M_a \geq 4$  の4点のデータ点を直線に適合させて最小2乗法を用いると  $a = 7.29, b = 0.93$  を得る。すなわち

$$\log_{10} n = 7.29 - 0.93M \quad (1.3)$$

となって、GR則がきれいに成り立っている事が分かる。ただし  $M_a < 4$  の領域では観測されたマグニチュード分布（の半対数プロット）は直線(1.3)から大きくずれる。実際(1.3)から期待される頻度は  $0 \leq M < 1.0$ ,  $1.0 \leq M < 2.0$ ,  $2.0 \leq M < 3.0$ ,  $3.0 \leq M < 4.0$  に対してそれぞれ  $6.68 \times 10^6, 7.85 \times 10^5, 9.23 \times 10^4, 1.08 \times 10^4$  であるが、観測値はそれぞれわずか0,84,1162,2574である。これは必ずしも  $M$  が4未満の領域でGR則が破れていることを意味せず、むしろ  $M < 4$  地震の大部分が無感地震だと推測される。

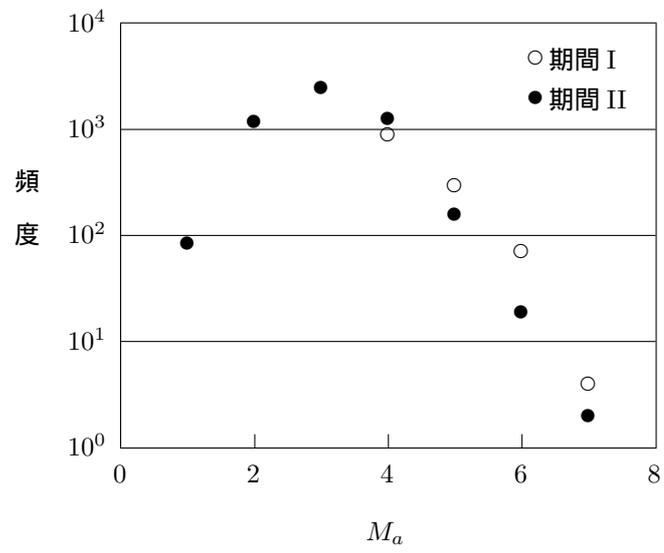


図 1.3: マグニチュード分布

## 1.4 震央地別解析

本節では  $M \geq 4$  地震の発生状況を震央地別に分けて分析する．本震の震源域は東北地方から関東地方にかけての東日本太平洋沖合のおよそ東西 200 km，南北 500 km にわたる広い領域である．以下ではこの領域をさらに広げて，青森県から千葉県までの太平洋側内陸部分を含めて震源域と呼ぶことにする．ただし福島県の浜通り，中通りは震源域に含めるが，会津地方は内陸西寄りなので震源域に含めない．震源域をこのように定義して，気象庁の観測範囲（全域と呼ぶ）を震源域内（域内と略す）と震源域外（域外と略す）に分ける．

気象庁は域内で本震以後に発生した地震を余震と定義している．ここでもおおむね気象庁にならって，上に定義した少し広げた震源域で発生した地震を余震と呼ぶことにする．余震の大部分は域内の太平洋沖合を震央地として発生しているので，日本周辺の震央地を次の 7 カ所に分ける．

岩手県沖，三陸沖，宮城県沖，福島県沖，茨城県沖，千葉県東方沖，その他  
ここで 6 カ所の太平洋沖合は全て域内であるが，"その他" は域内の内陸部分と域外を合わせた地域を指す．

震央地別統計（2011年3月11日～4月30日）			
震央地	$M \geq 4$	$M \geq 5$	$(M \geq 5)/(M \geq 4)$
岩手県沖	174	41	0.236
三陸沖	112	60	0.536
宮城県沖	302	55	0.182
福島県沖	449	126	0.281
茨城県沖	346	95	0.275
千葉県東方沖	81	18	0.222
その他	256	41	0.160
全域合計	1720	436	0.253

表 1．震央地別  $M \geq 4$  地震統計その 1

まず表 1 に 2011 年 3 月 11 日から同年 4 月 30 日までに発生したマグニチュード 4.0 以上 ( $M \geq 4$ ) の有感地震の発生回数を震央地別に示す．マグニチュード 5.0 以上 ( $M \geq 5$ ) についても同様のデータを示す．この 2 種類のデータより，比  $(M \geq 5)/(M \geq 4)$  を求めて最後の欄に示す．表 1 から次のようなことがいえる．

- (i) 余震活動は全般に極めて激しかったが，なかでも福島県沖，茨城県沖，宮城県沖の順に活発であった．また「その他」を震央地とする地震の中には福島県内陸と茨城県内陸で発生したものがかなり含まれている．
- (ii) 「その他」の震央地を除く 6 つの震央地全てで，比  $(M \geq 5)/(M \geq 4)$  は GR 則から予想される値 0.11 よりかなり大きい．
- (iii) 特に三陸沖を震央地とする地震についての比  $(M \geq 5)/(M \geq 4)$  は他とかけ離れて非常に大きい．

(i) に関しては 4 月に特筆すべき個別の余震活動があった．4 月 7 日には宮城県沖を震央地とする  $M = 7.2$  の地震があった．4 月 11 日には福島県浜通，中通りで合わせて 39 回の  $M \geq 4$  地震が発生した．そのうち 1 回は  $M = 7.0$ ，3 回は  $M = 5.4, 5.1, 5.9$  という激しさであった (ii) と (iii) は前節において期間 I で GR 則が大きく破れていた状況を震央地別に見ていることに対応する．これより GR 則の破れは各震央地に共通していることが分かる．ところで (iii) が三陸沖の地震活動が他の震央地のそれとかなり異なることを意味するのであれば重要な知見となりうるが，実際には地震活動ではなく地理的要素が影響していると思われる．すなわち太平洋沖合の 6 つの震央地の面積と位置を調べると，三陸沖だけ他の震央地と異なることが分かる．まず岩手県沖，宮城県沖，福島県沖，茨城県沖，千葉県東方沖の 5 震央地は本州陸地に対する相対位置と形状，面積が大体同じで，いずれも太平洋沿岸に接し，東西 90 km，南北 100 km 程度の広がりを持っている．所が三陸沖は本州に接していず，岩手県沖と宮城県沖を隔てて沿岸から 100 km 以上離れて，東西 100 km，南北 250 km 程度の広がりを持っている．これらは各震央地で発生した実際の地震の例を調べることで

分かった．というわけで，三陸沖は各地の観測点から特に遠く離れているので，他の震央地と比べて，規模の小さい地震ほど有感地震として観測されにくいと推測される．そのため，三陸沖を震源とする有感地震ではGR則が見かけ上特に大きく破れたと考えられる．このような状況が2011年5月以降どのように変わったかを表2に示す．

震央地	$M \geq 4$	$M \geq 5$	$(M \geq 5)/(M \geq 4)$
岩手県沖	124	20	0.161
三陸沖	70	36	0.514
宮城県沖	289	10	0.035
福島県沖	286	36	0.126
茨城県沖	193	20	0.104
千葉県東方沖	78	6	0.077
その他	377	55	0.146
全域合計	1417	183	0.129

表2．震央地別  $M \geq 4$  地震統計その2：2011年5月1日～2012年3月31日

表2からは次のようなことが読み取れる．

(iv) 宮城県沖，福島県沖，茨城県沖の余震活動が依然として他の震央地より活発である．特に福島県沖と茨城県沖では  $M \geq 5$  地震が多発している．

(v) 2011年3，4月(表1)に比べて，全般的には各震央地の比  $(M \geq 5)/(M \geq 4)$  は減少してGR則と矛盾しない値になった．ただし三陸沖については比の減少はわずかである．一方，宮城県沖では  $M \geq 5$  の発生頻度が低く，比  $(M \geq 5)/(M \geq 4)$  はGR則から予想される値に比べて著しく小さい．

(vi) 2011年3，4月(表1)と比べると，「その他」を震央地とする地震活動が相対的により活発になっていることが分かる．

(v) の前半(比の全般的減少)は前節で指摘した期間IIにおけるGR則の回復を裏付ける．三陸沖については表1，表2共通に，したがって全期間を通して，範囲  $4 \leq M < 5$  と  $5 \leq M$  における発生頻度が同程度である．これは三陸沖を震央地とする地震に関する限り，見かけ上GR則が完全に破れていることを意味する．この原因を全て三陸沖の地理的特徴に帰着できるかどうかは専門的な分析を必要とする．例えば三陸沖で発生する  $4 \leq M < 5$  の範囲の地震の大部分が有感地震としては観測されないということがあり得るのかどうかは，無感地震に関する詳しい情報がないと判断できない．一方，宮城県沖を震央地とする  $M \geq 5$  地震の相対頻度が低いのは実際に起こっている現象と思われる．これは宮城県沖における地震の発生メカニズムを解明する上で有用な情報かもしれない．

(vi) について補足する．2011年3，4月(表1)においては， $M \geq 4$  地震において「その他」が全域合計に占める割合は  $256/1720=0.149$  である．一方，表2においてはその割合は  $377/1417=0.266$  で，かなり増加している．「その他」の震央地は震源域内の内陸部分と震源域外を含むので，この2つの領域のどちらが増加に寄与しているのか表1，2だけでは分からない．

本震や震源域内余震が域外の地震活動に影響したかどうかは，本震発生直後の数ヶ月間の域外有感地震発生頻度を調べるとある程度分かる．まず本震発生直後から数日間は域外でも地震活動が非常に激しかった．すなわち2011年3月12日から16日にかけて，域外における有感地震発生回数はいずれも230,87,46,55,61であった．その9割以上は震源域の西側で東経137度(富山県，岐阜県，愛知県附近)までの本州とその近辺で発生した．月毎に分けてみると，2011年3月11日～31日，4，5，6月の域外有感地震の平均発生回数/日はそれぞれ39.9,9.7,5.5,6.5であり，全域に対する2010年前半の平常値3.33/日よりかなり大きい．これらの事実より，本震や域内余震に誘発された地震が日本各地で多数発生したことは明らかである．なかでも秋田県内陸南部，栃木県北部，長野県北部，新潟県中越地方などの活動が活発であった．

次に域内の内陸に目を転じる。震源域の西端に当たる岩手県から千葉県にかけての内陸部分の地震活動には顕著な地域差がある。活動が最も激しかったのは福島県浜通，中通り，茨城県北部などで，ついで千葉県北東部，北西部などであった。それに比べて，岩手県や宮城県の内陸では目立った活動はなかった。これが何を意味するのかすぐには分からない。ちなみに2008年6月14日に岩手県内陸南部で  $M = 7.2$  の地震が発生し，それから1週間以上，岩手県南部と宮城県北部で極めて激しい地震活動が続いた（岩手・宮城内陸地震）この時にひずみエネルギーが解放されたので今回は比較的静穏なのかもしれない。

## 1.5 まとめ

地震の発生メカニズムを研究する上では，気象庁がHP上で提供する有感地震に関する地震情報の中でも震源やマグニチュードに関するものが重要であろう。そこで今回はこれらを分析して，いくつかの興味ある結果を得た。2節から4節までの分析で得られた主要な結果は次の通りである。

- 1) 月に均した1日当たりの有感地震発生回数は，2011年3月1日以来2012年3月末に至るまで単調に減少して，当初の15分の1になった。しかし減衰の仕方は指数関数では表しにくく，今の所指数関数よりずっと緩慢に減衰している。
- 2) 本震以来，マグニチュードが4以上の有感地震の8～9割は本震震源域で発生した。観測された全有感地震のマグニチュード分布は本震直後の1ヶ月前後（I期）と2011年5月以降（II期）で大きく変化した。すなわちI期においてはGR則が大きく破れ，マグニチュード4クラスの地震の発生頻度に比べて，マグニチュード5クラス以上の地震が異常に多発した。II期に入るとGR則は  $M \geq 4$  の領域で急速に回復した。 $M < 4$  の領域では依然としてGR則は破れているが，無感地震の寄与を考慮すれば回復するのもかもしれない。
- 3) マグニチュード分布は一般に震央地に依って異なることが分かった。特に三陸沖を震央地とする地震と宮城県沖を震央地とする地震のマグニチュード分布は平均的分布からそれぞれ逆向きにずれる。すなわち三陸沖においては  $4 \leq M < 5$  の範囲の地震の頻度に比べて  $M \geq 5$  地震の頻度はそれほど低くなく，GR則が破れているように見える。気象庁が三陸沖と呼んでいる地域は他の震央地に比べて本州から遠く離れている。そのためマグニチュードが4前後の地震でも有感地震として観測されない場合がかなりあるのかもしれない。このことが一因となって有感地震に限るとGR則が破れて見えるのかも知れない。一方，宮城県沖においては  $4 \leq M < 5$  の地震の頻度が高い割には  $M \geq 5$  地震の頻度が低く，GR則が逆向きに破れている。これは宮城県沖を震央地とする地震の現時点における発生メカニズムの特異性を示唆しているのかも知れない。
- 4) 余震活動は（有感  $M \geq 4$  地震に関する限り）福島県沖，茨城県沖，宮城県沖で最も激しかった。内陸では福島県浜通，中通り，茨城県北部，千葉県北西部・北東部などでの活動が激しかった。それに比べると青森県から宮城県にかけての太平洋沿岸内陸ではこれまでのところ目立った活動はない。
- 5) 本震直後から震源域外の本州付近でも地震活動は平常レベルよりはるかに活発になった。これは本震あるいは余震に誘発されたためと考えられる。

今回の解析で得られた最大の知見は，本震の直後からGR則の大きな破れを伴って極めて激しい余震活動が1ヶ月程度続いたが，その後余震活動が減衰すると共にGR則は急速に回復したという事実である。この知見は3.11地震の発生メカニズムの解明，近未来に起こりうる大きな余震の予知，あるいは経験則であるGR則の理論的裏付けにとって有用かもしれない。

ここまでまとめるのに6月までかかった。ここでは分析しなかった本年4月以降の地震活動も3月までの傾向から特にずれてはいないようである。

## 参考文献

- [1] 高木富士夫, 3.11地震の統計解析, 数学・物理通信 第1巻, 第10号 (2011.12) 11-19
- [2] Wikipedia, マグニチュード

# 集合の対称差と集合列の極限定理 (I)

## The symmetric difference of sets and some limit theoremes of sequence of sets (I)

新関章三<sup>3</sup>

Shôzô NIIZEKI<sup>4</sup>

### 2.1 はじめに

集合算の対称差を中心に集合算の性質を色々調べる．よく知られているように集合族  $p(\Omega)$  には 3 つの算法： $\{\cup, \cap, \setminus\}$  がある．これらの外にもう一つ対称差の算法  $\Delta$  が導入されると  $p(\Omega)$  には代数構造や位相構造が入り， $p(\Omega)$  の世界は飛躍的に広がる．同時にまた測度論に関連する応用面も大きく開けてくる．

論文は 3 部構成である．(I) は本稿であり有限回の集合算操作について調べ， $\Delta$  の結合法則までを述べる．更に，(II) は対称差を基に集合族  $p(\Omega)$  における集合列の収束等の解析的性質を調べる．そして (III) は集合算  $\Delta$  を用いて如何にして  $p(\Omega)$  に適切な位相構造を導入することが出来るかについて考える．

### 2.2 記号と準備

本稿を通じて， $\mathbb{Z}^+$  は正の整数全体から成る集合， $\Omega$  は空でない一つの集合，そして  $p(\Omega)$  を  $\Omega$  の部分集合全体から成る集合族とする．

また，2 つの命題  $S$  と  $T$  に対し

$$\begin{cases} S \ \& \ T \stackrel{\text{def}}{=} S \ \text{かつ} \ T \\ S \ \text{or} \ T \stackrel{\text{def}}{=} S \ \text{又は} \ T \end{cases}$$

であるとする．集合と言えは  $p(\Omega)$  の元又は要素を指し  $A, B, C, \dots$  等と大文字で記され， $\Omega$  の元又は要素は  $a, b, c, \dots$  等と小文字で記される．次に，2 つの集合  $A, B$  が共に  $\Omega$  の部分集合である時は，記号で

$$A, B \in p(\Omega) \quad \text{又は} \quad \{A, B\} \subset p(\Omega)$$

と記す．3 以上の場合も同様である． $A$  と  $B$  との大小関係は， $x \in A \Rightarrow x \in B$  が成り立つ時  $A \subset B$  又は  $B \supset A$  と記し， $A \cap B$  と  $A \cup B$  とをそれぞれ  $A$  と  $B$  との共通集合及び和集合といって記号で

$$\begin{cases} A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\} \\ A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \text{or} \ x \in B\} \end{cases}$$

<sup>3</sup>niizekishozo@gmail.com

<sup>4</sup>Professor Emeritus, Kochi University

と定める．上の式に現れた記号： $\stackrel{\text{def}}{=}$  は，右辺の内容を左辺の記号で表示する又は定義するという意味であり，以下同様である．

更に  $\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し  $A \setminus B \in \mathfrak{p}(\Omega)$  を

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}$$

と定める．そして，集合  $A \in \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し  $A^c$  を下記の様に定めると

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \setminus A \implies \begin{cases} A \setminus B = A \cap B^c \\ A^{cc} \stackrel{\text{def}}{=} (A^c)^c = A \end{cases}$$

となることは容易に確認できる． $A \in \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し  $A^c$  を  $A$  の補集合と呼ぶ．補集合に関しては次の重要な性質がある．

補題 2.1 次の式が成り立つ：

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} A \subset B \\ \Downarrow \\ B^c \subset A^c \end{cases}$$

証明  $\Downarrow$ ：次の一連の式が成り立つ事は容易に確認できる：

$$x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$$

$\Uparrow$ ：これも同様である．以上で補題は証明された． $\square$

補集合に関する de Morgan (ド・モルガン 1806–1871) の法則とは次の形で表現される．

補題 2.2 (de Morgan の双対法則)

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$$

証明  $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$  と  $A^{cc} = A$  とにより，容易に示す事が出来る． $\square$

上の補題に関連して，特に次の式が成り立つ：

$$\begin{cases} \Omega^c = \phi \\ \phi^c = \Omega \end{cases}$$

但し，記号  $\phi$  は元を持たない集合と定め，これを空集合と呼ぶ．即ち， $\forall x \in \Omega$  に対し  $x \notin \phi$  となる．そして  $\phi \in \mathfrak{p}(\Omega)$  と定め， $\forall E \in \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し  $\phi \subset E$  と定める．

次に，2つの集合算法  $\cap$  及び  $\cup$  に関する分配の法則を与えておこう．

補題 2.3 (分配の法則) 次の式が成り立つ：

$$\{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} 1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ 2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

証明 1)  $\supset$  は自明である．また  $\subset$  は

$$x \in A \cap (B \cup C) \implies \begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{or} \\ x \in A \cap C \end{cases}$$

が成り立つことから分かる．

2) は 1) において  $(A, B, C) \rightarrow (A^c, B^c, C^c)$  と変換してから，両辺の補集合をとれば de Morgan の法則，つまり補題 2.2 により，証明された．□

ここで，一見簡単ながら多くの場面で有効な働きをする次の定理を証明しよう．

定理 2.4 次の 2 つの式 1) 及び 2) が成り立つ：

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} 1) A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset B^c \\ 2) A \cup B = \Omega \Leftrightarrow B^c \subset A \end{cases}$$

証明 1) 次の式が成り立つ：

$$\begin{cases} \Rightarrow : A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = \phi \cup (A \cap B^c) \subset B^c \\ \Leftarrow : \Omega = B^c \cup B \subset A \cup B \subset \Omega \end{cases}$$

従って，1) は証明された．

2) は上の結果に対し de Morgan の双対原理を適用すればよい．□

次の定理は単純だが応用性が高く，特に算法： $\Delta$  の結合法則の証明で重要である．

定理 2.5 (切り取りの原理) 次の事が成り立つ：

$$\left. \begin{array}{l} \{P, P_1, P_2\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \exists E \in \mathfrak{p}(\Omega) \\ P \cap E = P_1 \\ P \cap E^c = P_2 \end{array} \right\} \implies P = P_1 \cup P_2$$

証明 次の式が成り立つ：

$$P = P \cap \Omega = P \cap (E \cup E^c) = (P \cap E) \cup (P \cap E^c) = P_1 \cup P_2$$

これで定理は示された．□

注意 一般に 2 つの集合  $\{A, P\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し  $P \cap A$  を  $P$  の  $A$  による切り取り又は  $A$  の  $P$  による切り取りと呼ぶ．従って，これを上の定理 2.5 の場合に当てはめると， $P_1$  と  $P_2$  とはそれぞれ  $P$  の  $E$  及び  $E^c$  による切り取りとなる．

## 2.3 対称差の算法とその諸性質

本節では，2 つの集合  $\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$  の対称差  $A \Delta B$  に関する色々な性質を調べる．

先ず，集合算法の  $\Delta$  の定義から始めよう．

定義 3.1 2 つの集合間の対称差と呼ばれる記号  $\Delta$  を次の様に定める：

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \quad \blacklozenge$$

上の定義から直ちに導かれる対称差の色々な性質を以下に列挙してみよう。

補題 3.2  $\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$  に対し, 次の式が成り立つ:

$$\begin{array}{ll} 1) (A \Delta B)^c = A^c \Delta B = A \Delta B^c & 2) A \Delta B = A^c \Delta B^c \\ 3) (A \Delta B) \cap (A \cap B) = \phi & 4) (A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B \\ 5) A \Delta B = B \Delta A & 6) A \Delta B \subset A \cup B \end{array}$$

証明 何れも定義 3.1 から容易に得られる。□

次の定理は, 対称差の入った集合算の式の性質を調べるのに大きな役割を果たす。

定理 3.3 次の式が成り立つ:

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} (A \Delta B) \cap A = A \cap B^c \\ (A \Delta B) \cap A^c = A^c \cap B \end{cases}$$

証明 定義 3.1 から明らかである。□

応用上も重要な次の補題は, 上の補題から容易に得られる。

補題 3.4 次の式が成り立つ:

$$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} 1) A \Delta B = \phi \Leftrightarrow A = B \\ 2) A \Delta B = \Omega \Leftrightarrow A = B^c \end{cases}$$

証明 1)  $\Rightarrow A \Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = \phi$  より  $A^c \cap B = \phi$  かつ  $A \cap B^c = \phi$  が得られ, 従ってそれぞれ  $B \subset A$  及び  $A \subset B$  を得る。よって  $A = B$  が示された。また  $\Leftarrow$  は定義 3.1 から自明である。

2)  $\Rightarrow$  両辺の補集合を採れば  $A \Delta B^c = \phi$  を得る。よって 1) の結果により  $A = B^c$  を得る。 $\Leftarrow$  定義 3.1 から自明である。□

## 2.4 対称差の結合法則

本節では, 2 つの集合の対称差である  $\Delta$  の結合法則について考える。この法則は対称差の最も重要な性質であり応用範囲も広い。

この法則の証明法は色々あるが, ここでは集合の大小関係に基づいた証明法を試みる。このために以下, 幾つかの準備をする。

先ず, 対称差の基本定理と呼ばれる次の重要な定理を証明しよう。

定理 4.1 (対称差の基本定理) 次の関係式が成り立つ:

$$\{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} 1) A \Delta B \subset C \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \cup C \\ B \subset A \cup C \end{cases} \\ 2) C \subset A \Delta B \Leftrightarrow \begin{cases} C \subset A \cup B \\ A \cap B \cap C = \phi \end{cases} \end{cases}$$

証明 1)  $\Rightarrow$ :  $A \subset A \cup B = (A \Delta B) \cup B \subset (B \cup C) \cup B = B \cup C$  より上段が分かり, 下段も同様である。

$\Leftarrow$ :  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset C$  から分かる。

2)  $\Rightarrow$  : は  $A \Delta B \subset A \cup B$  より自明である .

$\Leftarrow$  : は補題 3.2 の 3) 及び 4) から次の様にして分かる :

$$C = C \setminus (A \cap B) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$$

以上で定理は証明された .  $\square$

算法  $\Delta$  の含んだ式の処理には , 上の基本定理が決定的な働きをする . 以下 , その実例として  $\Delta$  に関する結合の法則を証明するのに必要な幾つかの補題や定理を与える .

最初は 2 つの集合算法 :  $\cap$  と  $\Delta$  との間には次の分配の法則が成り立つ事を示す .

定理 4.2 (対称差の分配法則) 次の式が成り立つ :

$$\{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

証明  $X \stackrel{\text{def}}{=} A \cap (B \Delta C)$  において基本定理 4.1 の 1) と 2) とを用いれば  $X = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  は直ちに証明できる .  $\square$

上の定理も定理 4.1 と同様に , 対称差  $\Delta$  を含んでいる集合算式を扱う際に大きな力を発揮する . つまり , 第 5 節で述べるように , 以下 , 補題 4.3 と定理 4.4 とは , 定理 4.2 を用いると一層簡潔に証明することが出来るのである .

補題 4.3 次の式が成り立つ :

$$\{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies \begin{cases} 1) (A \Delta C) \Delta (C \Delta B) = A \Delta B \\ 2) A \Delta (A \Delta B) = B \end{cases}$$

証明 1) 集合  $P$  を

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (A \Delta C) \Delta (C \Delta B)$$

とおいた時 , 補題 3.2 の 1) と 2) とから  $P = (A \Delta C^c) \Delta (C^c \Delta B)$  でもあり , 補題 3.2 の 2) 及び定理 4.2 により , 少々頑張って計算すれば , 次の 2 つの式を得る :

$$\begin{cases} P \cap C = (A \Delta B) \cap C \\ P \cap C^c = (A \Delta B) \cap C^c \end{cases}$$

よって , 定理 2.5 により 1) が示された .

2) 上の 1) の式で変換 :  $(A, B, C) \rightarrow (\phi, B, A)$  を施せば 2) が示される . 以上で補題は証明された .  $\square$

次の定理は対称差の重要な性質である .

定理 4.4 次の式が成り立つ :

$$\forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies (A \Delta B) \cap (B \Delta C) \cap (C \Delta A) = \phi$$

証明 補題 3.2 の 2) により

$$\begin{aligned} P &\stackrel{\text{def}}{=} (A \Delta B) \cap (B \Delta C) \cap (C \Delta A) \\ &= (A^c \Delta B^c) \cap (B \Delta C) \cap (C^c \Delta A^c) \end{aligned}$$

が成り立つ . 従って , 補題 2.2 の 3) と 4) とにより

$$\begin{cases} P \cap A = (A \cap B^c) \cap (B \Delta C) \cap (C^c \cap A) = A \cap (B \cup C)^c \cap (B \Delta C) = \phi \\ P \cap A^c = (A^c \cap B) \cap (B \Delta C) \cap (C \cap A^c) = A^c \cap (B \cap C) \cap (B \Delta C) = \phi \end{cases}$$

を得る . よって , 定理 2.5 により , 定理は証明された .  $\square$

上の定理 4.4 と密接に関連した次の補題は重要である .

補題 4.5 次の式が成り立つ :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ (A \Delta B) \cap (B \Delta C) \cap (C \Delta A) = \phi \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ A \Delta B \subset (B \Delta C) \cup (C \Delta A) \end{array} \right.$$

証明  $\Rightarrow$ : 上の左側の式で  $C \rightarrow C^c$  と変換すると , 補題 3.2 の 1) により

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cap \{(B \Delta C) \cup (C \Delta A)\}^c &= \phi \\ \therefore A \Delta B &\subset (B \Delta C) \cup (C \Delta A) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ : 上で行われた論法を逆にたどればよい .  $\square$

次の定理から定理 4.7 は直ちに得られる .

定理 4.6 次の式が成り立つ :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ (A \Delta C) \Delta (C \Delta B) = A \Delta B \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \end{array} \right.$$

証明  $\Rightarrow$  : 左側の式において変換 :  $(A, B, C) \rightarrow (C, B, A)$  を行うと

$$A \Delta (A \Delta B) = B$$

が得られる . この等式を用いて左側の式で変換 :  $(A, B, C) \rightarrow (A \Delta C, B, C)$  を行うと

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta C) \Delta B$$

となり , この式で変換 :  $(A, B, C) \rightarrow (A, C, B)$  を行うと  $\Rightarrow$  は示された .

$\Leftarrow$  : これは  $C \Delta C = \phi$  である事から明らかである .  $\square$

上の定理から直ちに目標である次の系が得られる .

系 4.7 (対称差の結合法則) 次の式が成り立つ :

$$\forall \{A, B, C\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

証明 補題 4.3 及び定理 4.6 から自明である .  $\square$

以上 , 幾つかの段階を経て明確に対称差の結合法則を証明することが出来た . しかし , 各段階の証明は定理 2.5 及び定理 4.1 , つまり切取りの原理及び対称差の基本定理さえ押さえておけば後は殆んど明らかである .

例題 4.8 集合  $\mathfrak{p}(\Omega)$  には 2 項算法 :  $\Delta$  により , 一つの代数構造が入る . 即ち

$$\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \implies A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} A \Delta B$$

で積  $\cdot$  を導入すると補題 2.2 の 5) により  $\mathfrak{p}(\Omega)$  は可換群を成すのである .

証明 可換性は自明である . 次に ,  $\phi$  が単位元であり  $A \in \mathfrak{p}(\Omega)$  の逆元は  $A$  自身である事は明らかである . そして単位元と逆元の一意性も直ちに分かる . 何故なら

$$\begin{cases} A \Delta B = A \Rightarrow B = \phi & (\text{単位元の一意性}) \\ A \Delta B = \phi \Rightarrow B = A & (\text{逆元の一意性}) \end{cases}$$

が成り立つからである .  $\square$

本稿 (I) を終えるに当たり,  $p(\Omega)$  における 2 項算法  $\Delta$  の特徴付けについて考えてみよう. 即ち, 新たな 2 項算法  $\otimes$  を  $p(\Omega)$  に導入した時, それがどのような条件の下で対称差  $\Delta$  に一致するのかを調べてみる. 次の定理が成り立つ.

定理 4.9 任意の 2 つの集合  $A, B$  に対し次の式が成り立つ:

$$A \otimes B = A \Delta B \iff \begin{cases} 1) A \otimes B = B \otimes A \\ 2) (A \otimes B)^c = A^c \otimes B \\ 3) (A \otimes B) \cap A = A \cap B^c \end{cases}$$

証明  $\Rightarrow$ : 補題 3.2 及び定理 3.3 により自明である.

$\Leftarrow$ : 1) と 2) とにより  $A \otimes B = A^c \otimes B^c$  であり, また 3) より

$$(A \otimes B) \cap A^c = (A^c \otimes B^c) \cap A^c = A^c \cap B^{cc} = A^c \cap B$$

が成り立つ. これと条件 3) とにより次の 2 つの式を得る:

$$\begin{cases} (A \otimes B) \cap A = A \cap B^c \\ (A \otimes B) \cap A^c = A^c \cap B \end{cases}$$

これらの辺々を加えると

$$A \otimes B = (A \otimes B) \cap \Omega = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \Delta B$$

が得られて  $\Leftarrow$  も証明された.  $\square$

## 2.5 おわりに

本稿 (I) の目標は集合算  $\Delta$  の結合法則を証明することであった. 本節ではそこで与えた証明の外に, 更に 2 つの証明法を提示して対称差  $\Delta$  の奥深さの一端を見る.

一つは定義 3.1 だけを基に直接計算して定理 4.7 を証明する方法である. これは参考 5.1 として下に証明の概略を与えた. もう一つは, 参考 5.2 として定式化し, 定理 2.5 を用いて証明してみた.

参考 5.1 (対称差の結合法則) 次の式が成り立つ:

$$\forall \{A, B, C\} \subset p(\Omega) \implies (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

証明: 対称差の定義 3.1 を直接用いて根気よく慎重に計算を実行すると

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

を得る. この式から結合法則を導こう. 上の等式の両辺に次の変換を施すと

$$(A, B, C) \rightarrow (C, B, A) \quad \therefore \text{左辺} = (C \Delta B) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$$

が得られる. 更に, 同じ変換により

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (C \cap B \cap A) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \cup (C^c \cap B \cap A^c) \cup (C^c \cap B^c \cap A) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\ &\therefore (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \end{aligned}$$

を得る. よって, 対称差  $\Delta$  の結合法則が示された.  $\blacklozenge$

参考 5.2 (対称差の結合法則) 次の式が成り立つ :

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (A \Delta B) \Delta C \implies \left\{ \begin{array}{l} 1) P \cap A = (B \Delta C)^c \cap A \\ 2) P \cap A^c = (B \Delta C) \cap A^c \end{array} \right\} (\#)$$

$$(\#) \implies 3) P = A \Delta (B \Delta C)$$

証明 1) と 2) とは定理 3.3 から分かり 3) は 1) と 2) の辺々を加え, そして定義 3.1 を見ればよい. ◆

ここで, 参考 5.1 の証明法及び参考 5.2 の証明法とを比較検討してみよう. 前者は

定理 2.5 → 定理 3.3 → 定理 4.1 → 定理 4.2 → 定理 4.3 → 補題 4.6 → 定理 4.7

なる経路で目的が達成された. 他方, 後者は対称差  $\Delta$  の定義から直接目標の結合法則を導く考え方であるが, この方法は多少面倒な計算さえ厭わなければ  $\Delta$  の定義に従って対称差の結合法則が得られる. 両者のやり方を分かり易く例えれば, 重い物体を下から持ち上げるのに, 前者はコロ, 斜面, 或いは滑車等の道具を用いるようなもので, その準備に手間暇がかかるも楽に持ち上げる事が出来る. 他方, 後者の場合は物体を道具等を用いずに一気に上げることになり, 道具の準備に手間暇はかからないものの強い力が必要となり大変苦勞しなければならない. さて, どちらの方法で結合法則を証明すべきかは現場の状況や各人の考え方による.

次回の稿 (II) では集合空間  $p(\Omega)$  の解析的性質について議論し, 次々回の稿 (III) では位相の導入及び測度と結びついた空間の性質について調べる予定である. ■

# 四元数と空間回転 1

## Quaternions and Rotations 1

矢野 忠<sup>5</sup>

Tadashi YANO<sup>6</sup>

### 3.1 はじめに

この四元数のシリーズでは四元数で空間回転を取り扱うことを最終目標としている．  
現在ではベクトルなどの空間回転を取り扱う方法としては

1. ベクトルでの表現
2. マトリックスによる表現
3. 四元数による表現

の3つが少なくとも知られている．それぞれの表現は長所，短所があるが，このエッセイの目的は四元数による空間回転の表現を考えることである．

### 3.2 目的の提示

この節ではすでに四元数のことを知っている方々にこのエッセイの目的を示す．用語の説明等をまったくして  
いないので，四元数の知識のない方々はこの節を飛ばして3.3節以下を先に読んだ後でこの節に戻って下さい．

$v$  を虚部のみをもつ四元数とし，また  $q$  を単位四元数とし，その共役単位四元数を  $\bar{q}$  とする．このとき，四元数での  $v$  の空間回転は

$$u = qv\bar{q}, \quad q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}, \quad n = in_1 + jn_2 + kn_3 \quad (3.1)$$

で表される．

このとき  $u$  はやはり虚部のみをもつ（すなわち実部のない）四元数である． $v$  を空間のベクトルと同一視すれば， $u$  は  $v$  を四元数  $q$  と  $\bar{q}$  とで変換したものであり， $|u| = |v|$  が成り立つ．

このため，空間のベクトル  $v$  の大きさを変えずに原点を中心として回転し，空間ベクトル  $u$  になったことと同じと考えられる．すなわち (3.1) は空間における回転を表すと考えられる．

ところが空間回転を表す直交行列  $R$  でベクトル  $v$  を空間回転させれば，回転後のベクトル  $u$  は

$$\mathbf{u} = R\mathbf{v}, \quad R: \text{直交行列} \quad (3.2)$$

<sup>5</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>6</sup>Professor Emeritus, Ehime University

であり，この空間回転 (3.2) が四元数を用いた表現では単位四元数  $q$  とその共役四元数  $\bar{q}$  でサンドイッチ風にはさんだ変換 (3.1) と同等であることはなかなか納得できない<sup>7</sup>．そのことを少しでも納得できるように示したい．これがこのエッセイの目的である．

以上このエッセイの目的を述べたが，つぎの節で少し準備をする．

### 3.3 四元数とその積

$x, y$  を四元数として，4つの元  $1, i, j, k$  で四元数を

$$x = x_0 + \hat{x}$$

$$y = y_0 + \hat{y}$$

と表す．ここで， $\hat{x} \equiv ix_1 + jx_2 + kx_3$  で定義される． $\hat{y}$  も同様である．

1 と  $i, j, k$  とは交換可能であるが， $i, j, k$  は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (3.3)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (3.4)$$

いう代数系を満たしている．

3.2 節では用語の説明をしなかったので，ここでその説明をしておこう．

$$x = x_0 + \hat{x}$$

と表したときに

$$\hat{x} \equiv ix_1 + jx_2 + kx_3$$

で定義したが，この  $\hat{x}$  を四元数の虚部（またはベクトル部分）という．これは四元数  $x$  が 4 次元空間を表しているとして，この虚部を 3 次元空間と同定できるからである．また  $x_0$  を四元数  $x$  の実部（またはスカラー部分）という．

四元数  $x$  に対してその共役四元数を  $\bar{x}$  で表し，

$$\bar{x} = x_0 - \hat{x}$$

で定義する．

また，四元数  $x$  のノルムの 2 乗を

$$[N(x)]^2 = x\bar{x} = |x|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

で定義する．ノルム  $N(x)$  は

$$N(x) = |x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

となる<sup>8</sup>．

$$x\bar{x} = |x|^2$$

であるから，この式の両辺をノルムの 2 乗  $|x|^2 \neq 0$  で割れば，

$$x \frac{\bar{x}}{|x|^2} = 1$$

<sup>7</sup>(3.1) から (3.2) が導かれることを示すことはそれほど難しくはない．ここでは少し発見的な方法で (3.1) の導出を示す．

<sup>8</sup>ノルムの定義はここでのノルムの 2 乗をノルムと定義する文献もある．

となり,

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

であることがわかる． $x^{-1}$  はもちろん四元数  $x$  の逆四元数である．

さらに, ノルムが 1 であるような四元数を単位四元数という．すなわち,  $x$  が単位四元数ならば  $|x| = 1$  である．その逆四元数もまた単位共役四元数である．このとき

$$x^{-1} = \bar{x}$$

が成り立つ．

さて, 四元数  $x$  と  $y$  の積  $xy$  もまた四元数である．

すなわち,

$$\begin{aligned} xy &= x_0y_0 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + i(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2) \\ &\quad + j(x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1) + k(x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0) \\ &= x_0y_0 - (\hat{x}, \hat{y}) + x_0\hat{y} + y_0\hat{x} + [\hat{x}, \hat{y}] \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで

$$(\hat{x}, \hat{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (3.6)$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i(x_2y_3 - x_3y_2) + j(x_3y_1 - x_1y_3) + k(x_1y_2 - x_2y_1) \quad (3.7)$$

で定義される．この  $(\hat{x}, \hat{y})$  はベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  のスカラー積のことであり,  $[\hat{x}, \hat{y}]$  はベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  のベクトル積のことであり [1]．

(3.5) を

$$xy = (x_0y_0 - (\hat{x}, \hat{y}), x_0\hat{y} + y_0\hat{x} + [\hat{x}, \hat{y}])$$

と表すこともある． $x_0y_0 - (\hat{x}, \hat{y})$  を四元数  $xy$  の実部 (またはスカラー部分) といい,  $x_0\hat{y} + y_0\hat{x} + [\hat{x}, \hat{y}]$  を  $xy$  の虚部 (またはベクトル部分) という．

ここで,  $\hat{x}$  を  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{y}$  を  $\mathbf{y}$  と表さないのは普通のベクトルと四元数とを区別をしたいためであるが,  $\hat{x}, \hat{y}$  の代わりに  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  で表す考え方もある．付録 1 にはこのベクトル記法を用いた説明をする．

ここで, ちょっと注意しておきたいことがある．特殊な四元数の積には Hamilton が四元数を発見したときと似た事情が生じる．すなわち

もし四元数が虚部しかもたない (以下では「実部のない四元数」という) ときに, 実部のない 2 つの四元数の積は実部のある一般の四元数であり, 実部のない, 特殊な四元数ではない．

いま例を取り上げて述べよう．実部のない 2 つの四元数  $v, w$

$$v = ix_1 + jx_2 + kx_3$$

$$w = iy_1 + jy_2 + ky_3$$

とを考えると, その積  $vw$  をつくれば

$$\begin{aligned} vw &= (ix_1 + jx_2 + kx_3)(iy_1 + jy_2 + ky_3) \\ &= -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + i(x_2y_3 - x_3y_2) + j(x_3y_1 - x_1y_3) + k(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= -(\hat{x}, \hat{y}) + [\hat{x}, \hat{y}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

であった．ここで,  $-(\hat{x}, \hat{y})$  は四元数  $vw$  の実部であり,  $[\hat{x}, \hat{y}]$  は虚部である．この式は (3.5) で  $x_0 = y_0 = 0$  とおいても得られる．

すなわち，実部のない2つの四元数でも，それらの積は実部をもつことがわかる<sup>9</sup>．

この事実は Hamilton が元  $k$  をもたない，2つの四元数（すなわち，退化型の四元数）の積をつくったときにその積の四元数は元  $k$  を含んでいたことと類似である．

以下に簡単にこのことを復習しておく．

2つの四元数  $x, y$

$$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$$

$$y = y_0 + iy_1 + jy_2 + ky_3$$

において， $x_3 = y_3 = 0$  とおいた四元数

$$p = x_0 + ix_1 + jx_2$$

$$q = y_0 + iy_1 + jy_2$$

の積  $pq$  をとったときに

$$\begin{aligned} pq &= (x_0 + ix_1 + jx_2)(y_0 + iy_1 + jy_2) \\ &= x_0y_0 - (x_1y_1 + x_2y_2) + i(x_0y_1 + y_0x_1) + j(x_0y_2 + y_0x_2) + k(x_1y_2 - x_2y_1) \end{aligned}$$

となり，元  $k$  を含まない2つの四元数でもその積には元  $k$  を含む項が必ず現れる．

このことが Hamilton を四元数の発見へと導いたのであった [2], [3]．

### 3.4 四元数による空間回転

この節の目的は 3.2 節で述べた，四元数による空間回転を表現する式 (3.1) を，Kuipers の考え [4] にしたがって導くことである．

まず  $v$  は実部のない四元数としよう．それを前に示したように

$$v = \hat{x} = ix_1 + jx_2 + kx_3$$

とする．また  $q$  を単位四元数

$$q = q_0 + \hat{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

とする．単位四元数とはノルム  $N(q) = |q| = 1$  の四元数であるから

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

を満たす．

いま  $qv$  の積をつくれば，(3.5) によって

$$\begin{aligned} qv &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(ix_1 + jx_2 + kx_3) \\ &= -(\hat{q}, \hat{x}) + q_0\hat{x} + [\hat{q}, \hat{x}] \end{aligned}$$

となる．これからわかるようにこの  $qv$  の積に実部  $-(\hat{q}, \hat{x})$  が含まれている．したがって，

$$V = qv, \quad V : \text{実部のない四元数}$$

のように表すことはできない．

<sup>9</sup>実部のない二つの四元数  $v, w$  の積  $vw$  の式から  $\overline{vw} = \bar{w}\bar{v}$  を証明することができる．さらに一般の四元数  $x, y$  の積  $xy$  の共役は  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$  であることが証明できる．証明は付録 3 に示す．

このことがわかったので、さらにもう一つの単位四元数  $r$  との積を用いて、実部のない四元数をつくることを考えてみよう。このとき、

$$rqv, \quad qrv$$

を考えると、これらの四元数の積において2つの四元数の積  $rq, qr$  は一つの四元数  $s$  となるから、 $qrv$  または  $rqv$  は  $qv$  と同じで、これらの  $qrv$  や  $rqv$  から実部のない四元数をつくることはできない。

したがって、四元数の積に生ずる実部をなくすために、 $qv$  の後ろからもう一つ別の単位四元数  $r = r_0 + \hat{r}$  をかけた積  $qvr$  を考えてみよう。

そのために  $qv = Q = Q_0 + \hat{Q}$  とおけば、 $Q_0 = -(\hat{q}, \hat{x})$ 、 $\hat{Q} = q_0\hat{x} + [\hat{q}, \hat{x}]$  であるから

$$\begin{aligned} qvr &= Qr \\ &= Q_0r_0 - (\hat{Q}, \hat{r}) + Q_0\hat{r} + r_0\hat{Q} + [\hat{Q}, \hat{r}] \\ &= -r_0(\hat{q}, \hat{x}) - (q_0\hat{x} + [\hat{q}, \hat{x}], \hat{r}) \\ &\quad - (\hat{q}, \hat{x})\hat{r} + r_0(q_0\hat{x} + [\hat{q}, \hat{x}]) + [q_0\hat{x} + [\hat{q}, \hat{x}], \hat{r}] \end{aligned}$$

となる。

いま、この  $qvr$  の実部がどのような場合に0になるかを考える。まずこの実部は

$$qvr \text{ の実部} = -r_0(\hat{q}, \hat{x}) - q_0(\hat{x}, \hat{r}) - ([\hat{q}, \hat{x}], \hat{r})$$

である。ここで、 $r_0 = q_0$  とすれば

$$qvr \text{ の実部} = -q_0(\hat{q} + \hat{r}, \hat{x}) - ([\hat{q}, \hat{x}], \hat{r}) \quad (3.9)$$

さらに  $\hat{q} + \hat{r} = 0$  とすれば、上の式 (3.9) の第1項は0となり、第2項も

$$\begin{aligned} qvr \text{ の実部第2項} &= -([\hat{q}, \hat{x}], -\hat{q}) \\ &= ([\hat{q}, \hat{x}], \hat{q}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

ここで上の式の  $([\hat{q}, \hat{x}], \hat{q}) = 0$  を示しておこう。まず

$$[\hat{q}, \hat{x}] = i(q_2x_3 - q_3x_2) + j(q_3x_1 - q_1x_3) + k(q_1x_2 - q_2x_1)$$

であり、また  $\hat{q} = iq_1 + jq_2 + kq_3$  であるから

$$([\hat{q}, \hat{x}], \hat{q}) = q_1(q_2x_3 - q_3x_2) + q_2(q_3x_1 - q_1x_3) + q_3(q_1x_2 - q_2x_1) = 0$$

こうして、 $r_0 = q_0$ 、 $\hat{r} = -\hat{q}$  の場合には

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \hat{r} \\ &= q_0 - \hat{q} \\ &= \bar{q} \end{aligned}$$

である。

したがって、 $u = qvr = qv\bar{q}$  は実部をもたないことがわかる。

すなわち、実部のない四元数  $v$  を空間の3次元ベクトル  $\mathbf{v}$  と同定すれば、一般の単位四元数  $q$  で (3.1) を用いて変換しても、やはり  $u$  は実部のない四元数であるから、3次元ベクトル  $\mathbf{u}$  であると同定される。これは直交変換  $R$  で空間ベクトル  $\mathbf{v}$  を (3.2) によって変換しても、空間ベクトル  $\mathbf{u}$  となっていることと同様である。

空間の回転では、回転軸の方向とその軸のまわりの回転角を示す必要がある。これは単位四元数  $q$  では

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}, \quad n = in_1 + jn_2 + kn_3$$

と表される。ここで  $n_1, n_2, n_3$  は回転軸の方向を示す方向余弦である。一見すれば、 $n_1, n_2, n_3$  の3つのパラメータがあるように見えるが、

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

の条件があるので、フリーパラメータは2つである。それに加えて回転軸のまわりの回転角  $\theta$  とをあわせて、3つのパラメータで空間回転を定めている。

$q\bar{q}$  の実部 = 0 のこの証明はあまり見通しがよくない。ベクトル記法を用いれば、私たちの知っている、ベクトル代数の知識を使えるので、もっと見通しよく示すことができる。それについては付録 1 に述べる。

また、(3.1) が空間回転を実際に表していることは付録 2 に示す。

### 3.5 四元数の虚部と3次元空間

この節では (3.1) の例を次節で述べる前に四元数の虚部と3次元空間との対応について述べる。2つの四元数  $x$  と  $y$  との積  $xy$  は (3.5) で表され、その中に出てきた  $(\hat{x}, \hat{y})$  と  $[\hat{x}, \hat{y}]$  はベクトル代数を知っていれば、(3.6), (3.7) から

$$\begin{aligned} (\hat{x}, \hat{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, & \text{スカラー積} \\ [\hat{x}, \hat{y}] &= \mathbf{x} \times \mathbf{y}, & \text{ベクトル積} \end{aligned}$$

である。いま、3次元空間に直交座標系を導入して、その  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸をそれぞれ四元数の虚部の  $i$  軸、 $j$  軸、 $k$  軸と考えれば、3次元空間のベクトル  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$  と四元数の虚部  $\hat{x} = ix_1 + jx_2 + kx_3$  とは同一視できる。これは平面上のベクトル  $\mathbf{r} = xi + yj$  と複素数  $z = x + yi$  とを同一視できることと類似している。

3次元空間の  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸の正の方向を向いた単位ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とすれば、ベクトル代数のスカラー積から

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

が得られ、またベクトル積から

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \tag{3.12}$$

が得られる。

これらを四元数の3つの元  $i, j, k$  のもつ代数系と比べてみれば、(3.10), (3.11), (3.12) が (3.4) と対応した性質をもっている。

もっとも他の関係はそのような対応関係をもっていないので、四元数の元  $i, j, k$  の代数系と3次元空間の単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  のスカラー積とベクトル積の関係がすべて1対1に対応している訳ではない。しかし、全体としてみれば四元数の虚部と3次元空間とが対応しており、これを同一視することができる。

### 3.6 簡単な例

3.4 節でベクトルの空間回転を四元数で表す公式 (3.1)

$$u = qv\bar{q}, \quad q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}, \quad n = in_1 + jn_2 + kn_3 \quad (3.1)$$

を導いたが、ここで簡単な例を考えてみたい [5].

いま  $z$  軸上の単位ベクトル  $k$  を  $y$  軸のまわりに  $90^\circ$  回転させてみよう (図 3.1 参照). 図 3.1 を見れば、すぐにこの回転で  $k$  は  $i$  となることがわかる.

3.5 節で述べたように四元数の虚部と 3 次元空間を対応させれば、ベクトル  $k$  は四元数の元  $k$  に、 $y$  軸上の単位ベクトルは  $j$  は四元数の元  $j$  に、また  $x$  軸上の単位ベクトル  $i$  は四元数  $i$  に対応している.

このように空間のベクトルを四元数に翻訳して、空間回転をあらためて四元数での空間回転 (3.1) で計算してみよう. このとき (3.1) の  $n$  は  $n = j$  であり、 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$  であるから、 $q$  は

$$q = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} qk\bar{q} &= (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})k(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)k\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j) \\ &= \frac{1}{2}(1 + j)(k - kj) \\ &= \frac{1}{2}(k + i + i - k) \\ &= i \end{aligned}$$

この空間回転は図 3.1 を見れば直観的にわかることだが、確かに四元数の回転 (3.1) で実現できることが示された.

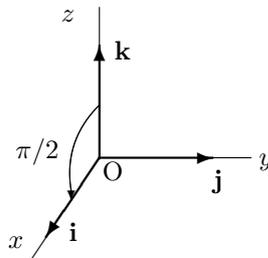


図 3.1: 単位ベクトル  $k$  の  $y$  軸まわりの  $90^\circ$  の空間回転

### 3.7 おわりに

このエッセイでは四元数で空間回転を表す公式 (3.1) を天下りではなく、発見法的に導いた. これはもちろん私のオリジナルではなく、Kuipers にしたがつた説明である.

空間回転の表現法は他にも

1. ベクトルでの表現
2. マトリックスによる表現

がある。

四元数による空間回転の公式 (3.1) においては回転軸のまわりの回転角  $\theta$  の  $1/2$  が現れており、回転角  $\theta$  が直接に現れていない。このことを疑問に思う人もいる。

もちろん四元数による表現をベクトルでの表現、またはマトリックスによる表現に書き直せば、空間回転の回転角は四元数の空間回転公式に現れた角の 2 倍になることがわかる。

しかし、その説明は上の空間回転の 2 つの別の表現とあわせて、つぎエッセイの課題としたい。

## 付録1 ベクトル記法による $qvr$ の実部の計算

3.4 節で  $qvr$  の実部が  $r = \bar{q}$  のときに 0 となることを示したが、あまり計算の見通しがよくない。それで 3.4 節の計算を見通しのよい Kuipers の方法 [4] で示しておく<sup>10</sup>。

Kuipers は

$$x = x_0 + \mathbf{x}, \quad y = y_0 + \mathbf{y}$$

と表す。すなわち、 $\hat{x} = \mathbf{x}$ 、 $\hat{y} = \mathbf{y}$  と普通のベクトル記号を使って表し、スカラー積  $(\hat{x}, \hat{y})$  は

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

で、ベクトル積  $[\hat{x}, \hat{y}]$  は

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

で表す。そうすれば (3.5) は

$$xy = x_0y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + x_0\mathbf{y} + y_0\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

と表される。この表記法を用いれば、ベクトル代数になじんでいる方々にはとても見通しがよい。こういう理由から Kuipers は単位四元数  $q$  を  $q = q_0 + \mathbf{q}$  と表し、実部をもたない四元数  $v$  を  $v = 0 + \mathbf{v}$  と表す。そのとき

$$\begin{aligned} qv &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v}) \\ &= q_0 \cdot 0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{q} + q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v} \\ &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

となる。断るまでもないが、 $0 \cdot \mathbf{q}$  はベクトルのスカラー積ではなく、ベクトル  $\mathbf{v}$  に単にスカラーの 0 をかけたものである。 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$  と  $\mathbf{q} \times \mathbf{v}$  とはベクトル  $\mathbf{q}$  と  $\mathbf{v}$  のそれぞれスカラー積とベクトル積である。

さて、このとき  $qvr$  は

$$qvr = (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(r_0 + \mathbf{r})$$

となるが、この積で実部が 0 となれば、 $qvr$  は虚部だけの四元数となるので、上の四元数の積の実部がどんな場合に 0 となるかを調べていこう。

$qvr$  の実部は

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - q_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}$$

となる。この実部が 0 となるようにしたいのであるから、いま  $r_0 = q_0$  とすれば

$$qvr \text{ の実部} = -q_0(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}$$

さらに、この式で  $\mathbf{q} + \mathbf{r} = 0$  とすれば、

$$(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

<sup>10</sup>このエッセイで Kuipers の表記法を用いなかった理由は、たとえば下で与えた式、 $x = x_0 + \mathbf{x}$  がベクトルとスカラーの和で定義されるような誤解を招くことを避けるためであった。その誤解は 3.4 節では避けられたと思うが、計算の見通しが非常に悪い。Kuipers は四元数の演算を直観的に分かりやすくするためにベクトル記法を用いている。

であり, また

$$\begin{aligned} -(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} &= (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{q} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから確かに

$$qvr \text{ の実部} = 0$$

となる<sup>11</sup>.

したがって,  $r = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = \bar{q}$  であるから,  $u = qvr = qv\bar{q}$  と表される.

## 付録 2 (3.1) が空間回転を表すこと

この付録 2 では

$$u = qv\bar{q}, \quad q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}, \quad n = in_1 + jn_2 + kn_3 \quad (3.1)$$

が空間回転を表すことを示す [6]. すなわち, (3.1) が下の (3.14) を満たすことを示す.

いま

$$\begin{aligned} u &= ix'_1 + jx'_2 + kx'_3 \\ v &= ix_1 + jx_2 + kx_3 \\ q &= q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \quad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \end{aligned}$$

とする.  $q$  は単位四元数であるから,

$$q\bar{q} = \bar{q}q = 1$$

である. (3.1) から

$$\begin{aligned} |u|^2 &= u\bar{u} \\ &= (qv\bar{q})(\overline{qv\bar{q}}) \\ &= qv\bar{q} \cdot q\bar{v}q \\ &= qv\bar{v}q \\ &= |v|^2 q\bar{q} \\ &= |v|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

すなわち

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3.14)$$

が成り立つ. したがって (3.1) は空間回転を表す. (3.13) で  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$  であることを用いた. この証明は付録 3 に与えた.

別の方法で直接的に (3.14) を示すこともできる. すなわち, (3.1) から

$$\begin{aligned} x'_1 &= B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 \\ x'_2 &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ x'_3 &= D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 \end{aligned}$$

<sup>11</sup>この最後の部分の計算はベクトル代数を知っている人には直観的に見通しがきく. これが Kuipers がベクトル記法を使った理由であろう.

を用いて, この式を  $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$  に代入して (3.14) を示してもよい.

係数  $B_1, B_2, \dots, D_3$  は

$$B_1 = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

$$B_2 = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$$

$$B_3 = 2(q_1q_3 + q_0q_2)$$

$$C_1 = 2(q_1q_2 + q_0q_3)$$

$$C_2 = q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2$$

$$C_3 = 2(q_2q_3 - q_0q_1)$$

$$D_1 = 2(q_1q_3 - q_0q_2)$$

$$D_2 = 2(q_2q_2 + q_0q_1)$$

$$D_3 = q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2$$

である. これらの式を用いて

$$B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = B_2^2 + C_2^2 + D_2^2 = B_3^2 + C_3^2 + D_3^2 = 1$$

$$B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = B_1B_3 + C_1C_3 + D_1D_3 = B_2B_3 + C_2C_3 + D_2D_3 = 0$$

を示すことができる. したがって, (3.14) は確かに成立している.

### 付録3 $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ の証明

付録2で  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$  であることを証明せずに使ったので, その証明をしておく.

そのために3.3節で求めた2つの, 実部のない四元数の積  $vw$  の式を用いてまず  $\overline{vw} = \bar{w}\bar{v}$  であることを示そう.

$vw$  の共役  $\overline{vw}$  は  $vw$  の積 (3.8) から

$$\overline{vw} = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - i(x_2y_3 - x_3y_2) - j(x_3y_1 - x_1y_3) - k(x_1y_2 - x_2y_1)$$

となる.  $vw$  の実部  $-(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$  は

$$x_i \longleftrightarrow y_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

の同時入れ替えに対して対称で符号を変えないが,  $vw$  の虚部  $i(x_2y_3 - x_3y_2) + j(x_3y_1 - x_1y_3) + k(x_1y_2 - x_2y_1)$  は

$$x_i \longleftrightarrow y_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

の同時入れ替えに対して反対称で符号を変える.

したがって,  $\overline{vw}$  の虚部は  $\bar{w}\bar{v}$  に等しいであろう. 実際に  $\bar{w}\bar{v}$  を求めると

$$\begin{aligned} \bar{w}\bar{v} &= [-(iy_1 + jy_2 + ky_3)][-(ix_1 + jx_2 + kx_3)] \\ &= vw \\ &= -(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3) + i(y_2x_3 - y_3x_2) - j(y_3x_1 - y_1x_3) - k(y_1x_2 - y_2x_1) \\ &= -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - i(x_2y_3 - x_3y_2) - j(x_3y_1 - x_1y_3) - k(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= \overline{vw} \end{aligned}$$

したがって,  $\overline{vw} = \bar{w}\bar{v}$  であることが示された.

一般の四元数  $x, y$  は

$$x = x_0 + v$$

$$y = y_0 + w$$

と表されるので、その積は

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + v)(y_0 + w) \\ &= x_0y_0 + x_0w + y_0v + vw \end{aligned}$$

であるから、 $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$  であることを用いれば

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= x_0y_0 + x_0\bar{w} + y_0\bar{v} + \bar{v}\bar{w} \\ &= x_0y_0 + x_0\bar{w} + y_0\bar{v} + \bar{w}\bar{v} \\ &= (y_0 + \bar{w})(x_0 + \bar{v}) \\ &= \bar{y}\bar{x} \end{aligned}$$

となる。ただし、ここで

$$\bar{x} = \overline{x_0 + v} = x_0 + \bar{v}$$

$$\bar{y} = \overline{y_0 + w} = y_0 + \bar{w}$$

であることを用いた。

(2012.6.18)

## 参考文献

- [1] ポントリヤ - ギン, 「数概念の拡張」( 森北出版, 2002 ) の四元数の記号にしたがった .
- [2] 矢野 忠, 四元数の発見へ, 数学・物理通信 第 1 巻, 第 11 号 (2011.12) 16-2
- [3] W. R. Hamilton, Phil. Mag. 3rd series 25 (1844) 489-495
- [4] J. B. Kuipers, “ Quaternions and Rotation Sequences ” (Princeton University Press, 2002) 113-118
- [5] <http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/quaternion/> の Joh , 四元数の例題
- [6] 遠山 啓 編, 「現代数学教育事典」( 明治図書出版, 1965 ) 90-91

## 編集後記

2012年6月である。梅雨のシーズンに入ったので、やはりじめじめとしてきた。数学・物理通信2巻2号を発行する。

このミニ・サキュラーはお陰で、今回も結構投稿があって喜ばしい。中西先生と世戸さんの論文はこの号には編集上の都合で載せられないので、今月中または来月早々にも3号として発行したい。

編集者としては発行月現在で、手元にもっている原稿のストックを残さないことを原則に考えているが、それも投稿論文の数によるので、いまより投稿者が増えたりしたら、この原則をまもることができなくなるかもしれない。

編集後記は新関さんと交替で書くつもりであったが、なかなか時間的な余裕がないので、私が今回は書いた。二人の共同編集であるので、できるかぎり編集後記を新関さんにもお願いをするつもりである。（矢野 忠）