数学・物理通信

3巻4号　　2013年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2013 年 6 月 17 日

目 次

Contents

集合算公式を作る Construction of Formulae in Set Theory

高木富士夫
Fujio TAKAGI [1]

1.1　はじめに

前回の話では素集合展開と称する方法により，与えられた集合算公式を機械的に証明できることを示した．[1]　今回は同じ方法を用いると集合算公式を系統的に導けることを示す．全てを公式と呼ぶのは相応しくないほど多数の等式が得られる．そこで，それらの等式の中から特に有用と思われる基本公式といくつかの興味ある等式を選び出す．巾等律，交換律など最も基本的な公式とここで選出した基本公式を用いると，与えられた集合算公式（または等式）を簡単な計算で証明できる場合がある．

一般に全体集合 X と，それに含まれる n 個の部分集合（一般部分集合と呼ぶ）を考えるとき，全体集合と一般部分集合を 2^n 個の素集合を用いて展開できる．$n = 2$ の場合に即して復習する．一般部分集合を A, B とすると，４つの素集合は次式で定義される．

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \{x | x \in X, x \notin A, x \notin B\} \\
R_A &= \{x | x \in X, x \in A, x \notin B\} \\
R_B &= \{x | x \in X, x \notin A, x \in B\} \\
R_{AB} &= \{x | x \in X, x \in A, x \in B\}
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

ここで添字が異なる２つの素集合は互いに素である．すなわち

$$
i \neq j \Rightarrow R_i \cap R_j = \emptyset \quad (\emptyset \text{ は空集合}) \tag{1.1.2}
$$

ただし $x \in A, x \in B$ と $x \in B, x \in A$ は同値であるから，必要な場合 $R_{AB} = R_{BA}$ などと約束する．すなわち添字 AB と BA は同一視する．

(1.1.1) より

$$
\begin{aligned}
A &= R_A \cup R_{AB} \\
B &= R_B \cup R_{AB} \\
X &= R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

[1] ftakagi@jeans.ocn.ne.jp

(1.1.3) より

$$\begin{aligned}
A \cup B &= R_A \cup R_B \cup R_{AB} (= R_0^c) \\
A \cap B &= R_{AB} \\
A - B &= R_A \\
B - A &= R_B \\
A^c &= R_0 \cup R_B \\
B^c &= R_0 \cup R_A
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

ここで上付き添字 ^{c} は補集合を表す．例えば $R_0^c = X - R_0, A^c = X - A$ など．(1.1.3),(1.1.4) より，さらに次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
A \cup B &= (A^c \cap B^c)^c = (A^c - B)^c = (B^c - A)^c (= R_0^c) \\
A \cap B &= (A^c \cup B^c)^c = A - B^c = B - A^c (= R_{AB}) \\
A \cup B^c &= (A^c \cap B)^c = (B - A)^c = (A^c - B^c)^c (= R_B^c) \\
A \cap B^c &= (A^c \cup B)^c = A - B = B^c - A^c (= R_A) \\
A^c \cup B &= (A \cap B^c)^c = (A - B)^c = (B^c - A^c)^c (= R_A^c) \\
A^c \cap B &= (A \cup B^c)^c = B - A = A^c - B^c (= R_B) \\
A^c \cup B^c &= (A \cap B)^c = (A - B^c)^c = (B - A^c)^c (= R_{AB}^c) \\
A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c = A^c - B = B^c - A (= R_0)
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

これで一般部分集合が２個（A と B）の場合について公式を導く準備ができた．実際 (1.1.5) は de Morgan の法則を含む重要公式を含んでおり，それらの重要性は de Morgan の法則と同列と考えられる．したがって (1.1.5) は基本公式に組み入れるのが適当だろう．ただし (1.1.5) の８行の式のうち，１行分が独立で，残りの７行分はそれから文字の変換，補集合の性質そして必要な場合は各辺の補集合を取ることによって導くことができる．例えば標準形の de Morgan の法則の一部を含む第７行目を基準に取ってみる．第７行目の式において $A \to A^c, B \to B^c$ と変換すると，$A^c \to A^{cc} = A, B^c \to B^{cc} = B$ であるから，$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c = (A^c - B)^c = (B^c - A)^c$ すなわち第１行目の式が得られる．第７行目の式から第８行目の式を導くには $A \to A^c, B \to B^c$ と変換した後，各辺の補集合を取ればよい．したがって基本公式としては，どれか１行分だけ採用すればよい．しかし対を成す de Morgan の法則は２行分（第７行目と第８行目）に亘っており，第４行目と第５行目に含まれる次の２式は集合算式から差の記号 $-$ を消去するのに特に有用である．

$$\begin{aligned}
A - B &= A \cap B^c \\
(A - B)^c &= A^c \cup B
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

これとは別に，(1.1.1) から (1.1.3),(1.1.4),(1.1.5) を求めるときに，集合算の基本公式（和集合と共通部分の計算における巾等律，交換律，結合律，吸収律や補集合の基本的性質）を使った．それらの基本公式は記号 $\cup, \cap, ^c$ で表される集合算の定義から容易に導けるので，それらの証明については議論しない．

２節では $n = 1, 2$，３節では $n = 3$ の場合について等式の導出と重要公式の選出を行う．４節では，２，３節で得られた結果から一般の正整数 n の場合に成り立つと予想される公式をいくつか提示し，その証明を与える．５節では，与えられた集合算等式の証明法を３通り示し，その過程を通して，２節で導いた基本公式の有用性を示す．

1.2　$n = 1, 2$ の場合

1.2.1　$n = 1$ の場合

この場合，一般集合を A とすると，素集合は R_0 と R_A の２つ．その間に成り立つ関係式は $A = R_A, X = R_0 \cup R_A, A^c = R_0$ の３つ．これらから得られる一般集合の間の簡単な等式は，X を含まないものに限定すると，$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cap A^c = \emptyset$ などだけである．これらの等式は素集合展開を用いなくても，$\cup, \cap, ^c$ の定義から明らかである．

1.2.2　$n = 2$ の場合

$n = 2$ の場合の準備は既に１節で済んでいる．４種類の演算 $\cup, \cap, -, ^c$ を用いて A と B から例えば R_A に等しい集合を作る．実際には (1.1.3),(1.1.4),(1.1.5) を用いる．そのような集合を２つ以上作ることができれば，それらを等号で結んで公式（または等式）が得られる．結果は

$$\begin{aligned} A - B &= (A \cup B) - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c = B^c - A^c \\ &= A - (A - B^c) = A - (A^c \cup B) = (A \cup B) - (A^c \cup B) \\ &= (A^c \cup B)^c = (A - B) \cap A = (A^c \cup B^c) - A^c (= R_A) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

となる．このうち最初の４つの集合式（を結ぶ等式）は教科書 [2] の問題に出ている．R_A に等しい集合は (1.2.1) で尽きてはいない．R_B に等しい集合から得られる公式は (1.2.1) に置換 $A \leftrightarrow B$ を施して得られる．

R_0 に等しい集合を作って得られる等式は

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c = A^c - B = B^c - A = A^c - (B - A) = B^c - (A - B) \\ &= A^c - (A^c - B^c) = B^c - (B^c - A^c) = A^c - (A^c \cap B) = B^c - (A \cap B^c) \\ &= (A \cup B^c) - A = (A^c \cup B) - B (= R_0) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

となる．(1.2.2) の全体は当然のことながら置換 $A \leftrightarrow B$ のもとで不変である．なお (1.2.1) や (1.2.2) には (1.1.5) の一部が含まれている．

$R_A \cup R_B$ に等しい集合から得られる等式は

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B - A) &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\ &= (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) (= R_A \cup R_B) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

(1.2.3) の各辺の集合式は対称差 $A \Delta B$ のいろいろな表式を与える．最初の３つは教科書 [2] にも与えられている．(1.2.3) は全体として同時互換 $A \leftrightarrow A^c, B \leftrightarrow B^c$ のもとで不変である．ということは

$$A \Delta B = A^c \Delta B^c \tag{1.2.4}$$

を意味する．[3]　ちなみに (1.2.3) の第２辺の補集合をとって de Morgan の法則を使って変形し，結果を第４辺と比較すると

$$(A \Delta B)^c = A^c \Delta B = A \Delta B^c \tag{1.2.5}$$

が得られる．[3]

同様に $R_{AB}, R_0 \cup R_A, R_A \cup R_B \cup R_{AB}$ などに等しい集合を作って多数の集合算等式を得ることができる．しかしこれ以上は単なる羅列になるので，いちいち示さない．要するに素集合展開を用いれば集合算等式の練習問題を多数簡単に作成できる．

1.3　$n=3$ の場合

$n=3$ の場合，一般部分集合を A,B,C とすると，素集合は R_0,R_A,R_B,R_C,
$R_{AB},R_{BC},R_{CA},R_{ABC}$ の 8 個であり，これらは (1.1.1) と同様の式で定義される．A,B,C,X の素集合展開は

$$\begin{aligned}
A &= R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
B &= R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{ABC} \\
C &= R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
X &= R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

となる．これを用いると，当然 $n=2$ の場合より多くの等式を得ることができる．しかしそれらを単に羅列するのは意味がないので，ここでは文献 [2], [3] に出てこない等式で特に面白いと思われるものを示す.

まず第一に，対称差に対する差の分配律とでも称すべき次式が成り立つ.

$$(A\Delta B)-C=(A-C)\Delta(B-C) \tag{1.3.2}$$

(1.3.2) の両辺は $R_A \cup R_B$ に等しい．この他にきれいな等式として

$$\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) \\
&= (A-(A-B))\cup(B-(B-C))\cup(C-(C-A)) \\
&= (A-B^c)\cup(B-C^c)\cup(C-A^c)
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

$$\begin{aligned}
(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A) &= (A^c-B^c)\cup(B^c-C^c)\cup(C^c-A^c) \\
&= ((A\cup B)-C)\cup((B\cup C)-A)\cup((C\cup A)-B) \\
&= (A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C) \\
&= (A^c\cup B^c\cup C^c)-(A^c\cap B^c\cap C^c) \\
&= (A\Delta B)\cup(B\Delta C)\cup(C\Delta A)
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

$$(A\cup B\cup C)-(A^c\cup B^c\cup C^c)=A\cap B\cap C \tag{1.3.5}$$

$$(A\Delta B\Delta C)^c=A^c\Delta B^c\Delta C^c \tag{1.3.6}$$

などが得られる．(1.3.3),(1.3.4) の各辺，(1.3.5),(1.3.6) の両辺はそれぞれ $R_{AB}\cup R_{BC}\cup R_{CA}\cup R_{ABC}$, $R_A\cup R_B\cup R_C\cup R_{AB}\cup R_{BC}\cup R_{CA}$，$R_{ABC}$，$R_0\cup R_{AB}\cup R_{BC}\cup R_{CA}$ に等しい.

1.4　一般の n への拡張

前節まで，一般部分集合の数 n が 1,2,3 の場合について，素集合展開を用いて多数の集合算等式を導出した．集合の和や共通部分に対する分配律や結合律などを含めて，主な基本公式はここまでの解析で全て得られる．さらに n が増えるにつれて，用意すべき素集合展開の式の数や長さは急速に増える．ここでは $n=2,3$ の場合について得られた等式から予想される一般の正整数 n に対して成立する等式とその証明を数例示す.

(1.3.2) より，$2\le n$ に対して次式が成り立つことが予想される.

「一般公式 I」

$$(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n)-C=(A_1-C)\Delta(A_2-C)\Delta\cdots\Delta(A_n-C) \tag{1.4.1}$$

{ 証明 } 対称差の結合律 [1], [3] に注意して (1.3.2) を $n-1$ 回繰り返し使えば，証明が完了する．すなわち

$$\begin{aligned}(A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n) - C &= (A_1 - C)\Delta((A_2 \Delta \cdots \Delta A_n) - C) \\ &= (A_1 - C)\Delta((A_2 - C)\Delta((\cdots \Delta A_n) - C)) \\ &= \cdots \\ &= (A_1 - C)\Delta(A_2 - C)\Delta \cdots \Delta(A_n - C)\end{aligned}$$

証明終わり

(1.3.5) より，$1 \leq n$ に対して次式が成り立つことが予想される．

「一般公式 II」

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \tag{1.4.2}$$

{ 証明 } (1.1.6) の第 1 式，de Morgan の法則，分配律，交換律，巾等律などを用いて

$$\begin{aligned}&(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) \\ &\quad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c)^c \\ &\quad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\quad = (A_1 \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)) \cup (A_2 \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)) \cup \cdots \\ &\quad = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\end{aligned}$$

証明終わり

(1.2.3) の第 3 辺，第 5 辺および (1.3.4) の第 3 行，第 4 行から $1 \leq n$ に対して次式が成り立つことが予想される．

「一般公式 III」

$$\begin{aligned}&(A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) - (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &\qquad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

{ 証明 } (1.1.6)，de Morgan の法則及び交換律を用いると

$$\begin{aligned}&(A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) - (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &\qquad = (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) \cap (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c)^c \\ &\qquad = (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\qquad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c \\ &\qquad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) \\ &\qquad = (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c) \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\end{aligned}$$

証明終わり

1.5 集合算等式の 3 つの証明法

ここでは集合算等式の証明法を 3 種類示し，その過程を通して基本公式 (1.1.6) の有用性を示す．例えば次の等式を証明せよという問題 [2] を考える．

$$(A - B) - C = A - (B \cup C) \tag{1.5.1}$$

「証明法 I」

$x \in (A-B)-C \Leftrightarrow x \in A-B, x \notin C \Leftrightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A, x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A-(B \cup C)$

「証明法 II」

(1.3.1) より

$(A-B)-C = ((R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC})$

$-(R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{ABC}))-C$

$= (R_A \cup R_{CA}) - (R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) = R_A,$

$A-(B \cup C) = A - ((R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{ABC}) \cup (R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}))$

$= (R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC})$

$= R_A$

「証明法 III」

(1.1.6) と de Morgan の法則を用いると

$(A-B)-C = (A-B) \cap C^c = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap B^c \cap C^c$

$A-(B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap B^c \cap C^c$

「証明法 I」は教科書 [2] の解答そのままである.「証明法 II」は素集合展開を用いた機械的証明である．[1]「証明法 III」は公式 (1.1.6) の有用性を示す． 3 つの証明法はそれぞれ全く異なる．元の集合への帰属関係を直接解析する証明法 I は集合論的には最も正統的なのだろう．しかしそのときに必要な論理的考察は与えられた問題によってはかなり複雑になる．一方，証明法 II においては，一般部分集合の素集合展開を用意すれば，個々の等式の証明は単純な集合算だけで機械的に実行できる．証明法 III が適用できる場合は，証明は簡単な計算だけで済む.

参考文献

[1] 高木富士夫, 集合算公式の機械的証明, 数学・物理通信　第 3 巻，第 1 号（2013.3) 9-14

[2] 松坂和夫, 「集合・位相入門」(岩波書店,1968)

[3] 新関章三, 集合の対称差と集合列の極限定理, 数学・物理通信　第 2 巻, 第 2 号 (2012.6) 11-18

自然数のべき乗の級数 1

Power Series of Natural Numbers 1

矢野　忠
Tadashi Yano[2]

2.1　はじめに

自然数のべき乗の級数の和を $S_k(n)$ と表せば，

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = \sum_{m=0}^{n-1} m^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.1.1}$$

と定義される [3]．ここで，$0^k = 0, (k = 0, 1, 2, \cdots)$ であるから [4]，0^k があっても $S_k(n)$ の値は変わらないが，項数を n 個にするために，わざと付け加えておく．これは 2.5 節の階差数列で前進差分をとるためである．

よく知られているように

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= 0^0 + 1^0 + 2^0 + \cdots + (n-1)^0 = n-1 \\
S_1(n) &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \\
S_2(n) &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
S_3(n) &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\
S_4(n) &= 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4 = \frac{(n-1)n(2n-1)[3(n-1)^2 + 3(n-1) - 1]}{30}
\end{aligned}$$

などが成り立っている．

また，$k \geq 0$ のときには B_i を Bernouilli 数，$B_i(x)$ を Bernouilli の多項式とすれば，

$$\begin{aligned}
S_k(n) &= \frac{1}{k+1}[B_{k+1}(n+1) - B_k(1)] \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k+1}{i} \frac{B_{2i}(n+1)^{k+1-i}}{k+1}
\end{aligned}$$

と表せることも知られている [1]．

したがって，いまさら新たな $S_k(n)$ の求め方を考える必要もないかもしれないが，それでもあまり知られていないと思われる方法について考えてみよう [5]．

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 自然数の中には 0 を含めないが，以下では 0 と自然数という冗長な表現を避けるために 0 と自然数を合わせて自然数という．

[4] ここでは $0^0 = 0$ と定義をしておく．

[5] このエッセイは名古屋大学の谷村省吾さん宛ての名古屋市の林邦英さんの手紙 [2] に触発されて書いたが，その経緯は省く．

2.2 自然数のべき乗の級数の和の階差数列

自然数のべきの級数の和 $S_k(n)$ をその階差数列から求めるので，はじめに階差数列について述べる．

自然数のべきの数列の和を数列と考えて，べきの数 $k = 1 \sim 5$ についてその階差表をここに示しておく．ただし，以下の階差表では階差が定数になったところで，階差をとることを止めている．これはそれ以上の階差をとる必要がないからである．

まず自然数 n の 0 乗 $(k = 0)$ の級数の和の階差数列は

	[0]	1	2	3	4	5	6	7
(1)	[1]	1	1	1	1	1	1	

表 1

である．

自然数 n の 1 乗 $(k = 1)$ の級数の和の階差数列は

	[0]	1	3	6	10	15	21	28
(0)	[1]	2	3	4	5	6	7	
(1)	[1]	1	1	1	1	1		

表 2

である．

自然数 n の 2 乗 $(k = 2)$ の級数の和の階差数列は

	[0]	1	5	14	30	55	91
(0)	[1]	4	9	16	25	36	
(1)	[3]	5	7	9	11		
(2)	[2]	2	2	2			

表 3

である．

自然数 n の 3 乗 $(k = 3)$ の級数の和の階差数列は

	[0]	1	9	36	100	225	441
(0)	[1]	8	27	64	125	216	
(1)	[7]	19	37	61	91		
(6)	[12]	18	24	30			
(6)	[6]	6	6				

表 4

である．

自然数 n の 4 乗 $(k=4)$ の級数の和の階差数列は

	[0]		1		17		98		354		979		2275
(0)		[1]		16		81		256		625		1296	
	(1)		[15]		65		175		369		671		
		(14)		[50]		110		194		302			
			(36)		[60]		84		108				
				(24)		[24]		24					

表 5

である．

最後に自然数 n の 5 乗 $(k=5)$ の級数の和の階差数列は

	[0]		1		33		276		1300		4425		12201
(0)		[1]		32		243		1024		3125		7776	
	(1)		[31]		211		781		2101		4651		
		(30)		[180]		570		1320		2550			
			(150)		[390]		750		1230				
				(240)		[360]		480					
					(120)		[120]						

表 6

である．

これらの表で自然数のべきの級数の和を求めるときに必要になるのは上の表で (n) または $[n]$ で括られた数列のみである．そのことを次節で述べよう．

2.3 階差数列を使う

この節では自然数の 3 乗の級数の和 $S_3(n)$ を階差表を用いて求めてみよう．

そのときに「**k 階差数列が一定の数となれば，その一般項は k 次の多項式である**」という知識を用いることにしよう [3]．前節の階差表から $k=3$ のときには第 4 階差が一定となるので（表 4 参照），$S_3(n)$ は n の 4 次多項式で表されることがわかる．

いま，その 4 次多項式を

$$S_3(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e \tag{2.3.1}$$

と表すと，n についての 4 次多項式の係数 a, b, c, d, e を $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ とおいて得られる数列とその階差数列から求めることができる．この階差表は

a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5		a_6		a_7		a_8
	b_0		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7	
		c_0		c_1		c_2		c_3		c_4		c_5		c_6		
			d_0		d_1		d_2		d_3		d_4		d_5			
				e_0		e_1		e_2		e_3		e_4				

表 7

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&a_0 = e \\
&a_1 = a + b + c + d + e \\
&a_2 = 16a + 8b + 4c + 2d + e \\
&a_3 = 81a + 27b + 9c + 3d + e \\
&a_4 = 256a + 64b + 16c + 4d + e \\
&\cdots \\
&b_0 = a + b + c + d \\
&b_1 = 15a + 7b + 3c + d \\
&b_2 = 65a + 19b + 5c + d \\
&b_3 = 175a + 37b + 7c + d \\
&\cdots \\
&c_0 = 14a + 6b + 2c \\
&c_1 = 50a + 12b + 2c \\
&c_2 = 110a + 18b + 2c \\
&\cdots \\
&d_0 = 36a + 6b \\
&d_1 = 60a + 6b \\
&\cdots \\
&e_0 = 24a \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

ソーヤーと武田 [4] [5] によれば，実は上の表 7 で最左端の a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 のみが必要である [6]．これらを表 4 の左から 2 番目の $[n]$ の数 $0, 1, 7, 12, 6$ に等しいとおけば

$$
\begin{aligned}
e &= 0 \\
a + b + c + d &= 1 \\
14a + 6b + 2c &= 7 \\
36a + 6b &= 12 \\
24a &= 6
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

が得られる．このときに使われている数値は表 4 の $[n]$ で括られた数値の $0, 1, 7, 12, 6$ であり，他の数値は使われていない．この連立方程式を解けば，

$$
(a, b, c, d, e) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0)
$$

が得られて，これは 3.1 節で与えた $S_3(n) = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$ と一致している [7]．

そうすると，つぎに問題となるのは (2.3.2) の左辺の a, b, c, d, e の前の係数がどこから来ているかということである．

[6] このことは**一般の n 次の多項式は階差 0 番数列だけで決定できる**ことを示している．階差 0 番数列の定義は 2.4 節で行う．

[7] 実際には $S_3(n)$ ではなくて，$S_3(n+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ と一致している

この係数を求めるために林はパスカルの三角形をちょっと変形させた，興味深い数表を用いている [6]．その変形されたパスカル三角形は林の長時間にわたる経験と熟考の集約であるが，その由来はあまり明らかではない．

それで (2.3.2) の左辺の a, b, c, d, e の前の係数がどこから得られるかを，次節で述べよう．

2.4 係数はどこから

いま $S_3(n)$ は $S_3(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ と n の 4 次の多項式で表された．そして，その係数 a, b, c, d, e を決定する式は (2.3.2) であった．

$k = 0 \sim 4$ に対する表 1 ∼ 5 の最左端の (n) で示された数値を見てみよう．例えば $k = 4$ の階差数列の最左端（以下ではこれを**階差 0 番数列**と呼ぶ）は $(0, 1, 14, 36, 24)$ である（表 4 参照）．つぎに $k = 3$ の階差 0 番数列は $(0, 1, 6, 6)$ であるが，$k = 4$ の場合と同じ数の並びとなるように，それらの数の並びの後にもう一つ 0 を加えて，$(0, 1, 6, 6, 0)$ としよう．同様の調整を $k = 2$, $k = 1$ と $k = 0$ の階差 0 番数列に行うと，それぞれ $(0, 1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0)$ となる．

これらの数ベクトルを用いて

$$a(0, 1, 14, 36, 24) + b(0, 1, 6, 6, 0) + c(0, 1, 2, 0, 0) + d(0, 1, 0, 0, 0) + e(1, 0, 0, 0, 0) = (0, 1, 7, 12, 6) \tag{2.4.1}$$

とおけば

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ a + b + c + d &= 1 \\ 14a + 6b + 2c &= 7 \\ 36a + 6b &= 12 \\ 24a &= 6 \end{aligned}$$

が得られる．これは (2.3.2) と一致している．ここで $(0, 1, 7, 12, 6)$ は $k = 3$ の場合の表 3 の**階差 1 番数列**（これは階差 0 番数列のすぐ右の数列を指し，$[n]$ で示された数列）である．また，$e = 0$ であることは $k = 3$ のときの階差数列表から明らかである．

階差 0 番数列と呼んだ，階差数列表の最左端の数列があたかもベクトル空間の基底ベクトルのような働きをしている．使われる一番次数の高いべきの数列のベクトルに次数（成分の数）をあわす必要があるが，その調整をしてやれば，あとは簡単な連立 1 次方程式を解けばよい．

そこで，つぎに問題となるのは 2.2 節で述べた階差 0 番数列と階差 1 番数列を求める一般的な方法があるかどうかである．この答えは次節以降で肯定的に解かれる．

2.5 階差 0 番数列と 1 番数列を求める

まず求めたいのは自然数のべき乗の級数の和の階差 0 番数列の一般式である．

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k \tag{2.5.1}$$

とすれば，その第 1 階差 ΔS_n を

$$\Delta S_k(n) = S_k(n+1) - S_k(n) = n^k \tag{2.5.2}$$

で定義する．ただし，ここで注意したいのは (2.5.2) では**前進差分**を用いたので，(2.2.1) で定義した $S_k(n)$ の和では項を $n = 1$ ではなく，$n = 0$ からはじめたことである．

第 2 階差 $\Delta^2 S_k(n)$ を

$$\begin{aligned}\Delta^2 S_k(n) &= \Delta S_k(n+1) - \Delta S_k(n) \\ &= (n+1)^k - n^k \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

と定義し，さらに第 3 階差 $\Delta^3 S_k(n)$ を

$$\Delta^3 S_k(n) = \Delta^2 S_k(n+1) - \Delta^2 S_k(n) \tag{2.5.4}$$

と定義する．以下同様に第 p 階差を

$$\Delta^p S_k(n) = \Delta^{p-1} S_k(n+1) - \Delta^{p-1} S_k(n) \tag{2.5.5}$$

で定義する．

こうして，第 p 階差 $\Delta^p S_k(n)$ は第 2 階差 $\Delta^2 S_k(n)$ で表すことができる．

いま求めたいのは自然数のべきの級数の和の階差 0 番数列であるから，この第 p 階差 $\Delta^p S_k(n)$ で $n = 0$ とおけば第 p 階差の階差 0 番数列を得ることができる．

実は第 p 階差の階差 0 番数列だけではなく，2.3 節と 2.4 節でも見たように階差 1 番数列も必要である．このことは**補遺 1** でもちょっと触れる．

そのことはひとまずおいて，第 p 階差の階差 0 番数列の計算方法と結果は $p = 1 \sim 7$ に対して

$$\begin{aligned}
S_k(0) &= 0 \\
\Delta S_k(0) &= n^k|_{n=0} = 0 \\
\Delta^2 S_k(0) &= \left[(n+1)^k - n^k\right]|_{n=0} \\
&= 1^k \\
\Delta^3 S_k(0) &= \Delta^2 S_k(1) - \Delta^2 S_k(0) \\
&= \left[(n+2)^k - (n+1)^k\right] - \left[(n+1)^k - n^k\right]|_{n=0} \\
&= 2^k - 2\cdot 1^k \\
\Delta^4 S_k(0) &= \Delta^3 S_k(1) - \Delta^3 S_k(0) \\
&= 3^k - 3\cdot 2^k + 3\cdot 1^k \\
\Delta^5 S_k(0) &= \Delta^4 S_k(1) - \Delta^4 S_k(0) \\
&= 4^k - 4\cdot 3^k + 6\cdot 2^k - 4\cdot 1^k \\
\Delta^6 S_k(0) &= \Delta^5 S_k(1) - \Delta^5 S_k(0) \\
&= 5^k - 5\cdot 4^k + 10\cdot 3^k - 10\cdot 2^k + 5\cdot 1^k \\
\Delta^7 S_k(0) &= \Delta^6 S_k(1) - \Delta^6 S_k(0) \\
&= 6^k - 6\cdot 5^k + 15\cdot 4^k - 20\cdot 3^k + 15\cdot 2^k - 6\cdot 1^k
\end{aligned}$$

となる．これから第 p 階差での一般式を求めれば，

$$\begin{aligned}
\Delta^p S_k(0) = {}& {}_{p-1}C_0 (p-1)^k + (-1)_{p-1}C_1 (p-2)^k + \cdots \\
&+ (-1)^{r-1}{}_{p-1}C_{r-1}(p-r)^k + \cdots \\
&+ (-1)^{p-3}{}_{p-1}C_{p-3} 2^k + (-1)^{p-2}{}_{p-1}C_{p-2} 1^k, \quad (p \geq 1)
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

となる．この一般式で項数は $(p-2)+1 = p-1$ あるが，$p = 7$ を代入すれば，$p-1 = 6$ で $\Delta^7 S_k(0)$ の項数が 6 であることに一致している．この一般式 (2.5.6) は $\Delta^2 S_k(0)$ から $\Delta^7 S_k(0)$ までの式から帰納的に推論して得られた式でここまではまだ証明されていない．

検算のために (2.5.6) を用いて $p=1\sim 4$ のときの $\Delta^p S_3(0)$ を求めてみれば，

$$(\Delta S_3(0), \Delta^2 S_3(0), \Delta^3 S_3(0), \Delta^4 S_4(0)) = (0, 1, 6, 6)$$

となり，表 4 の階差 0 番数列の値と一致している．それで，(2.5.6) は正しいと言っていいであろう．(2.5.6) の数学的帰納法での証明は次節に述べる．

自然数のべきの級数の階差 0 番数列の一般式はすでに (2.5.6) で与えたが，なお求めるべきものとして自然数のべきの級数の和の階差 1 番数列がある．しかし，これも同様の方法で求められる．求め方は階差 0 番数列とまったく同様である．ただ，階差 0 番数列では $n=0$ とおいたところを $n=1$ とおけばよい．結果は

$$\begin{aligned}
S_k(1) &= 0 \\
\Delta S_k(1) &= n^k|_{n=1} = 1 \\
\Delta^2 S_k(1) &= \left[(n+1)^k - n^k\right]|_{n=1} \\
&= 2^k - 1^k \\
\Delta^3 S_k(1) &= \Delta^2 S_k(2) - \Delta^2 S_k(1) \\
&= \left[(n+2)^k - (n+1)^k\right] - \left[(n+1)^k - n^k\right]|_{n=1} \\
&= 3^k - 2\cdot 2^k + 1^k \\
\Delta^4 S_k(1) &= \Delta^3 S_k(2) - \Delta^3 S_k(1) \\
&= 4^k - 3\cdot 3^k + 3\cdot 2^k - 1^k \\
\Delta^5 S_k(1) &= \Delta^4 S_k(2) - \Delta^4 S_k(1) \\
&= 5^k - 4\cdot 4^k + 6\cdot 3^k - 4\cdot 2^k + 1^k \\
\Delta^6 S_k(1) &= \Delta^5 S_k(2) - \Delta^5 S_k(1) \\
&= 6^k - 5\cdot 5^k + 10\cdot 4^k - 10\cdot 3^k + 5\cdot 2^k - 1^k \\
\Delta^7 S_k(1) &= \Delta^6 S_k(2) - \Delta^6 S_k(1) \\
&= 7^k - 6\cdot 6^k + 15\cdot 5^k - 20\cdot 4^k + 15\cdot 3^k - 6\cdot 2^k + 1^k
\end{aligned}$$

となる．これから第 p 階差での一般式を求めれば，

$$\begin{aligned}
\Delta^p S_k(1) &= {}_{p-1}C_0 p^k + (-1)_{p-1}C_1(p-1)^k + \cdots \\
&\quad + (-1)^r{}_{p-1}C_r(p-r)^k + \cdots \\
&\quad + (-1)^{p-2}{}_{p-1}C_{p-2}2^k + (-1)^{p-1}{}_{p-1}C_{p-1}1^k, \quad (p \geq 1)
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

である．

$p=1\sim 4$ のときの $\Delta^p S_3(1)$ を求めてみれば，

$$(\Delta S_3(1), \Delta^2 S_3(1), \Delta^3 S_1(1), \Delta^4 S_3(1)) = (1, 7, 12, 6)$$

となり，表 4 の階差 1 番数列の値と一致している．

2.6　(2.5.6) の証明

数学的帰納法で (2.5.6) を証明しておこう．

そのためには (2.5.6) で $p \to p+1$ とした式が成り立つことを証明できればよい．いま

$$\Delta^{p+1} S_k(0) = \Delta^p S_k(1) - \Delta^p S_k(0) \tag{2.6.1}$$

であることに注意して，$\Delta^{p+1}S_k(0)$ を求めてみよう．

すでに $\Delta^p S_k(0)$ は (2.5.6) として求められており，また $\Delta^p S_k(1)$ も (2.5.7) で与えられたので，これらを (2.6.1) の式に代入すれば，

$$\begin{aligned}\Delta^{p+1}S_k(0) = {}& {}_pC_0 p^k + (-1)_pC_1(p-1)^k + \cdots \\ &+ (-1)^r{}_pC_r(p-r)^k + \cdots \\ &+ (-1)^{p-2}{}_pC_{p-2}2^k + (-1)^{p-1}{}_pC_{p-1}1^k\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

が得られる．これはすなわち，(2.5.6) で $p \to p+1$ として得られる式である．

したがって，数学的帰納法で (2.5.6) が証明された．

2.7　おわりに

林はパスカルの三角形を変形した表を考案して，それを用いて自然数のべき乗の級数の和を求めているが [6] [7]，その手続きは上で見てきたようにすべて上に述た方法で置き換えてもよいと思われる．そして，(2.5.6) と (2.5.7) を用いるとどんな自然数のべき乗の級数の和の階差 0 番数列も階差 1 番数列も求めることができるので，容易に自然数のべきの和を求めることができる．

もっとも自然数のべき乗の数の和 $S_k(n)$ を求める方法はたくさん知られているようであり，ここに述べた方法が特に新しい方法だと主張するつもりはまったくないが，それでもあまりよくは知られていない方法であるかもしれない．

また，第 p 階差数列が定数となる自然数の数列の和を求める場合には，階差 0 番数列が線形性を満たしているので，自然数のべき乗の和でなくとも自然数の和を求めることができるようである．しかし，そのことについては別の機会に述べることにしよう [8] [2] ．

補遺１　林の不思議な乗数の由来

林の変形されたパスカルの三角形の数表で，不思議な乗数が出てくるが，その理由を明らかにしたい [6]．

そのために例として自然数の 4 乗のべきの和の階差 0 番数列から自然数の 5 乗のべきの和の階差 0 番数列を導くことを考えてみよう．

4 乗のべきの階差 0 番数列は表 5 から $(0,1,14,36,24)$ であるが，一方 5 乗のべきの階差 0 番数列は表 6 から $(0,1,30,150,240,120)$ である．5 乗のべきの階差 0 番数列を 4 乗のべきの階差 0 番数列から求めるために林はつぎのような演算を行う．

$$(0+1)\times 1 = 1$$
$$(1+14)\times 2 = 30$$
$$(14+36)\times 3 = 150$$
$$(36+24)\times 4 = 240$$
$$(24+0)\times 5 = 120$$

確かにこの演算を行うと 5 乗のべきの階差 0 番数列 $(1,30,150,240,120)$ が得られる．

しかし，この乗数の $\times 1, \times 2, \times 3, \times 4, \times 5$ はどこからでてきたものだろうか．これは確かに不思議な乗数である．ちなみに $(0+1, 1+14, 14+36, 36+24, 24+0) = (1,15,50,60,24)$ は 4 乗のべきの階差 1 番数列である．

これらの不思議な乗数はつぎのように考えれば理解できる．

そのために自然数の 4 乗のべきの和の階差を一般的につぎのように表す.

第 1 階差　n^4
第 2 階差　$4n^3+6n^2+4n+1$
第 3 階差　$12n^2+24n+14$
第 4 階差　$24n+36$
第 5 階差　24

一方，自然数の 5 乗のべきの和の階差を一般的につぎのように表す．ここで 4 乗の場合と区別するために自然数を m で表せば

第 1 階差　m^5
第 2 階差　$5m^4+10m^3+10m^2+5m+1$
第 3 階差　$20m^3+60m^2+70m+30$
第 4 階差　$60m^2+180m+150$
第 5 階差　$120m+240$
第 6 階差　120

である.

これらの式から

$$\begin{aligned}
\frac{(5m^4+10m^3+10m^2+5m+1)_{m=0}}{(n^4)_{n=1}} &= 1\\
\frac{(20m^3+60m^2+70m+30)_{m=0}}{(4n^3+6n^2+4n+1)_{n=1}} &= \frac{30}{15}=2\\
\frac{(60m^2+180m+150)_{m=0}}{(12n^2+24n+14)_{n=1}} &= \frac{150}{50}=3\\
\frac{(120m+240)_{m=0}}{(24n+36)_{n=1}} &= \frac{240}{60}=4\\
\frac{120}{24} &= 5
\end{aligned}$$

が得られる．これでとても不思議に思われた林の乗数因子の由来がわかった.

ここで，注意をしておきたいのは例えば上の分数式の第 1 式では分母と分子は階差の次数が同じではなく，一つづつ階差がずれている．すなわち，分母が第 1 階差のとき，分子は第 2 階差となっている．第 2 式以下も同様である.

補遺 2　階差数列の性質

階差数列を用いて自然数のべき乗の級数和を求めるときに階差数列の性質をここにまとめておく.

1. 第 p 階差数列が一定となる数列の一般項は p 次の多項式で表される
2. この p 次多項式はその階差の最左端数列（階差 1 番数列と呼ぶ）から決定される
3. （0 まで含めて拡大した）自然数のべきの数列の階差数列の最左端の数列（「階差 0 番数列」と呼ぶ）は自然数のべき乗の級数の和を表す多項式の係数を求めるための基底ベクトルとなる.

4. （0 まで含めて拡大した）自然数のべきの数列の階差数列の最左端の数列（階差 0 番数列）の右隣の数列（階差 1 番数列）は自然数のべき乗の級数の和を表す多項式の係数を求めるための連立方程式の定数項を与える．

(2012.12.15)

参考文献

[1] 日本数学会 編,「岩波数学辞典」　第 4 版　（岩波書店，2007） 1713

[2] 林邦英，私信

[3] W. W. ソーヤー（芹沢正三 訳）,「代数の再発見 II」（講談社，1972) 36-47

[4] W. W. ソーヤー（芹沢正三 訳）,「代数の再発見 II」（講談社，1972) 30-47

[5] 高校数学の窓，http://whs-math.net/math/sec.319.html
ソーヤーの方法はこのサイトで武田利一さんの「幻の 0 番法」として紹介されているものと同じである．
武田利一，幻の 0 番法，数学セミナーリーディングス「新しい高校数学の展望」（日本評論社，1990）107-111

[6] 林　邦英レポート集，http://whs-math.net/report/hayashi/hayashi.html の中の「M 乗数の和」「幻の 0 番法」他の関連のレポートを見よ．

[7] 林　邦英研究集，http://www7a.biglobe.ne.jp/˜watmas/HayashiKunihide.html の中の数列，第 3 章第 3 節および第 4 章を見よ．

[8] $\sum n^s$ の求め方，http://www.rd.mmtr.or.jp/˜bunryu/kaisasuuretu.shtml

[9] 数列の和，http://www.004.upp.sso-net.ne.jp/s_honma/sum/sum.htm
数列の和を求める方法を多岐にわたって示している．しかし，このサイトの内容をすべて理解することはなかなか難しい．

自然数のべき乗の級数 2

Power Series of Natural Numbers 2

矢野　忠
Tadashi YANO[8]

3.1　はじめに

すでに自然数のべき乗の級数の和を求めることをエッセイ「自然数のべき乗の級数 1」 [1] で行ったが，どうもこのエッセイで述べた方法はあまり効率がいい方法とはいえない．それでもっとも効率のいい方法がないものか.

ここで述べる方法がい前の方法よりも効率がいいかどうかは即断ができないが，それでもいろいろの方法を知っておくことは悪いことではない．それで，また同じ問題を取り扱ってみよう．ここで扱う方法は微分法を知っている人にはやさしい方法で取り立てて難しくはない.

計算方法の基本的な説明はすでに [2] で述べられているが，私には釈然としないところがあったので，私なりの工夫をして解説を試みただけなので，オリジナリティはあまりない.

3.2　計算方法

前のエッセイ [1] とちがって自然数のべき乗の級数の和を $S_k(n)$ と表し，

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k = \sum_{m=1}^{n} m^k, k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.2.1}$$

と定義しよう．この (3.2.1) は n の $k+1$ 次多項式で表されることが知られている．この定義 (3.2.1) から

$$\begin{aligned}
S_k(n) - S_k(n-1) &= n^k \\
S_k(n-1) - S_k(n-2) &= (n-1)^k \\
S_k(n-2) - S_k(n-3) &= (n-2)^k \\
&\cdots \\
S_k(3) - S_k(2) &= 3^k \\
S_k(2) - S_k(1) &= 2^k \\
S_k(1) - S_k(0) &= 1^k
\end{aligned}$$

[8]yanotad@earth.ocn.ne.jp

が得られる。

これらを辺々足せば,

$$S_k(n) - S_k(0) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k \tag{3.2.2}$$

が得られる.

もともとの $S_k(n)$ の定義 (3.2.1) では $S_k(0)$ は定義されていないが，$S_k(n)$ を n の多項式として表せば，その多項式では $S_k(0)$ を定義できるようになる．あたかも関数が解析接続できて，その関数の定義域が拡げられるように [9].

$S_k(1) - S_k(0) = 1^k$ であり，定義から $S_k(1) = 1$ であるから，$S_k(0) = 0$ と定義すればよい．こうして $S_k(n)$ は $n = 1$ を越えて $n = 0$ のときの $S_k(0)$ にも定義できるようになった．このとき (3.2.2) を

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k = \sum_{m=0}^{n} m^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.2.3}$$

と表せる．もちろん $0^k = 0, (k = 1, 2, 3, \cdots)$ であるが，$k = 0$ のときも例外とならないように，便宜的に

$$0^k = 0, \quad (k = 0)$$

と定義しておく.

(3.2.3) は n の恒等式なので n の多項式 $S_k(n)$ は一義的に決めることができる．$S_k(0) = 0$ であることから，$S_k(n)$ が定数項をもたないことを示している．すなわち，これは因数定理から $S_k(n)$ は n という因数をもつことを示している．または $S_k(n)$ が n で割り切れると言ってもよい.

ところで (3.2.1) からすぐわかるように

$$S_k(n) - S_k(n-1) = n^k, \quad S_k(1) = 1 \tag{3.2.4}$$

であるから，この (3.2.4) を n で微分すれば,

$$\frac{dS_k(n)}{dn} - \frac{dS_k(n-1)}{dn} = kn^{k-1}$$

が得られる．両辺を k で割れば

$$\frac{1}{k}\left[\frac{dS_k(n)}{dn} - \frac{dS_k(n-1)}{dn}\right] = n^{k-1} \tag{3.2.5}$$

となる．以後記号を簡単にするために $\frac{dS_k(n)}{dn} = S'_k$ と n での微分をプライム $\prime$ を用いて表す．(3.2.5) は

$$\frac{1}{k}\left[S'_k(n) - S'_k(n-1)\right] = n^{k-1} \tag{3.2.6}$$

と簡明な記号で表される.

この (3.2.6) を (3.2.4) と比べると $S'_k(n)$ が $S_{k-1}(n)$ と関係があることが示唆される．一番単純には

$$S_{k-1}(n) = \frac{S'_k(n)}{k}$$

が成り立つことが予想される.

もし，この関係が成り立つとすれば，$n = 1$ の場合には $S_{k-1}(1) = 1$ であるから，$S'_k(1)/k = 1$ が成立しなければならないが，これは一般には成立することが保証されない．なぜなら，$a \neq 0$ として

$$S_{k-1}(n) = \frac{S'_k(n)}{k} + a, \quad a = \text{一定} \tag{3.2.7}$$

[9] 補遺を参照

としても，見かけ上は

$$S_{k-1}(n) - S_{k-1}(n-1) = \frac{1}{k}\left[S'_k(n) - S'_k(n-1)\right] = n^{k-1}$$

を満たすことができるからである．それでいま (3.2.7) を仮定することにしよう．

$S_{k-1}(1) = 1$ であるから，

$$\frac{S'_k(1)}{k} + a = 1$$

と定数 a をとればよい．

一方，$n = 0$ のときには $S_{k-1}(0) = 0$ であるので，

$$\frac{S'_k(0)}{k} + a = 0$$

と a を表すこともできる．すなわち，a は

$$a = -\frac{S'_k(0)}{k} = 1 - \frac{S'_k(1)}{k} \tag{3.2.8}$$

と決めればよい[10]．このように a をとれば，(3.2.7) から

$$\begin{aligned} S_{k-1}(n) &= \frac{1}{k}\left[S'_k(n) - S'_k(0)\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[S'_k(n) - S'_k(1)\right] + 1 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

が成り立つ．したがって，(3.2.9) から $S_{k-1}(0) = 0, S_{k-1}(1) = 1$ が成立していることは再度直ちにわかる．

定数 a を (3.2.8) のようにとれば，(3.2.7) が成立することがわかった．そうすれば，$S_{k-1}(n)$ が既知であれば積分によって $S_k(n)$ を求めることができる．(3.2.7) の両辺に k をかければ

$$S'_k(n) = kS_{k-1}(n) - ak \tag{3.2.10}$$

となる．これを n で積分すれば

$$S_k(n) = k\int S_{k-1}(n)dn - ak\int dn + C, \quad C = \text{積分定数} \tag{3.2.11}$$

$S_k(0) = 0$ であるから不定積分 C はいつでも $C = 0$ である．さらに定数 a は $S_k(1) = 1$ であることから決めることができる．

上の方法で自然数のべきの級数の和を求める例を一つ次節で挙げておこう．

3.3 例

$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$ から $S_6(n)$ を求めよ．

（解）

まず，$S_5(n)$ の両辺に 6 をかければ

$$6S_5(n) = n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2$$

これを n で積分すれば

$$6\int S_5(n)dn = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3$$

[10] もっとも a を (3.2.8) のように取ったといってもこれで a を実質的に決めたことにはなっていない．実質的にどのように決めるかは下に挙げる例を参照せよ．

したがって，(3.2.11) から

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 - 6an$$

が得られる．

$S_6(1) = 1$ であるから

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 6a = 1$$

が成り立つ．これから $6a$ を求めれば，

$$6a = -\frac{1}{42}$$

これらを合せると

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

が得られる．

3.4 おわりに

ここで述べた自然数のべき乗の級数の和の求め方はとても簡単である．積分といっても多項式の積分であるから難しいことはなにもない．ただ $S_k(n)$ を求めるためには，それより一つ次数の低い $S_{k-1}(n)$ がわかっている必要がある．もっともそれが解るためにはまたもう一つ次数の低い $S_{k-2}(n)$ がわかっていることが必要ということになり，結局はすべての k 次より低い自然数のべき乗の級数の和を求めておかなければならない．

補遺　定義の拡張

自然数のべき乗の級数の和 $S_k(n)$ は $k = 1, 2, 3, \cdots$ のときには

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{A1}$$

であるから，$S_k(n)$ の元の定義 (3.2.1) では定義されていなかった $n = 0$ での値は (A1) の最右辺の $S_k(n)$ を表す n の多項式では定義することができるようになった．

もっとも $n = 0$ のときに $S_k(n)$ の定義を拡張することは無理ではない．それには

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
S_2(n) &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^k \\
S_3(n) &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{A2}$$

と $0, 0^2, 0^3, \cdots$ をそれぞれ $S_1(n), S_2(n), S_3(n), \cdots$ に付け加えればよい．しかし，(A2) ではこれを $n = -1$ や $n = -\frac{1}{2}$ 等には拡張することはできないが，(A1) では $S_k(-1) = 0$,　$(k = 1, 2, 3)$ とか $S_2(-\frac{1}{2}) = 0$ も定義することができる．これは複素解析の解析接続ではないが，それに類似した概念と考えることができる．

(2012.12.30)

参考文献

[1] 矢野　忠，自然数のべき乗の級数 1，数学・物理通信　第 3 巻，第 4 号 (2013.6) 9-18

[2] 数列の和，http://www.004.upp.sso-net.ne.jp/s_honma/sum/sum.htm
数列の和を求める方法を多岐にわたって示している．しかし，このサイトの内容をすべて理解することはなかなか難しい．

編集後記

3 巻 3 号の発行に手間だった割には，すんなりと 3 巻 4 号が発行できた．

梅雨に入るのが例年よりも 10 日か 1 週間早かった．そのせいかどうかわからないが，今日は梅雨の中休みである．

いずれ本格的な梅雨がやって来るのだとは思うが，今年は 5 月に雨不足であり，特に農業関係者からは雨が待たれているであろう．

しかし，暑い夏はそこまで来ている．暑い夏に耐えられるように，皆様のご健勝を祈りたい．

（矢野　忠）

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

   この「数学・物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野　忠（元愛媛大学）が編集および発行する，主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌，もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）．

2. 雑誌の目的

   この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです．したがって，興味深くて，面白いと思われるもので，どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが，教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを発表することを目的とします．それで専門的でありすぎるものとか，もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします．この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします．投稿者は中学校，高校，大学の理数系の学生，教師，研究者や元教師，元研究者，研究所の研究者，会社の技術者その他これに準ずる方とします．

3. 編集の方針

   この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します．したがって，内容の審査は行いませんが，もちろん公序良俗に反するものとか，理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります．原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することがあるかもしれません．しかし，文章の責任はすべて著者にあります．また，将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが，再録した場合には初出を明記することをお願いします．一号のページ数は 26 ページを目途とします．原稿のページ数があまり多いようなら，何回かに分けて出すことをお願いします．投稿は 1 回当たりのページ数を 10 ページ前後でお願いをしたいと思います．短いのは半ページでも数行でもかまいません．

4. 発行の方針

   発行は基本的に Latex で入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集して PDF にして出力してメールで配布します．もちろん少部数のプリントアウトも原理的には発行できますが，これは例外とします．また原則として季刊としますが，編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります．

5. その他

   基本的には自由であることを旨としますが，何か問題が起これば，その都度著者と相談をします．

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォマット

   Latex で A4paper の原稿と dvi または pdf のファイルを e-mail に添付書類として yanotad@earth.ocn.ne.jp の矢野 忠宛てに送付する．タイトルはセンタリング，所属，氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください．上下の余白は 3cm，左右は 2.5cm を原則としますが，編集者の都合で変更されることがあります．

   技術的な理由により各投稿原稿の日本語の目次には著者名が入りません．それを補うために英文の方には著者名を入れております．したがって，英文タイトルと著者名をローマ字で必ずご記入ください．

   図や表は本文の該当箇所に張り込んでください．またキャプションをつけてください．

   白黒印刷であることにご留意ください．

   本文の字の大きさは 8 ポイントでサーキュラーに掲載されます．他のポイント数で原稿を書かれている場合にはグラフの大きさが原稿と異なることがあります．そのことをご注意ください．

   式の番号はできるだけ`\label{eq:3.1.5}`と`\ref{eq:3.1.5}`のようにコマンドで付けてしてくださると助かります．documentclass は jreport になるので，各投稿原稿は一つの章になります．そのため式の番号は（章，節，節の式番）と表示されます．

2. 投稿の受付と掲載決定

   投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります．もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって，そのまま掲載決定にはなりません．掲載ができないときはその後メールをします．特に掲載できない旨のメールが行かなければ，掲載を認めたものとします．早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい．もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください．

3. 発行時期

   季刊で 3 月，6 月，9 月，12 月を原則としますが，編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります．