数学・物理通信

2巻5号　　2012年10月

編集　新関章三・矢野　忠

2012 年 10 月 8 日

目 次

Contents

集合の対称差と集合列の極限定理 (II)

The symmetric difference of sets and some limit theorems of sequence of sets (II)

新関章三 [1]
Shôzô NIIZEKI [2]

1.1 はじめに

本稿 (II) では集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ の収束問題について数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$ の収束問題と対比しつつ考えてみる. 集合算 $\triangle$ がどのような形でこの問題にかかわってくるかが興味深いところである. 以下本稿を通じて, Ω は空でない一つの集合で $\mathfrak{p}(\Omega)$ は Ω のべき集合, 即ち Ω の部分部分集合全体から成る集合系とする.

1.2 集合列の極限

集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ の収束と極限について考える. 初めは列 $\{E_n\}$ の上極限と下極限の定義を与える. 集合列の収束問題はこれら 2 つの考えが基礎となっている.

定義 1.2.1 (上極限と下極限) 列 $\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ に対しこの上極限と下極限とをそれぞれ

$$\begin{cases} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k & :\text{上極限} \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k & :\text{下極限} \end{cases}$$

と定める. ♦

この定義から分かるように, 列 $\{E_n\}$ の上極限と下極限とは必ず存在する. こ の性質は, 実数の集合 $\boldsymbol{R}$ に $\pm\infty$ を加えた広義の実数 $\overline{\boldsymbol{R}}$ の場合にも当てはまる. 集合列の上極限・下極限と数列の上極限・下極限との間には次の関係がある.

注意 列 $\{a_n\}_{n=1}^{n} \subset \boldsymbol{R}$ に対してこの列の上極限と下極限とはそれぞれ式 :

$$\begin{cases} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k & :\text{上極限} \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k & :\text{下極限} \end{cases}$$

[1]高知大学名誉教授, niizekishozo@gmail.com
[2]Professor Emeritus, Kochi University

で与えられる．これら 2 つの式と上の定義とを比較して見ると, 次の対応関係：

$$\begin{cases} \sup & \longleftrightarrow & \cup \\ \inf & \longleftrightarrow & \cap \end{cases}$$

が存在する事が分かる．♦

次に, 定義 1.2.1 で与えた 2 つの極限と列 $\{E_n\}$ の極限について考えてみよう．

定理 1.2.2 次の式が成り立つ：

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ x \in \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n \Leftrightarrow \{n \mid x \in E_n\} \text{ は無限集合} \\ \\ 2)\ x \in \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n_0 \in \boldsymbol{Z}^+ \\ n_0 \leq \forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ x \in E_n \end{cases} \end{cases}$$

証明 定義 1.2.1 で与えた式により, 上の 1) と 2) とは容易に示す事が出来る．□

定理 1.2.3 列 $\{E_n\}$ の上極限と下極限との間には次の関係式が成り立つ：

$$\begin{cases} 1)\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\right)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n^c \\ 2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n \end{cases}$$

証明 1) de Morgan の法則から明らかである．
2) 列 $\{E_n\}$ から得られる次の 2 つの列 $\{F_n\}$ 及び $\{G_n\}$ に対し

$$\left.\begin{aligned} F_n &\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \\ G_n &\overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ G_n \subset F_n \\ F_{n+1} \subset F_n \\ G_n \subset G_{n+1} \end{cases}$$

が得られる．これより $\forall\{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}^+$ に対し式：

$$\begin{cases} G_m \subset F_m \subset F_n & : n < m \\ G_m \subset F_n & : m = n \\ G_m \subset G_n \subset F_n & : m < n \end{cases}$$

が成り立つ事が分かる．従って

$$\forall\{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow G_m \subset F_n$$

$$\therefore\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n$$

が得られて定理は証明された．□

この定理 1.2.3 の 2) の証明には次のような証明法もある：

注意 定理 1.2.2 から直ちに

$$x \in \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n \Longrightarrow x \in \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n$$

が分かる．よって, 定理 1.2.3 の 2) が証明された．♦

例 上の定理 1.2.3 で等号が成り立たない例：

$$\left.\begin{array}{l}\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ E_{2n-1} \overset{\text{def}}{=} A \\ E_{2n} \overset{\text{def}}{=} B \\ A \neq B\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = A \cup B \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = A \cap B\end{cases}$$

ここで, $n \in \boldsymbol{Z}^+$, $\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ とし $A \neq B \Leftrightarrow A \cup B \neq A \cap B$ に気付けばよい. ♦

定義 1.2.4 列 $\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ が $E \in \mathfrak{p}(\Omega)$ に収束するとは

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = E$$

が成り立つ時を言い, 記号で $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ と書く. ♦

注意 定理 1.2.3 の 2) により次の事が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{c}\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \phi\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}\phi \subset \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \phi \\ \therefore\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \phi\end{cases}$$

この事実は今後とも, 断りなしに用いられる. ♦

さて今度は. ϕ に収束する集合列の性質を調べてみよう.

定理 1.2.5 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{c}\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \lim_{n\to\infty} E_n = \phi\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}\exists\ n_0 \in \boldsymbol{Z}^+ \\ n_0 \leq \forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ x \notin E_n\end{cases}$$

証明 条件により, 次の一連の式：

$$\forall x \in \Omega = \phi^c \ \Rightarrow\ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_n^c\right) \ \Rightarrow\ \begin{cases}\exists n_0 \in \boldsymbol{Z}^+ \\ x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} E_n^c\end{cases}$$

が成り立ち, 定理は証明された. □

本節を終えるに当たり, それら自身も集合算の性質として興味深い補題を 2 つ挙げておく. これらは次節の定理を証明する際に重要な道具となる.

補題 1.2.6 次の極限式が成り立つ：

$$\{A_n\} \cup \{B_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases}1)\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ 2)\ \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)\end{cases}$$

証明 1) "左辺 $\subset$ 右辺" は明らかである. 他方

$$\forall\{i, j\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow A_i \cup B_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$$

により "左辺 $\supset$ 右辺" が分かる. 2) は 1) に de Morgan の法則を適用すればよい. □

上の補題も次節の重要な定理 1.2.2 や同 1.2.3 を証明する際に力を発揮する.

補題 1.2.7 次の事が成りたつ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_n\}\subset\mathfrak{p}(\Omega)\\ \{B_n\}\subset\mathfrak{p}(\Omega)\end{array}\right\}\text{が共に}\begin{cases}1)\ \text{増加列}\ \Rightarrow\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\\ 2)\ \text{減少列}\ \Rightarrow\ \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)\end{cases}$$

証明 1) "左辺 $\subset$ 右辺" は明らかである. そこで, 以下 "左辺 $\supset$ 右辺" を示そう.

$$\left.\begin{array}{l}\forall\{p,q\}\subset\boldsymbol{Z}^+\\ r\stackrel{\text{def}}{=}\max\{p,q\}\end{array}\right\}\Longrightarrow A_p\cap B_q\subset A_r\cap B_r\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)$$

$$\therefore\ \text{左辺}\ =\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=\ \text{右辺}$$

が得られる. よって, 目的が達成された.

2) は 1) の結果に de Morgan の法則を適用すればよい. □

次の定理は幾つかの集合列の収束問題を証明するのに力を発揮する.

定理 1.2.8 次の事が成り立つ：

$$\{A_n\}\cup\{B_n\}\subset\mathfrak{p}(\Omega)\Longrightarrow\begin{cases}1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)\cup\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n\right)\\ 2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)=\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)\cap\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}B_n\right)\end{cases}$$

証明 1) は, 補題 1.2.6 と同 1.2.7 とにより, 次の様にして分かる：

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(A_n\cup B_n)\stackrel{(1)}{=}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k\right)\right\}\\&\stackrel{(2)}{=}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k\right)=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)\cup\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n\right)=\text{右辺}\end{aligned}$$

ここで, 等号 (1) は補題 1.2.6 から等号 (2) は補題 1.2.7 から明らかである.

2) は 1) の結果に de Morgan の法則を適用すればよい. □

上の定理から応用上も重要な次の系が得られる.

系 1.2.9 次の事が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_n\}\subset(\Omega)\\ \lim_{n\to\infty}A_n=A\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cap A)=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)\cap A\\ 2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cap A)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n)\cap A\end{cases}$$

証明 定義 1.2.1 及び定理 1.2.8 から自明である. □

1.3 集合列の収束条件

集合列 $\{E_n\}$ が収束するための条件を色々と考えてみよう. また, 集合列の時にも数列 $\{a_n\}$ の場合と同様に Cauchy (コーシー 1789-1857) 列の考えがあるのである.

このための第一段階として，次の定理を証明しよう．

定理 1.3.1 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{p}(\Omega)\\ \forall n \in \boldsymbol{Z}^+\end{array}\right\} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \vartriangle A_{i+1}) = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

証明 n に関する数学的帰納法で証明しよう．$n=1$ の時は対称差 $\vartriangle$ の持つ性質：

$$A_1 \vartriangle A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$$

から自明である．n の時に定理が正しいと仮定すれば $n+1$ に関しても定理は正しいことを証明しよう．このために先ず，$A_n \vartriangle A_{n+1} = A_n^c \vartriangle A_{n+1}^c$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \vartriangle A_{i+1}) &= \left\{\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \vartriangle A_{i+1})\right\} \cup (A_{n+1} \vartriangle A_{n+2})\\ &= \left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right\} \cup (A_{n+1} \vartriangle A_{n+2})\\ &= \left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i^c\right)\right\} \cup (A_{n+1} \vartriangle A_{n+2})\\ &= \left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cup (A_{n+1} \vartriangle A_{n+2})\right\} \cap \left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i^c\right) \cup (A_{n+1}^c \vartriangle A_{n+2}^c)\right\}\\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n+2} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+2} A_i^c\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n+2} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n+2} A_i\right)\end{aligned}$$

が得られるから，$n+1$ のときにも成り立つ．よって，定理は証明された．□

注意 上の定理は対称差：$\{A, B\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow A \vartriangle B = A \cup B \setminus A \cap B$ の拡張とも言える．これは上の定理において $n=1$ の場合を考えればよい．♦

補題 1.2.7 を用いれば, 定理 1.3.1 の拡張である次の定理を示す事が出来る.

定理 1.3.2 次の式が成り立つ：

$$\{A_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \vartriangle A_{i+1}) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

証明 定理 1.3.1 の等式において

$$\text{右辺} = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k^c\right)$$

が成り立つから補題 1.2.7 により

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \vartriangle A_{n+1}) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \triangle A_{k+1})\right)\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k^c\right)\right\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\end{aligned}$$

が得られる. これで定理は証明された. □

次の定理は，集合列の上極限及び下極限と対称差との関連性を示す重要な定理である.

定理 1.3.3 $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ に対して, 次の式が成り立つ：

$$\{A_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \varlimsup_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A_{n+1}) = \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \setminus \left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)$$

証明 定理 1.3.2 により

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i \vartriangle A_{i+1}) = \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i^c\right)$$

が得られる. よって, 補題 1.2.7 の 2) により

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A_{n+1}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i \vartriangle A_{i+1}) \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)^c \\ &= \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \setminus \left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)\end{aligned}$$

以上で定理は証明された. □

この定理 1.3.3 からは, 集合列の収束に関する, 応用上も重要でしかも興味深い定理を次の様な形で導くことが出来る.

定理 1.3.4 次の関係が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \exists A \in \mathfrak{p}(\Omega)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\lim_{n\to\infty}(A_n \vartriangle A) = \phi \\ \Updownarrow \\ \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n = A\end{array}\right.$$

証明 ($\Downarrow$)：定義 1.2.4 及び定理 1.3.3 より以下が得られ, $\Downarrow$ が示された：

$$\begin{gathered}\left\{\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \cap A^c\right\} \cup \left\{\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)^c \cap A\right\} = \phi \\ \therefore \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \cap A^c = \left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)^c \cap A = \phi \\ \therefore \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \\ \therefore \lim_{n\to\infty} A_n = A\end{gathered}$$

($\Uparrow$)：定理 1.3.3 より自明である. 以上で, 定理は証明された. □

上の定理から, よく用いられる次の重要な系が得られる.

系 1.3.5 次の式が成り立つ：

$$\{A_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} 1)\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \{A_n\} \text{ は増加列} \\ 2)\ \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : \{A_n\} \text{ は減少列}\end{cases}$$

証明 上の 1) と 2) とは, それぞれ次の 1) と 2)：

$$\begin{cases} 1)\ \ \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ 2)\ \ \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\end{cases}$$

が成り立つ事から分かる. □

次の定理は, 極限集合の評価式を与えている.

定理 1.3.6 次の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \\ \forall\{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1) \ \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} A_k \subset A \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \\ 2) \ \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} (A_k \triangle A) \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \\ 3) \ \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (A_k \triangle A)^c \end{cases}$$

証明 1) 定義 1.2.4 より自明である.

2) $\forall n \in \boldsymbol{Z}^+$ をとる. この時, 今上で示した 1) により $n \leq \forall i \in \boldsymbol{Z}^+$ に対し 1) の結果から

$$\left.\begin{array}{l} A_i \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \\ A \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \end{array}\right\} \Longrightarrow A_i \triangle A \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} (A_i \triangle A) \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$$

が得られ, 2) が示された.

3) は 2) の両辺の補集合に de Morgan (ド・モルガン 1806-1871) の法則を適用する. □

本節の冒頭にも述べたように, 数列 $\{x_n\} \subset \boldsymbol{R}$ の場合と同様に集合列 $\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ の場合にも Cauchy 列の考えを導入することが出来る. 定式化すればこうなる：

定義 1.3.7 列 $\{E_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)$ が Cauchy 列であるとは, $\forall x \in \Omega$ を取った. 時 $\exists n_0 \in \boldsymbol{Z}^+$, $n_0 \leq m \leq n$ なる $\forall\{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}$ に対して $x \in (E_m \triangle E_n)^c$ が成り立つ時を言う. ♦

本節を終えるに当たり, 数列の場合と類似の次の定理を証明してみよう.

定理 1.3.8 次の事が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \{A_n\} \cup \{B_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 1) \ \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B \\ 2) \ \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B \end{cases}$$

証明 定理 1.2.10 から明らかである. □

上の定理の 1) 又は 2) を用いて次の定理を証明してみよう.

定理 1.3.9 次の事が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \{A_n\} \cup \{B_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \\ \forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ A_n \subset B_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \end{array}\right\} \Longrightarrow A \subset B$$

証明 上の定理 1.3.8 の 2) を用いると

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B \subset B$$

が得られる. これで定理は証明された. □

注意 上の定理 1.3.8 の 1) を用いても同様にして証明することが出来る. ♦

次に, 補集合の収束問題について考えてみよう．次の定理が成り立つ.

定理 1.3.10 次の事が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_n\} \subset \mathfrak{p}((\Omega)\\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} A_n^c = A^c$$

証明 定理 1.2.3 から自明である. □

対称差に対しても同じような成り立つ事を明らかにしよう. 次の定理が成り立つ.

定理 1.3.11 次の極限式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l}\{A_n\} \cup \{B_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega)\\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A\\ \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (A_n \vartriangle B_n) = A \vartriangle B$$

証明 対称差の性質によりて式：

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}^+ \Longrightarrow A_n \vartriangle B_n = (A_n \cap B_n^c) \cup (B_n \cap A_n^c)$$

が成り立つ. この式に定理 1.3.8 及び同 1.3.10 を適用すればよい. □

本節を終えるに当たり, 本節の中心課題である次の定理を証明することが出来る.

定理 1.3.12 以下の命題 1) ∼ 5) は全て同値である：

$$\{A_n\} \subset \mathfrak{p}(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists A \in \mathfrak{p}(\Omega) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A) = \phi \\ 2)\ \left\{\begin{array}{l}\forall (x,y) \in A \times A^c\\ \exists N_{(x,y)} \in \boldsymbol{Z}^+\\ N_{(x,y)} \leq \forall n \in \boldsymbol{Z}^+\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) \in A_n \times A_n^c \\ 3)\ \{A_n\} : \text{Cauchy 列} \\ 4)\quad \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A_{n+1}) = \phi \\ 5)\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n \end{cases}$$

証明 1) ⇒ 2)：以下の通りである.

$$1) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (A_k \vartriangle A)^c = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \vartriangle A)\right\}^c = \phi^c = \Omega = A \cup A^c$$

$$\therefore \left\{\begin{array}{l}\forall (x,y) \in A \times A^c\\ \exists N_{(x,y)} \in \boldsymbol{Z}^+\\ N_{(x,y)} \leq \forall n \in \boldsymbol{Z}^+\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in (A_n \vartriangle A)^c \cap A = A_n \cap A\\ y \in (A_n \vartriangle A)^c \cap A^c = A_n^c \cap A^c\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow (x,y) \in A_n \times A_n^c \Longrightarrow 2)$$

2) ⇒ 3)：条件より，十分大きな $N_0 \in \boldsymbol{Z}^+$ に対して以下の事が分かる：

$$x \in A \Longrightarrow \begin{cases} N_0 \leq \forall m \leq \forall n \\ \{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \\ x \in A_m \cap A_n \end{cases} \qquad x \in A^c \Longrightarrow \begin{cases} N_0 \leq \forall m \leq \forall n \\ \{m,n\} \subset \boldsymbol{Z}^+ \\ x \in A_m^c \cap A_n^c \end{cases}$$

$$\therefore\ \forall x \in \Omega = A \cup A^c \Longrightarrow x \in (A_m \cap A_n) \cup (A_m^c \cap A_n^c) = (A_m \vartriangle A_n)^c$$

が成り立つから, $\{A_n\}$ は Cauchy 列となり 3) が示された.

3) ⇒ 4)：条件より

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \Omega \\ \exists N_x \in \boldsymbol{Z}^+ \\ N_x \leq \forall n \in \boldsymbol{Z}^+\end{array}\right\} \Longrightarrow x \in (A_n \vartriangle A_{n+1})^c$$

が成り立つ．よって

$$x \in \varliminf_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A_{n+1})^c = \left\{\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A_{n+1})\right\}^c$$

が得られ, 結局は

$$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A_{n+1})\right\}^c = \Omega \quad \therefore \varlimsup_{n\to\infty} (A_n \vartriangle A_{n+1}) = \phi$$

が成り立つ．よって 4) が示された.

4) ⇒ 5)：定理 1.3.3 から自明である.

5) ⇒ 1)：$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n = A$ とおいて，定理 1.3.3 の 2) を適用すればよい．□

1.4　おわりに

前回 (I) に続き，今回はシリーズの論文 (I)∼ (III) の中心課題である (II) の集合算の極限問題について考えてみた．見て分かるように，何と言ってもこの問題の中心は定理 3.8 であり，べき集合 $\mathfrak{p}(\Omega)$ に対称差の算法 $\vartriangle$ を加えるとこのべき集合の世界は飛躍的に拡張される．対称差の算法が入ったべき集合には確率論や測度論への応用が期待される．また，定理 3.8 に至るまでの定理や補題も極限の性質として重要である．次回の (III) では集合算法をうまく用いて $\mathfrak{p}(\Omega)$ に位相構造を導入する考えである．♦

ある不等式の証明

Proof of Inequalities

矢野　忠[3]
Tadashi YANO

2.1　はじめに

新関，岩崎両氏の論考 [1] に下に示した不等式 (2.1.1) が出ており，この不等式がこの論文において重要な役割を果たしている．ところが，私にはこの不等式がなかなか導出できなかった．それでこのエッセイではその導出を考えて見ることにする．

この不等式が $x \geq 1$ の場合に成り立つことは私にもすぐわかった．ところが $0 < x < 1$ のときに不等式が成り立つことがなかなかわからなかった．それで，その証明を教えてもらいに新関氏のところへ行く日程を相談するために新関氏に電話したときに，$x < 1$ のときには $x - 1 < 0$ であるといわれてようやくわかった．

わかってしまった段階では難しいことは何もない．むしろなぜこの不等式が成り立つことを証明できなかったのか不思議に思うほどである．しかし，わかるまでにはもやもやした状態が続いた．

ところで，問題はつぎのようである．

> n を正の整数とし，x を正の実数とするとき，つぎの不等式
>
> $$n(x-1) \leq x^n - 1 \leq n(x-1)x^{n-1} \leq n(x-1)x^n \tag{2.1.1}$$
>
> を証明せよ．

まず，2.2 節にその一番素朴な証明を述べる．2.3 節では $x < 1$ の場合が証明できるまでに考えたことを述べたい．さらに 2.4 節では微分を用いた証明をする．最後に 2.5 節では数学的帰納法による証明をする．付録 2.1 では 2.3 節の（問）の解答を示し，付録 2.2 では不等式 (2.A.2) を証明する．

2.2　素朴な証明

まず (2.1.1) の一番素朴な証明をしておこう．

x の値によって $x > 1$, $x = 1$, $x < 1$ の 3 つの場合に分けて証明しよう．

[3]元愛媛大学，yanotad@earth.ocn.ne.jp

2.2.1　$x > 1$ の場合

はじめに $x > 1$ のときを考えよう．このとき $x^n > x^{n-1} > \cdots > x > 1$ であるから，いま

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

とするとき，つぎの不等式

$$n < S < nx^{n-1} < nx^n \tag{2.2.1}$$

が成り立つ．

ところで

$$(x-1)S = x^n - 1$$

となることと $x > 1$ の場合には

$$x - 1 > 0$$

であることに注意して，因子 $x-1$ を (2.2.1) のすべての項にかけると不等式

$$n(x-1) < x^n - 1 < n(x-1)x^{n-1} < n(x-1)x^n \tag{2.2.2}$$

が成り立つ．

2.2.2　$x = 1$ の場合

つぎに $x = 1$ のときを考えよう．この場合には

$$n(x-1) = x^n - 1 = n(x-1)x^{n-1} = n(x-1)x^n \tag{2.2.3}$$

が成立することは明らかであろう．

2.2.3　$0 < x < 1$ の場合

最後に $0 < x < 1$ の場合を考えよう．この場合には $0 < x^n < x^{n-1} < \cdots < x < 1$ であるから，いまつぎの不等式が成り立つ．

$$nx^n < nx^{n-1} < S < n \tag{2.2.4}$$

が成り立つ．

いま，$x < 1$ であるから

$$x - 1 < 0$$

であることに注意して，この因子 $x-1$ を (2.2.4) のすべての項にかけると

$$n(x-1) < x^n - 1 < n(x-1)x^{n-1} < n(x-1)x^n \tag{2.2.5}$$

が成り立つ．

2.2.4　まとめ

上に証明された不等式 (2.2.2), (2.2.5) と等式 (2.2.3) をあわせると (2.1.1) が証明されたことがわかる．

2.3 議論

不等式 (2.1.1) の素朴な証明ができる前にどういうことを考えたかを述べておこう．まず項 $x^n - 1$ について考えた．一挙に任意の正の整数 n に対する項 $x^n - 1$ を考えるのは難しいので，$n = 1 \sim 8$ の例を考えてみた．

$$
\begin{aligned}
&x^1 - 1 = x - 1 \\
&x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \\
&x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \\
&x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1) \\
&x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\
&x^6 - 1 = (x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \\
&x^7 - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \\
&x^8 - 1 = (x-1)(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

これぐらい例をやってみれば，誰でも任意の正の整数 n に対して

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \tag{2.3.1}$$

が成り立つことがわかるだろう．

もし (2.3.1) が成り立つことを論理的に証明したい人は数学的帰納法で証明することができる．(問としておく．各自証明を試みられよ）．

（問）(2.3.1) が成立することを数学的帰納法で示せ（解答は付録 2.1 に載せる）．

(2.3.1) の中に出てきた $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ とおけば，この S は初項 1，公比 x の等比級数の和である．項数は n 個あり，この和は

$$S = \frac{1-x^n}{1-x} \left(= \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$$

である．

いま $x > 1$ のとき，$1 < x < x^2 < \cdots < x^{n-1} < x^n$ が成り立つから，$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ の各項をこの n 個の項をすべて和の中で最小の 1 でおきかえると

$$n \cdot 1 < S \tag{2.3.2}$$

が得られる．

同様に最大の x^{n-1} でおきかえると

$$S < nx^{n-1} \tag{2.3.3}$$

が得られる．

さらに和の中の項にはないが，その最大項 x^{n-1} より大きな x^n でおきかえると

$$nx^{n-1} < nx^n \tag{2.3.4}$$

が得られる．

これら (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) をまとめた不等式が (2.2.1) である．

つぎに $x = 1$ のときは $1 = x = x^2 = \cdots = x^{n-1} = x^n$ が成り立つ．

最後に $x < 1$ のときを考えよう．このとき，$1 > x > x^2 > \cdots > x^{n-1} > x^n$ が成り立つから，$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ の n 個の項をすべて，和の中で最大の 1 でおきかえると

$$n \cdot 1 > S \tag{2.3.5}$$

が得られる．

同様に各項を和の最小の x^{n-1} でおきかえると

$$S > nx^{n-1} \tag{2.3.6}$$

が得られる．

さらに和の項にはないが，その最小項 x^{n-1} より小さな x^n でおきかえると

$$nx^{n-1} > nx^n \tag{2.3.7}$$

が得られる．

これら (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) をまとめた不等式が (2.2.4) である．

ここまでわかると後は 2.2 節に述べたように不等式 (2.1.1) を得ることは簡単である．

注意すべきことは $x > 1$ のときは $x - 1 > 0$ であるが，$0 < x < 1$ のときは $x - 1 < 0$ であることである．この符号の違いに注意さえすればいいのだが，私自身はまったく理由なく $0 < x < 1$ の場合にも $x - 1 > 0$ となると盲目的に思いこんでいたために，$x < 1$ のときに (2.2.1) とまったく不等号の向きが反対になると思いこんで，おかしい，おかしいと思っていた．それについて新関氏から「$0 < x < 1$ のとき $x - 1 < 0$ ですよ」との指摘を受けるまで気がつかなかった．

2.4 微分を用いた証明

2 番目の証明として，(2.1.1) の微分を用いた証明を考えよう．

(4a) まず (2.1.1) の中の

$$n(x-1) \leq x^n - 1 \tag{2.4.1}$$

を証明しよう．

(4a.1) まず $n > 1$ のときを考えよう．

$$f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$$

とおく．この $f(x)$ を x で 1 回微分すると

$$f'(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

が得られる．

$0 \leq x < 1$ では $f'(x) < 0$ であるので，$f(x)$ はこの区間で減少関数である．また $x = 1$ では $f'(1) = 0$ であり，またこのとき $f(x) = 0$ である．さらに $x > 1$ では $f'(x) > 0$ であるので，この区間では $f(x)$ は増加関数である．したがって $x > 0$ において $f(x)$ は $x = 1$ で最小値 0 をとり，それ以外では正の値をとる．

したがって，不等式 (2.4.1) が証明された．

(4a.2) つぎに $n = 1$ のときは

$$f(x) = (x-1) - (x-1) = 0$$

であるから，(2.4.1) の等号の場合が成り立つ．

(4b) つぎに (2.1.1) の中の

$$x^n - 1 \leq n(x-1)x^{n-1} \tag{2.4.2}$$

を証明しよう．

(4b.1) まず $n>1$ のときを考えよう．

$$f(x)=n(x-1)x^{n-1}-(x^n-1)$$

とおく．この $f(x)$ を x で 1 回微分すると

$$f'(x)=n(n-1)(x-1)x^{n-2} \tag{2.4.3}$$

が得られる．

$0\leq x<1$ では $f'(x)<0$ であるので，$f(x)$ はこの区間で減少関数である．また $x=1$ では $f'(1)=0$ であり，またこのとき $f(x)=0$ である．さらに $x>1$ では $f'(x)>0$ であるので，この区間では $f(x)$ は増加関数である．したがって $x>0$ において $f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとり，それ以外では正の値をとる．

したがって，不等式 (2.4.2) が証明された．

(4b.2) つぎに $n=1$ のときは (2.4.3) から

$$f'(x)=0$$

であるから

$$f(x)=C$$

となる．$x=1$ で $f(1)=0$ となるから $C=0$ となるので，

$$f(x)=0$$

であるから，(2.4.2) の等式が成り立っている．

(2.1.1) の中の $n(x-1)x^{n-1}\leq n(x-1)x^n$ は微分を用いないでも 2.2 節で示した方法で証明できる．ここではその証明を繰り返さない．

2.5 数学的帰納法による証明

3 番目の証明として，(2.1.1) の数学的帰納法による証明を考えよう．

(5a) まず $n=1$ のときを証明しよう．このとき証明すべき式は

$$(x-1)=x-1=(x-1)\leq(x-1)x \tag{2.5.1}$$

である．左の二つの恒等式が成り立つことは自明であるから，一番右の不等式を証明すればよい．この場合を 3 つの場合に分けて考えよう．

(5a.1) まず $x<1$ の場合には，この不等式の両辺に $x-1<0$ をかけると不等号の向きが変って

$$x-1<(x-1)x$$

が成り立つ．

(5a.2) つぎに $x=1$ の場合には，この等式の両辺に $x-1=0$ をかけると

$$x-1=(x-1)x$$

が成り立つ．

(5a.3) 最後に $x>1$ の場合には，この不等式の両辺に $x-1>0$ をかけると

$$x-1<(x-1)x$$

これらの式から (2.5.1) が成り立つことが証明された.

(5b) つぎに $n > 1$ に対して不等式

$$n(x-1) \le x^n - 1 \le n(x-1)x^{n-1} \le n(x-1)x^n$$

が $n = k$ のときに成り立つと仮定して，この不等式が $n = k+1$ のときに成り立つことを証明すればよい.

そのとき，不等式を二つにわけて $n(x-1) \le x^n - 1$ と $x^n - 1 \le n(x-1)x^{n-1}$ とにわけて別々に不等式を証明しよう.

(5b.1) まず，$n(x-1) \le x^n - 1$ を証明しよう.

$$P = (k+1)(x-1) - (x^{k+1} - 1), Q = k(x-1) - (x^k - 1)$$

とおく.

$$Q < 0$$

が成り立つとき,

$$P < 0$$

が成り立つことを証明すればよい．このとき

$$P - Q = (x-1)(1-x^k)$$

となる.

$x < 1$ のとき $x - 1 < 0$ かつ $1 - x^k > 0$ であるから，$P - Q < 0$ となり，$P < Q < 0$ である.
$x = 1$ のとき $x - 1 = 0$ かつ $1 - x^k = 0$ であるから，$P - Q = 0$ となり，$P = Q = 0$ である.
$x > 1$ のとき $x - 1 > 0$ かつ $1 - x^k < 0$ であるから，$P - Q < 0$ となり，$P < Q < 0$ である.

したがって，以上 3 つの場合から，$Q \le 0$ のとき，$P \le Q \le 0$ であるから

$$P \le 0$$

が証明された.

(5b.2) つぎに $x^n - 1 \le n(x-1)x^{n-1}$ を証明しよう．上の証明と同様に

$$P = (x^{k+1} - 1) - (k+1)(x-1)x^k, Q = (x^k - 1) - k(x-1)x^{k-1}$$

とおく．上の不等式の証明と同じように

$$Q < 0$$

が成り立つとき,

$$P < 0$$

が成り立つことを証明すればよい．このとき $x > 0$ のとき，常に

$$P - Q = -kx^{k-1}(x-1)^2 \le 0$$

となる.

すなわち，$0 \le x < 1$ のときも $x > 1$ のときも $P - Q < 0$ であり，また $x = 1$ のときは $P - Q = 0$ である.

したがって，$Q \le 0$ が成り立つとき $n = k+1$ に対して，$P \le Q \le 0$ であるから

$$P \le 0$$

が証明された.

まとめると数学的帰納法で不等式

$$n(x-1) \leq x^n - 1 \leq n(x-1)x^{n-1}$$

が証明されたことになる．残っている一番右の不等式は

$$n(x-1)x^{n-1} \leq n(x-1)x^n$$

は 2.2 節の証明で自明であるから，ここでは証明を繰り返さない．

2.6 おわりに

この不等式の証明ではまずはじめに素朴な証明を考えたが，$x < 1$ のときの証明ができなかった．それで不等式が間違っているのかと思って微分による証明と数学的帰納法による証明を考えた．それで不等式は間違っていないことはわかったが，最後まで $x < 1$ の場合の素朴な証明ができず，困って新関さんに電話をかけたところ $x < 1$ のとき $x - 1 < 0$ だと言われてやっと気がついたというお粗末であった．

文献 [2] によれば，不等式の証明のときに使われる方法として

1. 知られた不等式を用いる方法
2. 関数による方法
3. 級数による方法
4. はさみうち法

等があるという．

付録 2.2 に新関，岩崎両氏の論文に出てきた別の不等式の証明をする．

付録 2.1 (問) の解答

$n = 1$ のときに明らかに (2.3.1) が成立する．

つぎに $n = k$ のときに (2.3.1)

$$x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)$$

が成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときに (2.3.1) が成立することを証明すればよい．すなわち，

$$x^{k+1} - 1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)$$

が成り立つことを証明する．

$$\begin{aligned}
x^{k+1} - 1 &= x(x^k - 1) + (x - 1) \\
&= x(x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1) + (x - 1) \\
&= (x-1)[x(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1) + 1] \\
&= (x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)
\end{aligned}$$

したがって，(2.3.1) が $n = k + 1$ のときに証明された．

以上から数学的帰納法によって (2.3.1) が証明された．

付録 2.2

$$(n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1) \leq n(\sqrt[n]{x}-1) \tag{2.A.1}$$

を用いて

$$n(\sqrt[n]{x}-1) \leq x-1 \tag{2.A.2}$$

を証明せよ [3].

（解）(2.A.1) が n についての単調減少であることを示しているということに気づくと証明は不要ということになるが，それに気づかなかったとして証明をする．

(2.A.1) は任意の n に対して成り立っているので，

$$\begin{aligned}
(n-1)(\sqrt[n-1]{x}-1) - n(\sqrt[n]{x}-1) &\geq 0 \\
(n-2)(\sqrt[n-2]{x}-1) - (n-1)(\sqrt[n-1]{x}-1) &\geq 0 \\
&\cdots \\
2(\sqrt[2]{x}-1) - 3(\sqrt[3]{x}-1) &\geq 0 \\
1(x-1) - 2(\sqrt[2]{x}-1) &\geq 0
\end{aligned}$$

上の一連の不等式を辺々ごとに加えると，左辺の一行上の第 1 項とその一行下の第 2 項が打ち消しあって

$$(x-1) - n(\sqrt[n]{x}-1) \geq 0 \tag{2.A.3}$$

が得られる．すなわち (2.A.2) が証明された．

(2011.5.24)

参考文献

[1] 新関章三，岩崎正春，指数関数と対数関数の構成 (I)，数学 · 物理通信，第 1 巻，第 7 号 (2011) 8-21

[2] ローレン ·C· ラーソン，数学発想ゼミナール２,（シュプリンガー · フェアラーク東京，1986）

[3] 新関章三，岩崎正春，指数関数と対数関数の構成 (I)，数学 · 物理通信，第 1 巻，第 7 号 (2011) 19

四元数と空間回転2

The Quaternion and Rotations 2

矢野　忠[4]
Tadashi YANO

3.1　はじめに

エッセイ「四元数と空間の回転 1」 [1] でも述べたようにこの四元数のシリーズでは四元数で空間回転を取り扱うことを最終目標としている．四元数による回転の表現の公式 $u = qv\bar{q}$ をできるだけ納得できるように導くというのがエッセイ 1 の目的であり，その目的はいくぶんかは達成できたが，それでもまだ十分ではなかった．

現在ではベクトルなどの空間回転を取り扱う方法としては

1. ベクトルでの表現
2. マトリックスによる表現
3. 四元数による表現
4. ２回の鏡映変換による表現

の少なくとも４つが知られている．

この第４の表現の存在は前のエッセイ [1] をほぼ書き終ったころにインターネットで知った [2]．このサイトでの説明から四元数による回転の公式 $u = qv\bar{q}$ の由来は２回の鏡映変換で回転を導くことにあるということを知った[5]．

それで，このエッセイではこの２回の鏡映変換による空間の回転について考えてみよう．

3.2　疑問

２回の鏡映変換によって空間の回転を表すというと「そんな馬鹿な」という反応が起こるかもしれない．

なぜなら，一般に空間回転は連続回転であるのに対し，鏡映変換は連続変換ではないからである．鏡映変換のような連続変換でないものを離散変換と呼ぶ．

連続変換は恒等変換から少しづつ連続的に無限小変換を行って，ある有限な変換を得ることができる．ところが離散変換は恒等変換から連続的な変換で得ることはできない．

だが，ここで「**２回の鏡映変換によって**空間回転を表現する」としているところに注目したい．

鏡映をするには平面の指定が必要だが（平面の鏡を想像してほしい），２回の鏡映を行うためには平面（鏡映面という）が２つ必要である．そしてその２つの平面の間の角度は空間回転の角度に応じて連続的な値をとることができる．そのことを考えると空間回転を２回の鏡映変換によって表す可能性があることがわかるだろう．

[4]元愛媛大学，yanotad@earth.ocn.ne.jp
[5]歴史的にこのことが正しいのかどうかはまだ私にはわかっていない．

一回の鏡映変換によって上下，前後，あるいは左右のいずれかが変換されていたものが２回目の鏡映変換によって元にもどるという点にも注意したい．また鏡映変換によってはベクトルの長さは変らない．このことは回転によってベクトルの長さは変らないことと一致している．

3.3　一つの例

３次元空間でのベクトルの鏡映を考える前にウォーミングアップとして，平面上のベクトルの鏡映を考えてみよう [3]．いま図 3.1 を見るとベクトル $\mathbf{a}$ は鏡映変換 σ_1 によって，ベクトル $\mathbf{b}$ に変換される[6]．さらに鏡映変換 σ_2 によってベクトル $\mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{c}$ に変換される．

このときに鏡映面 σ_1 と σ_2 とのなす角を $\theta/2$ とすれば，図 3.1 からベクトル $\mathbf{a}$ は２回の鏡映変換 $\sigma_2\sigma_1$ によって角 θ だけ回転されてベクトル $\mathbf{c}$ となった．このとき，回転の軸は原点 O 上にこの紙面に垂直に立っており，紙面から読者の方に向っている．

回転軸のまわりの回転角が θ であれば，そのときには２つの鏡映面の間の角度をちょうど回転角の半分の $\theta/2$ にとってそれらの鏡映面での２回の鏡映変換すればよい．

この例からわかることは２回の鏡映変換によって回転を表現できることである[7]．

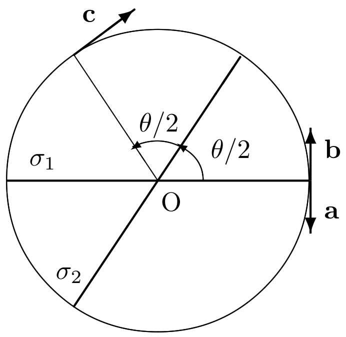

図 3.1: ２つの鏡映 $\sigma_2\sigma_1$ は回転

3.4　２回の鏡映変換による空間の回転

この節では２回の鏡映変換による空間の回転の表現を導く [2] [8]．

3.4.1　前提条件

この節での前提条件をはっきりさせておく．

1. 右手座標系を使用する
2. ベクトルに作用するマトリックスはベクトルに近い右のものからオペレートする．すなわち，$SR\mathbf{r} = S(R\mathbf{r})$
3. 四元数の共役は四元数を表す文字の上に ¯ をつけて，$\bar{q}$ のように表す

[6] 紙面垂直に図 3.1 の直線 σ_1 上に鏡を立ててその鏡に映る像を考えている．以下，鏡映変換を同様に考えている．

[7] [5] の第４章で鏡映変換による回転をとりあつかっている．

[8] Momose は [2] で２回の鏡映変換による空間の回転の表現を [4] から学んだと書いている．この節の説明は基本的に彼らの説明によっているが，その説明のしかたを少し変えたところもある．

3.4.2 ベクトルの鏡映変換

四元数による鏡映変換を考える前に３次元ベクトルの鏡映変換を考えてみよう．

図 3.2 のように平面 σ に対してベクトル $\mathbf{r}$ を鏡映変換して，$\mathbf{r}'$ を得たとすれば，このときにこの鏡映面 σ の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすれば，図 3.2 からわかるように $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ との関係は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} \tag{3.4.1}$$

である．この関係から得られた，$\mathbf{r}'$ は平面 σ に関する $\mathbf{r}$ の鏡映である．

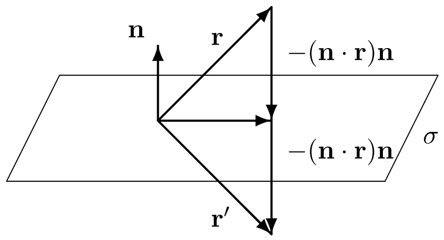

図 3.2: ベクトル $\mathbf{r}$ の平面 σ による鏡映変換

3.4.3 四元数によるベクトルの鏡映変換

前の小節で述べたベクトルの鏡映変換を四元数で表すことを考えてみよう．このとき，エッセイ「四元数と空間回転 1」の付録 3.1 で用いたベクトル記法を用いることにしよう．これは上のベクトルの鏡映変換との対応を明確にするためである．

さて，本格的な議論に入る前に，小手調べとしてつぎのような四元数の計算をしてみよう．

$$\begin{aligned} j(xi+yj+zk)j &= j(xij - y + zkj) \\ &= j(xk - y - zi) \\ &= xjk - yj - zji \\ &= xi - yj + zk \end{aligned}$$

これから $j(xi+yj+zk)j = xi-yj+zk$ であることがわかる．実部のない四元数 $xi+yj+zk$ と $xi-yj+zk$ とを３次元空間に描いてみれば，図 3.2 からもわかるように $xi-yj+zk$ は $xi+yj+zk$ の j に垂直な面に関して鏡映となっている．このことから N を一般の実部のない単位四元数として

$$N(xi+yj+zk)N$$

は N に垂直な面に関して，$xi+yj+zk$ の鏡映を与えるのかも知れないという推測が生じる．

その推測を頭の片隅におきながら，考えてみよう．

実部のない四元数 R と N を考える．ここで，R は鏡映の対象となる位置ベクトル $\mathbf{r}$ を表し，N は鏡映面に垂直な法線単位ベクトルを表し，これは単位四元数である．

$$R = (0, \mathbf{r}) \tag{3.4.2}$$

$$N = (0, \mathbf{n}) \tag{3.4.3}$$

いま四元数の積 NR を考えると N と R とは実部をもたないから，

$$NR = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{n}\times\mathbf{r} \tag{3.4.4}$$

となる．これは四元数の積の公式（[1] の (3.5)）

$$NR = N_0R_0 - \mathbf{N}\cdot\mathbf{R} + N_0\mathbf{R} + R_0\mathbf{N} + \mathbf{N}\times\mathbf{R}$$

を思い出し，この式で $N_0 = 0, R_0 = 0, \mathbf{N} = \mathbf{n}, \mathbf{R} = \mathbf{r}$ とおけば得られる．

(3.4.4) を (3.4.1) と比べると，その第１項に $-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ という因子は出てくるが，このままではベクトル $\mathbf{n}$ はかかっていない．それでこのベクトルが出てくるようにするためには，$Q = NR$ の後ろからもう一度 N をかけてやればよい[9]．その演算を実際に行ってみよう．

$$\begin{aligned}
Q &= Q_0 + \mathbf{Q}\\
Q_0 &= -\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\\
\mathbf{Q} &= \mathbf{n}\times\mathbf{r}\\
N &= N_0 + \mathbf{N}\\
N_0 &= 0\\
\mathbf{N} &= \mathbf{n}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
NRN &= QN\\
&= Q_0N_0 - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{N} + Q_0\mathbf{N} + N_0\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\times\mathbf{N}\\
&= -(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ と $\mathbf{n}$ とは直交するから

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{3.4.6}$$

である．また，

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n} = \mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} \tag{3.4.7}$$

となるので，

$$\mathbf{r}' \equiv NRN = \mathbf{r} - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} \tag{3.4.8}$$

となる[10]

これは (3.4.1) の $\mathbf{r}$ の鏡映 $\mathbf{r}'$ が四元数の積

$$NRN$$

によって得られたことを示している．

3.4.4　２回の鏡映変換による空間回転

空間回転を２回の鏡映変換によって表現することを考えよう．図 3.3 に示したように $\mathbf{r}$ を鏡映面 σ で鏡映変換すると $\mathbf{r}'$ が得られる．そのときの鏡映面 σ の法線は $\mathbf{n}$ である．こうして得られた $\mathbf{r}'$ をその法線が $\mathbf{u}$ の鏡映面 τ でさらに鏡映変換すると $\mathbf{r}''$ が得られる． 図 3.3 でいま紙面内にベクトル $\mathbf{r}$ と法線ベクトル $\mathbf{n}$ とをとれば，

---

[9] この段階ではまだ (3.4.1) の第２項の $-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ の因子 2 がどこから出てくるかは見通せていない．単に $-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ という項を出すことしか頭にはない．後の計算からわかるように，$(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n}$ からもう一つの $-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ の項がでてくる．

[10] $(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = 0$ と $(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n} = \mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ が成り立つことは付録 3.1 に示すが，ベクトル代数の公式を用いて導くのが普通であろう．

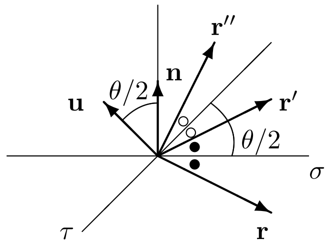

図 3.3: ベクトル $\mathbf{r}$ の 2 回の鏡映変換による回転

鏡映面 σ はこの紙面に垂直であり，$\mathbf{r}'$ はこの紙面内にある．さらに，二つ目の鏡映面 τ も同様にこの紙面に垂直であり，だからその鏡映面 τ の法線ベクトル $\mathbf{u}$ もこの同じ紙面内にある．したがって，ベクトル $\mathbf{r}''$ もこの紙面内にある．

この二つの鏡映面のなす角，すなわち，法線ベクトル $\mathbf{n}$ ともう一つの法線ベクトル $\mathbf{u}$ のなす角を $\theta/2$ とすれば，図 3.3 からわかるようにベクトル $\mathbf{r}''$ は $\mathbf{r}$ を原点のまわりに角度 θ の回転をして得られたものと同一である．

このとき回転軸は法線ベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{u}$ とに垂直である，ベクトル $\mathbf{n}\times\mathbf{u}$ となっている．すなわち，回転軸は $\mathbf{n}\times\mathbf{u}$ であり，その方向はこの紙面に垂直である．そして，この回転軸のまわりの回転角は 2 つの鏡映面のなす角の 2 倍である．

こうして，２回の鏡映変換によって任意の角の空間回転を表すことができる．

この 2 度の鏡映変換を四元数を用いて表現すれば，

$$R' = NRN$$
$$R'' = UR'U$$

であるから，

$$\begin{aligned}R'' &= UR'U \\ &= U(NRN)U \\ &= (UN)R(NU) \\ &= (-UN)R(-NU) \qquad (3.4.9)\end{aligned}$$

ここで (3.4.9) の最後の行で UN および NU の前の負号は都合上入れたが，全体での等号が成り立つことは明らかであろう．U と N とが実部のない四元数であったから，積 UN および NU はそれぞれ

$$UN = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{n}\times\mathbf{u}$$
$$NU = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{n}\times\mathbf{u}$$

となり，したがって

$$-UN = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{n}\times\mathbf{u}$$
$$-NU = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{n}\times\mathbf{u}$$

となる．これらの式から，$-UN$ と $-NU$ とが互いに共役であることがわかる[11]．そこで $-NU = \overline{(-UN)}$ と表せるから

$$R'' = (-UN)R\overline{(-UN)} \qquad (3.4.10)$$

[11] この点について必要がないかもしれないが，付録 3.2 で説明をする．

と表すことができる．いま $\mathbf{n}$ と $\mathbf{u}$ はそれぞれ単位ベクトルで，$\mathbf{n}$ と $\mathbf{u}$ のなす角を $\theta/2$ としたから

$$-UN = \cos(\theta/2) + \mathbf{w}\sin(\theta/2) \equiv Q, \quad |\mathbf{w}| = 1 \tag{3.4.11}$$

となる．ここで $\mathbf{w}$ は

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{u}}{|\mathbf{n}\times\mathbf{u}|} = ai + bj + ck, \quad a^2+b^2+c^2 = 1, \quad |\mathbf{n}\times\mathbf{u}| = \sin(\theta/2)$$

で定義される，ベクトル $\mathbf{n}\times\mathbf{u}$ の方向の単位ベクトルであり，また Q は単位四元数となっている．したがって，四元数の積による 2 回の鏡映変換は

$$R'' = QR\bar{Q} \tag{3.4.12}$$

と表される．

ここで注意したいことは，四元数による回転の表現では回転角は $\theta/2$ ではなく，実は θ である．それは図 3.3 からわかるように 2 回の鏡映変換によって $\mathbf{r}$ が $\mathbf{r}''$ に変換され，結果として回転軸 $\mathbf{w}$ のまわりの角 θ の回転となっているからである．

念のために申し添えると，この角 θ は回転をベクトルで表したときの回転軸のまわりの回転角を表しており，マトリックスによる回転の表示に現れる，Euler 角の一つを表している訳ではない．

また回転軸の方向を決めるために 2 つのパラメータが必要であるが，それは単位四元数を表す，3 つのパラメータ a, b, c が，$\mathbf{w}$ が単位四元数であるために，$a^2+b^2+c^2 = 1$ の条件があり，したがって独立なパラメータは 2 つとなる．このことは 3 次元の極座標系で方位角 ϕ と極角 θ が決まれば，原点 O を中心とする半径 r の球面上の点を決められること，すなわち，原点から空間のある方向を指定できることに対応している．

3.5 おわりに

このエッセイではこの 2 回の鏡映変換による空間の回転について述べた．四元数による回転の表現の公式 $u = qv\bar{q}$ の由来がわかったわけであるが，歴史的に Hamilton がこの考えで導いたのかはまだ調べていない．

さて，先回と今回とでようやく四元数と回転の関係が明らかになってきた．次回以降で前節の終わりにちょっと触れた，よく知られた回転を扱う方法，すなわち，回転のベクトルによる表現や Euler 角によるマトリックスを用いた表現，について述べることにしたい．

付録 3.1 (3.4.6) と (3.4.7) の導出

ベクトル代数を知っていれば，3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ について $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ はベクトルのスカラー 3 重積といわれるもので，この 3 つのベクトルでつくられる平行六面体の体積 V を表すことを知っているであろう．

ところで，この 3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の中の二つが同じものであれば，本来の平行六面体が形成されず，その体積 $V = 0$ となる．

またはつぎのように考えてもよい．

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

を用いて計算すれば，3 次の行列式はいずれかの 2 つの行が等しければ，行列式 $= 0$ となるので，

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{3.4.6}$$

が成り立つといってもよい．

つぎに，ベクトルのベクトル 3 重積の公式から

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

であるから，$\mathbf{A}=\mathbf{n},\mathbf{B}=\mathbf{r},\mathbf{C}=\mathbf{n}$ とおけば

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} \tag{3.4.7}$$

が得られる．

(3.4.6), (3.4.7) の関係は [2], [4] で図示されているように，図を描いて直観的に求めることもできる．しかし， [2] をインターネットで検索すれば，簡単にその図を見ることができるので，その説明と図はここでは省略しよう．

付録 3.2　四元数の積の順序の入れ替えと共役四元数

$$-UN=\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{n}\times\mathbf{u}$$
$$-NU=\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{n}\times\mathbf{u}$$

であるから，すぐに $-NU=\overline{(-UN)}$ であることがわかるのだが，ここでもう一度 [1] でした計算を思い出しておこう．

いま U,N を実部のない四元数とする．すなわち，

$$U=(0,\mathbf{u})=(0,u_1i+u_2j+u_3k)$$

$$N=(0,\mathbf{n})=(0,n_1i+n_2j+n_3k)$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}UN&=(u_1i+u_2j+u_3k)(n_1i+n_2j+n_3k)\\&=-(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)+(u_2n_3-u_3n_2)i+(u_3n_1-u_1n_3)j+(u_1n_2-u_2n_1)k\end{aligned}$$

したがって，

$$-UN=(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)+(n_2u_3-n_3u_2)i+(n_3u_1-n_1u_3)j+(n_1u_2-n_2u_1)k \tag{3.A.1}$$

となる．

$-NU$ はこの (3.A.1) で (u_1,u_2,u_3) と (n_1,n_2,n_3) とを入れ替えてやれば，求められる．すなわち，

$$\begin{aligned}-NU&=(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)-(n_2u_3-n_3u_2)i-(n_3u_1-n_1u_3)j-(n_1u_2-n_2u_1)k\\&=(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)+(n_2u_3-n_3u_2)(-i)+(n_3u_1-n_1u_3)(-j)+(n_1u_2-n_2u_1)(-k)\\&=\overline{(-UN)}\end{aligned} \tag{3.A.2}$$

このように実部のない二つの四元数の積の順序を入れ替えるとその元の積の共役が得られることが重要なキーとなっている．

(2012. 9. 21)

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数と空間回転 1，　数学・物理通信　第 2 巻，第 2 号 (2012.6) 19-29

[2] momose-d.cocolog-nifty.com/Quaternions_ Rotations_ Meaning.pdf

[3] S. L. Altmann,“ Rotations, Quaternions and Double Groups ”(Dover Pub., 2005) 34

[4] 河野俊丈,「新版　組みひもの数理」(遊星社，2009） 105-120

[5] L. C. Biedenharn and J. D. Louck,“ Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application ” (Addison-Wesley, 1981) 180-204

編集後記

10 月になって，吹く風もさすがに涼しくなってきた．皆様にはご健勝のことと存じます．

2 巻 4 号の積み残しの原稿の一部を遅ればせながらようやく 2 巻 5 号として刊行する．今回は 3 編の論文が掲載された．

1 番目は数学の一部としての集合算について考えてみた． これも以前 (l) としてこの通信で取り上げてもらったが，これは主に有限算についてであった． 今回の (ll) では無限の算法を扱った．そこでは集合列の収束問題が現れる．この際，集合列と実数列との違いが興味深い．しかし，Cauchy (コーシー 1789-1857) 列 $\varepsilon-\delta$ 法的な考えが集合算の世界にも存在するのである．

2 番目の論文は，不等式：$a^n-b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$，但し a,b は任意の正の実数で n は正の整数である，を $a=x, b=1$ の場合に限り多くの立場からその証明を試みた力作である．この不等式は一見きわめて単純だが直接，間接の両面においてその応用範囲が驚くほど広い．今後ともこの不等式について注目して行きたい．

3 番目の論文は Hamilton (ハミルトン 1805-1865) の有名な 4 元数についてであるが，これは以前も何度かこの通信に載ったシリーズの一部である．四元数は数学においても物理においても重要であるが，今回は物理学の視点から詳しく解説を試みられている． 今後とも新しい考えのもとでの説明を期待したい．

以上，投稿論文の解説のようになってしまったが，ともかくも決して途絶えることなく多くの研究者のご参加を得て，このサーキュラーがこれからも有意義であり続けられるようにと願っている．

なお，今回の発刊も編者の一人である新関の都合で遅れ，皆様方にご迷惑をかけてしまったことをお詫び申し上げます．(新関章三)