

# 数学・物理通信

2卷6号 2012年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2012年12月10日

# 目次

ダイログ関数の多変数恒等式と双対共鳴模型	<b>3</b>
1.1 ダイログ関数とその恒等式	3
1.2 1,2,3 変数恒等式の証明	4
1.3 双対共鳴模型から	6
1.4 ダイログ関数の多変数恒等式	8
1.5 双対変換の表現	10
1.6 ダイログ関数恒等式の複比による表示	16
グリーン関数入門	<b>18</b>
2.1 はじめに	18
2.2 グリーン関数の簡単な例	18
2.3 積分因子を用いた解	19
2.4 グリーン関数による解	19
2.5 おわりに	21
編集後記	<b>28</b>

# Contents

1. Noboru NAKANSHI : Many-Variable Identities for the Dilogarithm and the Dual Resonance Model
2. Tadashi YANO : Introduction to Green Functions
3. Tadashi YANO : Editorial Comments

# ダイログ関数の多変数恒等式と双対共鳴模型

## Many-Variable Identities for the Dilogarithm and the Dual Resonance Model

中西 襄<sup>1</sup>

Noboru NAKANISHI<sup>2</sup>

### 1.1 ダイログ関数とその恒等式

ダイログ関数 (Spence 関数) [1] は, 簡単な積分で表される関数だが, 初等関数では書けないため応用上重要である.

定義式は

$$Li_2(x) \equiv - \int_0^x dx' \frac{\log(1-x')}{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (1.1.1)$$

で, とくに

$$Li_2(0) = 0, \quad Li_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.1.2)$$

Rogers の対称化ダイログ関数は

$$L(x) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^x dx' \left( \frac{\log(1-x')}{x'} + \frac{\log x'}{1-x'} \right) = Li_2(x) + \frac{1}{2} \log x \log(1-x) \quad (1.1.3)$$

で与えられる<sup>3</sup>. 付加項は  $x = 0, 1$  で 0 だから, (1.1.2) より

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.1.4)$$

ダイログ関数が満たす恒等式は, 対称化ダイログ関数にしておくと,  $\log$  の積の項が現れなくて好都合である. 古くから次の恒等式が知られている.

1) Euler の恒等式

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.1.5)$$

2) Abel の恒等式, またはペンタゴン恒等式

$$L(x) + L(y) + L(1-xy) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = \frac{\pi^2}{2}; \quad (1.1.6)$$

<sup>1</sup> 京都大学名誉教授, nbr-nak@trio.plala.or.jp

<sup>2</sup> Professor Emeritus, Kyoto University

<sup>3</sup> 複素変数のときには, 実軸上  $[1, +\infty)$  と  $(-\infty, 0]$  とにカットを入れる.

あるいは、後ろの 3 項について Euler の恒等式を用いて変形した式<sup>4</sup>

$$L(x) + L(y) = L(xy) + L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) + L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right). \quad (1.1.7)$$

3) 3 変数恒等式は、1898 年に Mantel によって提起された [1] .

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{(1-x)(1-y)}{(1-v)(1-w)}\right) + L\left(\frac{1-x}{1-vy^{-1}}\right) + L\left(\frac{1-x}{1-wy^{-1}}\right) \\ & - L\left(\frac{1-v}{1-vy^{-1}}\right) - L\left(\frac{1-w}{1-wy^{-1}}\right) + L(x) + L(y) - L(v) - L(w) = L(1). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

4 変数使っているが、拘束条件  $xy = vw$  がついているので独立な変数は 3 つである . この 3 変数恒等式は構成の規則性がよくわからないので、4 変数以上には拡張しにくいと思われる .

より自然な 3 変数恒等式として、次のものを提起したい (3 変数のどれかを 0 とおくと、2 変数恒等式に帰着することが自明):

$$\begin{aligned} & L(x) + L(y) + L(z) + L(1-xyz) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-z}{1-yz}\right) \\ & + L\left(\frac{1-xy}{1-xyz}\right) + L\left(\frac{1-yz}{1-xyz}\right) + L\left(\frac{(1-y)(1-xyz)}{(1-xy)(1-yz)}\right) = \pi^2. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

これだと  $L$  の中の変数は、まさしく双対共鳴模型 (Veneziano 模型) [2] [3] で現れる変数であるので、任意個数の変数の場合に拡張が可能となる . ダイログ関数は双対共鳴模型と密接に関連していることさえわかれば、恒等式の拡張は容易である . 以下、双対共鳴模型がいかにダイログ関数の恒等式と相性がよいかを示そう .

## 1.2 1,2,3 変数恒等式の証明

一般化へのウォーミングアップとして、1,2,3 変数の恒等式の証明を与えておこう . 結果の式がわかっているれば、証明は初等的である .  $x, y, z$  の代わりに  $v_1, v_2, v_3$  と書く .

1) 1 変数の場合

$$S_4(v_1) \equiv L(v_1) + L(1-v_1) = L(1). \quad (1.2.1)$$

[証明] 微分すれば

$$-2S_4'(v_1) = \frac{1}{v_1} \log(1-v_1) + \frac{1}{1-v_1} \log v_1 - \frac{1}{1-v_1} \log v_1 - \frac{1}{v_1} \log(1-v_1) = 0. \quad (1.2.2)$$

積分定数は  $S_4(0) = L(1)$  .

2) 2 変数の場合

$$S_5(v_1, v_2) \equiv L(v_1) + L(v_2) + L(1-v_1v_2) + L\left(\frac{1-v_1}{1-v_1v_2}\right) + L\left(\frac{1-v_2}{1-v_1v_2}\right) = 3L(1). \quad (1.2.3)$$

[証明]

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial}{\partial v_1} S_5(v_1, v_2) &= \frac{1}{v_1} \log(1-v_1) + \frac{1}{1-v_1} \log v_1 - \frac{1}{v_1} \log(1-v_1v_2) - \frac{v_2}{1-v_1v_2} \log(v_1v_2) \\ &+ \left(\frac{v_2}{1-v_1v_2} - \frac{1}{1-v_1}\right) \log \frac{v_1(1-v_2)}{1-v_1v_2} - \left(\frac{v_2}{1-v_1v_2} + \frac{1}{v_1}\right) \log \frac{1-v_1}{1-v_1v_2} \\ &+ \frac{v_2}{1-v_1v_2} \log \frac{v_2(1-v_1)}{1-v_1v_2} + \left(-\frac{v_2}{1-v_1v_2} + \frac{1}{1-v_1}\right) \log \frac{1-v_2}{1-v_1v_2}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

<sup>4</sup>(1.1.7) の右辺の後ろの 2 項がなければ、対数関数に対する恒等式になる . なお、区間  $(0, 1)$  で (1.1.5) と (1.1.7) の両方を満たす  $C^3$  級の関数は、ダイログ関数に限られるということである .

$1/v_1, 1/(1-v_1), v_2/(1-v_1v_2)$  の係数をそれぞれまとめれば, すべて 0 になることがわかる. 積分定数は  $v_1 = 0$  とおけば,

$$S_5(0, v_2) = L(0) + L(v_2) + L(1) + L(1) + L(1-v_2) = S_4(v_2) + 2L(1) = 3L(1). \quad (1.2.5)$$

3) 3変数の場合

$$\begin{aligned} S_6(v_1, v_2, v_3) &\equiv L(v_1) + L(v_2) + L(v_3) + L(1-v_1v_2v_3) + L\left(\frac{1-v_1}{1-v_1v_2}\right) + L\left(\frac{1-v_3}{1-v_2v_3}\right) \\ &+ L\left(\frac{1-v_1v_2}{1-v_1v_2v_3}\right) + L\left(\frac{1-v_2v_3}{1-v_1v_2v_3}\right) + L\left(\frac{(1-v_2)(1-v_1v_2v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)}\right) = 6L(1). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

[証明]

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial}{\partial v_1} S_6(v_1, v_2, v_3) &= \frac{1}{v_1} \log(1-v_1) + \frac{1}{1-v_1} \log v_1 \\ &- \frac{1}{v_1} \log(1-v_1v_2v_3) - \frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} \log(v_1v_2v_3) \\ &+ \left(\frac{v_2}{1-v_1v_2} - \frac{1}{1-v_1}\right) \log \frac{v_1(1-v_2)}{1-v_1v_2} - \left(\frac{v_2}{1-v_1v_2} + \frac{1}{v_1}\right) \log \frac{1-v_1}{1-v_1v_2} \\ &+ \left(\frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} - \frac{v_2}{1-v_1v_2}\right) \log \frac{v_1v_2(1-v_3)}{1-v_1v_2v_3} \\ &\quad - \left(\frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} + \frac{1}{v_1}\right) \log \frac{1-v_1v_2}{1-v_1v_2v_3} \\ &+ \frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} \log \frac{v_2v_3(1-v_1)}{1-v_1v_2v_3} + \left(-\frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} + \frac{1}{1-v_1}\right) \log \frac{1-v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} \\ &+ \left(\frac{v_2}{1-v_1v_2} - \frac{v_2v_3}{1-v_1v_2v_3}\right) \log \frac{v_2(1-v_1)(1-v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)} \\ &\quad + \left(-\frac{v_2}{1-v_1v_2} + \frac{1}{1-v_1}\right) \log \frac{(1-v_2)(1-v_1v_2v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$1/v_1$  の係数:

$$\log(1-v_1) - \log(1-v_1v_2v_3) - \log \frac{1-v_1}{1-v_1v_2} - \log \frac{1-v_1v_2}{1-v_1v_2v_3} = 0. \quad (1.2.8)$$

$1/(1-v_1)$  の係数:

$$\log v_1 - \log \frac{v_1(1-v_2)}{1-v_1v_2} + \log \frac{1-v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} + \log \frac{(1-v_2)(1-v_1v_2v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)} = 0. \quad (1.2.9)$$

$v_2/(1-v_1v_2)$  の係数:

$$\begin{aligned} &\log \frac{v_1(1-v_2)}{1-v_1v_2} - \log \frac{1-v_1}{1-v_1v_2} - \log \frac{v_1v_2(1-v_3)}{1-v_1v_2v_3} \\ &+ \log \frac{v_2(1-v_1)(1-v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)} - \log \frac{(1-v_2)(1-v_1v_2v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$v_2v_3/(1-v_1v_2v_3)$  の係数:

$$\begin{aligned} &-\log(v_1v_2v_3) + \log \frac{v_1v_2(1-v_3)}{1-v_1v_2v_3} - \log \frac{1-v_1v_2}{1-v_1v_2v_3} + \log \frac{v_2v_3(1-v_1)}{1-v_1v_2v_3} \\ &-\log \frac{1-v_2v_3}{1-v_1v_2v_3} - \log \frac{v_2(1-v_1)(1-v_3)}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

すなわち 0 である. 積分定数は,  $v_1 = 0$  とおけば,

$$\begin{aligned} S_6(0, v_2, v_3) &= L(0) + L(v_2) + L(v_3) + L(1) + L(1) + L\left(\frac{1-v_3}{1-v_2v_3}\right) \\ &\quad + L(1) + L(1-v_2v_3) + L\left(\frac{1-v_2}{1-v_2v_3}\right) \\ &= S_5(v_2, v_3) + 3L(1) = 6L(1). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

### 1.3 双対共鳴模型から

本節では、双対共鳴模型でよく知られた事柄のうち、ダイログ関数の恒等式に関係してくる結果をまとめておく。

$\phi^3$  理論に現れるファインマン・グラフ<sup>5</sup>で、とくに樹木を考える。樹木とは、ループを含まない連結グラフである。すなわち、どの2頂点に対してもそれらを結ぶパスがただ1つあるようなグラフである。

$\phi^3$  理論の樹木ファインマン・グラフでは、外線の数を  $n (\geq 3)$  とすると、その内線の本数は  $n - 3$  であることが数学的帰納法によりすぐに示される。樹木は必ず線のクロスなしに平面上に描くことができる。樹木ファインマン・グラフでは、外線は無限遠にまで延びている線として描くものとする。もちろんその描き方は一通りではない。異なる描き方の数は、相異なる円順列の数

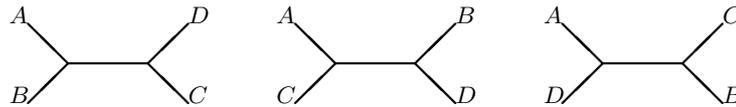
$$N_V(n) = \frac{1}{2}(n-1)! \quad (1.3.1)$$

に等しい。ファインマン・グラフで外線の円順列の区別をしたことを特に強調したい場合、「円順列ファインマン・グラフ」と呼ぶ。

$n$  本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフの数は

$$N_T(n) = (2n-5)!! = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!} \quad (1.3.2)$$

で与えられる<sup>6</sup>。ここに記号!! は奇数のみの積を表す。例えば  $n = 4$  のとき、次図のように  $N_T(4) = 3$  である。



特定の樹木ファインマン・グラフに対する円順列ファインマン・グラフの数は、

$$\mathfrak{N}_T(n) = 2^{n-3} \quad (1.3.3)$$

で与えられる<sup>7</sup>。特定の円順列で実現できる樹木ファインマン・グラフの数を  $\mathfrak{N}_V(n)$  と書くと、 $n$  本の外線を持つ円順列樹木ファインマン・グラフの総数は、2通りの式  $N_V(n)\mathfrak{N}_V(n)$  と  $N_T(n)\mathfrak{N}_T(n)$  で書けるから、両者は等しいはずである。すなわち

$$N_V(n)\mathfrak{N}_V(n) = N_T(n)\mathfrak{N}_T(n) \quad (1.3.4)$$

である。これに上で得た結果 (1.3.1)-(1.3.3) を代入すれば、

$$\mathfrak{N}_V(n) = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} \quad (1.3.5)$$

であることが分かる [4]。この  $\mathfrak{N}_V(n)$  は、樹木の双対図を考えれば、凸  $n$  角形の3角形分割の仕方の数に等しいことがわかる。それはまた、 $N = n - 2$  の Catalan 数に等しい。

以下、外線の円順列は特定のものに固定する。内線を  $l_j (j = 1, 2, \dots, n-3) (n \geq 4)$  とする。円順列ファインマン・グラフの  $n$  本の外線の集合を  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  とする。 $P_+$  と  $P_-$  が、円順列と矛盾しな

<sup>5</sup> どの頂点もすべて3本の線の端点になっているので、グラフ理論における同次グラフに似ているが、ファインマン・グラフでは内線と呼ばれる2頂点を結ぶ線のほかに、外線と呼ばれる端点が1頂点しかない線があり、外線を無視すると同次グラフにはならない。

<sup>6</sup> 証明は数学的帰納法による。まず、 $N_T(3) = 1$  であることは明らかである。従って、 $N_T(n+1) = (2n-3)N_T(n)$  であることを示せばよい。 $n$  本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフにおいて、その内線、外線のいずれかに新しい外線を添加すれば  $n+1$  本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフが得られる。従って、その仕方の数は  $(n-3) + n = 2n-3$  であるから、この漸化式が成り立つ。

<sup>7</sup> 証明はやはり数学的帰納法による。まず、 $\mathfrak{N}_T(3) = 1$  であることは明らかである。従って  $\mathfrak{N}_T(n+1) = 2\mathfrak{N}_T(n)$  であることを示せばよい。このことは、平面上に新しく  $n+1$  番目の外線を描くとき元のグラフの線のどちらかの側に描くわけだから、描き方はつねに2通りであることから従う。

い、共通部分を持たない  $A$  の 2 つの部分集合であるとき、 $A$  の分割  $P = (P_+|P_-)$  を「チャンネル」という。 $P_+ = \{A_j, A_{j+1}, \dots, A_k\}$ ,  $P_- = \{A_{k+1}, \dots, A_n, A_1, A_2, \dots, A_{j-1}\}$  なるとき、このチャンネルを  $P_{j,k+1}$  と書くことにする。 $P_{j,k+1} = P_{k+1,j}$  なので、原則として小さい方の添え字を前に書く。

2 つのチャンネル  $P$  と  $\bar{P}$  が「交差する」とは、4 つの集合  $P_+ \cap \bar{P}_+$ ,  $P_+ \cap \bar{P}_-$ ,  $P_- \cap \bar{P}_+$ ,  $P_- \cap \bar{P}_-$  のどれもが空でないことをいう。 $P_{j,k+1}$  と  $P_{j',k'+1}$  は、 $j < j' < k+1 < k'+1$  または  $j' < j < k'+1 < k+1$  ならば交差する。 $P_+$  と  $P_-$  のいずれか一方に属する外線の数が 0 または 1 のものは交差するチャンネルがないので、以下考えないことにする。交差するチャンネルが少なくとも 1 つある  $P$  の全体を、 $\mathcal{P}$  と書く。 $\mathcal{P}$  の要素の数は  $n$  角形の対角線の数に等しく、 $\frac{1}{2}n(n-3)$  である。また  $P_{j,k+1} \in \mathcal{P}$  において、 $2 \leq (k+1) - j \leq n-2$  である。

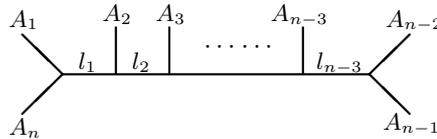
特定の円順列のもとで許されるすべてのチャンネル  $P$  に対し、非負実変数  $u_P$  を対応させる。これらの変数は、

$$u_P = 1 - \prod_{\bar{P}} u_{\bar{P}} \quad (1.3.6)$$

を満足するものとする。ただし、積は  $P$  と交差するすべてのチャンネルにわたる。これを「交差対称方程式」と呼ぶ。簡単のため、 $u_{P_{j,k+1}}$  は、添え字  $P$  を省いて  $u_{j,k+1}$  と記す。

交差対称方程式は  $\frac{1}{2}n(n-3)$  元連立非線形代数方程式だが、解は  $n-3$  個の任意パラメータ (実非負) の有理関数としてあらわに与えられる。その表式は、樹木ファインマン・グラフ  $T$  を与えることに決まる。すなわち、 $n-3$  個のパラメータは、 $T$  の内線によって特徴づけられるのである。

本節では  $T$  として多重辺縁グラフ (multiperipheral graph) を採った場合を考える。多重辺縁グラフとは、内線がすべて 1 直線上に並び、かつ円順列に矛盾することなくすべての外線をその一方側に描くことが可能なような樹木ファインマン・グラフである。具体的に描けば、次図およびその外線の名前を巡回的に廻したもの (合計  $n$  個) である。



樹木ファインマン・グラフ  $T$  の内線の 1 つを切断すると、 $T$  は 2 つの連結ファインマン・グラフに分かれる。それに応じて、外線の集合  $A$  も 2 つに分割される。たとえば上図において、内線  $l_j$  を切断すれば、 $A$  は  $\{A_n, A_1, A_2, \dots, A_j\}$  と  $\{A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_{n-1}\}$  とに分けられる。従って上図では、内線  $l_j$  はチャンネル  $P_{j+1,n}$  に対応する。もちろん、この対応は  $T$  の選択に依存する。一般に、1 つの樹木のどの 2 つの内線に対応する 2 つのチャンネルも交差することはない。

さて、交差対称方程式 (1.3.6) の、上図の多重辺縁グラフに対応する解を与えよう。内線  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-3$ ) に対応するチャンネル  $P_{j+1,n}$  は互いに交差しないので、 $u_{j+1,n}$  を独立なパラメータ  $v_j$  (許容範囲は  $0 \leq v_j \leq 1$  である。) として選べる。すなわち、

$$u_{j+1,n} = v_j \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n-3 \quad (1.3.7)$$

と置く。このとき、それ以外の変数  $u_{j,k+1}$  ( $j < k \leq n-2$ ) の一般形は、次の式で与えられることが知られている [5]

$$u_{j,k+1} = \frac{\left(1 - \prod_{i=j}^{k-1} v_i\right) \left(1 - \prod_{i=j-1}^k v_i\right)}{\left(1 - \prod_{i=j-1}^{k-1} v_i\right) \left(1 - \prod_{i=j}^k v_i\right)} \quad \text{with } v_0 \equiv v_{n-2} \equiv 0. \quad (1.3.8)$$

注意すべきは付帯条件式で、これにより  $j = 1$  のとき分子の第 2 因子と分母の第 1 因子が 1、 $k+1 = n-1$  のとき分子の第 2 因子と分母の第 2 因子が 1 になる。

分かりにくいかも知れないので、具体例を示しておこう。

$n = 4$  のとき :

$$\begin{aligned} u_{24} &= v_1 = 1 - u_{13}, \\ u_{13} &= 1 - v_1 = 1 - u_{24}. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

$n = 5$  のとき :

$$\begin{aligned} u_{25} &= v_1 = 1 - u_{13}u_{14}, \\ u_{35} &= v_2 = 1 - u_{14}u_{24}, \\ u_{14} &= 1 - v_1v_2 = 1 - u_{25}u_{35}, \\ u_{13} &= \frac{1 - v_1}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{24}u_{25}, \\ u_{24} &= \frac{1 - v_2}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{13}u_{35}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

$n = 6$  のとき :

$$\begin{aligned} u_{26} &= v_1 = 1 - u_{13}u_{14}u_{15}, \\ u_{36} &= v_2 = 1 - u_{14}u_{15}u_{24}u_{25}, \\ u_{46} &= v_3 = 1 - u_{15}u_{25}u_{35}, \\ u_{15} &= 1 - v_1v_2v_3 = 1 - u_{26}u_{36}u_{46}, \\ u_{13} &= \frac{1 - v_1}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{24}u_{25}u_{26}, \\ u_{35} &= \frac{1 - v_3}{1 - v_2v_3} = 1 - u_{14}u_{24}u_{46}, \\ u_{14} &= \frac{1 - v_1v_2}{1 - v_1v_2v_3} = 1 - u_{25}u_{26}u_{35}u_{36}, \\ u_{25} &= \frac{1 - v_2v_3}{1 - v_1v_2v_3} = 1 - u_{13}u_{14}u_{36}u_{46}, \\ u_{24} &= \frac{(1 - v_2)(1 - v_1v_2v_3)}{(1 - v_1v_2)(1 - v_2v_3)} = 1 - u_{13}u_{35}u_{36}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

これらの式 (1.3.9)-(1.3.11) を見れば, ダイログ関数の恒等式 (1.2.1),(1.2.3),(1.2.6) との関連性は明らかである。

## 1.4 ダイログ関数の多変数恒等式

[定理 1]

$$S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) \equiv \sum_{j=1}^{n-3} L(v_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq n-2} L(u_{j,k+1}), \quad (1.4.1)$$

$$u_{j,k+1} \equiv \frac{(1 - \prod_{i=j}^{k-1} v_i)(1 - \prod_{i=j-1}^k v_i)}{(1 - \prod_{i=j-1}^{k-1} v_i)(1 - \prod_{i=j}^k v_i)} \quad \text{with } v_0 \equiv v_{n-2} \equiv 0 \quad (1.4.2)$$

とおけば, 次の恒等式が成立する :

$$S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) = \frac{(n-2)(n-3)}{12} \pi^2. \quad (1.4.3)$$

[証明]  $n$  に関する数学的帰納法を用いる.  $n = 4$  のときは (1.2.1) により OK だから,  $n \geq 5$  とする. (1.4.1) を

$$\begin{aligned} S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) &= \sum_{j=1}^{n-4} L(v_j) + L(v_{n-3}) + \sum_{1 \leq j < k \leq n-4} L(u_{j,k+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-4} L(u_{j,n-2}) + \sum_{j=1}^{n-3} L(u_{j,n-1}) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

と書く.  $k \leq n-4$  では,  $u_{j,k+1}$  は  $S_{n-1}$  のそれと同じ式になる. しかし  $S_{n-1}$  では付帯条件が  $v_{n-2} \equiv 0$  ではなく,  $v_{n-3} \equiv 0$  なので,  $S_{n-1}$  の  $u_{j,n-2}$  は  $S_n$  のそれと同じでない. 区別のため前者を  $\tilde{u}_{j,n-1}$  と書けば, 定義式から

$$\tilde{u}_{j,n-2} = \frac{1 - \prod_{i=j}^{n-4} v_i}{1 - \prod_{i=j-1}^{n-4} v_i} \quad (1.4.5)$$

であるが, これと

$$u_{j,n-1} = \frac{1 - (\prod_{i=j}^{n-4} v_i) v_{n-3}}{1 - (\prod_{i=j-1}^{n-4} v_i) v_{n-3}} \quad (1.4.6)$$

を比較すれば,

$$\tilde{u}_{j,n-2} = u_{j,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1} \quad (1.4.7)$$

を得る. ゆえに

$$S_{n-1}(v_1, v_2, \dots, v_{n-4}) = \sum_{j=1}^{n-4} L(v_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq n-4} L(u_{j,k+1}) + \sum_{j=1}^{n-4} L(u_{j,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1}). \quad (1.4.8)$$

$u_{n-3,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1} = 0$  だから, 最後の項の和は  $n-3$  までにしてもよい. (1.4.4) と (1.4.8) から,

$$\begin{aligned} S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) &= S_{n-1}(v_1, v_2, \dots, v_{n-4}) + L(v_{n-3}) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-3} [L(u_{j,n-1}) - L(u_{j,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1})] + \sum_{j=1}^{n-4} L(u_{j,n-2}). \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

帰納法の仮定から  $\partial S_{n-1} / \partial v_1 = 0$ , また,  $j \geq 3$  に対し  $\partial u_{j,k+1} / \partial v_1 = 0$  であるから,

$$\frac{\partial}{\partial v_1} S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) = \frac{\partial}{\partial v_1} \sum_{j=1}^2 [L(u_{j,n-1}) - L(u_{j,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1}) + L(u_{j,n-2})]. \quad (1.4.10)$$

簡単のため,  $v_1 = v$ ,  $\prod_{i=2}^{n-4} v_i = a$ ,  $\prod_{i=2}^{n-3} v_i = av_{n-3} = b$  と書くと, 定義式 (1.4.2) から

$$\begin{aligned} u_{1,n-1} &= 1 - bv, \\ u_{2,n-1} &= \frac{1-b}{1-bv}, \\ u_{1,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1} &= 1 - av, \\ u_{2,n-1} \Big|_{v_{n-3}=1} &= \frac{1-a}{1-av}, \\ u_{1,n-2} &= \frac{1-av}{1-bv}, \\ u_{2,n-2} &= \frac{(1-a)(1-bv)}{(1-b)(1-av)}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
-2\frac{\partial S_n}{\partial v} &= -\frac{1}{v}\log(1-bv) - \frac{b}{1-bv}\log(bv) \\
&+ \frac{b}{1-bv}\log\frac{b(1-v)}{1-bv} + \left(-\frac{b}{1-bv} + \frac{1}{1-v}\right)\log\frac{1-b}{1-bv} \\
&+ \frac{1}{v}\log(1-av) + \frac{a}{1-av}\log(av) \\
&- \frac{a}{1-av}\log\frac{a(1-v)}{1-av} - \left(-\frac{a}{1-av} + \frac{1}{1-v}\right)\log\frac{1-a}{1-av} \\
&+ \left(\frac{b}{1-bv} - \frac{a}{1-av}\right)\log\frac{(a-b)v}{1-bv} + \left(-\frac{b}{1-bv} - \frac{1}{v}\right)\log\frac{1-av}{1-bv} \\
&+ \left(\frac{a}{1-av} - \frac{b}{1-bv}\right)\log\frac{(a-b)(1-v)}{(1-b)(1-av)} + \left(-\frac{a}{1-av} + \frac{1}{1-v}\right)\log\frac{(1-a)(1-bv)}{(1-b)(1-av)}.
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

まとめ直すと、

$$\begin{aligned}
-2\frac{\partial S_n}{\partial v} &= \frac{1}{v}\left[-\log(1-bv) + \log(1-av) - \log\frac{1-av}{1-bv}\right] \\
&+ \frac{1}{1-v}\left[\log\frac{1-b}{(1-bv)} - \log\frac{1-a}{1-av} + \log\frac{(1-a)(1-bv)}{(1-b)(1-av)}\right] \\
&+ \frac{a}{1-av}\left[\log(av) - \log\frac{a(1-v)}{1-av} + \log\frac{1-a}{1-av} - \log\frac{(a-b)v}{1-bv}\right. \\
&\quad \left.+ \log\frac{(a-b)(1-v)}{(1-b)(1-av)} - \log\frac{(1-a)(1-bv)}{(1-b)(1-av)}\right] \\
&+ \frac{b}{1-bv}\left[-\log(bv) + \log\frac{b(1-v)}{(1-bv)} - \log\frac{1-b}{1-bv} + \log\frac{(a-b)v}{1-bv}\right. \\
&\quad \left.- \log\frac{1-av}{1-bv} - \log\frac{(a-b)(1-v)}{(1-b)(1-av)}\right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

すなわち、 $S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3})$  は  $v_1$  に依存しない。

次に (1.4.1) で  $v_1 = 0$  とおくと、

$$S_n(0, v_2, \dots, v_{n-3}) = S_{n-1}(v_2, v_3, \dots, v_{n-3}) + (n-3)L(1) + L(0) \tag{1.4.14}$$

となることを示そう。 $S_{n-1}$  の量 (付帯条件が  $v_1 \equiv v_{n-2} \equiv 0$ ) を、前と同様、チルダをつけて表すことにする。 $j \geq 3$  については、 $u_{j,k+1} = \tilde{u}_{j,k+1}$ 。  $j = 1$  と  $j = 2$  についてはそれぞれ

$$u_{1,k+1}|_{v_1=0} = \frac{1-v_1 \prod_{i=2}^{k-1} v_i}{1-v_1 \prod_{i=2}^k v_i} \Big|_{v_1=0} = 1, \tag{1.4.15}$$

$$u_{2,k+1}|_{v_1=0} = \frac{(1-\prod_{i=2}^{k-1} v_i)(1-v_1 \prod_{i=2}^k v_i)}{(1-v_1 \prod_{i=2}^{k-1} v_i)(1-\prod_{i=2}^k v_i)} \Big|_{v_1=0} = \frac{1-\prod_{i=2}^{k-1} v_i}{1-\prod_{i=2}^k v_i} = \tilde{u}_{2,k+1} \tag{1.4.16}$$

であるから、これらを代入すればよい。もちろん (1.1.4) から、 $L(0) = 0$ 、 $L(1) = \pi^2/6$  である。

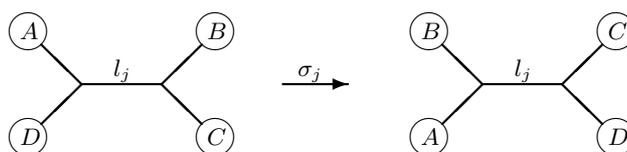
帰納法の仮定から  $S_{n-1}(v_2, v_3, \dots, v_{n-3}) = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)L(1)$  であるから、 $S_n(v_1, v_2, \dots, v_{n-3}) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)L(1)$  を得る。(証明終)

## 1.5 双対変換の表現

最近ペンタゴン恒等式は、量子ダイログ関数の研究で新たな脚光を浴びているようである [6]。そこでは、この恒等式に現れる 5 つの  $L$  の変数は変異 (mutation) と呼ばれる 2 つのパラメータ  $y_1(t), y_2(t)$  の変換 (離散

的時間発展)によって記述されるが、この変換で  $x = y_1/(1+y_1)$ ,  $y = y_2(1+y_1)/(1+y_2+y_1y_2)$  がペンタゴン恒等式 (1.1.7) の  $L$  の変数を生成し、5 回行くと  $y_1$  と  $y_2$  とが入れ替わるがちょうど元に戻るものがキーポイントになっている。しかし、双対共鳴模型の立場からすると、この変換は双対変換 (duality transformation) の表現に他ならず、同じ変換を繰り返すとダイログ恒等式に現れる  $L$  のすべての変数が現れるという性質は  $n = 5$  のときの特殊性である。一般の円順列樹木ファインマン・グラフについて、双対変換の表現として双有理変換が定義できることがわかっている。以下、筆者が 40 年あまり前に双対共鳴模型に関連して行った仕事 [4] [7] で、双対変換の有理関数による表現に関する部分を整理して解説する。

まず双対変換を定義する。内線  $l_j$  に隣る線は必ず 4 本であるが、その円順列を変えることなくその 4 本の接続の仕方を変えるのは、次の図で見られるように、(もちろん恒等変換は除外して) ただ 1 通りである。この変換を内線  $l_j$  に関する双対変換と呼び、 $\sigma_j$  と書く。<sup>8</sup>



さて、樹木の双対変換  $\sigma_j$  はどのような性質をもっているであろうか。まず定義から明らかに、続けて 2 回行えば元に戻るから、

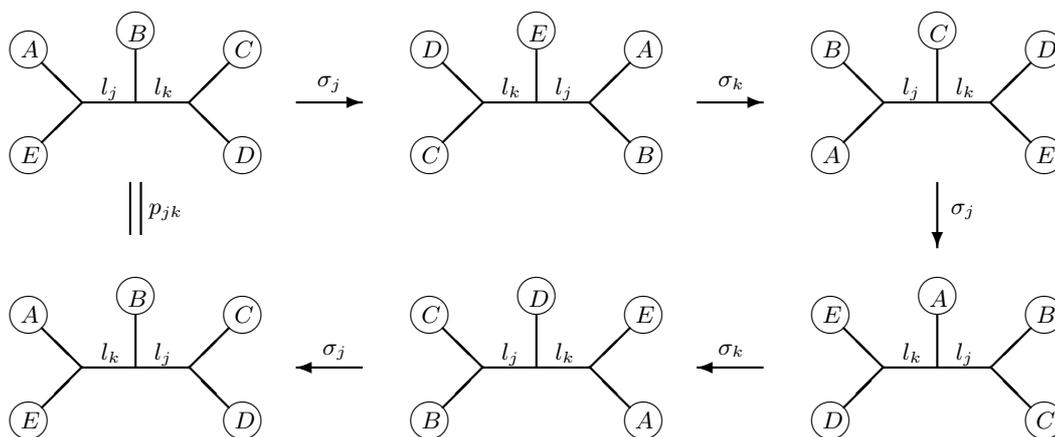
$$\sigma_j^2 = e \quad (1.5.1)$$

である。ただし、 $e$  は恒等変換を表す。相異なる内線  $l_j, l_k$  ( $j \neq k$ ) については、もし両者が離れていれば両者の双対変換は可換である。すなわち、

$$\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j \quad \text{for } l_j \cap l_k = \emptyset \quad (1.5.2)$$

である。ただし、 $l_j \cap l_k$  は、 $l_j$  と  $l_k$  が共有する頂点の集合を表すものとする。

2 本の内線  $l_j, l_k$  が相隣る場合、すなわち  $l_j \cap l_k \neq \emptyset$  のときには、 $\sigma_j$  と  $\sigma_k$  は非可換である。両者を交互に行くと下図のようになる<sup>9</sup>。



図から分かるように、5 回目と同じ円順列ファインマン・グラフに戻るが、 $l_j$  と  $l_k$  の位置が入れ替わっている。 $l_j$  と  $l_k$  の入れ替えを  $p_{jk}(=p_{kj})$  と書くと、

$$\sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j = p_{jk} \quad (1.5.3)$$

<sup>8</sup>双対変換は、双対図で考えれば、凸  $n$  多角形の 3 角形分割において 1 つの 4 角形の 3 角形分割の仕方を変えることに相当する。

<sup>9</sup>グラフはぐるぐる廻し、同じ形になるように戻して描いてある。

であることが分かる．この式で  $j$  と  $k$  を入れ替えると，右辺は不変だから

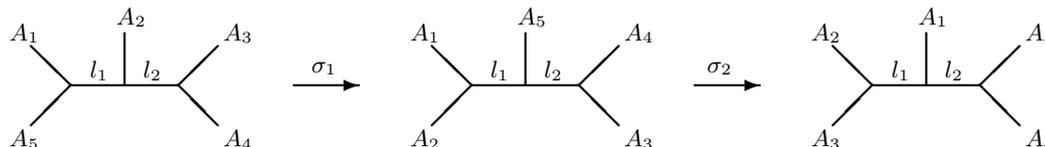
$$\sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j = \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k \quad (1.5.4)$$

という関係式が成立するわけである．

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-3}$  によって生成される群を「双対変換群」と呼び， $D_n$  と書くことにしよう．この群では内線を区別しているので，内線の対称群  $S_{n-3}$  で割った商群  $V_n = D_n/S_{n-3}$  を考えると，その位数は  $\mathfrak{N}_V(n)$  になる．この商群の要素を点で表し，1 回の双対変換で互いに移れる要素を線で結ぶと 1 つの連結グラフができる．それは， $n = 4$  では 1 本の線， $n = 5$  では 5 角形， $n \geq 6$  では 4 角形と 5 角形をパッチワークした図形になる． $n = 5$  の場合の 5 角形は，双対変換を 5 回行うとちょうどパラメータ  $v_1, v_2$  が入れ替わることになり，本節の冒頭に述べた「変異」に対応している．しかし， $n \geq 6$  ではすべてを通過して元に戻る回路，すなわちハミルトン回路は存在しない．

交差対称方程式 (1.3.6) の解  $u_P$  を多重辺縁グラフに基づいて構成したが，どんな樹木グラフに基づいて構成することも可能である．それには，双対変換を  $u_P$  に対する変換によって表現すればよい．これは一般に，パラメータの或る双有理変換として表される．

その様子を見るために，まず  $n = 5$  の場合の双対変換の表現を考察しよう．次図は双対変換  $\sigma_1$  をやり，さらに  $\sigma_2$  をやった円順列ファインマン・グラフである．中央のグラフは比較がし易いように裏返してある．



内線  $l_1$  に対する双対変換  $\sigma_1$  に対応して，パラメータは

$$v'_1 = \frac{1 - v_1}{1 - v_1 v_2}, \quad v'_2 = v_2 \quad (1.5.5)$$

のように変換される．もちろん， $(\sigma_1)^{-1} = \sigma_1$  に対応して，逆変換も同じ形である．前節の  $n = 5$  の  $u_P$  の式 (1.3.10) と比較すると，

$$\begin{aligned} u'_{13} &= v'_1 = \frac{1 - v_1}{1 - v_1 v_2} = u_{13}, \\ u'_{35} &= v'_2 = v_2 = u_{35}, \\ u'_{24} &= 1 - v'_1 v'_2 = \frac{1 - v_2}{1 - v_1 v_2} = u_{24}, \\ u'_{25} &= \frac{1 - v'_1}{1 - v'_1 v'_2} = v_1 = u_{25}, \\ u'_{14} &= \frac{1 - v'_2}{1 - v'_1 v'_2} = 1 - v_1 v_2 = u_{14} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

となる．ここに  $u'_{j,k+1}$  は，中央のグラフに関する番号付けである．確かに  $u'_P = u_P$  となっていて， $u_P$  を不変量としていることが分かる．

これにさらに内線  $l_2$  に対する双対変換  $\sigma_2$ ，すなわち

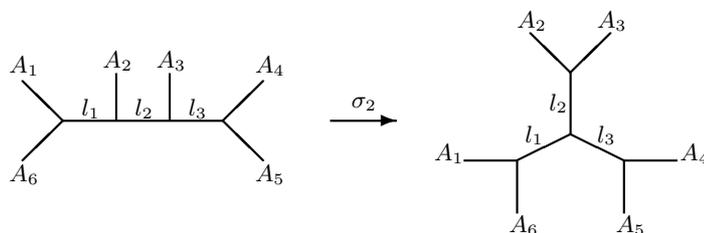
$$v''_1 = v'_1, \quad v''_2 = \frac{1 - v'_2}{1 - v'_1 v'_2} \quad (1.5.7)$$

を行うと,

$$\begin{aligned}
 u''_{13} &= v''_1 = v'_1 = u'_{13} = u_{13}, \\
 u''_{14} &= v''_2 = \frac{1-v'_2}{1-v'_1v'_2} = u'_{14} = u_{14}, \\
 u''_{25} &= 1 - v''_1v''_2 = \frac{1-v'_1}{1-v'_1v'_2} = u'_{25} = u_{25}, \\
 u''_{24} &= \frac{1-v''_1}{1-v''_1v''_2} = 1 - v'_1v'_2 = u'_{24} = u_{24}, \\
 u''_{35} &= \frac{1-v''_2}{1-v''_1v''_2} = v'_2 = u'_{35} = u_{35}
 \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

となり, 一番右のグラフに対する式が得られる. このように, 変換は次々に合成できる. すなわち双対変換の表現を与えている.

上の場合, 双対変換を決める内線の隣の線は内線 1 本, 外線 3 本であった.  $n = 6$  の場合は, 隣の線が内線 2 本, 外線 2 本の内線が現れる. この内線について双対変換を施すと, 次のように内点 (それを端点とする線がすべて内線であるような頂点) のあるグラフが現れる.



このような場合, 双対変換は, それを指定する内線のパラメータの変数を変換するだけではだめで, 隣の内線のパラメータも変換しなければならない. 都合上, 新しいパラメータを  $v'$  ではなく  $x$  を用いて書くことにする. 上の図の双対変換  $\sigma_2$  は次のように表現される.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{v_1(1-v_2v_3)}{1-v_3}, \\
 x_2 &= \frac{1-v_2}{(1-v_1v_2)(1-v_2v_3)}, \\
 x_3 &= \frac{v_3(1-v_1v_2)}{1-v_1}.
 \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

あるいは逆に解くと,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{x_1(1-x_2x_3)}{1-x_1x_2x_3}, \\
 v_2 &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_2x_3)(1-x_1x_2)}, \\
 v_3 &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3}
 \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

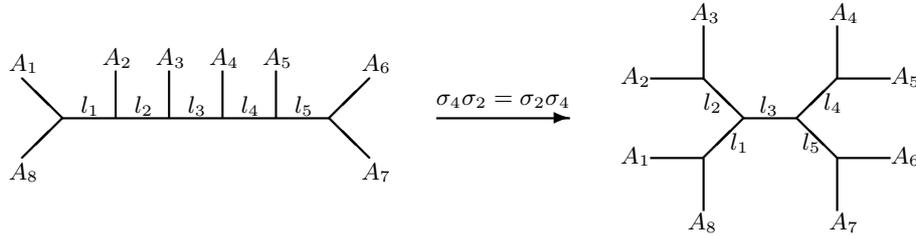
である. 逆変換が同形でないのは,  $\sigma_2$  で移るグラフが同形でないからである.  $v_3 = x_3 = 0$  と置くと,  $n = 5$  のときの変数変換式 (1.5.6) を再生する. つまり外線の変数は 0 と思えば, 確かに前の式の拡張になっている. なお, パラメータの許容領域である単位立方体  $\{0 \leq v_j \leq 1 (j = 1, 2, 3)\}$  は,  $x_j$  のについては単位立方体を含む曲面で囲まれた領域になる.

変換式 (1.5.10) を  $n = 6$  の多重辺縁グラフの  $u_P$  の式 (1.3.11) に代入すれば,

$$\begin{aligned}
u_{26} &= \frac{x_1(1-x_2x_3)}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{24} &= \frac{x_2(1-x_3x_1)}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{46} &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{13} &= \frac{1-x_1x_2}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{35} &= \frac{1-x_2x_3}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{15} &= \frac{1-x_3x_1}{1-x_1x_2x_3}, \\
u_{14} &= \frac{(1-x_1)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_1x_2)(1-x_3x_1)}, \\
u_{36} &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_2x_3)(1-x_1x_2)}, \\
u_{25} &= \frac{(1-x_3)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_3x_1)(1-x_2x_3)}
\end{aligned} \tag{1.5.11}$$

を得る. (1.5.11) は確かにグラフの回転対称性  $l_1 \mapsto l_2 \mapsto l_3 \mapsto l_1$ ;  $A_1 \mapsto A_3 \mapsto A_5 \mapsto A_1$ ,  $A_2 \mapsto A_4 \mapsto A_6 \mapsto A_2$  に対する不変性を反映している.

さらに, 隣接する 4 本の線がすべて内線であるような内線を含む場合として, 次の  $n = 8$  の樹木グラフを考えよう. これは多重辺縁グラフから双対変換  $\sigma_2$  と  $\sigma_4$  とを続けて行うことによって得られる. これらは可換なので, 作用させる順序にはよらない.



$l_2$  に関する双対変換と  $l_4$  に関する双対変換との組み合わせだから,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{x_1(1-x_2x'_3)}{1-x_1x_2x'_3}, \\
v_2 &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x'_3)}{(1-x_2x'_3)(1-x_1x_2)}, \\
v_3 &= \frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3}, \\
v_4 &= \frac{(1-x_4)(1-x_4x_5x''_3)}{(1-x_4x''_3)(1-x_4x_5)}, \\
v_5 &= \frac{x_5(1-x_4x''_3)}{1-x_4x_5x''_3}
\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

となると考えられる. しかし,  $v_3$  の式が 2 通りになるので,  $x'_3 = x''_3 = x_3$  とすることはできない. 等式を成立させるには,

$$\begin{aligned}
x'_3 &= \frac{x_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x_3}, \\
x''_3 &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3}
\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

と置けばよい．実際，

$$\frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x_3(1-x_1x_2)(1-x_4x_5)}{1-x_1x_2x_3-x_3x_4x_5+x_1x_2x_3x_4x_5} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3} \quad (1.5.14)$$

である．これが  $\sigma_2$  と  $\sigma_4$  の可換性を表現する等式である．

(1.5.12) を  $n=8$  の多重辺縁グラフの  $u_P$  の表式 (1.3.7), (1.3.8) に代入すれば，

$$\begin{aligned} u(l_1) &= u_{28} = \frac{x_1(1-x_2x'_3)}{1-x_1x_2x'_3} = v_1, \\ u(l_2) &= u_{24} = \frac{x_2(1-x_1x'_3)}{1-x_1x_2x'_3}, \\ u(l_3) &= u_{48} = \frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3} = v_3, \\ u(l_4) &= u_{46} = \frac{x_4(1-x_5x''_3)}{1-x_4x_5x''_3}, \\ u(l_5) &= u_{68} = \frac{x_5(1-x_4x'_3)}{1-x_4x_5x''_3} = v_5 \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

を得る．ただし簡単のため，内線  $l_j$  に対応する変数  $u_P$  ( $u(l_j)$  と略記) のみを書いた．それ以外の 15 個についても同様に計算できる．このグラフの裏返し対称性 ( $\{A_8, A_1, A_2, A_3; l_1, l_2\}$  と  $\{A_7, A_6, A_5, A_4; l_5, l_4\}$  の入れ替え， $\{A_2, A_3, A_4, A_5; l_2, l_4\}$  と  $\{A_1, A_8, A_7, A_6; l_1, l_5\}$  の入れ替え) が， $u_P$  の式の対称性とコンシステントになっていることが確かめられる<sup>10</sup>．

ここまで来れば， $n-3$  本の内線を持つ任意の樹木ファインマン・グラフ  $T$  の任意の内線  $l_j$  に対応する変数  $u(l_j)$  を，パラメータ  $x_1, \dots, x_{n-3}$  でのように表せばよいか分かる．

まず，樹木ではすべての頂点を，同類の頂点が相隣らないように 2 種類に分類することが可能であることに注意する．これらをダッシュ類，ダブル・ダッシュ類と呼ぶことにしよう．このとき，任意の内線  $l_j$  の両端点は，ダッシュ類の頂点とダブル・ダッシュ類の頂点である．そのダッシュ類頂点を端点とする 2 つの線を  $l_p, l_q$ ，そのダブル・ダッシュ類頂点を端点とする 2 つの線を  $l_r, l_s$  と書こう．ただしこれらの線は内線とは限らない． $l_k$  ( $k$  は  $j, p, q, r, s$  を代表) が外線の場合は，対応するパラメータは  $x_k \equiv 0$  とする．このとき，内線  $l_j$  に対応するチャンネルの変数  $u(l_j)$  は，次のように 2 つの同等なパラメータ表示がなされる：

$$u(l_j) = \frac{x'_j(1-x'_p x'_q)}{1-x'_p x'_q x'_j} = \frac{x''_j(1-x''_r x''_s)}{1-x''_r x''_s x''_j}. \quad (1.5.16)$$

ここに， $x'_k$  は  $l_k$  のダッシュ類の端点， $x''_k$  は  $l_k$  のダブル・ダッシュ類の端点に対応する変数である． $l_j$  について，これらは

$$\begin{aligned} x'_j &= \frac{x_j(1-x''_r x''_s)}{1-x''_r x''_s x_j}, \\ x''_j &= \frac{x_j(1-x'_p x'_q)}{1-x'_p x'_q x_j} \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

であって，逐次 (外線に対する変数は 0 になるから) 定義されることになる．実際，もし  $l_p$  が外線だったとすると， $x'_p = 0$  であるから，(1.5.16) と (1.5.17) は

$$u(l_j) = x'_j = \frac{x_j(1-x''_r x''_s)}{1-x''_r x''_s x_j} \quad (1.5.18)$$

に還元する．さらに  $l_r$  も外線だったならば，すなわち  $l_j$  の両隣に外線があるならば，

$$u(l_j) = x_j \quad (1.5.19)$$

<sup>10</sup>裏返し操作を  $R$  と書くと， $u_{j,k+1}$  の裏返しは， $u_{R(j),R(k+1)}$  ではなく， $u_{R(k),R(j)+1}$  であることに注意．

に還元する．多重辺縁グラフではすべての内線の両隣に外線があるので，すべての  $j$  についてこれが成立していたわけである．

上のように与えられる任意の円順列樹木ファインマン・グラフ  $T$  の  $u_P$  の表式は，双対変換を繰り返すことによってつねにある（同じ円順列の）多重辺縁グラフの  $u_P$  の表式に帰着させられる．そして，その双対変換の積の表現である  $x_1, \dots, x_{n-3}$  から  $v_1, \dots, v_{n-3}$  へのパラメータの変換は双有理変換である．また，すべての  $j$  について  $0 \leq x_j \leq 1$  ならば  $0 \leq u_P \leq 1$  である．

一般証明は  $n$  に関する数学的帰納法を用いてなされる [7]．

この結果から次のことが分かる．同じ円順列の任意の 2 つの樹木ファインマン・グラフを結ぶ変換の表現も，双有理変換である．また，トポロジカルな対称性を持つ円順列ファインマン・グラフに対する  $u_P$  の表式は，同じ対称性を持つ．なぜなら，円順列ファインマン・グラフにおける番号の置換が多重辺縁グラフからの変換式における番号の置換で表現されるからである．

上の命題により，ダイログ関数の多変数恒等式に関する定理 1 は，多重辺縁グラフとは限らない一般の樹木の場合に拡張される．

[定理 2]  $T$  を  $n$  本の外線をもつ任意の円順列樹木ファインマン・グラフ， $P$  を  $T$  のチャンネルとする．このとき， $n-3$  個のパラメータ  $x_1, x_2, \dots, x_{n-3}$  の  $\frac{1}{2}n(n-3)$  個の有理関数  $u_P$ （その具体的な表式は上記の方法で計算できる）が存在して，交差対称方程式 (1.3.6) を満たす．そして対称化ダイログ関数  $L(x)$  に関して次の  $n-3$  変数恒等式が成立する：

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} L(u_P) = \frac{(n-2)(n-3)}{12} \pi^2. \quad (1.5.20)$$

もちろん恒等式であるから，解析接続しても成立する．

具体例として， $n=6$  の場合にはじめて現れる多重辺縁でない樹木を考えよう．これは巡回対称性を持つので，恒等式の方も同じ巡回対称性を持つ．定理 2 と (1.5.11) から

$$\sum_{i,j,k:\text{cyclic}} \left[ L\left(\frac{x_i(1-x_jx_k)}{1-x_ix_jx_k}\right) + L\left(\frac{1-x_jx_k}{1-x_ix_jx_k}\right) + L\left(\frac{(1-x_i)(1-x_ix_jx_k)}{(1-x_ix_j)(1-x_kx_i)}\right) \right] = \pi^2. \quad (1.5.21)$$

ここでとくに， $x_1 = x_2 = x_3 = x$  とすれば，

$$L\left(\frac{x(1+x)}{1+x+x^2}\right) + L\left(\frac{1+x}{1+x+x^2}\right) + L\left(\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}\right) = \frac{\pi^2}{3}. \quad (1.5.22)$$

これは 1 変数恒等式だが，積分の変数変換を使って証明される恒等式と違って， $L$  の変数がすべて同時に区間  $[0, 1]$  内にあるようにできるので， $\log$  項が現れない．

## 1.6 ダイログ関数恒等式の複比による表示

樹木に依拠するパラメータ表示では， $u_P$  のパラメータ依存性は平等ではない．しかし Koba-Nielsen 表示 [8] [9] を用いれば，完全に平等な形に書き直すことができる．

複素平面上の円を考え，その上に円順列に従って  $n$  個の複素パラメータ  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $z_{n+j} \equiv z_j$ ) をとる．チャンネル  $P$  はそれらを，円順序に矛盾しないように要素の数が 2 以上の 2 つの集合に分割することである：すなわち  $P_{j,k+1} \equiv (z_j, z_{j+1}, \dots, z_k | z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{j-1})$  ( $j < k < n+j-2, k+1 \leq n$ )．このとき  $u_P$  は<sup>11</sup>

$$u_{j,k+1} = \frac{(z_j - z_k)(z_{k+1} - z_{j-1})}{(z_j - z_{k+1})(z_k - z_{j-1})} \quad (1.6.1)$$

<sup>11</sup>  $z_j, z_{j+1}, z_k, z_{k+1}$  が同一円周上にあることから，偏角を考えれば (1.6.1) が正の実数になることはすぐにわかる．また Ptolemy の定理（円に内接する四角形において，対辺の長さの積の和は対角線の長さの積に等しい）から (1.6.1) の絶対値が 1 で抑えられることが示せる．

という複比で与えられる．パラメータの数が 3 個余分であるが，それは円を決定する自由度に対応するものである．とくに， $z_1 = 0$ ,  $z_{n-1} = 1$ ,  $z_n = \infty$  と選べば，円は実軸となり， $0 \leq z_2 \leq z_3 \leq \dots \leq z_{n-2} \leq 1$  である． $v_j = z_{j+1}/z_j$  ( $n = 1, 2, \dots, n-3$ ) とおけば  $0 \leq v_j \leq 1$  で，(1.6.1) の  $u_{j,k+1}$  は多重辺縁グラフの式 (1.3.7),(1.3.8) に帰着する．

逆に， $v_j = u_{j+1,n}$  ( $j = 1, 2, \dots, n-3$ ) とおけば，多重辺縁グラフの式から Koba-Nielsen の式 (1.6.1) が再生される．したがって，定理 1 と解析接続により次の定理が得られる．

[定理 3]  $n$  個の複素変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  に対し，次のダイログ関数恒等式が成立する：

$$\sum_{j < k \leq \min(n-1, n+j-3)} L\left(\frac{(z_j - z_k)(z_{k+1} - z_{j-1})}{(z_j - z_{k+1})(z_k - z_{j-1})}\right) = \frac{(n-2)(n-3)}{12} \pi^2. \quad (1.6.2)$$

Euler の恒等式 (1.1.5) を (1.6.2) の各項に適用すると，次の形に書くこともできる<sup>12</sup>：

$$\sum_{1 \leq j < k \leq \min(n-1, n+j-3)} L\left(\frac{(z_j - z_{j-1})(z_{k+1} - z_k)}{(z_j - z_{k+1})(z_{j-1} - z_k)}\right) = \frac{n-3}{6} \pi^2. \quad (1.6.3)$$

## 参考文献

- [1] For a review, see A. N. Kirillov, arXiv:hep-th/9408113 (1994).
- [2] G. Veneziano, Nuovo Cimento **57A** (1968), 190.
- [3] For a review, see J. Scherk, Rev. Mod. Phys. **49** (1975), 123.
- [4] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 436.
- [5] H.-M. Chan and S. T. Tsou, Phys. Letters **28B** (1969), 485.
- [6] 中西知樹，数理科学，2012 年 10 月，46．
- [7] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 451.
- [8] Z. Koba and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B12** (1969), 243
- [9] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 919.

<sup>12</sup>(1.6.2) での複比と (1.6.3) での複比の和が 1 に等しいことは，Ptolemy の定理の複素化に他ならない．

# グリーン関数入門

## Introduction to Green Functions

矢野 忠<sup>13</sup>  
Tadashi YANO

### 2.1 はじめに

このエッセイは雑誌「パリティ」2004年7月号 [1] の「粉屋の男, グリーン関数のグリーン」を読んで, その中のコラム 1 に啓発されて書いたメモ [2] をもとにして書いた「グリーン関数入門」である. すなわち, グリーン関数などというものに縁のない人にグリーン関数とは何かを紹介するのが目的である<sup>14</sup>.

グリーン関数について述べた書籍を読む前にこれを読んで大雑把にでもグリーン関数についての感じをつかんで頂ければ, それでエッセイの目的は達せられる. なおグリーン関数の物理的・工学的意味を補遺 5 に述べる.

### 2.2 グリーン関数の簡単な例

最初にこのエッセイを書くきっかけになった雑誌「パリティ」の記事のコラム 1 をそのまま引用しよう.

グリーン関数の簡単な例

最初静止し, 粘性力  $\alpha v$  と任意の力  $F(t)$  を受けている粒子の速度  $v(t)$  を知りたいとしよう. その運動方程式は次式で与えられる.

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v = F(t) \quad (2.2.1)$$

静止状態において, 時刻  $t = t'$  で単位の撃力  $F(t') = \delta(t - t')$  が加えられたときの解がグリーン関数  $G(t, t')$  である. 撃力が加わった直後の速度は  $1/m$  であり, その後指数関数的に減衰していくので,  $t > t'$  のとき

$$G(t, t') = \frac{1}{m} e^{-\alpha(t-t')/m} \quad (t \geq t') \quad (2.2.2)$$

となり,  $t < t'$  のときグリーン関数は消える (0 となる).

したがって, 任意の力  $F(t)$  に対するこの力学問題の一般解は

$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{m} e^{-\alpha(t-t')/m} F(t') dt' \quad (2.2.3)$$

で与えられる. この簡単な例の場合には, 積分因子を用いて運動方程式を直接積分することによって一般解を求めることもできる.

<sup>13</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>14</sup>実を言うとグリーン関数を人に説明するというよりは自分自身がグリーン関数がどういうものかをわかるために書いた.

## 2.3 積分因子を用いた解

グリーン関数による (2.2.1) の解を与える前に前掲のコラムの末尾に述べられた積分因子を用いた解法を述べておこう。

(2.2.1) の両辺を  $m$  でわれば,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = \frac{1}{m}F(t) \quad (2.3.1)$$

積分因子  $e^{\frac{\alpha}{m}t}$  を (2.3.1) の両辺にかけると

$$\begin{aligned} e^{\frac{\alpha}{m}t} \left( \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v \right) &= \frac{1}{m} e^{\frac{\alpha}{m}t} F(t) \\ \frac{d}{dt} (e^{\frac{\alpha}{m}t} v) &= \frac{1}{m} e^{\frac{\alpha}{m}t} F(t) \\ e^{\frac{\alpha}{m}t} v &= \frac{1}{m} \int_0^t e^{\frac{\alpha}{m}t'} F(t') dt' \\ v(t) &= \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha}{m}t'} F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}(t-t')} F(t') dt' \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

この  $v(t)$  が (2.2.1) の解である。

積分因子  $e^{\frac{\alpha}{m}t}$  を求める方法は微分方程式のテキストに載っているもので、その導出についてはここでは省略する。

方程式 (2.2.1) の解ということに関してだけならば、グリーン関数を用いる必要はないが、グリーン関数は応用範囲が広いのでやはり有用である。つぎにグリーン関数による解法に進むことにしよう。

## 2.4 グリーン関数による解

前節では積分因子  $e^{\frac{\alpha}{m}t}$  を用いて、運動方程式 (2.2.1) を直接積分して (2.2.1) の一般解を得たが、時刻  $t = t'$  のときに単位の撃力  $\delta(t - t')$  が加えられたときの解がグリーン関数  $G(t, t')$  である。すなわち、

$$\frac{dG(t, t')}{dt} + \frac{\alpha}{m}G(t, t') = \frac{1}{m}\delta(t - t') \quad (2.4.1)$$

がグリーン関数  $G(t, t')$  のしたがう方程式である<sup>15</sup>。このグリーン関数を用いれば、(2.2.1) の解  $v(t)$  は

$$v(t) = \int_0^t G(t - t') F(t') dt' \quad (2.4.2)$$

で与えられる<sup>16</sup>。ここで、 $G(t, t') = G(t - t')$  であることを用いている。

したがって、グリーン関数  $G(t, t')$  が求められれば (2.2.1) の解を積分因子を用いなくても得ることができる。そして、このグリーン関数を用いた方法はかなり適用範囲が広く、この場合のみならず多くの常微分方程式および偏微分方程式をこの方法で解くことができる。

ではどうやって (2.4.1) を解いて、グリーン関数  $G(t - t')$  を求めるのだろうか。その解を求めて見よう。そのためにはフーリエの逆変換を用いる。

まずフーリエの逆変換  $G(t - t')$  を

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (2.4.3)$$

<sup>15</sup>方程式 (2.4.1) は解くべき方程式 (2.2.1) の  $v(t)$  に  $G(t, t')$  を、外力  $F(t)$  に単位の撃力  $\delta(t - t')$  を代入すれば得られる。

<sup>16</sup>(2.4.2) が方程式 (2.2.1) の解であることはこの解を方程式 (2.2.1) に直接代入して (2.4.1) を用いれば証明できる。このとき時刻  $t$  で微分と積分との順序が交換できるとする。補遺 1 参照。

とフーリエ変換  $g(\omega)$  を用いて表す<sup>17</sup> . ここでフーリエ変換  $g(\omega)$  は

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.4.4)$$

で定義される .

同様にデルタ関数  $\delta(t)$  を逆フーリエ変換して

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4.5)$$

で表す .  $G(t, t') = G(t - t')$  であることに注意すれば , (2.4.1) は

$$\frac{d}{d\tau} G(\tau) + \frac{\alpha}{m} G(\tau) = \frac{1}{m} \delta(\tau), \quad \tau \equiv t - t' \quad (2.4.6)$$

となるが , これに (2.4.3), (2.4.5) を代入すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( i\omega + \frac{\alpha}{m} \right) g(\omega) - \frac{1}{m} \right] e^{i\omega\tau} d\omega = 0 \quad (2.4.7)$$

したがって ,

$$g(\omega) = \frac{1}{im \left( \omega - i \frac{\alpha}{m} \right)} \quad (2.4.8)$$

これで , フーリエ変換  $g(\omega)$  が求まったから , これを (2.4.3) へ代入すれば , フーリエ逆変換  $G(\tau)$  は

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{m \left( \omega - i \frac{\alpha}{m} \right)} d\omega \quad (2.4.9)$$

となる .

したがって ,  $G(\tau)$  を求めるために (2.4.9) の積分をすればよい . ただし , この積分は複素積分である . 被積分関数を  $f(\omega)$  とおけば ,  $f(\omega)$  は

$$f(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau}}{m \left( \omega - i \frac{\alpha}{m} \right)} \quad (2.4.10)$$

であり , 特異点は  $\omega = i \frac{\alpha}{m}$  の一点である (補遺 3 の図 2.1 参照) .

(2.4.9) の右辺の積分を複素積分することによって求めるが ,  $\tau = t - t' < 0$  と  $\tau = t - t' > 0$  の場合に分けて考える . 計算の詳細は補遺 3 に示し , ここでは結果をすぐに与えよう .

まず  $\tau = t - t' < 0$  のときには積分路を図 2.1 のように複素平面の下半面を通る半円をとれば , この領域に特異点はないので , Cauchy の積分定理によって

$$\oint f(\omega) d\omega = 0 \quad (2.4.11)$$

であるから ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \oint f(\omega) d\omega = 0 \quad (2.4.12)$$

となる . したがって , この場合には

$$G(\tau) = 0 \quad (2.4.13)$$

である .

つぎに  $\tau = t - t' > 0$  のときを考えよう . このときには  $\text{Im}(\omega) > 0$  であるから , 積分路は補遺 3 の図 2.2 のように複素平面の上半面を通る半円をとる . 半円内に特異点の一つがあるから , 留数定理を用いれば ,

$$\oint f(\omega) d\omega = 2\pi i \text{Res}[f(\omega)] \quad (2.4.14)$$

<sup>17</sup> フーリエ変換とその逆変換については補遺 2 を参照 .

が得られる．ここで， $\text{Res}[f(\omega)]$  は  $f(\omega)$  の留数である．半円の半径  $\Omega \rightarrow \infty$  の極限では半円部分の経路の積分は 0 となるから，したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 2\pi i \text{Res}[f(\omega)] \quad (2.4.15)$$

この留数  $\text{Res}[f(\omega)]$  を求めると

$$\text{Res}[f(\omega)] = \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \quad (2.4.16)$$

結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 2\pi i \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \quad (2.4.17)$$

と複素積分が評価できるので，したがって， $G(\tau)$  は

$$G(\tau) = \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \quad (2.4.18)$$

となる．

以上でグリーン関数が求まったから，このグリーン関数を用いれば (2.2.1) の解は (2.4.2) から

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{m}(t-t')} F(t') dt' \quad (2.4.19)$$

が得られる．これは前の積分因子の方法で得られた解 (2.3.2) と一致している．

## 2.5 おわりに

フーリエ変換と複素積分の知識は必要だが，それを知っている人にはわかるようにグリーン関数について説明をした．これらの知識をもっていない方のためにそれらの簡潔な説明を補遺 2, 3 に述べたので自習してみてほしい．

もしフーリエ変換と複素積分の知識を知らないで，ここに書いたことがまだ理解できないとしてもグリーン関数が微分方程式を解く一つの方法だということが知っただけとしてもそれでもいい．いまは細かなところは分からないが，いつかはこれらのことも分かる日が来るだろうと思うことができればすばらしい．

### 補遺 1 (2.4.2) が (2.2.1) の解であることの証明

$$v(t) = \int_0^t G(t, t') F(t') dt' \quad (2.4.2)$$

であるから，これを (2.3.1)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = \frac{1}{m} F(t) \quad (2.3.1)$$

に代入する．

まず， $dv/dt$  を計算しよう．

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^t G(t, t') F(t') dt' \\ &= \int_0^t \frac{dG(t, t')}{dt} F(t') dt' \end{aligned}$$

ここで，積分と微分演算とが交換できるとした．

この積分の中の  $dG(t, t')/dt$  を (2.4.1) を使って消去すれば,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \int_0^t \frac{dG(t, t')}{dt} F(t') dt' \\ &= \int_0^t \left[ \frac{1}{m} \delta(t - t') - \frac{\alpha}{m} G(t, t') \right] F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} F(t) - \frac{\alpha}{m} \int_0^t G(t, t') F(t') dt' \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

一方,

$$\frac{\alpha}{m} v = \frac{\alpha}{m} \int_0^t G(t, t') F(t') dt' \quad (2.5.2)$$

であるから, (2.5.1) の右辺の積分を左辺に移項して, (2.5.2) を用いれば,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = \frac{1}{m} F(t)$$

となり, (2.3.1) が成り立つことがわかる.

## 補遺2 フーリエ変換

周期  $2\pi$  の任意の関数のフーリエ級数を複素関数の組  $\{e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  を用いて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2.5.3)$$

と表すことができる. これを複素フーリエ級数 (complex Fourier series) という. このときの複素フーリエ係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5.4)$$

は関数系  $\{e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  の直交性

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} (e^{inx})^* = 2\pi \delta_{mn}, \quad m, n = \text{任意の整数} \quad (2.5.5)$$

を用いて求めることができる. ここで,  $\delta_{mn}$  は Kronecker のデルタといわれる記号で

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ のとき} \\ 0 & m \neq n \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.5.6)$$

で定義される.

いままで  $f(x)$  は周期  $2\pi$  の周期関数であったが, これを周期が  $2L$  の周期関数に書き直す. そのためには変数  $x$  を  $(\pi/L)x$  と置き換えればよい<sup>18</sup>. この置き換えを行うとフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (2.5.7)$$

となり, そのフーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in(\frac{\pi}{L})x} dx \quad (2.5.8)$$

である.

<sup>18</sup> この変数変換の説明は [3] にしている.

上の周期  $2L$  の周期関数のフーリエ級数とフーリエ係数から，フーリエ変換 (Fourier transform) を形式的に求めよう．フーリエ級数の周期  $2L$  を無限に大きくした極限を考えるのだが，そのために (2.5.8) のフーリエ係数  $c_n$  をフーリエ級数 (2.5.7) に代入して見よう．そうすると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left[ \int_{-L}^L f(u) e^{-in\frac{\pi}{L}u} du \right] e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (2.5.9)$$

となる．ここで，

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L}$$

とおいて  $f(x)$  を書き変える．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left[ \int_{-L}^L f(u) e^{-ik_n u} du \right] e^{ik_n x} \quad (2.5.10)$$

ここで

$$F(k_n, L) = \int_{-L}^L f(u) e^{-ik_n u} du \quad (2.5.11)$$

とおけば， $1/2L = \Delta k/2\pi$  であるから

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n, L) e^{ik_n x} \Delta k \quad (2.5.12)$$

いま， $L \rightarrow \infty$  のとき  $k_n \rightarrow k$ ， $\Delta k \rightarrow dk$  となる．また  $k_n = \text{一定}$  であるとすれば， $L \rightarrow \infty$  ならば  $n \rightarrow \infty$  となる．したがって，

$$\begin{aligned} F(k) &= \lim_{L \rightarrow \infty} F(k_n, L) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(u) e^{-ik_n u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iku} du \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

となる．この  $F(k)$  をフーリエの逆変換という．

このフーリエの逆変換を用いて (2.5.12) からフーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (2.5.14)$$

となる．ここで，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n F(k_m, L) e^{ik_m x} \Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (2.5.15)$$

であることを用いた．これは定積分の定義に他ならない．

### 補遺 3 複素積分

(1)  $\tau = t - t' < 0$  のとき

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{m(\omega - i\frac{\alpha}{m})} d\omega \quad (2.4.9)$$

を複素積分する．(2.4.9) の被積分関数を

$$f(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau}}{m(\omega - i\frac{\alpha}{m})} \quad (2.4.10)$$

と表し，この  $f(\omega)$  を実軸に沿って積分した

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega \quad (2.5.16)$$

を積分する．このときには図 2.1 に示されたように積分路を複素平面の下半面を通る半円をとれば，この領域には特異点はないので Cauchy の積分定理が成り立つ．すなわち図 2.1 で示された閉じた積分路 (contour) にそって積分すればその積分は 0 である．すなわち，

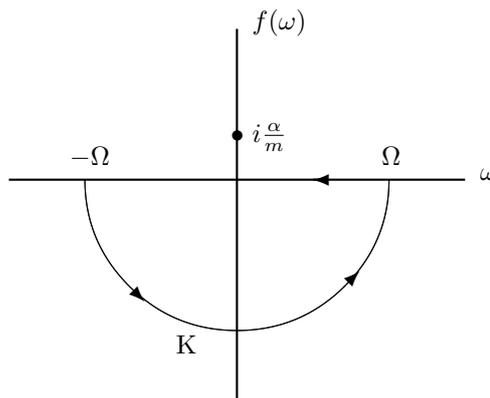


図 2.1: 複素平面の下半面を通る積分路

$$\oint f(\omega) d\omega = 0 \quad (2.4.11)$$

この積分 (2.4.11) から積分 (2.5.16) を計算する．そのために積分路を半円部分と実軸に沿った二つの部分に分ける．すなわち，

$$\oint f(\omega) d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} f(\omega) d\omega + \int_K f(\omega) d\omega \quad (2.5.17)$$

ここで， $K$  は複素平面上の下半面上での半円の積分路を表す．また  $\Omega$  はこの半円の半径である．

いま，

$$\omega - i\frac{\alpha}{m} = \Omega e^{i\theta} = \Omega \cos \theta + i\Omega \sin \theta$$

と表せば， $\pi < \theta < 2\pi$  に対して  $\Omega \sin \theta < 0$  である．このとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} e^{i(\omega - i\frac{\alpha}{m})\tau}}{m(\omega - i\frac{\alpha}{m})} \\ &= \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} e^{i\Omega(\cos \theta + i\sin \theta)\tau}}{m\Omega e^{i\theta}} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega - i\frac{\alpha}{m}) \\ &= i\Omega e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

であるから

$$f(\omega) d\omega = \frac{i e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} e^{-\Omega \sin \theta \tau} e^{i\Omega \cos \theta \tau}}{m} d\theta$$

となるから,

$$\left| \int_K f(\omega) d\omega \right| < \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-\Omega \sin \theta \tau} d\theta$$

である. ここで  $\Omega \rightarrow \infty$  のとき, 右辺の積分  $\rightarrow 0$  となるので

$$\int_K f(\omega) d\omega \rightarrow 0$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \oint f(\omega) d\omega = 0$$

となる. これが (2.4.12) である.

(2)  $\tau = t - t' > 0$  のとき

このときには図 2.2 のように積分路を複素平面の上半面を通る半円をとれば, この半円の経路での積分は収束する. このときには半円内に特異点が一つあるから, この複素積分は留数定理を用いて

$$\oint f(\omega) d\omega = 2\pi i \text{Res}[f(\omega)]$$

となる. これが (2.4.14) である. ここで,  $\text{Res}[f(\omega)]$  は  $f(\omega)$  の留数である. 半円の経路  $K$  の積分は 0 となる

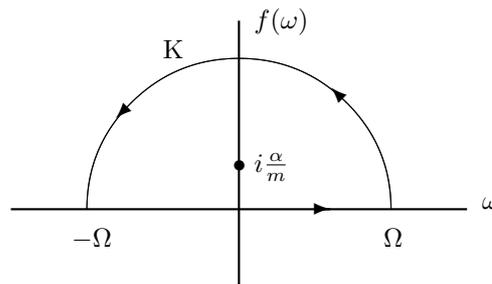


図 2.2: 複素平面の上半面を通る積分路

から, したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 2\pi i \text{Res}[f(\omega)]$$

これが (2.4.15) である.

さて, 留数  $\text{Res}[f(\omega)]$  を求めよう. (2.4.10) から

$$f(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau}}{m(\omega - i\frac{\alpha}{m})} \quad (2.4.10)$$

であるから, 留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(\omega)] &= \lim_{\omega \rightarrow i\frac{\alpha}{m}} (\omega - i\frac{\alpha}{m}) f(\omega) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow i\frac{\alpha}{m}} \left( \frac{1}{m} e^{i\omega\tau} \right) \\ &= \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

## 補遺 4 Laurent 展開による留数

補遺 3 では極限を用いて、留数を求めたが、Laurent 展開によって留数を求めることもできる。結果が変わってくることはないのどちらか一つだけ知っていれば十分だろうが、別の求め方も与えておく。

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega\tau}}{m(\omega - i\frac{\alpha}{m})} &= \frac{e^{i(i\frac{\alpha}{m}\tau)} e^{i(\omega - i\frac{\alpha}{m})\tau}}{m} = \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}\tau}}{m} \cdot \frac{e^{i(\omega - i\frac{\alpha}{m})\tau}}{\omega - i\frac{\alpha}{m}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}\tau}}{m} \left[ \frac{b_{-1}}{\omega - i\frac{\alpha}{m}} + b_0 + b_1(\omega - i\frac{\alpha}{m}) + \dots \right], \quad b_{-1} = 1, \quad b_0 = i\tau, \quad b_1 = -\frac{\tau^2}{2!} \\ &= \frac{a_{-1}}{\omega - i\frac{\alpha}{m}} + a_0 + a_1(\omega - i\frac{\alpha}{m}) + a_2(\omega - i\frac{\alpha}{m})^2 + \dots \end{aligned}$$

であるから、 $a_{-1}$  がつぎのように求められる

$$a_{-1} = \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \cdot b_{-1} = \frac{1}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}\tau}$$

留数は

$$\text{Res}[f(\omega)] = a_{-1} \quad (2.4.16)$$

となる。

## 補遺 5 グリーン関数の物理的・工学的意味

今村 勤「物理とグリーン関数」[4]によれば、物理学ではある現象を理解しようとするとき、「対象とする物理系にある作用を与えたとき、物理量にどのような変化を生じるか」という考え方をすることが多いという。

すなわち、「ある時空点  $(x', t')$  に与えた単位作用のある時空点  $(x, t)$  での場の量に与える影響は、いったん物理量が定まるとすべての伝わり方の総合として、2つの時空点の関数  $G(x, t, x', t')$  で表されるであろう。このような関数をグリーン関数という」と説明されている。

また、工学を学んだ人には、グリーン関数は制御理論のインパルス応答に相当すると理解されている。

制御理論の詳しい説明は専門書に譲るが<sup>19</sup>、インパルス応答について説明をしておこう。

時間の経過にそってのシステムの変化を問題とすると、このシステムを動的システムという。また、この動的システムの時間的な挙動の特徴を動特性という。

そのシステムをより目的にあった動特性へと導くことを制御という。その対象となる、動的システムを制御対象といい、制御対象の動特性を目的にそった状態に導くために制御装置がある。

いま、線形で時間的に不変な動的システムの挙動を表す、変数を状態変数という。入力を  $u(t)$  とし、出力を  $y(t)$  としたとき、動的システムの状態変数  $x(t)$  のしたがう方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (2.5.18)$$

に、出力  $y(t)$  は入力と状態変数に依存し

$$y = Cx + Du \quad (2.5.19)$$

にしたがうとしよう。

一般に  $x, u, y$  はベクトルであり、 $A, B, C, D$  は定数のマトリックスであるが、簡単のためにここではすべてスカラーとする（詳しくは文献 [6] を参照せよ）。(2.5.18), (2.5.19) の一般解は

$$x(t) = f(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t f(t - s)Bu(s)ds \quad (2.5.20)$$

$$y(t) = Cf(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t Cf(t - s)Bu(s)ds + Du(t) \quad (2.5.21)$$

<sup>19</sup>たとえば文献 [5] を参照せよ。

ここで,  $f(t) = e^{At}$  である.

いま,  $t_0 = 0, x(0) = 0$  のときのインパルス入力  $u(t) = \delta(t)$  に対する出力  $y(t)$

$$y(t) = Cf(t)B + D\delta(t) \quad (2.5.22)$$

をインパルス応答という. これを  $y(t) = g(t)$  と表せば, 一般の出力  $y(t)$  は

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t Cf(t-s)Bu(s)ds + Du(t) \\ &= \int_0^t [Cf(t-s)B + D\delta(t-s)]u(s)ds \\ &= \int_0^t g(t-s)u(s)ds \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

と表せる. したがって, (2.5.23) は (2.4.2) と同じ関係を示しているので, インパルス応答  $g(t)$  はグリーン関数であることがわかる.

(2012. 12. 3)

## 参考文献

- [1] 雑誌「バリティ」, 粉屋の男, グリーン関数のグリーン, 2004年7月号 21-29 (丸善)
- [2] 矢野 忠, メモ「グリーン関数入門」(愛媛大学電気電子工学科, 2004.7.5)
- [3] 矢野 忠, 「電気電子工学科ミニマム」(2001.7) 31-39
- [4] 今村 勤, 「物理とグリーン関数」(岩波書店, 1978), 1
- [5] 榎木義一, 砂原善文, 「自動制御工学」(養賢堂, 1969)
- [6] 広中平祐, 「現代数理科学事典」(大阪書籍, 1991) 699-700

## 編集後記

12月になって、今年もまた年の瀬が迫ってきた。皆様にはご健勝のことと存じます。

2巻6号を刊行する。こうしてみると一年が経つのは結構早いと感じる。街の中は衆院議員選挙も公示がされてあわただしくなっているが、私たちはあわてず騒がず、今回も中西先生の力作を掲載する。

もう1号の2巻7号を今年中に発行できるかどうかは編集発行人である私の働き如何にかかっている。が、その見通しはまだ立たないので、2巻7号が発行できるかどうかはなんとも申し上げられない。事前の予定では発行のつもりであった。

別にそんなに無理をする必要はないだろうという、ご意見もあると思う。もし今号で今年を終えれば、2巻は6号で終わることになるが、もし今年中にもう1号発行ができれば、7号で2巻を終えることになる。1巻の号数がそろわないのは、体裁を重んずる人には耐え難いことかもしれないが、個人的な我がままをお許し願いたい。(矢野 忠)