

数学・物理通信

2巻4号 2012年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2012年9月6日

目次

双曲線正弦関数の逆数を含む級数の総和	3
1.1 動機	3
1.2 楕円関数	4
1.3 級数和の公式の証明	6
1.4 いろいろな級数和の公式	7
1.5 級数間の恒等式の証明	10
1.6 おわりに	13
幾何学の起源と語源	15
2.1 幾何学の語源	15
2.1.1 底本は	15
2.1.2 幾何とは	15
2.1.3 『幾何原本』とは	16
2.1.4 我が国では	16
2.2 幾何学の起源	16
バビロニアの円周率	19
3.1 はじめに	19
3.2 現代の知識では	19
3.3 室井の推論	20
3.4 おわりに	21
バビロニアの円周率（補遺）	22
4.1 はじめに	22
4.2 円周率の決定	22
4.3 二つの公式の同等性	23
4.4 おわりに	24
編集後記	26

Contents

1. Noboru NAKANISHI: Sums of the Series Involving “ cosech ”
2. Tohru MUTO: The Origin of the Geometry and the Word of 幾何学
3. Tohru MUTO: The Value of π in Ancient Babylonia
4. Tadashi YANO: The Value of π in Ancient Babylonia (Appendix)
5. Tadashi YANO: Editorial Comments

双曲線正弦関数の逆数を含む級数の総和

Sums of the Series Involving “ cosech ”

中西 襄¹
Noboru NAKANISHI²

1.1 動機

三角関数の正弦関数 $\sin$ や余弦関数 $\cos$ の級数は、フーリエ級数としてよく知られている。しかし、その逆数の cosec や $\sec$ の級数はあまり考えられない。それは無限個の特異点が現れて、たちがよくないからであろう。だが、双曲線関数の $\sinh$ や $\cosh$ の逆数ならば、そんな困難はない。以下に述べるようなきっかけから、そのような級数について少し考察してみた。

最近、双曲線正弦関数 $\sinh$ の逆数を含む級数の総和が、きれいな形で求まる場合があることを知った。それは次のような公式である。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \sinh[(2n-1)\pi]} = \frac{1}{8} \log 2 \quad (1.1.1)$$

第 1.3 節で述べる巧妙な計算により、左辺は

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{(1+i)\pi n}}{1 - e^{-\pi n}} \quad (1.1.2)$$

のように変形できることがわかった。これはデデキントのエータ関数の特殊値を使って書ける。それを代入すれば、見事に右辺の結果を導くことができた。

これと直接関係ないが、森口・宇田川・一松著「数学公式 II」[1] の p.69 に、次のような面白い公式が載っていた。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sinh(n\pi)} \cdot \frac{1}{x^4 + n^4} = \frac{\pi}{2x^2} \left(\frac{1}{2\pi^2 x^2} - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2}\pi x) - \cos(\sqrt{2}\pi x)} \right). \quad (1.1.3)$$

x^4 を乗じて $x \rightarrow \infty$ とすると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sinh(n\pi)} = \frac{1}{4\pi} = 0.079577... \quad (1.1.4)$$

を得る。また $x = 0$ の近傍での展開を考えると、

$$\cosh(\sqrt{2}\pi x) - \cos(\sqrt{2}\pi x) = 2\pi^2 x^2 \left(1 + \frac{2^3 \pi^4 x^4}{6!} + \frac{2^5 \pi^8 x^8}{10!} + \cdots \right) \quad (1.1.5)$$

だから、右辺は

$$\frac{1}{4\pi x^4} \left[\frac{2^3}{6!} \pi^4 x^4 + \left(\frac{2^5}{10!} - \frac{2^6}{(6!)^2} \right) \pi^8 x^8 + \cdots \right] = \frac{\pi^3}{360} \left(1 - \frac{13\pi^4}{1260} x^4 + \cdots \right). \quad (1.1.6)$$

¹ 京都大学名誉教授; nbr-nak@trio.plala.or.jp

² Professor Emeritus, Kyoto University

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sinh(n\pi)} = \frac{\pi^3}{360} = 0.0861283..., \quad (1.1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^7 \sinh(n\pi)} = \frac{13\pi^7}{453600} = 0.0865592... \quad (1.1.8)$$

などが導かれる．

これらの級数の総和は，数値的にはほとんど第 1 項からくる．実際， $n = 1$ の項の値は $1/\sinh \pi = 0.0865895...$ である．なお，(1.1.1) については， $(1/8) \log 2 = 0.08664339...$ である．

同じ本 [1] の p.82 に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sinh(nx)} = \frac{\pi^2 - 2x}{4x^2} \quad (x > 0) \quad (1.1.9)$$

という公式が載っているが，これは誤りだ．実際， $x \rightarrow \infty$ での漸近形は，左辺が $2e^{-x}$ ，右辺が $-1/(2x)$ で一致しない．正しい公式は第 1.4 節で述べる．

1.2 楕円関数

この節は覚書なので，ざっと眺めて必要になった時に参照していただければよい．後で利用する楕円関数の定義と性質をまとめておく（岩波の「数学辞典」の末尾の公式集参照）．

第 1 種および第 2 種完全楕円積分はそれぞれ，

$$K(k) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (1.2.1)$$

$$E(k) \equiv \int_0^1 dt \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \quad (1.2.2)$$

である．ここに， k は母数といい， $0 \leq k \leq 1$ である． $k' \equiv \sqrt{1-k^2}$ を補母数という．しばしば $K(k) \equiv K$ ， $K(k') \equiv K'$ と略記する．なお， $K(k)$ と $E(k)$ の間には，ルジャンドルの関係 $K'E(k) + KE(k') - KK' = \pi/2$ が知られている．

4 種の楕円テータ関数が次のように定義される：

$$\begin{aligned} \vartheta_0(u, \tau) &\equiv 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi u), \\ \vartheta_1(u, \tau) &\equiv 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin[(2n+1)\pi u], \\ \vartheta_2(u, \tau) &\equiv 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos[(2n+1)\pi u], \\ \vartheta_3(u, \tau) &\equiv 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n\pi u). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

ただし, $\tau \equiv iK'/K$, $q \equiv e^{i\pi\tau} = e^{-\pi K'/K}$ である. これらはまた, 無限乗積にも表示できる:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_0(u, \tau) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} [1 - 2q^{2n-1} \cos(2\pi u) + q^{4n-2}], \\
 \vartheta_1(u, \tau) &= 2Q_0 q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} [1 - 2q^{2n} \cos(2\pi u) + q^{4n}], \\
 \vartheta_2(u, \tau) &= 2Q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} [1 + 2q^{2n} \cos(2\pi u) + q^{4n}], \\
 \vartheta_3(u, \tau) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} [1 + 2q^{2n-1} \cos(2\pi u) + q^{4n-2}].
 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

ただし, $Q_0 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$ とする. $u = 0$ のときの値を, $\vartheta_1(0, \tau) = 0$ を除き, それぞれたんに $\vartheta_0, \vartheta_2, \vartheta_3$ と略記すると,

$$\begin{aligned}
 \vartheta_0 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2, \\
 \vartheta_2 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2, \\
 \vartheta_3 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

となる. 母数 k などは, これらによって表示できる:

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}, \quad K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2. \tag{1.2.6}$$

したがって,

$$kK = \frac{\pi}{2} \vartheta_2^2, \quad k'K = \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2 \tag{1.2.7}$$

である.

ヤコービの楕円関数はテータ関数によって次のように表示される:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}(u, k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u/2K, \tau)}{\vartheta_0(u/2K, \tau)}, \\
 \operatorname{cn}(u, k) &\equiv \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2(u/2K, \tau)}{\vartheta_0(u/2K, \tau)}, \\
 \operatorname{dn}(u, k) &\equiv \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u/2K, \tau)}{\vartheta_0(u/2K, \tau)}.
 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$\operatorname{sn} u$ は第 1 種楕円積分 ((1.2.1) の積分の上限 1 のところを変数としたもの) の逆関数であり, 他の 2 種は $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$, $\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$ により, それから定義される. $u = 0$ および $u = K$ における値は,

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1; \quad \operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{dn} K = k' \tag{1.2.9}$$

である. また導関数は,

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \tag{1.2.10}$$

与えられる.

1.3 級数和の公式の証明

話を元に戻そう．他の話のついでにたまたま世戸憲治氏に (1.1.1) の証明を見せたところ，彼から (1.1.1) より一般的な公式が，「新数学公式集 I 初等関数」 [2] の p.721 に載っていますということで，公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \sinh[(2n-1)(K'/K)\pi]} = -\frac{1}{8} \log(1-k^2) \quad (1.3.1)$$

の存在を知った．特に $k = 1/\sqrt{2}$ ならば $K' = K$ なので，(1.1.1) に帰着するわけである．級数の中に完全楕円積分が出てくるなんて変な公式だとは思ったが，(1.1.1) の証明法をこの場合に拡張するのは直截的であった．

[証明] (1.3.1) の左辺の級数を S とおくと，

$$\begin{aligned} S &\equiv \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n \sinh[n(K'/K)\pi]} \\ &= 2 \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{e^{-n(K'/K)\pi}}{n(1 - e^{-2n(K'/K)\pi})} \\ &= 2 \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1, \text{odd}}^{\infty} e^{-mn(K'/K)\pi} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

ここまではただ展開しただけだが，ここからの変形が実にうまくいくのである． $mn = N$ とおけば， $1/n = m/N$ ． N の約数 (1 および N を含む) の総和 $\sum_{m|N} m$ を $\sigma(N)$ と書くと，

$$\begin{aligned} S &= 2 \sum_{N=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{N} \sigma(N) e^{-N(K'/K)\pi} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sigma(N) [(e^{-(K'/K)\pi})^N - (-e^{-(K'/K)\pi})^N] \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sigma(N) \int_{-e^{-(K'/K)\pi}}^{e^{-(K'/K)\pi}} dx x^{N-1}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$\sigma(N)$ の母関数は，右辺を展開してみればわかるように，

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sigma(N) x^N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \quad (1.3.4)$$

で与えられるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-e^{-(K'/K)\pi}}^{e^{-(K'/K)\pi}} dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\log(1-x^n) \right]_{-e^{-(K'/K)\pi}}^{e^{-(K'/K)\pi}} \\ &= \log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-(K'/K)\pi n}}{1 - e^{-(K'/K)\pi n}}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

さて，ここでエータ関数に帰着させるよりも，完全楕円積分があることから，テータ関数で表した方がよいだろうと見当がつく． n が偶数の因子は分母分子でキャンセルするので， n を奇数 $2m-1$ に限ってよい．すなわち

$$S = \log \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-(K'/K)\pi(2m-1)}}{1 - e^{-(K'/K)\pi(2m-1)}} = \log \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2m-1}}{1 - q^{2m-1}}. \quad (1.3.6)$$

ただし, $q = e^{-(K'/K)\pi}$ である. (1.2.5) と (1.2.6) から,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n-1})^2}{(1 + q^{2n-1})^2} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \sqrt{k'} \quad (1.3.7)$$

であるから,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}} = k'^{-1/4} = (1 - k^2)^{-1/8} \quad (1.3.8)$$

となり, (1.3.1) の左辺は

$$S = \log k'^{-1/4} = -\frac{1}{8} \log(1 - k^2) \quad (1.3.9)$$

となる. $\square$

1.4 いろいろな級数和の公式

世戸氏に, その公式集に似た公式はないか問い合わせたところ, 同書 [2] の p.721-p.723 にいくつかのそのような公式が載っているとのことであった. 双曲線正弦関数の逆数か双曲線余弦関数の逆数を含む級数で (1.3.1) 以外のものは, 次のようなものである³.

$x \equiv (K'/K)\pi$ と書くとき, 双曲線正弦関数の逆数の級数は,

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sinh[(n - \frac{1}{2})x]} = \frac{k}{\pi} K, \\ S_5 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sinh(nx)} = \frac{1}{\pi^2} K[K - E(k)], \\ S_6 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{\sinh(nx)} = \frac{1}{\pi^2} KE(k) - \frac{1 - k^2}{\pi^2} K^2. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

S_5 の式が (1.1.9) の正しい式である. また, S_6 で $k = 1/\sqrt{2} = k'$ とおくと, $K = K'$ となるので $x = \pi$ であるが, $E(k') = E(k)$ により, ルジャンドルの関係を使うと $2KE - K^2 = \pi/2$ となって, (1.1.4) が導かれる.

双曲線余弦関数の逆数の級数は,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_3 &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(nx + a)} = \frac{2}{\pi} K \operatorname{dn} \left[\frac{2a}{\pi} K' \right], \\ S_3 &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(nx)} = \frac{2}{\pi} K, \\ S_4 &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh(nx)} = \frac{2\sqrt{1 - k^2}}{\pi} K = \frac{2}{\pi} k' K, \\ S_2 &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh[(n - \frac{1}{2})x]} = \frac{2k}{\pi} K. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

ただし, $\tilde{S}_3$ の右辺の分母は本 [2] では x となっていたが, π に訂正した. また S_4 の右辺の分子には k^4 があったが, k^2 に訂正した.

³ cosech と sech はそれぞれ sinh と cosh の逆数で書き換えた. また後の便宜のため, S_k のような名前をつけた.

このままではわかりにくいので，変数 $q = e^{-x}$ を用いて書き換える．(1.2.7) と (1.2.5) により，

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} = \frac{kK}{2\pi} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \right)^2, \\
 \frac{1}{4}S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} = \frac{kK}{2\pi} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \right)^2, \\
 \frac{1}{4}(S_3 - 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} = \frac{K}{2\pi} - \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^2, \\
 \frac{1}{4}(S_4 - 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 + q^{2n}} = \frac{k'K}{2\pi} - \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

に帰着する． $\frac{1}{2}S_1$ と $\frac{1}{4}S_2$ (左辺) は，展開すればともに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{2nm-n-m+\frac{1}{2}} \tag{1.4.4}$$

となるので，相等しい．また， $(-1)^n = (-1)^{n^2}$ であるから， S_3 の式と S_4 の式は q の符号の違いだけで，等価である．

S_5 と S_6 の式の右辺は $E(k)$ を含むが，両者の和はそれを含まない．

$$\frac{1}{2}(S_5 + S_6) = \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{n}{\sinh(nx)} = \frac{k^2}{\pi^2} K^2 = \frac{1}{4} \vartheta_2^4. \tag{1.4.5}$$

q で書くと，

$$\sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \right)^4 \tag{1.4.6}$$

となる．

ところで，(1.4.1) や (1.4.2) のような公式はいったいどのようにして見つけられたのだろうか．ひとつ考えられるのは，楕円関数のフーリエ展開である．フーリエ展開係数ならば，積分計算をすることによって求まるからである．

「数学大公式集」 [3] の p.911-p.912 にヤコービ楕円関数およびそれを含む関数のフーリエ級数展開公式が 22 個も与えられている．たとえば，

$$\begin{aligned}
 \text{sn}(u, k) &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2K}, \\
 \text{cn}(u, k) &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2K}, \\
 \text{dn}(u, k) &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{K}.
 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

$u = 0$ または $u = K$ を代入すると, (1.2.9) により次のような式が得られる:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} &= \frac{kK}{2\pi}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} &= \frac{kK}{2\pi}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} &= \frac{K}{2\pi} - \frac{1}{4}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 + q^{2n}} &= \frac{k'K}{2\pi} - \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

(1.4.3) と比較すると, これらは上から順にそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 の式に他ならないことがわかる.

次に, (1.2.10) を用い導関数について同様なことを行くと, (1.2.9) により,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} &= \frac{kK^2}{\pi^2} = \frac{1}{4} \vartheta_2^2 \vartheta_3^2, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1) q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} &= \frac{kk'K^2}{\pi^2} = \frac{1}{4} \vartheta_2^2 \vartheta_0^2
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

が得られる. 双曲線関数で書き直すと,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sinh[(n-\frac{1}{2})(K'/K)\pi]} &= \frac{2kK^2}{\pi^2}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)}{\cosh[(n-\frac{1}{2})(K'/K)\pi]} &= \frac{2kk'K^2}{\pi^2}
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

となる.

残りの展開公式について, $u = 0$ または $u = K$ において新しいのノントリヴィアルな関係式が得られたのは, ちょっとフーリエ級数とは呼べない次のものだけであった:

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sn}(u, k) &= \log \frac{2K}{\pi} + \log \sin \frac{\pi u}{2K} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^n)} \sin^2 \frac{n\pi u}{2K}, \\
\log \operatorname{cn}(u, k) &= \log \cos \frac{\pi u}{2K} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+(-1)^n q^n)} \sin^2 \frac{n\pi u}{2K}, \\
\log \operatorname{dn}(u, k) &= -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)(1-q^{2(2n-1)})} \sin^2 \frac{(2n-1)\pi u}{2K}
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

において $u = K$ もしくは $u \rightarrow K$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^n)} &= \frac{1}{4} \log \frac{2K}{\pi}, \\
\sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^n)} &= -\frac{1}{4} \log \frac{2k'K}{\pi}, \\
\sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} &= -\frac{1}{8} \log k'
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

を得る. 最下行の式がまさしく最初に考察した公式 (1.3.1) に他ならない. これはその上の 2 式の相加平均になっている.

1.5 級数間の恒等式の証明

前節の考察で, q の級数の間にいるんな恒等式が成り立つはずであることがわかった. それらをすべて冪級数の形で書くと, これらの恒等式はじつは数論の問題なのである.

1) S_1 と S_2 の公式

まず, (1.4.3) の S_1 と S_2 の式について見てみよう. 少し書き換えて,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n+1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right)^2 \quad (1.5.1)$$

とする. (1.4.4) で見たように, 左辺と中辺は等しいのだから, それらの相加平均とも等しい. すなわち,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^2)^m}{1 - (q^2)^{4m+1}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^2)^{3m+2}}{1 - (q^2)^{4m+3}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^2 \quad (1.5.2)$$

という恒等式が成立するはずである.

[証明] 左辺の各項を q^2 の冪級数に展開すると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^{4mn+m+n} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^{4mn+3m+3n+2} \quad (1.5.3)$$

となる. この第1項を $\sum_{N=0}^{\infty} a_N (q^2)^N$, 第2項を $-\sum_{N=0}^{\infty} b_N (q^2)^N$, (1.5.2) の右辺を $\sum_{N=0}^{\infty} c_N (q^2)^N$ とするとき, すべての N について $a_N - b_N = c_N$ を証明すればよい.

非負整数 m, n につき, a_N は $N = 4mn + m + n$ と書ける (m, n) の順列の数, b_N は $N = 4mn + 3m + 3n + 2$ と書ける (m, n) の順列の数, c_N は $N = \frac{1}{2}m(m+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$ と書ける (m, n) の順列の数である. これを次のように言い換える. a_N は $4N+1 = (4m+1)(4n+1)$ と書ける (m, n) の順列の数, b_N は $4N+1 = (4m+3)(4n+3)$ と書ける (m, n) の順列の数, c_N は $4N+1 = (m+n+1)^2 + (m-n)^2$ と書ける (m, n) の順列の数である.

様子を見るために, 30 までの N について a_N, b_N, c_N を具体的に勘定してみると, 次のようになる.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_N	1	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
b_N	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0
c_N	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2
$4N+1$	1	5	3^2	13	17	$3 \cdot 7$	5^2	29	$3 \cdot 11$	37	41

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_N	4	2	2	2	2	4	2	2	2	3
b_N	2	1	0	2	0	0	2	0	2	2
c_N	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1
$4N+1$	$3^2 \cdot 5$	7^2	53	$3 \cdot 19$	61	$5 \cdot 13$	$3 \cdot 23$	73	$7 \cdot 11$	3^4

N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_N	4	2	2	2	2	4	2	2	4	2
b_N	0	0	2	0	0	4	0	0	2	1
c_N	4	2	0	2	2	0	2	2	2	1
$4N+1$	$5 \cdot 17$	89	$3 \cdot 31$	97	101	$3 \cdot 5 \cdot 7$	109	113	$3^2 \cdot 13$	11^2

簡単のため, $4k+1$ 型の奇数を (+) 型, $4k+3$ 型の奇数を (-) 型と呼ぶことにする. もちろん, (+) 型と (+) 型の積および (-) 型と (-) 型の積は (+) 型, (+) 型と (-) 型の積は (-) 型である. したがって, $4N+1$ を 2 つの因子の積に分解するとき, 両因子とも (+) 型か, 両因子とも (-) 型かのいずれかである. 前者は a_N に寄与, 後者は b_N に寄与する.

まず, $4N+1$ の素因数分解 $4N+1 = \prod_{j=1}^l q_j^{\nu_j}$ が (-) 型の素数 q_j のみであるときを考え, $4N+1$ の各約数 d をとり, 順列 $(d, (4N+1)/d)$ を調べる. 約数 d が含む q_j 因子の個数を $(\nu_d)_j (\leq \nu_j)$ としよう. このとき明らかに, $\sum_{j=1}^l (\nu_d)_j$ が偶数ならば d は (+) 型, 奇数ならば d は (-) 型である. すなわち, 順列 $(d, (4N+1)/d)$ は, $(-1)^{\sum_{j=1}^l (\nu_d)_j}$ が +1 ならば a_N に寄与, -1 ならば b_N に寄与する. 両者は完全に交互に現れるので, 総数が偶数ならば両者の個数は相等しく, 奇数ならば前者が後者より 1 個だけ多い. 総数 $\prod_{j=1}^l (\nu_j + 1)$ が奇数になるのは ν_j がすべて偶数の場合に限る. すなわち ν_j がすべて偶数ならば $a_N - b_N = 1$, それ以外では $a_N - b_N = 0$ となる.

一般の場合, $4N+1 = \prod_{j=1}^k p_j^{\mu_j} \cdot \prod_{j=1}^l q_j^{\nu_j}$ (p_j は (+) 型素数, q_j は (-) 型素数) とするとき, どちらに寄与するかは, (+) 型素因数の個数に依存しない, つまり a_N, b_N への寄与は, その総数 $\prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$ が全体にかかるだけである. したがって, 上の結果より, ν_j がすべて偶数である場合は, $a_N - b_N = \prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$, それ以外は $a_N - b_N = 0$ である.

c_N の計算は次の定理を用いる.

ヤコービの二平方定理 (Wikipedia「二個の平方数の和」より)⁴

正の整数 M を 2 個の整数の平方の和 $m^2 + n^2$ で書き表す仕方の順列の数は

$$r(M) = 4 \sum_{d|M, \text{odd}} (-1)^{(d-1)/2} \quad (1.5.4)$$

で与えられる. ここに, 和は M を整除するすべての奇数 d にわたる.

係数 4 は, m, n を非負とすれば不要である. ただしこの表し方をするときには, m, n の一方が 0 の場合は 1 個の自然数による表示なので, 順列による因子 2 はないものとする ($-0 = 0$ だから, 負数を許すとこのことが自動的に考慮されるのである.).

$M = 4N+1$ として, 上の素因数分解を適用すれば, $(-1)^{(d-1)/2}$ は d に含まれる (-) 型の素因数の個数の合計が偶数ならば +1, 奇数ならば -1 になる. (+) 型の素因数の個数は符号に無関係だから, その総数 $\prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$ は共通因子として取り出せる. したがって, それをすべて足し合わせたものは, $4N+1$ に含まれる (-) 型の素因数の個数 ν_j がすべて偶数のときは $\prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$ に等しく, それ以外の場合は 0 である. ゆえにヤコービの二平方定理により, つねに $c_N = a_N - b_N$ であることがわかる. $\square$

2) S_3 と S_4 の公式

次に (1.4.3) の S_3 の恒等式を証明しておこう.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^2. \quad (1.5.5)$$

[証明] 各項を q について幕展開して, 左辺の q^N の係数を a_N , 右辺第 1 項のそれを b_N , 右辺第 2 項のそれを c_N とするとき, $a_N = b_N + c_N$ を示せばよい. 左辺の幕展開は,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{n(2m-1)} = \sum_{N=1}^{\infty} \left[\sum_{M|N} (-1)^{(M-1)/2} \right] q^N \quad (1.5.6)$$

⁴証明は Hardy-Wright の数論の本 [4] の Theorem 278(p.314) 参照. 証明の方針は, $m^2 + n^2 = (m+in)(m-in)$ だから, ガウス整数での約数の数を勘定することである.

であるから, a_N は (+) 型の奇数の M の個数から, (-) 型の奇数の M の個数を引いたものに等しい. すなわち, $N = 2^\lambda \prod_{j=1}^k p_j^{\mu_j} \cdot \prod_{j=1}^l q_j^{\nu_j}$ (p_j は (+) 型素数, q_j は (-) 型素数) とすると, 前の証明の議論がそのまま使えて, ν_j がすべて偶数のとき $a_N = \prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$ で, それ以外では $a_N = 0$ となる.

b_N は, λ 及びすべての ν_j が偶数のときに限り 1 で, それ以外では 0 である.

c_N は, ヤコービの二平方定理により, 前と同様にして ν_j がすべて偶数のとき $a_N = \prod_{j=1}^k (\mu_j + 1)$ で, それ以外では $a_N = 0$ となると考えられるが, 前と異なり (1.5.5) での和が $n \geq 1$ であって, 0 の平方の場合は除外しなければならないから, λ が偶数の場合は, これより 1 を減じなければならない. λ が奇数の場合は, 0 を使わず同じ平方数の和になるので許され, そのままでよい.

以上から, 確かにつねに $a_N = b_N + c_N$ が成立していることがわかる. $\square$

なお, 級数を元の S_3 の

$$1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^2 \quad (1.5.7)$$

の形に書いておけば, ヤコービの二平方定理がそのまま使える.

3) $S_5 + S_6$ の公式

分子に因子 n がある級数の場合を考える.

(1.4.6) を証明しよう. その前に少し書き換えておく:

$$\sum_{n=0, m=0}^{\infty} (2n+1)q^{(2n+1)(2m+1)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4} \right)^4. \quad (1.5.8)$$

[証明] (1.5.8) の左辺の q^N (N は奇数) の係数を A_N , 右辺のそれを B_N とする. A_N は N の約数の総和 $\sigma(N)$ に等しい.

B_N は $4N$ を 4 個の奇数の平方に表す仕方の順列の数である. 理解を助けるために少し具体的な数字を書いておこう.

$N = 1$: $A_1 = 1$; $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_1 = 1$.

$N = 3$: $A_3 = 1 + 3 = 4$; $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_3 = 4C_1 = 4$.

$N = 5$: $A_5 = 1 + 5 = 6$; $20 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_5 = 4C_2 = 6$.

$N = 7$: $A_7 = 1 + 7 = 8$; $28 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_7 = 4 + 4 = 8$.

$N = 9$: $A_9 = 1 + 3 + 9 = 13$; $36 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_9 = 1 + 12 = 13$.

$N = 11$: $A_{11} = 1 + 11 = 12$; $44 = 5^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2$, ゆえに $B_{11} = 12$.

$N = 13$: $A_{13} = 1 + 13 = 14$; $52 = 7^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2$, ゆえに $B_{13} = 4 + 4 + 6 = 14$.

B_N を一般的に求めるために, 次の定理を用いる.

ヤコービの四平方定理 (Wikipedia「四平方定理」より)⁵

⁵証明は前掲 Hardy-Wright の本 [4] の Theorem 386(p.415) 参照. 証明の方針は, まず二平方定理を級数形

$$1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{1 - x^{2n-1}} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} \right)^2$$

で表し, この左辺の 2 乗を巧みな変形により,

$$1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)x^{2m-1}}{1 - x^{2m-1}} + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-2)x^{4m-2}}{1 - x^{4m-2}}$$

にもっていくのである.

正の整数 M を 4 個の整数 (0 および負数を含む) の平方の和で表す仕方の順列の数は,

$$r_4(M) = 8\sigma_{(4)}(M)$$

で与えられる. ここに, $\sigma_{(4)}(M)$ は, 4 の倍数でないような M の約数の総和を表す.

さて, N は奇数だから $\sigma_{(4)}(4N) = \sigma(2N)$ である. また, $2N$ の約数の集合は, N の約数の集合とそれらの 2 倍の数の集合との単純合併だから, $\sigma(2N) = 3\sigma(N)$ である. したがって, ヤコービの四平方定理により, $r_4(4N) = 24\sigma(N)$ となる. 他方, $4N$ を 4 つの平方数 (0 を含む) の和で表したとき, 4 個とも奇数であるか, 4 個とも偶数であるかのいずれかである. 4 個とも偶数の場合は両辺を 4 で割ればわかるように, その表し方の順列の数は, 再びヤコービの四平方定理により, $r_4(N) = 8\sigma_{(4)}(N) = 8\sigma(N)$ である. また, 奇数は 0 になることはないので, 4 個の (正負) 奇数での表し方の数は $2^4 B_N$ に等しい. ゆえに $24\sigma(N) = 8\sigma(N) + 16B_N$ である. したがって, $B_N = \sigma(N) = A_N$ を得る. $\square$

4) (1.4.9) の公式

(1.4.9) の 2 つの式は, q の符号を変えただけのものなので, 等価である. そこで第 1 の恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \right]^2 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right]^2 \quad (1.5.9)$$

のみを考える.

[証明] 左辺の分母を展開すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)(2m+1)} \quad (1.5.10)$$

となる. これを $\sum_{N=0}^{\infty} A_N q^{N/2}$ のように書くと, $N = (2n+1)(2m+1)$ ($n \geq 0, m \geq 0$) であるから, $A_N = \sigma(N)$ である.

右辺の方は次のように書き直せる:

$$\frac{1}{4} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \right]^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right]^2. \quad (1.5.11)$$

それを $\sum_{N=0}^{\infty} B_N q^{N/2}$ のように書くと, $2N = (2n_1+1)^2 + (2n_2+1)^2 + (2n_3)^2 + (2n_4)^2$ のように 2 つの奇数の平方と 2 つの偶数の平方の和で表される順列の数を勘定すればよい. したがってヤコービの四平方定理により, ${}_4C_2 B_N = \frac{1}{4} r_4(2N)$ となる. B_N に ${}_4C_2$ を乗じたのは, (1.5.11) の 4 つの因子の順序を考慮するためである. N は奇数なので, $r_4(2N) = 8\sigma_{(4)}(2N) = 8\sigma(2N) = 24\sigma(N)$ となる. これを代入すれば, $B_N = \sigma(N) = A_N$ を得る. $\square$

1.6 おわりに

(1.1.3) や (1.4.7), (1.4.11) などの証明はしていないが, まあいいだろう. すべてを証明するのが目的ではないのだから. (1.1.3) だけは, どうも楕円関数と結びつきそうにない.

公式集というものは, ただ眺めているだけでは極めて無味乾燥なものだが, こうして $\sinh$ の逆数の級数という観点から横断的に眺めてみると, いろいろと面白い関連性が見えてくるものだ. 公式集の編纂者は, 公式を原著から写してくるだけで, いちいちチェックしているわけではないだろうから, こうして公式間の関連性を見ていくと, そういう写し間違いもわかってくる. しかし, 公式集のミスはユーザーにとって極めて迷惑な話だ.

ところで全く余談だが，かつて新聞 [5] にも「200 年ぶりに見つかったミス」として公式集のミスが報道されたことがあった．それは

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log |\log x|} = 0$$

という式だが，全くの誤りなのに，チェックされずに孫引きが繰り返されたいい．つまり誰もおかしいとは思わずに丸写ししていたわけだ．コンピュータでの計算結果は， $-0.15447\dots$ となるということである！「数学大公式集」[3] の p.574 にも，それを変数変換した形

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{\log x} = 0$$

が載っている．しかしこのように簡明な定積分⁶なのだから，なんらかの既知の定数を使って表せないものであろうか．

参考文献

- [1] 森口繁一・宇田川 久・一松信著「数学公式 II — 級数・フーリエ解析—」(岩波全書)
- [2] 大槻義彦監修，室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」(丸善，1991) [原著はロシア語]
- [3] 大槻義彦訳「数学大公式集」(丸善，1983) [原著はロシア語]
- [4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* (Sixth Edition, Oxford University Press, 2008)
- [5] 朝日新聞 (1988 年 3 月 23 日)

⁶ただし $x = 1$ ではコーシーの主値をとる必要があるのだが，公式集にその注意が記されていない．

幾何学の起源と語源

The Origin of the Geometry and the Word of 幾何学

武藤 徹⁷

Tohru MUTO⁸

2.1 幾何学の語源

光生館刊の『新華字典』には、几何の項があり、「幾何学、点・線・面・体の性質・関係および計算方法を研究する学問」と書かれています。今現在、日本でも、中国でも、幾何学は、図形と空間とを研究対象とする数学を指しています。

この幾何学の語源が、徐光啓 (1562 ~ 1633) がキリスト教の宣教師マテオ・リッチ (利瑪竇 (リマトウ)) の口訳を書写した『幾何原本』にあることは、よく知られています。しかし、そのいきさつは、あまり知られていません。

2.1.1 底本は

『幾何原本』の底本は、ドイツの天文学者で数学者であったクリストファー・クラヴィウス (Christopher Clavius 1538 ~ 1612) の "Euclidis Elementorum libri XV" (1574) だとされています。ほかに、Commentaria In Euclidis Elementa Geometria (1574年初版) という説もあります。これらは、アレクサンドレイアにあったムセイオンの研究者エウクレイデスが著した『ストイケイア』のラテン語訳です⁹。詳しい注釈がつけられています。全部で13章あり、はじめの6章は平面図形を扱っていますが、あとには数論や比例論、空間図形も、扱われています。

2.1.2 幾何とは

Aleni 著『西学凡』(年代不明、天啓5年 1625 跋の写本があります。徐光啓がまだ生きていた時代です)には、「幾何如尺寸一十等」と書かれているといえます。現代中国の「国立中央大学科学教育中心」のホームページにも、線の長短、角の大小、数の多寡、図形の多寡などを幾何という、と書かれています。ここでは「幾何」は magnitude の対訳であるとされています。

『幾何原本』第5巻の定義に、「一幾何有一幾何相与為比例、即此幾何必有彼幾何相与為比例、而兩比例等。一幾何有一幾何相与為比例、即必有彼幾何与此幾何為比例、而兩比例等(此比例同理、省曰比例等)」という注があります。

⁷ 数学思想家; mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

⁸ Historian of Mathematical Thought

⁹ ストイケイアは、アルファベットを表すギリシャ語ストイケイオンの複数形です。

この幾何は、量を表しています。1つの量がもう1つの量と比例する場合には、2つの比例が相等しくなるように、この量と比例するあの量が、必ず存在する。また、1つの量がもう1つの量と比例する場合には、2つの比例が相等しくなるように、あの量と比例するこの量が、必ず存在する、ということです。 $a:b$ が与えられていれば、ある量 c に対して、 $a:b=c:d$ となる d が必ず存在し、 $a:b=e:c$ となる e も存在する、とでもいうのでしょうか。

2.1.3 『幾何原本』とは

『幾何原本』にはいくつかの写本がありますが、そのひとつの前書きには、「《幾何原本》者、度数之宗、所以窮方円平直之情、盡規矩準繩之用也。」と書かれています。この前書きには利先生¹⁰が登場するので、徐光啓自身の書き下ろしようです。

度は、実在する長さ、数はその測定値です。宗は、源流です。「幾何」が実在する長さや数とであることにおいては、符合しています。『幾何原本』という題名は、日本語で言うと数量の大本（おおもと）となります。「数学の基礎」といえるでしょう。それで、徐光啓は《幾何原本》は度数之宗と表したのでした。徐光啓は、Elementorumを訳して『幾何原本』としたのだと思われます。クラヴィウスの“Euclidis Elementorum”は13章すべてを含みますが、『幾何原本』は、はじめの6章だけ（の訳）です。それで、徐光啓は「所以窮方円平直之情、盡規矩準繩之用也」と書いたようです。

規はコンパス、矩は物差し、準は水準器、繩は墨縄です。これらを用いて、長方形、円、平面、直線の性情を窮めるといいます。この文章があるために、「幾何」は図形学を表すものと、誤解されたのでした。

幾何は geometria の“geo”の音訳であるという誤った説が普及していますが、幾何は jihe とか giho とか発音されますが、geometria は「日阿黙第垂」と表記されていて、音がまったく異なっています。上海出身の徐光啓が、混同することは考えられません。

『ストイケイア』の後半（部分）は、李善蘭とワイリー（偉烈亜力）が、1856年に同じ『幾何原本』の名で出版しています（その）底本は、パローの英訳本のようなのですが、この訳本は誤植が多いと書いていますから、ギリシャ語版も参照しているようです。その後、図形学を幾何と呼ぶのは不是（正しくない）であるとして、図形学を「形学」と呼び、『形学備旨』（1885年）が出版されています。『漢語大詞典』では、形学の項で、即几何学であるとして、清末民初の啓蒙思想家嚴復（1854～1921）が、「形学」を用いていたことを紹介しています。

2.1.4 我が国では

我が国では図形学は、度学（どがく）、規矩術（きくじゅつ）とよばれていました。大坂東町奉行の与力で陽明学者であった大塩平八郎も、度学を用いています。面白いことに、共和塾が、明治4年（1871）に『幾何小学』を、明治5年（1872）に『度学問題』を、刊行しています。論証図形学を「幾何」、計量図形学を「度学」と使い分けたと思われます。明治6年にデヴィースの訳書『小学幾何用法』が出版されてから、わが国では図形学一般が幾何学と呼ばれるようになりました。今現在、中国では論証図形学を「形幾何」、計量図形学を「数幾何」と呼んで区別しているようです（上掲の国立中央大学科学教育中心ホームページ）。

2.2 幾何学の起源

バビロニアには数学の書物はありますが、問題と解答を書いた粘土板や、数表が、数多く残されています。これらは、書記と呼ばれる役人が書いたものです。書記は、直接、あるいは間接に、徴税に携わったり、建造物の建設に関わっていました。そのために、土地の面積を求めたり、倉庫の容積を求めたりする必要がありました。このような技術を、仮に「計量図形学」と呼んでおきましょう。中国の「数幾何」です。

¹⁰ マテオ・リッチのこと

紀元前 2000 年頃の粘土板に、「長さと幅をかけると面積になる」と書かれているものがあります。

大きな正方形（一辺の長さ a ）から小さな正方形（一辺の長さ b ）を切り取ると、L 字型の図形ができますが、その面積は、幅が 2 つの正方形の辺の長さの差 $a - b$ ，長さが 2 つの正方形の辺の長さの和 $a + b$ となる長方形と同じです。

すなわち，

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

となります。

この時代に、もう三平方の定理が知られていましたから、これを

$$a^2 + b^2 = c^2$$

とあらわすと，

$$a^2 = (c - b)(c + b)$$

がえられます。

$$a = 3, \quad c - b = 1, \quad c + b = 9$$

とすると，

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5$$

がえられます。

$$a = 5, \quad c - b = 1, \quad c + b = 25$$

とすると，

$$a = 5, \quad b = 12, \quad c = 13$$

がえられます。バビロニアの粘土板には、このような三数がいくつも、記録されています。私は、これを直角三数 (rect triple) と呼んでいるのですが、一般にはピュタゴラス 3 数といいます。しかし、ピュタゴラスが生まれたのは、はるか後世のことでした。

スーサ出土の「数学諸表」の中に、円周率を 3.125 としたものがあるといえます。この謎を解く、次のような問題が出土しています。井戸枠のレンガがある。上の幅は $0^\circ 2' 30''$ ，下の幅は $0^\circ 1' 40''$ ，長さは $0^\circ 3' 20''$ である。井戸枠に、何個のレンガが必要か、ということです。仮に 15cm, 10cm, 20cm とすると、レンガの数は 25 個、内周は 250cm、内径は 80cm となりますから、円周率が 3.125 となります。論証はありませんが、実測で求めているようです。

エジプトには、アーフメスという書記が書写したパピルスがあります。このパピルスには、円周率はありますが、円の面積を、直径からその 9 分の 1 を引いて平方して、求めています¹¹。外接正方形との面積比を円積率と名付けると、円積率は 0.790 です¹²。これも、論証はありませんが、実測で求めていると思われます。やはり「計量図形学」と考えてよいでしょう。これらは、「書記の数学」です。

ところで、都市国家が繁栄したギリシャでは、商人や船乗り、職人の数学が、発達します。また、ペリクレス時代のアテネでは、ソピステースと呼ばれる職業的教師が活躍します。「市民の数学」とでも呼びましょうか。その性格は「論証図形学」です。

古代ギリシャの歴史家ヘロドトス（前 484 頃～前 425 頃）は、その著『歴史』の中で、祭司たちの話として、大略、次のように書いています。「この王（セソストリス）は全エジプト人に方形の土地を与え、年貢を納める義務を課して自分の収入の財源にしたという。もし川が誰かの土地を侵せば、それに応ずる年貢を納めるよう

¹¹ 円の半径を r として、この文章を式で表すと $[2r(1 - 1/9)]^2 = 4 \times (8/9)^2 r^2$ となります。この $4 \times (8/9)^2 = 3.160$ ですから、円周率は 3.16 を使っていたことにあたります。

¹² この円の半径を r としますと、外接正方形の面積は $4r^2$ ですから、円周率を $\pi = 3.14$ として現在の円周率の近似値をとれば、円積率 $\pi/4 = 0.785$ ですから、円積率 0.790 は現在からみて、なかなかいい近似値を使っていたことになります。

に、土地がどれだけ減じたかを測量させた。私はそれが幾何学の案出された根源であり、それがギリシャへと渡来したものであると考える」

幾何学は $\gamma\epsilon\omicron\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ (カナの発音表記：ゲオメトリア) と呼ばれていましたが、ヘロドトスはその起源を、土地に課税されるようになったことにあると考えているのです。「エジプトはナイルの賜物」といわれますが、幾何学もナイルの賜物と思われています。しかし、ナイルの氾濫は幾何学誕生の条件ではありますが、原因としては徴税を考えるべきでしょう。

$\gamma\epsilon\omicron\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ は計量図形学でしたが、エウクレイデスが論証図形学を体系立ててから、図形学一般が $\gamma\epsilon\omicron\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ と呼ばれるようになったのでした。

エウクレイデスは2つの図形が部分に分解され、対応する各々が合同であるとき、これら2つの図形は、等積であると定義しました。私たちは「分解合同 (zerlegungsgleich) である2つの図形は等積である」といいます。ここでは、計量によらず、図形そのものを比較しています。これを「実体図形学」と呼びましょう。中国の「形幾何」です。

ところで、エウクレイデスは、たんに分解合同で満足していません。まず、分解合同で平行四辺形の等積移動を証明し、これを2等分して、三角形の等積移動を導き、「三正方形の定理」を証明します。たんなる「実体図形学」ではなく、「論証図形学」となっています。ここには三平方の定理はなく、したがって、直角三数も、ありません¹³。

ストイケイアは、平面幾何、比例論、整数論、立体幾何の「集成」とみられていますが、私は項目の配列から考えて、「形幾何から数幾何への発展」という視点で再評価したいと考えているところです。

(2012.8.13)

¹³ 混乱する人がいるので、ここで注意をする。いわゆるピタゴラスの定理は、ストイケイアに載っています。むしろ、その証明を、最初の目的にしているようです。早い段階で、平行四辺形の等積移動から、はじめています。ただ、計量的な三平方の定理ではなく、図形としての3つの「正方形」の面積の等積を、証明しています。それで、それを「三正方形の定理」と表現しました。このノートではピタゴラスの定理を、形幾何では「三正方形の定理」、数幾何では「三平方の定理」と表現して、区別してあります。

バビロニアの円周率

The Value of π in Ancient Babylonia

武藤 徹¹⁴
Tohru MUTO¹⁵

3.1 はじめに

バビロニアの粘土板に、次のような、問題と解答があります。

三日月．円弧が 60 (1, 0)，弦が 50．面積 [は，いくらか]．君は [次のようにせよ]．円弧の 60 は 50 をどれだけ超過するか．10 超過する．50 を超過 10 に掛けよ．君は 500 (8, 20) を見る．弦 [超過の誤り] 10 を平方せよ．君は 100 (1, 40) を見る．500 (8, 20) から 100 (1, 40) を引け．君は 450 (7, 30, ママ) を見る．面積は 400 と 50 サル [面積単位]．手順は，[このようである] (ただし，[] は欠落の補足 (* , *) は原文の 60 進法表記)

なぜか，原文通りに計算すると 400 になるところが 450 となっています．原文に何らかの書き間違いがあることは明白です．

3.2 現代の知識では

三日月形の円弧が 60 (一般には円弧 a)，その弦が 50 (一般には弦を b)，面積が 450 (一般には S) であるとし，半径 R ，円周角 T° とすると，線分 AC は円の中心 O を通る，直径であるから三角形 ABC は直角三角形であり，中心 O から直線 AB に下ろした垂線の長さを h とする (図 3.1 参照)．このとき，つぎの 3 つの式が成り立つ．

$$2\pi R \cdot \frac{2T}{360} = 60 \quad (3.2.1)$$

$$2R \sin T = 50 \quad (3.2.2)$$

$$\pi R^2 \cdot \frac{2T}{360} - 50 \cdot \frac{R \cos T}{2} = 450 \quad (3.2.3)$$

したがって，

$$30R - 25R\sqrt{1 - \sin^2 T} = 450$$

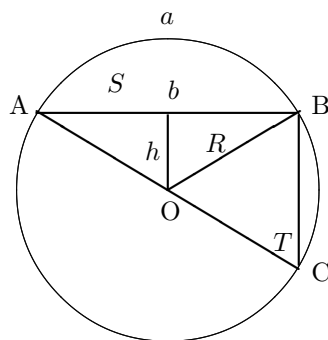
$$5\sqrt{R^2 - (R \sin T)^2} = 6R - 90$$

$$11R^2 - 1080R + 23725 = 0$$

が得られて，このとき， $R = 33.182, T = 48.9$ となります．なお，面積を 400 とすると，実数根が存在しません．

¹⁴ 数学思想史家; mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

¹⁵ Historian of Mathematical Thought

図 3.1: 中心角が 120° の場合の三日月形の面積

3.3 室井の推論

バビロニア数学の碩学である，さすがのノイゲバウアーも，この謎は，解けませんでした．

そこに室井和男¹⁶さんの登場です．室井さんは，この謎を解くために，バビロニアの書記になりきって，試行錯誤を繰り返したようです．彼は，長年の勘で，次のように考えました． $T = 60^\circ$ とすると，円周の長さは $3 \times 60 = 180$ です．バビロニアの円周率は3でしたから， $R = 30$ また3平方の定理から，弦の長さは $\sqrt{3}R$ ，バビロニアの $\sqrt{3}$ の近似値は $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ ですから，弦の長さは 52.5 です．したがって，面積 S は

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2} \times 52.5 \times \frac{R}{2} = 900 - \frac{1575}{4} \approx 506.25 \quad (3.3.1)$$

室井さんは，牛の目¹⁷の表の中に，この2倍の値と 52.5 の値を発見したのでした．室井さんのするどい勘によって，牛の目の面積の計算過程が，解明されました．

室井さんはさらに計算を続けました．

もし，はじめの粘土板を作成した書記が，弦の長さ 50 から

$$\begin{aligned} \sqrt{3}R &= (7/4)R = 50 \\ R &= \frac{200}{7} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

を導いていれば，(3.2.1) に 半径 $R = 200/7$, 円周角 $T = 60^\circ$ を代入して π の値を求めると，

$$2\pi R \cdot (2T/360) = 60 \quad (3.2.1)$$

より，円周率は $\pi = 3 \times 60 \times 7/400 = 63/20 = 3.15$ でなければならないことになります．

このとき，月形の面積 S は，400 でも，450 でも，506.25 でもなく，ちょうど，

$$\begin{aligned} S &= (1/3)(63/20)R^2 - (1/2) \times 50 \times (R/2) \\ &= 6000/7 - 2500/7 \\ &= 500 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

となります．

そこで室井さんは，原文に書かれている面積（すなわち，(3.2.3) の右辺の）450 が間違いで，

$$\text{面積} = (\text{弧} - \text{弦}) \times \text{弦} = 10 \times 50 = 500 \quad (3.3.4)$$

という三日月形の面積 S を求める近似公式が知られていたと推測しました．

逆に $\pi = 3.15 = 63/20$ としてみると，今 π を求めた同じ式から， $R = 200/7$ が得られます．この計算の中で 面積 = 500 に出会って，原文の間違ひのありかを確信したのでした．

¹⁶バビロニア数学研究者「バビロニアの数学」(東京大学出版会)の著者

¹⁷牛の目とは三日月形を弦のところで対称に張り合わせ形をいう．凸レンズを想像してください．

3.4 おわりに

このノートでは、バビロニアでの円周率の値として使われていた 3.15 の数値を、室井さんが推測した理由を知ることができました。

(2012.8.20)

バビロニアの円周率（補遺）

The Value of π in Ancient Babylonia (Appendix)

矢野 忠¹⁸
Tadashi YANO

4.1 はじめに

話のはじまりは武藤 徹先生¹⁹からのメールの添付書類からである．それは中村滋²⁰さんの書いたコラム [1] とそれに対する武藤先生のノートである²¹．

これらのエッセイとノートですべてを尽くされているとは思うが，それらを読んで確かめたことを，ここで武藤先生のノートの補遺として，述べたい．

円弧の長さ a ，弦の長さを b とすると中村さんのコラムの原稿に半月形の面積 S が近似的に公式

$$S = b(a - b) \quad (4.1.1)$$

で与えられるとあった．

一方，武藤先生のノートからは同じ半月形の面積 S は

$$S = \frac{b}{7}(2a - b) \quad (4.1.2)$$

としか与えられない²²．それで (4.1.2) から (4.1.1) が導けるのではないかと思って数日考えたが，どうもうまく導出する方法を思いつかなかった²³．

それで，本当に中心角が 120° のときにこの二つの公式が同じ面積を与えるのかを疑って，いろいろな半径で計算してみたが，どうもこの式は数値的にはぴったりと成り立っている．

4.2 円周率の決定

円弧の長さ a ，弦の長さを b とすると (4.1.1) と (4.1.2) との違いは (4.1.1) の $a - b$ という因子が (4.1.2) の $\frac{2a-b}{7}$ となるところだけである．そしてその二つの因子が同じ数値を与えるとするとこれから円周率 π の値を決められるのだと気がついた．

¹⁸yanotad@earth.ocn.ne.jp

¹⁹数学思想史家

²⁰東京海洋大学名誉教授

²¹武藤先生のノートは増補改訂されて，数学・物理通信のこの号に掲載されている [2]．

²²この (4.1.2) の導出は補遺に載せる．

²³その後，その説明ができたので3節に述べる．

それで, a, b を円周率 π と円の直径 R とで表し, $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ の近似値を使うと

$$b = \frac{7}{4}R \quad (4.2.1)$$

$$a = \frac{2\pi}{3}R \quad (4.2.2)$$

を

$$a - b = \frac{2a - b}{7} \quad (4.2.3)$$

に代入する．いま

$$a - b = (\alpha\pi + \beta)R$$

と表し, また

$$\frac{2a - b}{7} = (\gamma\pi + \delta)R$$

と表すと, (4.2.3) から π について解くことができ

$$\pi = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma} \quad (4.2.4)$$

となる．ここで, 数値

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\beta = -\frac{7}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\delta = -\frac{1}{4}$$

を代入すると

$$\pi = \frac{63}{20} = 3.15 \quad (4.2.5)$$

が得られた．

なんのことはない, 室井和男さんの論文 [3] の推論を確かめただけである．

4.3 二つの公式の同等性

中心角が 120° のときの三日月形の図形の公式が (4.1.1), (4.1.2) が同等であることは数値上は確かであるが, それがなぜ等しくなっているのかは中心角が 120° であることと関係がある．そのことを見ておこう．いま, 武藤公式からは中心角が 120° のときの円弧の長さ a と弦の長さ b は

$$b = \frac{7}{4}R \quad (4.2.1)$$

$$a = \frac{2\pi}{3}R \quad (4.2.2)$$

と与えられているので, この比をとってみると

$$\frac{a}{b} = \frac{8\pi}{21} = 1.196 \quad (4.3.1)$$

ただし, ここで $\pi = 3.14$ を使って比 a/b を評価した．この比の値は 1.2 に極めて近い．それでこの比を 1.2 とすれば,

$$\frac{a}{b} = 1.2 = \frac{6}{5}$$

と表される．そうすると

$$5a = 6b \quad (4.3.2)$$

と読み替えることができる．この (4.3.2) は $5a - 6b = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}(2a - b) &= \frac{1}{7}(2a - b + 5a - 6b) \\ &= a - b \end{aligned}$$

したがって，二つの公式 (4.1.1) と (4.1.2) とは確かに中心角 120° に対して等しい面積を与えることがわかった．

4.4 おわりに

(4.1.1) が中心角 120° のときに一般的に成立することを発見したのが，室井さんの研究のすごいところなのだろう．

この発見では円弧の中心角が 120° であることが大切になっている．しかし，この中心角の場合にこんな簡単な面積の関係 (4.1.1) をみつけたバビロニアの人たちは単に幸運だけだったのだろうか．それとも深い洞察をもっていた人たちだったのだろうか．

補遺 1 (4.1.2) の導出

(4.1.1) の公式は室井さんがバビロニアで使われていたことを見出した式である．ここでは武藤先生のノート [2] の (3.2.3) からこのノートの (4.1.2) が近似的に導かれるところだけを示せば十分であろう．

武藤先生のノート [2] の (3.2.1), (3.2.2) によれば，中心角 120° に対応した円弧の長さ a は

$$a = \frac{2\pi}{3}R \quad (4.2.2)$$

であり，このときに円周角は $T = 60^\circ$ であるから，弦の長さ b は

$$\begin{aligned} b &= 2R \sin T \\ &= \sqrt{3}R \end{aligned} \quad (4.A1.1)$$

である．

また，武藤先生のノート [2] の (3.2.3) によれば，三日月形の面積 S ([2] の図 3.1 を参照) は

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 \frac{120}{360} - \frac{h}{2}b, \quad h = \frac{R}{2} \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{4}bR \end{aligned} \quad (4.A1.2)$$

で与えられる．この式から R を消去すれば

$$S = \frac{1}{4\sqrt{3}}(2a - b)b$$

が得られる．この式は厳密に成り立つ式である．

ところで，バビロニアでは $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ の近似値が用いられていたもので，それを代入すると

$$S = \frac{1}{7}(2a - b)b \quad (4.1.2)$$

が得られる．この式は近似的に成り立つ式である．

補遺2 (4.1.1) と (4.1.2) の同等性の推論

数学では (4.1.1) と (4.1.2) との同等性を 4.3 節のように示されればそれで終わりであり，その他のことはない．しかし，ここでは私の思考のプロセスを少し述べてみたい．これは発見法という観点からの関心からである．

はじめ (4.1.2) から (4.1.1) が近似的に求められると推測したので，(4.1.2) をテイラー展開すれば，(4.1.1) が得られるのではないかと思った．それで，

$$\frac{1}{7}(2a-b) = a_0 + a_1(a-b) + a_2(a-b)^2 + a_3(a-b)^3 + \cdots \quad (4.A2.1)$$

と $a-b$ のべき級数で表されるとして，未定係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を決めようとした．

左辺が a, b について 1 次の式であるから，実は $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ である．すぐにわかるように (4.A2.1) で $a=b$ とおけば，

$$a_0 = \frac{a}{7}$$

つぎに，(4.A2.1) の両辺を b で微分すれば，

$$-\frac{1}{7} = -a_1 - 2a_2(a-b) - 3a_3(a-b)^2 - \cdots \quad (4.A2.2)$$

この (4.A2.2) で $a=b$ とおけば，

$$a_1 = \frac{1}{7}$$

となる．

すなわち，

$$\frac{1}{7}(2a-b) = \frac{a}{7} + \frac{1}{7}(a-b) \quad (4.A2.3)$$

となる．もっとも，こうして得られた，この (4.A2.3) は別にテイラー展開するまでもなく得られる．

一見したところ (4.A2.3) はとても $a-b$ にはなりそうもない．

それで方針を転換して $\frac{1}{7}(2a-b) = a-b$ からどのような条件が得られるかを見ることにした．それから

$$5a = 6b \quad (4.A2.4)$$

の条件が得られる．すなわち

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} \quad (4.A2.5)$$

が得られた．

そこで，(4.2.1), (4.2.2) で比 a/b を求めてみれば，1.196 であることがわかり，これは 1.2 に極めて近いことから 4.3 節のように述べた．

(2012. 8. 29)

参考文献

- [1] 中村 滋，数セミ（日本評論社），掲載予定
- [2] 武藤 徹，バビロニアの円周率，数学・物理通信，2 巻 4 号，19-21
- [3] Kazuo Muroi, Mathematics Hidden Behind the Practical Formulae of Babylonian Geometry, The Empirical Dimension of Ancient Near Eastern Studies, edited by G.J.Selz, (2011), 149-157.

編集後記

2012 年 9 月となった．残暑が今年も厳しそうであるが，皆様にはご健勝のことと存じます．

数学・物理通信 2 巻 4 号を発行する．今回は数学思想史家の武藤先生をお願いをして二つも寄稿をしてもらった．そういうこともあって，原稿の積み残しがある．これは森本安夫さんからの投稿原稿である．

これはトンネル効果の式の導出を詳しく述べたものであるが，その掲載は数号後になるであろう．森本さんには申し訳がないが，これはつぎの理由によっている．

このサーキュラーは基本的に latex で書かれた原稿をもとにして編集している．ところが最近ワードで書かれた原稿が寄せられることが多くなった．簡単な原稿は編集者が latex に取り込んで，それを打ち直している．ところが，式はそれほど入力に苦にはならないが，図がたくさんあるとどうしてもしり込みをしてしまう．それが掲載が遅くなる理由である．編集者が多忙だという他の理由もあるが．

編集者としては latex の原稿を寄せていただくことがこのサーキュラーに掲載できる最低の要件ではあるが，投稿して下さった方々にすべて latex でないと原稿を受けつけないというのも憚られる．原稿自体の価値がないのならば，大手を振ってそういうことを編集者として主張できるが，編集者が意味があると思う原稿であれば，掲載が遅くなっても，必ず掲載をしたい．

しかし，基本は latex で書かれた原稿の投稿であるので，投稿を希望される方々にはそれをできるだけ踏み外さないようお願いをしたい．だが，図が少なくて，文字と数式等が主であれば，latex に変換する手間はそれほどではない．掲載が早い遅いはそういう事情があることをご了解頂きたい（矢野 忠）