

数学・物理通信

3卷5号 2013年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年9月4日

目次

宇宙エレベーターを建設することは可能か	3
1.1 はじめに	3
1.2 初期的解析	3
1.3 ケーブルの太さを変えた場合の解析	6
1.4 おわりに	7
非可換量の係数をもつ線形常微分方程式の解法	9
2.1 考える問題	9
2.2 非可換量を含む線形代数方程式	9
2.3 定数係数線形常微分方程式の解法	11
2.4 係数が非可換量の場合への拡張	12
2.5 問題提起の背景	15
四元数と空間回転 5	16
3.1 はじめに	16
3.2 ベクトルの空間回転	17
3.3 行列による表示	18
3.4 おわりに	19
編集後記	21
原稿の募集と投稿規定	22

Contents

1. Kenji SETO and Fumio YOSHIDA: Is It Feasible to Construct a Space-Elevator ?
2. Noboru NAKANISHI: Method for Solving the Linear Ordinary Differential Equation with Noncommutative Coefficients
3. Tadashi YANO: The Quaternions and Rotations 5
4. Shozo NIIZEKI: Editorial Comments

宇宙エレベーターを建設することは可能か Is It Feasible to Construct a Space-Elevator ?

世戸 憲治¹ 吉田 文夫²
Kenji SETO³ Fumio YOSHIDA⁴

地上と静止衛星を結ぶエレベーター、いわゆる、宇宙エレベーターが最近よく話題になっているが、果たしてこれは実現可能なものなのか、ここでは力学的立場から検討してみた。結論として、現状ではその可能性は極めてゼロに近いものであり、将来的にも期待することは難しいと言わざるを得ない。

1.1 はじめに

最近、地上と静止衛星を結ぶエレベーターのことが色々な場面で話題になっている。インターネットで、「宇宙エレベーター」で検索するとたくさんの項目が引っ掛かってくるし、NHKのTVドラマに登場するくらいだから、かなりの人がこの話題を耳にしているに違いない。中には今にでもすぐ実現すると思っている人がいるかもしれない。確かにそんなものがあれば、どんなに便利であろう。わざわざ、高いお金をかけて、ロケットを飛ばす必要がなくなる。第一に、ロケットは、地球上に有毒ガスを振りまき、莫大なエネルギーを消費する元凶でしかなく、使わないにこしたことはない。もし、宇宙エレベーターが実現すれば、ロケットに比べ、消費エネルギーは1/100から1/1000位に縮小させることができる。

ここでは、そのような装置を作るための初歩的かつ初期的な段階として、おもに力学的な立場から考察してみよう。一番問題となるのは、エレベーターを支えるためのケーブルが、その重さに耐えられるかどうかである。

1.2 初期的解析

はじめは、簡単化のため、以下の3点の仮定のもとに解析してみる。

- (1) ここで使うケーブルは太さが一様で、かつ、伸び縮みしないものとする。
- (2) エレベーターの籠本体の質量は、ケーブルの質量に比べ無視する。
- (3) このエレベーターをつけても静止衛星の位置は変化しないものとする。

これらの仮定は、一つひとつが大胆なものではあるが、初期的解析としては本質的なものである。

ケーブルの断面積を S 、質量(体積)密度を ρ 、その張力を T とする。ただし、張力は場所によって異なるので、地球の中心を原点とし静止衛星方向むきの x 座標をとったとき、点 x での張力を $T(x)$ とする。地球の

¹北海学園大学名誉教授

²北海学園大学工学部生命工学科

³seto@pony.ocn.ne.jp

⁴yoshida@lst.hokkai-s-u.ac.jp

半径を R_e , 地球の質量を M_e , 万有引力定数を G , 地上での重力加速度を $g = GM_e/R_e^2$ とする. また, 地球の自転角速度を ω とする.

いま, ケーブル上の点 x と点 $x+dx$ 間に作用する力のつり合いを考えてみると, 上向きに作用する力は, 張力 $T(x+dx)$ と遠心力 $Sdx\rho x\omega^2$, また, 下向きに作用する力は, 張力 $T(x)$ と重力 $GM_e Sdx\rho/x^2 = R_e^2 g Sdx\rho/x^2$ であるから, そのつり合いの式は

$$T(x+dx) + Sdx\rho x\omega^2 = T(x) + \frac{R_e^2 g Sdx\rho}{x^2} \quad (1.2.1)$$

となり, したがって, 微分方程式

$$\frac{1}{S} \frac{dT}{dx} = \frac{R_e^2 g \rho}{x^2} - \rho \omega^2 x \quad (1.2.2)$$

を得る. 以下では, 単位断面積あたりの張力, すなわち, 応力 $\sigma(x) = T(x)/S$ を使って書き表そう. (1.2.2) 式は

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{R_e^2 g \rho}{x^2} - \rho \omega^2 x \quad (1.2.3)$$

となる. これを積分して,

$$\sigma(x) = -\frac{R_e^2 g \rho}{x} - \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + C \quad (1.2.4)$$

となり, 積分定数 C を地上 ($x = R_e$) で応力 σ が, 一定値 σ_e となるように選ぶと, 座標 x での応力は

$$\sigma(x) = R_e^2 g \rho \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R_e^2 - x^2) + \sigma_e \quad (1.2.5)$$

となる.

この (1.2.5) 式の x 依存性をもう少しはつきりさせるため静止衛星との関係を調べてみよう. 静止衛星の質量を M_s , その x 座標を R_s とすると, 静止衛星に作用する重力と遠心力のつり合いの式は,

$$G \frac{M_e M_s}{R_s^2} = M_s R_s \omega^2 \quad \Rightarrow \quad R_e^2 g = R_s^3 \omega^2 \quad (1.2.6)$$

となる. この (1.2.6) の関係を用い, ω を消去した形で (1.2.5) 式を書き直すと,

$$\frac{\sigma(x)}{\rho} = R_e^2 g \left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2R_s^3} (R_e^2 - x^2) \right] + \frac{\sigma_e}{\rho} \quad (1.2.7)$$

となり, また, この x 微分は (1.2.3) より, あるいは, この式から直接求めてもよいが,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{R_e^2 g}{R_s^3} \cdot \frac{R_s^3 - x^3}{x^2} \quad (1.2.8)$$

となる. これから, $R_e \leq x \leq R_s$ の範囲では応力は高さと共に増加していき, 静止衛星に接したところで最大になることがわかる. 以下では, この静止衛星に接するところでのケーブルの応力を具体的に求めてみよう.

(1.2.7) 式において, $x = R_s$ として, この点での応力を $\sigma_s = \sigma(R_s)$ とすると,

$$\frac{\sigma_s}{\rho} = \frac{R_e g}{2R_s^3} (R_s - R_e)^2 (2R_s + R_e) + \frac{\sigma_e}{\rho} \quad (1.2.9)$$

となる.

以下, 実際の数値,

$$R_e = 6370 \times 10^3 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \omega = 2\pi / (24 \times 60 \times 60) / \text{s} = 7.2722 \times 10^{-5} / \text{s} \quad (1.2.10)$$

を用いて、まず、静止衛星の地球中心からの距離 R_s を、(1.2.6) の第 2 式から求めると、

$$R_s = \left(\frac{R_e^2 g}{\omega^2} \right)^{1/3} = 42,207.647 \times 10^3 \text{ m} \approx 42,200 \text{ km} \quad (1.2.11)$$

となり、この値を (1.2.9) 式に代入して σ_s/ρ の値を求めると、

$$\frac{\sigma_s}{\rho} \approx 48,400 \text{ kN} \cdot \text{m/kg} + \frac{\sigma_e}{\rho} \quad (1.2.12)$$

となる。

以下、この数値が何を意味するか考える。ある物質を引っ張って破断したときの応力 σ_y を、引張強度と言い、この引張強度 σ_y を質量密度 ρ で割ったもの、すなわち、 σ_y/ρ を比強度という。この比強度は軽くて丈夫なものほど大きな値をとる。以下の表に、代表的な物質 7 種類について、引張強度、密度、比強度、破断長を載せる。なお、破断長は比強度を重力加速度 g で割ったもので、長さの次元を持ち、その物質を紐状にして吊下げたとき、破断するまでの最大の長さを表す。

材料名	引張強度 (MPa)	密度 (g/cm ³)	比強度 (kN·m/kg)	破断長 (km)
コンクリート	2	2.4	0.83	0.084
Scifer Steel Wire (鋼鉄)	5,500	7.87	698	71.2
炭素繊維 AS4	4,300	1.75	2,457	250
ケブラー	3,620	1.44	2,514	256
スペクトラ	3,510	0.97	3,619	369
カーボンナノチューブ (不確実)	62,000	1.34	46,268	4,716
コロッサルカーボンチューブ	6,900	0.116	59,483	6,066

(ケブラーは芳香族ポリアミド系樹脂。スペクトラは超高分子量ポリエチレンの製品名。また、コンクリートは引張強度の弱いものの代表として比較のために載せた。)

そもそも、宇宙エレベーターなるものの実現可能性が言われたしたのは、カーボンナノチューブ (CNT) の出現によるところが大きい。これは、日本人の飯島澄男氏によって、1991 年に発見されたもので、驚異的な引張強度を持つ物質として世界の注目を集めた [1]。しかし、(1.2.12) 式に見るとおり、地上での σ_e の値を無視するとしてもこの CNT では比強度が足りない。ただし、CNT の場合、将来的には、その製法の改良により純度を上げていくことで、より大きな比強度をだすことが可能と考えられてはいるが、桁違いに大きくなることは期待できないであろう。

最近 (2008 年) になって、CNT より比強度が大きいものとしてコロッサルカーボンチューブ (CCT) というものが発見された [2]。上の表で見るとおり CCT の比強度は、(1.2.12) 式にある数値を超えている。また、この CCT の破断長はほぼ地球の半径に匹敵するものであるが、破断長の定義そのものは、重力加速度 g を地上での一定値とし、遠心力のようなものは、もちろん考慮しないで計算されたものである。これで宇宙エレベーターが作れるかという、そう簡単ではない。実際に作るとなると、風の影響を避けるため、ケーブルにはかなりの程度の張力を懸けておく必要があるし、エレベーターの籠本体の重量も考慮しなくてはならないことなど、安全性のことを考えると実際には (1.2.12) 式にある数値の 10 倍以上の比強度がないと安心して乗ることはできないだろう。そのうえ、現在のところ実験的に作られている CCT は、長さがせいぜい、数 cm 程度のものでしかない。実際にこのエレベーターを作るとなると、途中で中継点を作るとしても、何万 km という長さのケーブルを切れ目なく作る必要がある。こんなことができるようになるには、あと何年くらいかかるのだろうか。

1.3 ケーブルの太さを変えた場合の解析

現在この世に存在するものでこれ以上のものは望めないで、もし、どうしても作るとなれば、これまで考えてきた太さ一様のケーブルはやめにして、上にいくほど太くなるケーブルを使うしか方法はないだろう。カーボンナノチューブ (CNT) における炭素の結合状態は、通常 6 員環で出来ているが、8 員環の構造を取り入れるとチューブを枝分かれさせることができるので、ケーブルの太さを変えることができる。

ただし、こうなると普通のエレベーターのようにケーブルを回転させることはできなくなってしまうので、籠を動かすには、籠自体に動力を付けて、ケーブルに沿って昇っていくことになる。

この節では、ケーブルの断面積 S を高さ x の関数として、 $S(x)$ として扱う。このとき、前節の (1.2.1) (1.2.2) 式はそのままの形で成立する。ここでは、ケーブルに発生する応力が高さによらず一定値 σ_0 になるように、すなわち

$$\frac{T(x)}{S(x)} = \sigma_0 \quad (1.3.1)$$

を仮定したとき、断面積 $S(x)$ がどのような x 依存性を持つかについて解析しよう。この (1.3.1) 式を用いると (1.2.2) 式は

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{\rho}{\sigma_0} \left(\frac{R_e^2 g}{x^2} - \omega^2 x \right), \quad (1.3.2)$$

あるいは、(1.2.6) 式を用いて、

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{\rho R_e^2 g}{\sigma_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{R_s^3} \right), \quad (1.3.3)$$

となる。これを積分して断面積 $S(x)$ を求めると

$$S(x) = S_e \exp \left[\frac{\rho R_e^2 g}{\sigma_0} \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{x} + \frac{R_e^2 - x^2}{2R_s^3} \right) \right] \quad (1.3.4)$$

と求められる。ここに、 S_e は積分定数であるが、これは地上での断面積を意味する。ケーブルの張力の方は、(1.3.1) から、

$$T(x) = \sigma_0 S_e \exp \left[\frac{\rho R_e^2 g}{\sigma_0} \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{x} + \frac{R_e^2 - x^2}{2R_s^3} \right) \right] \quad (1.3.5)$$

となる。これらの式から断面積、張力共に高さが高くなるにつれ大きくなり、静止衛星に達したところで最大になることがわかる。

以下、この式に基づいて数値解析を試みよう。静止衛星のところでの断面積を $S_s = S(R_s)$ として、この値が地上での断面積 S_e の何倍になるかを求めてみる。(1.3.4) 式から

$$\frac{S_s}{S_e} = \exp \left[\frac{R_e g}{2(\sigma_0/\rho) R_s^3} (R_s - R_e)^2 (2R_s + R_e) \right] \quad (1.3.6)$$

となり、この比の値は、 σ_0/ρ の値で決まる。ここでは、ケーブルの材料として CNT を想定し、 σ_0/ρ の値が、CNT の比強度に等しいとき、2 分の 1 のとき、5 分の 1 のとき、10 分の 1 のとき、の 4 通りについて求めてみると、

$$\frac{S_s}{S_e} = \begin{cases} 2.84, & \sigma_0/\rho = \text{CNT の比強度}, \\ 8.10, & \text{2 分の 1 のとき}, \\ 186.84, & \text{5 分の 1 のとき}, \\ 34909.79, & \text{10 分の 1 のとき}, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

となって、 σ_0/ρ の値を小さくするにしたがい断面積の比は正しく指数関数的に増加していく。ケーブルの安全性から見た場合、 σ_0/ρ の値は少なくとも CNT の比強度の 10 分の 1 以下に抑えておくべきと考えられるが、そのときの断面積の比は約 35,000 倍にもなり、とても実用に供するものだとは考えられない。

1.4 おわりに

宇宙エレベーターの建設に関してはあまりにも問題が多すぎる。第 1.2 節の初めのところで述べた (3) の問題であるが、静止衛星本体にはケーブルからの非常に大きな張力がかかってしまうので、このままでは、衛星本体が地球に落下してしまう。これを解決するには、衛星から地球とは反対方向のさらに上空方向にもケーブルを伸ばし、それにかかる遠心力で、地球方向の張力と打ち消すようにする。このためにもケーブルの長さは長大なものとなってしまふ。もっとも、この問題には、もう一つの解決方法がある。それは、衛星本体を静止軌道より高くして、衛星本体にかかる遠心力を利用する方法である。この 2 つの方法のうちどちらが有利なのかは、建設時の作業のし易さから決められるのであろう。

さらに、もしこんなものができたとしても、

- (a) エレベーターの運行に要する時間がかかりすぎることである。エレベーターの籠が新幹線なみの時速 300 km で走れたとしても、地上と衛星間の距離、 $R_s - R_e \approx 35,830$ km を走行するには、5 日間もかかってしまう。
- (b) また、何トンもあるエレベーター用の籠をこのような高速で走らせるには、ケーブルの太さは最低でも 50cm 位は必要であろう。もしそうだとすると、コロツサルカーボンチューブ (CCT) で作ったとしても、ケーブルの総重量は 300 万トンを超えてしまう。
- (c) さらに、昼夜の温度差によるケーブルの伸縮も大きな問題である。ケーブル 1km につき 1cm の伸縮をしたと仮定しても、全長 35,830km では 358m ものたるみ、あるいは縮みがでてしまうので地上ステーションの作り方が問題になる。
- (d) また、エレベーターが高速で上下方向に動くことで、コリオリ力が発生することも問題である。運行速度の出し方しだいでは、このコリオリ力は東西方向の横振動を誘発する。この振動がケーブル全体の固有振動の振動数と一致すると共振が起こり、途中で支えるものがないので、まったく手に負えなくなるのではないか。
- (e) その他、地球近くでは、雨風によるケーブルの劣化、落雷やテロ行為、航空機との衝突など、解決しなければならない問題は山ほどある。

いずれにしても、現存する材料では地上と静止衛星を結ぶエレベーターは作れそうもない。CNT や CCT に類似する炭素系の新物質は今後も発見されるであろうが、比強度が飛躍的に大きくなることは期待できないし、かと言って、この世の中で最も硬い物質であるダイヤモンドが炭素で出来ていることを考えると炭素以外の元素に期待することもできないであろう。確かに、宇宙エレベーターは興味を引く夢のある話ではあるが、現著者の見解では、今後 100 年を見通してもその実現可能性はほとんどゼロと言っても過言ではないと思われる。ましてや、地球と月の間に橋を架けようなんてことは、しょせん、夢のまた夢にすぎないのか。

余談になるが、アメリカの NASA に宇宙エレベーターに関する研究チームがあり、Philip R. B. Edwards 博士は、2003 年と 2006 年の 2 度にわたり宇宙エレベーター建設に関する報告書を出版している。その中で、彼は、宇宙エレベーターの建設方法について述べており、2030 年には建設が可能であること、その建設費用は 1 兆円規模であるとしている。これもまったく信じられないことだ。ちなみに、瀬戸大橋の建設には 1 兆 1338 億円の費用がかかっている。

日本にも宇宙エレベーター協会が 2008 年 4 月に結成され、この協会主催の宇宙エレベーター技術競技大会が毎年開かれている。2009 年に開かれた競技会では、地上から 150m の高さに気球をあげ、地上と気球を結ぶケーブルに沿って、大きさ数十センチ程度の昇降機を地上から上げていき、気球に到達するまでの時間を競うものである。2010 年には気球の高さを 300m, 2011 年には 600m というぐあいに年ごとに倍々の高さにしていき、18 年後の 2027 年には静止衛星の軌道の高さに到達するという。しかし、これは笑い話にもならない。だいいち、地上 15 km 以上は成層圏でそこまで上がる気球があるかもしれないが、成層圏を超えてしまうと空気といえるものは存在しないのだから、それ以上に上がる気球などあり得るはずがない。この協会はその辺のことをどう考えているのだろうか。

参考文献

- [1] Sumio Iijima, Helical Microtubules of Graphitic Carbon, *Nature* 354, 56-58 (07 Nov. 1991)
- [2] H.Peng, D.Chen, J.-U.Huang, S.B.Chikkannanavar, J.Hänisch, M.Jain, D.E.Peterson, S.K.Doorn, Y.Lu, Y.T.Zhu, and Q.X.Jia, Strong and Ductile Colossal Carbon Tubes with Walls of Rectangular Macropores, *Physical Review Letters*, 101, 145501 (2008)

非可換量の係数をもつ線形常微分方程式の解法

Method for Solving the Linear Ordinary Differential Equation with Noncommutative Coefficients

中西 襄⁵

Noboru NAKANISHI⁶

2.1 考える問題

よく知られているように、任意の定数係数の線形常微分方程式は演算子法を使って直ちに解を求めることができる。ここで、係数はもちろん数、すなわち可換量である。もし、係数が行列やオペレータのような非可換量であったら、どうであろうか。たとえば、量子力学の基礎方程式であるハイゼンベルク方程式は、 H をハミルトニアンとすると、物理量 $X(t)$ に対して、

$$i \frac{d}{dt} X(t) + HX(t) - X(t)H = 0 \quad (2.1.1)$$

である。 H と $X(t)$ とが非可換であるがゆえに、(2.1.1)はノントリヴィアルなのである。その解は、よく知られているように、

$$X(t) = e^{iHt} X(0) e^{-iHt} \quad (2.1.2)$$

である。これはこの方程式が非常に簡単だからメノコで見つかったのであって、もう少し複雑な方程式だったらどうやって解けばよいのかわからないであろう。

この論文⁷では、定数係数線形常微分方程式のすべての係数が、上の例のように、ただ1個の非可換量の関数として表されている場合の解を計算する一般的方法を与える。

2.2 非可換量を含む線形代数方程式

微分方程式を考える前に、まず代数方程式の場合を考えてみよう。非可換量として最も簡単なパウリ行列 σ を考える。 σ は $\sigma^2 = 1$ であればよいので、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のいずれであるかは特定しない。考える方程式は、

$$a_{00}X + a_{10}\sigma X + a_{01}X\sigma + a_{11}\sigma X\sigma = B \quad (2.2.1)$$

⁵京都大学名誉教授

⁶nbr-nak@trio.plala.or.jp

⁷これは、20年前に書いた論文「非可換量を含む線形常微分方程式に対する演算子法」¹⁾の内容を丁寧に書き直しただけのもので、それに質的に新たな結果を付け加えるものではない。

である。ここに a_{jk} を普通の数、 X と B は σ とは非可換な量である。もし係数に複数種のパウリ行列があったら、 X も B も 2 次正方行列として、複雑な 4 元連立方程式を解かねばならない。しかし、今の場合、すべての係数がただ 1 種類のパウリ行列で書けているので、もっとエレガントに解くことができるのである。実際、(2.2.1) の解は

$$X = b_{00}B + b_{10}\sigma B + b_{01}B\sigma + b_{11}\sigma B\sigma \quad (2.2.2)$$

という形に書けることは明らかなので、これを (2.2.1) に代入して、数係数 b_{jk} を決めればよい。それを丁寧に書くと、

$$\begin{aligned} a_{00}b_{00} + a_{10}b_{10} + a_{01}b_{01} + a_{11}b_{11} &= 1, \\ a_{00}b_{10} + a_{10}b_{00} + a_{01}b_{11} + a_{11}b_{01} &= 0, \\ a_{00}b_{01} + a_{10}b_{11} + a_{01}b_{00} + a_{11}b_{10} &= 0, \\ a_{00}b_{11} + a_{10}b_{01} + a_{01}b_{10} + a_{11}b_{00} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

である。しかし、これをクラメールの解法でバカ正直に解いたのでは面白くない。

ここで次のようなトリックを使う。まず、パウリ行列 σ を 2 倍に水増しして、互いに可換な独立な量 σ_L と σ_R を導入する（添え字 L と R はそれぞれ左と右を示す）。もちろん両方とも 2 乗すれば 1 になるものとする。そうすると、(2.2.3) は

$$(a_{00} + a_{10}\sigma_L + a_{01}\sigma_R + a_{11}\sigma_L\sigma_R)(b_{00} + b_{10}\sigma_L + b_{01}\sigma_R + b_{11}\sigma_L\sigma_R) = 1 \quad (2.2.4)$$

と書き直すことができる。 σ_L , σ_R は X , B と可換であるものとし、その代わりに X もしくは B の左にある σ を σ_L , 右にある σ を σ_R と書くことにする。そうすると、方程式 (2.2.1) は

$$(a_{00} + a_{10}\sigma_L + a_{01}\sigma_R + a_{11}\sigma_L\sigma_R)X = B \quad (2.2.5)$$

と書くことができる。他方、(2.2.1) の解は、(2.2.2) を σ_L , σ_R を使って書き直したものに (2.2.4) を代入することにより、

$$X = \frac{B}{a_{00} + a_{10}\sigma_L + a_{01}\sigma_R + a_{11}\sigma_L\sigma_R} \quad (2.2.6)$$

となる。これはまさしく (2.2.5) から直接形式的に割り算して得られる式に他ならない。

(2.2.6) をもとの σ で書くためには、分母を「有理化」しなければならない。それは 2 段階で行うのが便利である。まず、

$$X = \frac{(a_{00} + a_{11}\sigma_L\sigma_R - a_{10}\sigma_L - a_{01}\sigma_R)B}{(a_{00} + a_{11}\sigma_L\sigma_R)^2 - (a_{10}\sigma_L + a_{01}\sigma_R)^2} \quad (2.2.7)$$

と変形する。そうすると、分母は σ_L も σ_R もない項と $\sigma_L\sigma_R$ の項だけになるので、さらにそれを「有理化」すればよい。結果はもちろん、(2.2.3) の解 b_{jk} を (2.2.2) に代入したものに一致する。

以上の議論を一般化しよう。 A を $A^n = 1$ を満たす非可換量とする。たとえば、 n 次の巡回置換を考えればよい。行列で表現するならば、その行列要素は $A_{kl} = \delta_{k,l-1}$ ($n+1$ は 1 で置き換える) である。(2.2.1) を一般化した代数方程式は、

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}A^j X A^k = B \quad (2.2.8)$$

である。そして (2.2.2) のように、解は

$$X = \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}A^j B A^k \quad (2.2.9)$$

と書ける. これを (2.2.8) に代入して両辺を比較すれば, n^2 元連立方程式

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} b_{j'k'} = \delta_{j+j',0} \delta_{k+k',0} \quad (2.2.10)$$

を得る. ただし, 添え字は mod n で考える, すなわち, 添え字は \mathbb{Z}_n の元とする. そこで, 可換量 A_L, A_R を導入し, $A_L^n = A_R^n = 1$ とすると, (2.2.10) は

$$\left(\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} A_L^j A_R^k \right) \left(\sum_{j',k'=0}^{n-1} b_{j'k'} A_L^{j'} A_R^{k'} \right) = 1 \quad (2.2.11)$$

と書き換えられる. 他方 (2.2.8) は

$$\left(\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} A_L^j A_R^k \right) X = B \quad (2.2.12)$$

となる. 上の考察から, その解はそれを形式的に割り算した式

$$X = \frac{B}{\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} A_L^j A_R^k} \quad (2.2.13)$$

で与えられることがわかる.

あとで使うので, 具体例を示しておく. 方程式

$$AX + XA = B, \quad A^3 = 1 \quad (2.2.14)$$

の解は,

$$X = \frac{B}{A_L + A_R} = \frac{(A_L^2 - A_L A_R + A_R^2)B}{A_L^3 + A_R^3} = \frac{1}{2}(A^2 B - ABA + BA^2) \quad (2.2.15)$$

となる.

以上の議論で n は任意だから, 形式的に $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることができる. この場合, 条件式 $A^n = 1$ は消失し, 形式解は A_L と A_R の多項式の逆数を展開して得られる形式的な級数として書ける. したがって, もしそれが収束すれば正しい解を与える. 収束しない場合でも, A を zA に置き換え, すべてを計算したのち, 形式解の級数がゼロでない収束半径を持てば, それを $z = 1$ まで解析接続することによって正しい解が得られるであろう.

2.3 定数係数線形常微分方程式の解法

非可換係数の場合を考える前に, 通常の数係数の線形常微分方程式の解法を復習しておこう.

$X(t), B(t)$ をそれぞれ t の未知関数, 既知関数, $D \equiv d/dt$ を微分作用素, $P(z)$ を n 次多項式

$$P(z) \equiv \sum_{k=0}^n F_k z^{n-k} \quad (2.3.1)$$

とする. ここに, $F_k (k = 0, 1, \dots, n (\geq 1))$ は与えられた定数で, $F_0 = 1$ と規格化されているものとする.

考える微分方程式は

$$P(D)X(t) = B(t) \quad (2.3.2)$$

である. n 階の常微分方程式だから, 一般解は n 個の任意定数を含む. それらは, $t = 0$ における初期条件によって決める. すなわち, $X(0), X'(0), \dots, X^{(n-1)}(0)$ によって決められるとする. このことを機械的に取り

込むため、微分方程式 (2.3.1) の両辺は、 $t < 0$ では恒等的にゼロであるものとする。すなわち $\theta(t)$ をヘヴィサイドの階段関数 ($\theta(t) = 1$ for $t > 0$, $= 0$ for $t < 0$) とするとき、 $X(t) = X(t)\theta(t)$, $B(t) = 0$ for $t < 0$ であって、初期条件は

$$B(t) = B(t)\theta(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-k} F_{n-1-k-j} X^{(j)}(0)\delta^{(k)}(t) \quad (2.3.3)$$

という形で取り込まれる。(2.3.3) の右辺第 2 項は、 $P(D)[X(t)\theta(t)] - [P(D)X(t)]\theta(t)$ である。ハイゼンベルク方程式 (2.1.1) の場合だと、右辺は $iX(0)\delta(t)$ ということになる。

演算子法では D は普通の数のように扱う。すなわち、(2.3.2) の解は

$$X(t) = \frac{1}{P(D)}B(t) \quad (2.3.4)$$

によって与えられる。右辺を具体的に計算するのは、通常 $B(t)$ のラプラス変換表示を考えるが、逆ラプラス変換は t の大きい時の情報まで必要とする。これは (2.3.2) が局所的な方程式であることとなじまない。すなわち、(2.3.2) の解は、区間 $[0, t]$ だけからの情報で書かれるべきであろう。この要請に適合するのが、ミクシンスキーによって開発された合成積による方法である²⁾。

まず、方程式 $P(z) = 0$ は重解をもたないとする。その n 個の解を $z = G_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とすると、 $P(z)$ の逆数の部分分数展開は、

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{z - G_k} \quad (2.3.5)$$

である。ただし、 $H_k \equiv 1/P'(G_k)$ 。これを (2.3.4) に代入すれば、

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{D - G_k} B(t) \quad (2.3.6)$$

となる。ミクシンスキーによれば、 G を定数とすると、

$$\frac{1}{D - G} B(t) = \int_{-0}^t du e^{G(t-u)} B(u) \quad (2.3.7)$$

である。したがって、(2.3.2) の解は、

$$X(t) = \int_{-0}^t du \sum_{k=1}^n H_k e^{G_k(t-u)} B(u) \quad (2.3.8)$$

と求まる。

方程式 $P(z) = 0$ は重解をもつ場合は、極が一致する極限を考えればよい。多重極に対するミクシンスキーの式は、(2.3.7) を G について偏微分すれば得られる。

2.4 係数が非可換量の場合への拡張

前節の理論を、 F_k が非可換量 A の関数である場合に拡張しよう。それは、第 2.2 節で考えたように、 A を 2 つの可換量 A_L ($X(t)$ の左側にあるもの)、 A_R ($X(t)$ の右側にあるもの) に置き換えて、可換の場合に帰着させればよい。つまり、 G_k , H_k を A_L , A_R の関数とみれば、解は (2.3.8) で与えられる。以下では、 $P(z)$ の中の A はすべて A_L か A_R で書き直されているものとする。

具体例を見てみよう。ハイゼンベルク方程式の場合、(2.3.8)に上述の手続きをほどこせば、(2.1.2)が得られることはすぐ確かめられる。次に、2階微分方程式

$$D^2X(t) - A^2X(t) - 2AX(t)A - X(t)A^2 = B(t) \quad (2.4.1)$$

を考える。\$A_L, A_R\$で書くと、

$$D^2X(t) - (A_L + A_R)^2X(t) = B(t) \quad (2.4.2)$$

となる。したがって、(2.3.8)により、

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{D^2 - (A_L + A_R)^2} B(t) \\ &= \frac{1}{2(A_L + A_R)} \left(\frac{1}{D - A_L - A_R} - \frac{1}{D + A_L + A_R} \right) B(t) \\ &= \frac{1}{2(A_L + A_R)} \int_{-0}^t du (e^{(A_L + A_R)(t-u)} - e^{-(A_L + A_R)(t-u)}) B(u) \\ &= \frac{1}{4} [A^2Y(t) - AY(t)A + Y(t)A^2] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

を得る。最後のステップで(2.2.15)を用いた。ここに

$$Y(t) \equiv \int_{-0}^t du [e^{A(t-u)} B(u) e^{A(t-u)} - e^{-A(t-u)} B(u) e^{-A(t-u)}] \quad (2.4.4)$$

である。

この例は具合のいい場合であるが、一般には\$F_k\$が\$A\$の多項式であったとしても、\$G_k\$と\$H_k\$は\$A_L\$と\$A_R\$の複雑な無理関数であるから、\$A_L\$と\$A_R\$を分離してもとの\$A\$に戻せるかどうかが大問題である。これがうまくいくことを次に証明しよう。

まず、\$P(z)\$の逆数を形式的（つまり収束性は無視した）冪級数

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{z^{n+m}} \quad (2.4.5)$$

に展開する。この両辺に\$P(z)\$を乗じて、\$z\$の冪でまとめると、

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{F_k C_m}{z^{k+m}} = \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\min(m',n)} F_k C_{m'-k}}{z^{m'}} \quad (2.4.6)$$

を得る。したがって、\$C_m\$に対して漸化式

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} F_k C_{m-k} = \delta_{m0} \quad (2.4.7)$$

が成立する。\$C_m\$の係数は\$F_0 = 1\$であるから、もし\$F_k\$がすべて\$A_L\$の関数と\$A_R\$の関数の積の有限和であったならば、この漸化式により\$C_m\$もすべて\$A_L\$の関数と\$A_R\$の関数の積の有限和であることが数学的帰納法によって証明される。

他方(2.3.5)から、

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{m=-n+1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n H_k G_k^{m+n-1}}{z^{n+m}} \quad (2.4.8)$$

であるから, (2.4.5) と比較すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k G_k^{m+n-1} &= 0 \quad \text{for } m < 0 \\ &= C_m \quad \text{for } m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

を得る. 解 (2.3.8) の中の指数関数を形式的に冪展開すると,

$$X(t) = \int_{-0}^t du \sum_{k=1}^n H_k \sum_{m=-n+1}^{\infty} \frac{G_k^{m+n-1}}{(m+n-1)!} (t-u)^{m+n-1} B(u) \quad (2.4.10)$$

であるから, (2.4.9) により,

$$X(t) = \int_{-0}^t du \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{(m+n-1)!} (t-u)^{m+n-1} B(u) \quad (2.4.11)$$

と書けることがわかる. 上で証明したように, C_m はすべて A_L の関数と A_R の関数の積の有限和であったから, A_L と A_R をもとの A に戻すことは容易である. また, 係数に関する連続性により, 解 (2.4.11) は $P(z) = 0$ が重解をもつ場合にも正しい.

具体例として

$$D^2 X(t) - AX(t) - X(t)A = B(t) \quad (2.4.12)$$

を考えてみよう.

$$P(z) = z^2 - (A_L + A_R) \quad (2.4.13)$$

であるから,

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_L + A_R)^k}{z^{2k+2}} \quad (2.4.14)$$

を得る. したがって, C_m は m が奇数のとき 0, $m = 2k$ のとき $C_{2k} = (A_L + A_R)^k$ となる. ゆえに, (2.4.11) から,

$$X(t) = \int_{-0}^t du \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-u)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} A^j B(u) A^{k-j} \quad (2.4.15)$$

を得る.

(2.4.11) の中の級数の収束性を論ずるためには, 非可換量に対するノルムを考えなければならない. 何らかの方法で F_k のノルム $\|F_k\|$ が定義されているものとしよう. このとき

$$M \equiv \max\{1, \|F_k\|^{1/k} \ (k = 1, 2, \dots, n)\} \quad (2.4.16)$$

とおけば, C_m の漸化式 (2.4.7) から, 数学的帰納法により $\|C_m\| \leq (2M)^m$ がいえる. 実際, まず $m = 0$ のときは $C_0 = 1$ だから自明. したがって, 帰納法の仮定の下で,

$$\|C_m\| \leq \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \|F_k\| \cdot \|C_{m-k}\| \leq \sum_{k=1}^m M^k (2M)^{m-k} \leq (2M)^m \quad (2.4.17)$$

である. したがって, 級数は収束する.

以上の考察は, 形式的に $P(z)$ が負冪を持つ場合, すなわち $P(D)$ が擬微分作用素である場合にも使える. このときは, C_m の漸化式 (2.4.7) に現れる $\min(m, n)$ がたんに m となるので, かえって自然であるといえる. ただし, 擬微分作用素は非局所作用素なので, 初期値問題を定式化できない.

なお, 以上の考察では, $P(D)$ の最高階の項の係数 F_0 は 1 に規格化できるものとした. もしそれが可逆でなければ, 解は必ずしも存在しない. たとえば, $ADX(t) = B(t)$, $A^2 = 0$, $AB(t) \neq 0$ ならば, 解はない.

2.5 問題提起の背景

以上は常微分方程式に関する考察であったが、定数係数である限り、これに空間座標を付け加えて偏微分方程式の初期値問題に拡張するのは容易である。すなわち、 X および B が時間 t と空間座標 x_j との関数で、 F_k が左および右の A と偏微分作用素 $\partial/\partial x_j$ で書いている場合の取り扱い、 A が時空依存性を持たない限り、本質的に同じである。しかし、筆者が阿部光雄と共同で開発したハイゼンベルク描像での場の量子論の一般的解法で必要なのは、 A が時空依存性を持つ場合のコーシー問題である。

場の量子論の標準的解法は、ファインマン・ダイアグラムでよく知られた共変的摂動論である。この解法は、相互作用部分を自由場部分から人為的に切り離してしまう相互作用描像に基づいて定式化されている。しかしながら、物理学の最も基礎的な理論とされているゲージ場の量子論も重力場の量子論も、作用積分は自由場部分と相互作用部分とに自然に分離する形にはなっていない。実際、理論の構成を決める基本的変換⁸に対する不変性は全体ではじめて成立するのだから、自由場と相互作用を分離した共変的摂動論は、これらの理論に対しては極めて不自然なアプローチであるといえる。実際、重力場の量子論に対する共変的摂動論は誤りであることがわかっている。こういう人為的分離を行わないのは、ハイゼンベルク描像である。それゆえ、場の量子論をハイゼンベルク描像において解くことが重要である。

1990年代に、筆者らはハイゼンベルク描像での場の量子論の一般的解法を定式化した³⁾。簡単なモデルについてはこの方法で実際に厳密解を構成することに成功したが、残念ながらゲージ場や重力場のような「本物」の理論については取り扱いが極めて複雑になってしまう。そこで、理論に含まれるパラメータで冪展開して計算をすることになる。第0近似は厳密に解ける。それは共変的摂動論の第0近似とは異なり、古典量(可換量)ではない。しかし、物理的な場⁹のみについて見れば、その第0近似同士はすべての時空点で可換になっている(しかし第0近似でもそれと非可換な非物理的な場¹⁰が存在する)。高次近似¹¹(もちろん第0近似とは非可換)は逐次近似法によって解く。この場合、解かなければならないのはオペレータ係数の線形偏微分方程式だが、その斉次部分の係数として現れるのが、まさに物理的な場の第0近似なのである。それゆえ、この節の初めに書いたような状況設定が必要になったというわけである。

非可換量を含む偏微分方程式系のコーシー問題については、数学的に定式化されているのだろうか。またすでに研究されているのなら、どれだけのことがわかっているのだろうか。読者の中にご存じの方があれば、ご教示たまわりたい。

文 献

- 1) 中西 襄・阿部光雄, 日本応用数学会論文誌 **3**, 445 (1993).
- 2) ミクシンスキー(松村英之・松浦重武 訳), 演算子法(上)(裳華房, 1963).
- 3) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111**, 301 (2004).

⁸ 正確に言うと、局所ゲージ変換もしくは一般座標変換に対応する BRS 変換のこと。

⁹ ゲージ場または重力場を指す。

¹⁰ ゲージ場や重力場の正準量子化を行うさい、古典理論にはない場の導入が必要となる。

¹¹ 正確には、それともう1つの場の第0近似との交換子を考えている。

四元数と空間回転 5

The Quaternions and Rotations 5

矢野 忠

Tadashi YANO¹²

3.1 はじめに

ベクトルなどの空間回転を取り扱う方法として

1. ベクトルによる表現
2. 行列による表現
3. 四元数による表現
4. 鏡映変換による表現

による表現等があるとこれまで何回も述べてきた。そして、表現 2, 3, 4 については「四元数と回転 1-4」[1] [2] [3] [4] ですでに述べた。

ところが 1. ベクトルによる表現 については、これがもっともよく知られた空間回転の表現であるにもかかわらず、今までまったく触れなかった。これは著者にとって目新しい表現を先に調べてみたかったためであり、それ以外には特に理由がない。

しかし、やはり空間回転のベクトルによる表現について述べておくこと、またそれが空間回転の行列表現と同一であることを確認することは欠かすことができない。

まず、第 3.2 節で空間回転のベクトルによる表現 Rodrigues の回転公式¹³ を求め、第 3.3 節でそれが以前に求めた行列表現に一致することを見ることにしよう [6]。

空間回転を表現する方法といえば、直接には四元数との関係がないが、Euler 角での空間回転の表現について述べたいが、これは次回に述べることにしたい。

¹²yanotad@earth.ocn.ne.jp

¹³これを Altmann は canonical transformation と呼んでいる [5]。これは 3.2 節で示す図 3.1 からわかるように回転軸 \mathbf{n} のまわりの円錐上をいつもベクトルが動くからである。

3.2 ベクトルの空間回転

ある回転軸のまわりの有限な角のベクトルの回転については多くの文献で述べられている。それらの説明はどれも難しくはないが、ここでは [7] にしたがって説明をしよう。図 3.1 でベクトル \mathbf{r} の回転前の位置を \overrightarrow{OP} とし、回転後のベクトル \mathbf{r}' の位置を \overrightarrow{OQ} としよう。回転軸の方向は単位ベクトル \mathbf{n} で表される。図 3.1 で O と N の間の距離 \overline{ON} はベクトル \mathbf{r} の \mathbf{n} への正射影に等しいから

$$\overline{ON} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \quad (3.2.1)$$

である。またベクトル \overrightarrow{ON} は

$$\overrightarrow{ON} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.2.2)$$

と表される。

図 3.2 は回転軸に垂直な面内のベクトルを描いたものである。図 3.1 から

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \quad (3.2.3)$$

であるから

$$\overrightarrow{NP} = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.2.4)$$

となる。ベクトル \mathbf{r}' はベクトル \mathbf{r} を回転軸 \mathbf{n} のまわりに回転角 ϕ だけ回転したものであるから、ベクトル \mathbf{r}'

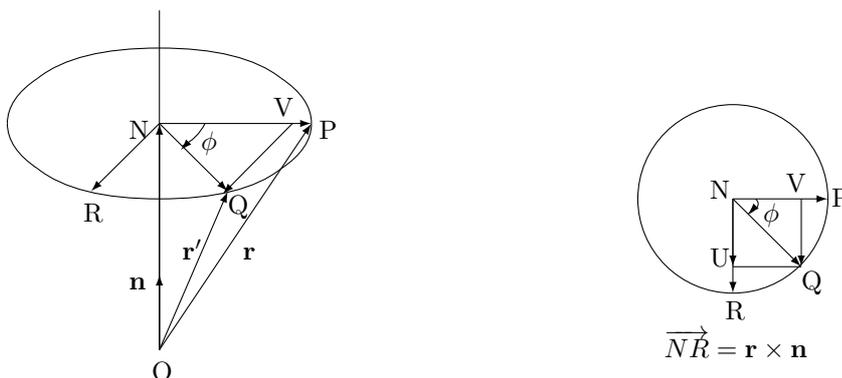


図 3.1: ベクトルの回転の全体図

図 3.2: 回転軸に垂直な面

の大きさはベクトル \mathbf{r} の大きさと同じである。すなわち、

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|$$

したがって

$$\overline{NP} = \overline{NQ} = \overline{NR}$$

である¹⁴。ここで、図 3.2 に記してあるように \overrightarrow{NR} は \overrightarrow{NP} に垂直であり、すなわち、 $\overrightarrow{NR} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}$ である。

¹⁴図 3.1 および図 3.2 から \overrightarrow{NP} を時計まわりに角度 ϕ 回転させて \overrightarrow{NQ} が得られ、また $\pi/2$ 回転させて、 \overrightarrow{NR} が得られている。また、 \overrightarrow{NR} の方向は $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ の方向と一致している。それで $\overline{NP} = \overline{NR}$ であることは自明であろう。しかし、参考のためにその代数的証明を付録に述べる。

つぎに \mathbf{r}' と \mathbf{r} との関係を求めよう。図 3.1 で

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ} \quad (3.2.5)$$

であるから、 \overrightarrow{NV} と \overrightarrow{VQ} とを $\mathbf{r}, \mathbf{n}, \phi$ で表すことができればよい。

図 3.2 から

$$\overrightarrow{NV} = [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cos \phi \quad (3.2.6)$$

また

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{NU} = (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi \quad (3.2.7)$$

であることがわかる。

(3.2.2),(3.2.6),(3.2.7) を (3.2.5) へ代入すれば、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cos \phi + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi$$

が得られる。これを整理すれば

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \phi) + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi \quad (3.2.8)$$

となる。これがベクトルの回転の公式である¹⁵。

この式を行列で表せば SO(3) と同じ式が得られることを次節で示すことにしよう。

3.3 行列による表示

前節で求めた Rodrigues の回転公式を行列表示にするには $\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}' = (x', y', z'), \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と各ベクトルを成分で表し、それを行列で書き表せばよい。

このままの表示でもいいのだが、ベクトルの成分を数字を添字とした文字で $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3), (x', y', z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ および $(n_x, n_y, n_z) = (n_1, n_2, n_3)$ と表すことにしよう。

このとき、(3.2.8) の中に出てくるベクトル \mathbf{n} と \mathbf{r} のスカラー積とベクトル積は

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{r} = (n_2 x_3 - n_3 x_2, n_3 x_1 - n_1 x_3, n_1 x_2 - n_2 x_1) \quad (3.3.2)$$

と表される。

これから (3.2.8) は

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \cos \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 - \cos \phi)(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \sin \phi \begin{pmatrix} n_2 x_3 - n_3 x_2 \\ n_3 x_1 - n_1 x_3 \\ n_1 x_2 - n_2 x_1 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

となる。したがって

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_1(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_2 x_3 - n_3 x_2) \\ x_2 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_2(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_3 x_1 - n_1 x_3) \\ x_3 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_3(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_1 x_2 - n_2 x_1) \end{pmatrix}$$

¹⁵この公式は文献によっていろいろな名がついている。Altman [5] [8] によれば、これは canonical transformation という名で呼ばれているし、Wikipedia [6] では Rodrigues の回転公式と名付けられている。

である。これをちょっと書き直せば

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + (1-c)n_1^2 & (1-c)n_1n_2 - sn_3 & (1-c)n_1n_3 + sn_2 \\ (1-c)n_1n_2 + sn_3 & c + (1-c)n_2^2 & (1-c)n_2n_3 - sn_1 \\ (1-c)n_1n_3 - sn_2 & (1-c)n_2n_3 + sn_1 & c + (1-c)n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

ここで $c = \cos \phi$, $s = \sin \phi$ の略記を用いている。これは「空間回転3」 [3] の (3.5.8) と一致している。

3.4 おわりに

今回までのシリーズ「四元数と空間回転1-5」において、ベクトルなどの空間回転についてほとんどのことを述べてきたが、それでもまだ Euler 角による空間回転の表現については触れることができていない。

だんだん四元数から離れることになるが、今回はそれについて述べることにしたい。

付録 $\overline{NP} = \overline{NR}$ の証明

まず $\overline{NP} = |\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})|$ であるから、いま図 3.1 で $\angle NOP = \theta$ とおけば

$$\begin{aligned} \overline{NP}^2 &= [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \\ &= r^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$\overline{NP} > 0$ であるから

$$\overline{NP} = r \sin \theta \quad (3.4.1)$$

である。

また

$$\overline{NR} = |\mathbf{r} \times \mathbf{n}| = r \sin \theta \quad (3.4.2)$$

ただし、ここで $n = 1$ であることを用いた。

したがって、確かに

$$\overline{NP} = \overline{NR} \quad (3.4.3)$$

であることが証明された。

また、 \overrightarrow{NP} と \overrightarrow{NR} とが互いに直交することは

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NR} &= [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることからわかる。

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数と空間回転 1, 数学・物理通信 第 2 卷, 第 2 号 (2012.6) 19-29
- [2] 矢野 忠, 四元数と空間回転 2, 数学・物理通信 第 2 卷, 第 5 号 (2012.10) 20-27
- [3] 矢野 忠, 四元数と空間回転 3, 数学・物理通信 第 3 卷, 第 1 号 (2013.3) 15-24
- [4] 矢野 忠, 四元数と空間回転 4, 数学・物理通信 第 3 卷, 第 2 号 (2013.3) 19-28
- [5] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 75
- [6] <https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues>
- [7] Goldstein, Poole, Safko (矢野, 江沢, 渊崎 訳), 『古典力学』(第 3 版) 上 (吉岡書店, 2006) 213-215
- [8] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 162-163

編集後記

皆様方、いかがお過ごしでしょうか。今年の夏は多くの気象観測所で過去最高の記録的な暑さに見舞われました。特に、高知県の四万十市では日本の最高気温となった 41.0°C を記録しております。

このような気候上の悪環境にもかかわらず、数名の方々からご投稿をいただき、我々編集者も有難く思っております。内容もいろいろな特色を持っていて興味深く、このような積み重ねによって、数学と物理学との間の垣根を越えて頭の活性化を引き起こすことができるのではないかと考えております。

今後ともこの通信の賑わいが続行できるよう祈ります。

なお、投稿規定を本号から少し変えております。これは努力目標ではありますが、これに従って頂けると編集者の労力が大いに軽減されます。

(新関章三)

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

この「数学・物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野 忠（元愛媛大学）が編集および発行する、主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌、もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）。

2. 雑誌の目的

この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです。したがって、興味深くて、面白いと思われるもので、どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが、教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを發表することを目的とします。それで専門的でありすぎるものとか、もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします。この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします。投稿者は中学校、高校、大学の理数系の学生、教師、研究者や元教師、元研究者、研究所の研究者、会社の技術者その他これに準ずる方とします。

3. 編集の方針

この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します。したがって、内容の審査は行いませんが、もちろん公序良俗に反するものとか、理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります。原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することがあるかもしれません。しかし、文章の責任はすべて著者にあります。また、将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが、再録した場合には初出を明記することをお願いします。一号のページ数は26ページを目途とします。原稿のページ数があまり多いようなら、何回かに分けて出すことをお願いします。投稿は1回当たりのページ数を10ページ前後でお願いをしたいと思います。短いのは半ページでも数行でもかまいません。

4. 発行の方針

発行は基本的にLatexで入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集してPDFにして出力してメールで配布します。もちろん少数のプリントアウトも原理的には発行できますが、これは例外とします。また原則として季刊としますが、編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります。

5. その他

基本的には自由であることを旨としますが、何か問題が起これば、その都度著者と相談をします。

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォーマット

LatexでA4paperの原稿とdviまたはpdfのファイルをe-mailに添付書類としてyanotad@earth.ocn.ne.jpの矢野 忠宛てに送付する。タイトルはセンタリング、所属、氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください。上下の余白は3cm、左右は2.5cmを原則としますが、編集者の都合で変更されることがあります。

技術的な理由により各投稿原稿の日本語の目次には著者名が入りません。それを補うために英文の方には著者名を入れております。したがって、英文タイトルと著者名をローマ字で必ずご記入ください。

図や表は本文の該当箇所に張り込んでください。またキャプションをつけてください。

白黒印刷であることにご留意ください。

本文の字の大きさは8ポイントでサーキュラーに掲載されます。他のポイント数で原稿を書かれている場合にはグラフの大きさが原稿と異なることがあります。そのことをご注意ください。

できるだけ`\section`のコマンドを使ってください。

式の番号はできるだけ`\label{eq:3.1.5}`と`\ref{eq:3.1.5}`のようにコマンドで付けてして下さると助かります。documentclassはjreport（修正したjreprotKai）になるので、各投稿原稿は一つの章になります。そのため式の番号は（章，節，節の式番）と表示されます。

参考文献は特別の理由がある場合を除いて、`\begin{thebibliography}{9}`と`\end{thebibliography}`コマンドを使ってください。このコマンドの中では`\bibitem{yano}`のように指定してください。本文での参考文献の引用には`\cite{yano}`のようにします。

2. 投稿の受付と掲載決定

投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります。もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって、そのまま掲載決定にはなりません。掲載ができないときはその後メールをします。特に掲載できない旨のメールが行かなければ、掲載を認めたものとします。早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい。もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください。

3. 発行時期

季刊で3月、6月、9月、12月を原則としますが、編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります。