

数学・物理通信

3卷6号 2013年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年9月17日

目次

衝撃問題の高次元への拡張 (1)	3
1.1 はじめに	3
1.2 無限に広い膜の衝撃問題：2次元問題	3
1.2.1 方程式の導入	3
1.2.2 固有値・固有関数を用いた解法	5
1.2.3 固有関数の直交性と規格化	5
1.2.4 最終的な解の構成	7
1.3 3次元問題	8
1.3.1 固有値・固有関数を用いた解法	8
1.3.2 一般解を用いた解法	9
1.3.3 (1.3.12) 式と (1.3.22) 式の等価性について	10
1.3.4 3次元モデルと弾性棒のばねモデルとの関係について	11
1.3.5 残留変位について	11
1.4 数値計算によるグラフ表示	12
1.5 おわりに	14
等比数列のコサインの有限乗積	15
2.1 有限個のコサインの積	15
2.2 公式 (2.1.5) の証明	16
2.3 拡張	17
2.4 公式 (2.3.8) の証明	18
2.5 公式間のコンシステンシー	19
2.6 無限乗積の場合	20
2.7 付録 公式 (2.3.4) の証明	21
オイラー角による回転の疑問	22
3.1 はじめに	22
3.2 $R(\beta\mathbf{y})$ の行列の導出法 1	23
3.3 $R(\beta\mathbf{y})$ の行列の導出法 2	24
3.4 おわりに	25
3.5 付録 1 ベクトルの回転による (3.3.4) の導出	25
3.6 付録 2 Altmann の問題と解答	27
編集後記	28

Contents

1. Kenji SETO: Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (1)
2. Noboru NAKANISHI: Finite Products of the Cosines of Geometric Sequences
3. Tadashi YANO: Question of Rotations in terms of the Euler Angles
4. Tadashi YANO: Editorial Comments

衝撃問題の高次元への拡張 (1)

Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (1)

世戸 憲治¹

Kenji SETO²

1.1 はじめに

現著者と中西襄³は、弾性棒の一端に弾丸を衝突させたとき弾性棒中に発生する波動の数学的解析をしてきた。この解析は弾性棒の長さが有限の場合と半無限の場合とはまったく異なる様相を見せる。すなわち、長さが有限の場合は波動が弾性棒中を行き来するためにその解析はかなり複雑であり、通常の Fourier 変換を超えた非 Fourier 変換が必要になることを明らかにしてきた^{1),2),3)}。一方、長さが半無限の場合は反射波が存在せず進行波のみで解析できるため通常の Fourier 変換を少し拡張したもので解析できることを示した⁴⁾。これらのいままでに解析された問題はいずれも空間 1 次元のものであったが、さらに空間の次元を拡張した場合はどうなるかを扱ってみよう。ただし、波動が伝播する範囲は無限の大きさを持ち、動径方向の進行波のみで解析できる場合に限定するものとする。

今回の論文では空間次元が 2 次元の場合と 3 次元の場合を扱う。次回の論文ではさらに一般化し、空間 n 次元とした場合を扱う予定である。

1.2 無限に広い膜の衝撃問題：2次元問題

無限に広い面積を持つ膜を考える。この膜の面密度を ρ とし、また、膜に沿った単位長さあたりの張力を T とする。この膜上に原点 O をとり、この原点を中心として、内半径 r_0 、外半径 $r_0(1 + \varepsilon)$ 、質量 m のパイプ状の錘を底面が膜と並行になるように取り付ける。この錘に、膜面に対し垂直方向に初速度 v_0 を与えたときの膜の横振動を求める。ただし、以下では、このパイプ状の錘の厚さは非常に薄いものとし、 ε は 1 に比べて十分に小さい正の量として扱う。

1.2.1 方程式の導入

膜の運動方程式を求めるため、膜面上にデカルト座標 x, y をとったとき、時刻 t での膜面に垂直な方向の変位を $U(x, y, t)$ とする。点 (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $(x, y + \Delta y)$ の 4 点からなる四角形を考える。 x 方向でこの四角形に作用する膜に垂直方向の力は、線形近似の範囲内で

$$T\Delta y(\partial_x U|_{x+\Delta x} - \partial_x U|_x),$$

¹北海学園大学名誉教授

²seto@pony.ocn.ne.jp

³京都大学名誉教授

同様に y 方向でこの四角形に作用する垂直方向の力は

$$T\Delta x(\partial_y U|_{y+\Delta y} - \partial_y U|_y)$$

となり、これらを合わせた力がこの四角形の垂直方向に作用するので、膜の運動方程式

$$\rho\Delta x\Delta y\partial_t^2 U = T\Delta y(\partial_x U|_{x+\Delta x} - \partial_x U|_x) + T\Delta x(\partial_y U|_{y+\Delta y} - \partial_y U|_y) \quad (1.2.1)$$

が成立する。この式は $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ の極限で、波動方程式

$$\partial_t^2 U = c^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)U \quad (1.2.2)$$

を得る。ここで、波動伝播速度 c は $c = \sqrt{T/\rho}$ と定義した。

ここで扱う問題は、原点 O を中心として極座標 (r, ϕ) を導入したとき、原点周りの角度 ϕ には依存しない振動だけを扱うので、波動方程式は

$$\partial_t^2 U = c^2\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)U \quad (1.2.3)$$

と書き直される。この意味で以後は、時刻 $t(\geq 0)$ 、動径座標 $r(\geq r_0)$ での変位 U を $U(r, t)$ と表わす。この方程式をつぎの境界条件、初期条件のもとに解くことがここでの問題である。

$r = \infty$ での変位はゼロとして、

$$U(\infty, t) = 0 \quad (1.2.4)$$

とする。また、錘の半径 $r = r_0$ のところでは、錘の運動方程式

$$m\partial_t^2 U(r_0, t) = 2\pi r_0 T\partial_r U(r, t)|_{r=r_0} \quad (1.2.5)$$

が成立しなければならない。この式の右辺は、錘が膜から受ける反作用である。

初期条件として、この膜全体および錘の初期位置はゼロ、すなわち、

$$U(r, 0) = 0 \quad (1.2.6)$$

とする。また、初速度に関しては、錘の部分だけが初速度 v_0 を持つものとし、

$$\partial_t U(r, t)|_{t=0} = v_0\theta[r_0(1+\varepsilon) - r] \quad (1.2.7)$$

とする。ここに θ は単位階段関数である。

これらの条件のもとに波動方程式を解くことになるが、以後、面倒がないように無次元化した系を導入する。すなわち、長さに関しては、錘の内半径 r_0 を単位とし、また、時間に関しては波動が長さ r_0 を伝播する時間 r_0/c を単位として、これらをそれぞれ 1 とする。この変換で波動伝播速度 c も 1 となる。錘の質量に関しては、 $m/(2\pi\rho r_0^2) = \mu$ と定義し直すことにする。また、(1.2.7) 式における速度 v_0 は無次元化した v_0/c を改めて v_0 と書くことにする。

この無次元化で波動方程式 (1.2.3) は

$$\partial_t^2 U = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)U \quad (1.2.8)$$

となり、境界条件 (1.2.4) はそのままであるが、(1.2.5) は、

$$\mu\partial_t^2 U(1, t) = \partial_r U(r, t)|_{r=1} \quad (1.2.9)$$

となる。初期条件 (1.2.6) は変わらず、(1.2.7) は、

$$\partial_t U(r, t)|_{t=0} = v_0\theta(1 + \varepsilon - r) \quad (1.2.10)$$

となる。

1.2.2 固有値・固有関数を用いた解法

最初に、波動方程式 (1.2.8) を解くにあたって、

$$U(r, t) = R(r)T(t) \quad (1.2.11)$$

と変数分離し、時間依存部分を、正定数 k を用いて、

$$T(t) = \sin(kt) \quad (1.2.12)$$

とする。これで、初期条件の (1.2.6) は満たされる。 r 依存部分 $R(r)$ が満たす方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) R(r) = 0 \quad (1.2.13)$$

となり、この解は任意定数 A, B を用いて

$$R(r) = AJ_0(kr) + BN_0(kr) \quad (1.2.14)$$

となる。ここに、 J_0, N_0 は、それぞれ、0 次の Bessel, Neumann 関数である。 J_0, N_0 共に $r \rightarrow \infty$ ではゼロとなるので、境界条件 (1.2.4) はこれで満たされている。境界条件 (1.2.9) を満たすには、微分公式 $J_0'(z) = -J_1(z)$, $N_0'(z) = -N_1(z)$ を用いて、

$$[J_1(k) - \mu k J_0(k)]A + [N_1(k) - \mu k N_0(k)]B = 0 \quad (1.2.15)$$

が成立しなければならない。この式から定数 A, B の比が決まる。これを踏まえて、連続固有値 k に属する固有関数を

$$E(r, k) \equiv [N_1(k) - \mu k N_0(k)]J_0(kr) - [J_1(k) - \mu k J_0(k)]N_0(kr) \quad (1.2.16)$$

と定義しておく。ただし、この固有関数はまだ規格化されたものではない。

1.2.3 固有関数の直交性と規格化

固有関数 (1.2.16) の直交性を求めるため、固有関数 $E(r, k)$ および $E(r, k')$ が満たす (1.2.13) と同じ形の微分方程式を

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) E(r, k) = 0 \quad (1.2.17)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k'^2 \right) E(r, k') = 0 \quad (1.2.18)$$

と書いておき、(1.2.17) 式に $E(r, k')$ を掛け、(1.2.18) 式に $E(r, k)$ を掛けて辺々を引き算し、全体に r を掛けると

$$\frac{d}{dr} \left[rE(r, k') \frac{d}{dr} E(r, k) - rE(r, k) \frac{d}{dr} E(r, k') \right] + (k^2 - k'^2)rE(r, k)E(r, k') = 0 \quad (1.2.19)$$

を得る。ここで、

$$F(r, k) \equiv -\frac{d}{dr} E(r, k) = k[N_1(k) - \mu k N_0(k)]J_1(kr) - k[J_1(k) - \mu k J_0(k)]N_1(kr) \quad (1.2.20)$$

を定義しておく、(1.2.19) 式は

$$-\frac{d}{dr} \left[rE(r, k')F(r, k) - rE(r, k)F(r, k') \right] + (k^2 - k'^2)rE(r, k)E(r, k') = 0 \quad (1.2.21)$$

となる。これを r について 1 から ∞ まで積分すると

$$\int_1^{\infty} E(r, k)E(r, k')rdr = \frac{1}{k^2 - k'^2} \left[rE(r, k')F(r, k) - rE(r, k)F(r, k') \right] \Big|_{r=1}^{\infty} \quad (1.2.22)$$

を得る。この右辺を見積もるため、まず、 $r = 1$ とおいたとき (1.2.16) 式の $E(r, k)$ は

$$E(1, k) = J_0(k)N_1(k) - J_1(k)N_0(k) \quad (1.2.23)$$

となるが、ここで Bessel, Neumann 関数に関する Lommel の公式

$$J_n(z)N_{n+1}(z) - J_{n+1}(z)N_n(z) = -\frac{2}{\pi z} \quad (1.2.24)$$

を用いると

$$E(1, k) = -\frac{2}{\pi k} \quad (1.2.25)$$

となる。同様に (1.2.20) で定義される関数 $F(r, k)$ は $r = 1$ のとき、

$$F(1, k) = \mu k^2 [J_0(k)N_1(k) - J_1(k)N_0(k)] = -\frac{2\mu}{\pi} k \quad (1.2.26)$$

となる。したがって、(1.2.22) 式右辺で $r = 1$ としたときは、

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[rE(r, k')F(r, k) - rE(r, k)F(r, k') \right] \Big|_{r=1} = \frac{4\mu}{\pi^2 k k'} \quad (1.2.27)$$

となる。

つぎに、 $r \rightarrow \infty$ のところを見積もるには、Bessel, Neumann 関数の $z \rightarrow \infty$ の漸近形

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \quad N_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \quad (1.2.28)$$

を用いる。これを用いて (1.2.16) (1.2.20) の関数 $E(r, k)$, $F(r, k)$ は、十分大きな r を M と書くことにして、

$$\begin{aligned} E(M, k) &= \frac{1}{\sqrt{\pi k M}} [G_{(+)}(k) \cos(kM) - G_{(-)}(k) \sin(kM)] \\ F(M, k) &= \sqrt{\frac{k}{\pi M}} [G_{(-)}(k) \cos(kM) + G_{(+)}(k) \sin(kM)] \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

と書かれる。ここで、数式簡略化のため、

$$G_{(\pm)}(k) \equiv [J_1(k) - \mu k J_0(k)] \pm [N_1(k) - \mu k N_0(k)] \quad (1.2.30)$$

と定義した。(1.2.22) 式右辺の $r \rightarrow \infty$ の項に (1.2.29) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 - k'^2} \left[rE(r, k')F(r, k) - rE(r, k)F(r, k') \right] \Big|_{r \rightarrow \infty} \\ &= \frac{1}{\pi(k^2 - k'^2)} \\ & \times \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\sqrt{k/k'} [G_{(+)}(k') \cos(k'M) - G_{(-)}(k') \sin(k'M)] [G_{(-)}(k) \cos(kM) + G_{(+)}(k) \sin(kM)] \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{k'/k} [G_{(+)}(k) \cos(kM) - G_{(-)}(k) \sin(kM)] [G_{(-)}(k') \cos(k'M) + G_{(+)}(k') \sin(k'M)] \right] \quad (1.2.31) \end{aligned}$$

となり、あとは括弧をはずし、三角関数の積和公式を用いて分解する。計算が長くなるので、すべては書かないことにするが、結果として $\sin((k \pm k')M)$, $\cos((k \pm k')M)$ に比例する項がでてくる。あとはデルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin(Mx)}{\pi x} = \delta(x), \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(Mx)}{\pi x} = 0 \quad (1.2.32)$$

を用いると、結果として $\delta(k - k')$, $\delta(k + k')$ に比例する項になる。ここでは $k, k' > 0$ と考えているので、 $\delta(k + k')$ の項は不必要であり、最終結果として、

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[rE(r, k')F(r, k) - rE(r, k)F(r, k') \right] \Big|_{r \rightarrow \infty} = C^2(k)\delta(k - k') \quad (1.2.33)$$

を得る。ここに、規格化定数 $C^2(k)$ は

$$C^2(k) \equiv \frac{1}{2k} [G_{(+)}^2(k) + G_{(-)}^2(k)] \quad (1.2.34)$$

と定義した。したがって、(1.2.22) 式の積分結果は、(1.2.33) 式から (1.2.27) 式の分を差し引いて

$$\int_1^{\infty} E(r, k)E(r, k')rdr = -\frac{4\mu}{\pi^2 k k'} + C^2(k)\delta(k - k') \quad (1.2.35)$$

となる。この右辺の 1 項目は何であろうか。ここでは、膜と錘が一体となった系を考えているので、固有関数の直交性を出すため、この積分には重み関数が必要になる。初めの部分で説明したように、この錘も r の範囲 ($1 \leq r$) の中に含めるために、錘は内半径 1, 外半径 $1 + \varepsilon$ のパイプ状のものと考えた。ただし、 ε は無限小量とする。この仮定のもとに重み関数を

$$\rho_{\varepsilon}(r) = 1 + \mu \frac{\theta(1 + \varepsilon - r)}{\varepsilon} \quad (1.2.36)$$

と定義し、積分 (1.2.35) 式を重み付き積分に変更すると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \rho_{\varepsilon}(r)E(r, k)E(r, k')rdr = C^2(k)\delta(k - k') \quad (1.2.37)$$

と (1.2.35) 式の右辺 1 項目が相殺されデルタ関数のみという結果が得られる。これが固有関数の直交性を示す式である。なお、規格化定数 $C^2(k)$ は (1.2.34) 式で定義されているが、 $G_{(\pm)}(k)$ の定義 (1.2.30) 式を用いて元の Bessel, Neumann 関数で表わすと

$$C^2(k) = \frac{1}{k} [(J_1(k) - \mu k J_0(k))^2 + (N_1(k) - \mu k N_0(k))^2] \quad (1.2.38)$$

となる。

1.2.4 最終的な解の構成

ここでは、波動方程式 (1.2.8) を境界条件 (1.2.4) (1.2.9), 初期条件 (1.2.6) のもとに解いてきたが、初期条件 (1.2.10) 式はまだ適用されていない。ここでこの条件も満たす最終的な解を求めよう。

変位 $U(r, t)$ を、係数 $K(k)$ を付けた連続固有値 k に属する固有関数 $E(r, k)$ の重ね合わせで表わされるものとし、

$$U(r, t) = \int_0^{\infty} K(k)E(r, k) \sin(kt)dk \quad (1.2.39)$$

とおく。これに (1.2.10) 式の初期条件を適用すると

$$\int_0^{\infty} kK(k)E(r, k)dk = v_0\theta(1 + \varepsilon - r) \quad (1.2.40)$$

となる。両辺に $\rho_{\varepsilon}(r)E(r, k')r$ を掛け、 r 積分を実行すると固有関数の直交性 (1.2.37) 式が使えて、係数 $K(k)$ が

$$K(k) = -\frac{2\mu v_0}{\pi k^2 C^2(k)} \quad (1.2.41)$$

と決まる．ここで，(1.2.25) 式を用いた．これを (1.2.39) 式に戻すと，変位 $U(r, t)$ が

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(r, k)}{k^2 C^2(k)} \sin(kt) dk \quad (1.2.42)$$

と求められる．

固有値・固有関数を用いた解法は完全な解が求められるという利点はあるが，解の形を見ても実際の変形がどのように起こっているのか数式上からはまったく見えてこない．せめて，この解から時刻 t でまだ波動が伝播していない領域 ($t < r - 1$) で変位がゼロとなることくらいは，証明できてもよさそうなものだが，これもかなり難しい問題である．この件に関しては次回以後の論文で議論する．

1.3 3次元問題

前節では2次元膜の衝撃問題を解析したが，ここでは3次元に拡張したモデルを扱ってみる．無限の大きさを持ち，通常の波動方程式に従う3次元物体を考える．この物体中に起こる変位を $U(\mathbf{r}, t)$ とし，波動方程式を

$$\partial_t^2 U(\mathbf{r}, t) = \Delta U(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.1)$$

とする．ここに， Δ は3次元 Laplacian である．ただし，この3次元物体は弾性体ではないことを注意しておく．3次元弾性体の場合は Poisson 比が関係してくるためその波動方程式はこれとは異なるものになる．この件に関しては次回以降の論文で扱うことにする．

この物体中の1点を中心として，内半径 1, 外半径 $1 + \varepsilon$, 質量 μ の球殻状錘を取り付け，この錘に外向き速度 v_0 を与えたとき物体中に発生する波動を解析する．この場合も波動は動径方向にしか発生しないので，極座標を導入し，

$$\partial_t^2 U(r, t) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) U(r, t) \quad (1.3.2)$$

とする．この方程式は三角関数だけで解けるので2次元の場合よりもむしろ簡単になる．

1.3.1 固有値・固有関数を用いた解法

t と r に変数分離した解は

$$U(r, t) = R(r) \sin(kt) \quad (1.3.3)$$

として， r 依存部分 $R(r)$ は α を任意定数として，

$$R(r) = \frac{1}{r} \cos(kr - \alpha) \quad (1.3.4)$$

と解かれる．境界条件，初期条件はすべて前節のものと同じとし，初めに $r = 1$ での境界条件 (1.2.9) を課すと， α と k の関係式

$$\tan(k - \alpha) = \frac{\mu k^2 - 1}{k} \quad (1.3.5)$$

を得る．この意味で以後， α を $\alpha(k)$ と書くことにする．この関係式を用いて，連続固有値 k に属する固有関数を (1.3.4) 式のまま

$$E(r, k) = \frac{1}{r} \cos(kr - \alpha(k)) \quad (1.3.6)$$

と定義しておく．ただし，この固有関数は規格化されたものではない．

この固有関数の直交性を求める．超関数公式 (1.2.32) および $\alpha(k)$ の式 (1.3.5) を用いて，つぎの積分を実行すると

$$\int_1^\infty E(r, k) E(r, k') r^2 dr = -\mu \cos(k - \alpha(k)) \cos(k' - \alpha(k')) + \frac{\pi}{2} \delta(k - k') \quad (1.3.7)$$

となるが、ここで前節で導入した重み関数 (1.2.36) 式を用いると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \rho_\varepsilon(r) E(r, k) E(r, k') r^2 dr = \frac{\pi}{2} \delta(k - k') \quad (1.3.8)$$

となる。これが固有関数の直交性を示す式となる。

最終的な解を求めるには、変位 $U(r, t)$ を固有関数で

$$U(r, t) = \int_0^\infty K(k) E(r, k) \sin(kt) dk \quad (1.3.9)$$

と展開し、これに (1.2.10) 式の初期条件を適用すると

$$\int_0^\infty k K(k) E(r, k) dk = v_0 \theta(1 + \varepsilon - r) \quad (1.3.10)$$

となる。両辺に $\rho_\varepsilon(r) E(r, k') r^2$ を掛けて r 積分を実行すると固有関数の直交性 (1.3.8) 式が使える、係数 $K(k)$ が

$$K(k) = \frac{2\mu v_0}{\pi} \frac{\cos(k - \alpha(k))}{k} \quad (1.3.11)$$

と決まる。これを (1.3.9) 式に戻してやると最終結果が

$$U(r, t) = \frac{2\mu v_0}{\pi} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{1}{k} \cos(k - \alpha(k)) \cos(kr - \alpha(k)) \sin(kt) dk \quad (1.3.12)$$

と求められる。この k 積分については後で述べる。

1.3.2 一般解を用いた解法

実は、波動方程式 (1.3.2) には一般解

$$U(r, t) = \frac{1}{r} [f(t - r) + g(t + r)] \quad (1.3.13)$$

が存在することが知られている。ここでは無限に広い物体を扱っているので反射波は存在しない。そこで、

$$U(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r + 1) \quad (1.3.14)$$

と置いてみる。これに $r = 1$ の境界条件 (1.2.9) を適用すると

$$\mu f''(t) + f'(t) + f(t) = 0 \quad (1.3.15)$$

となる。これを解くと、 A, B を任意定数として

$$f(t) = Ae^{\lambda^{(+)}t} + Be^{\lambda^{(-)}t} \quad (1.3.16)$$

となる。ここに、

$$\lambda_{(\pm)} \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} \quad (1.3.17)$$

と定義した。ここで、 t を $t - r + 1$ と並行移動して、(1.3.14) 式に戻すと

$$U(r, t) = \frac{1}{r} (Ae^{\lambda^{(+)}(t-r+1)} + Be^{\lambda^{(-)}(t-r+1)}) \theta(t - r + 1) \quad (1.3.18)$$

となる。ここで θ 関数は波動が伝播していないところをゼロとするために付けた。定数 A, B を決めるには、まず、 $t = 0, r = 1$ での変位 U をゼロとして、

$$A + B = 0 \quad (1.3.19)$$

となり、つぎに $t = 0, r = 1$ での初速度を v_0 とすると、

$$\lambda_{(+)}A + \lambda_{(-)}B = v_0 \quad (1.3.20)$$

となる。これから、

$$A = \frac{v_0}{\lambda_{(+)} - \lambda_{(-)}} = \frac{\mu v_0}{\sqrt{1 - 4\mu}} = -B \quad (1.3.21)$$

と決まる。したがって、変位 $U(r, t)$ は

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\sqrt{1 - 4\mu}} \frac{1}{r} [e^{\lambda_{(+)}(t-r+1)} - e^{\lambda_{(-)}(t-r+1)}] \theta(t - r + 1) \quad (1.3.22)$$

と求められる。この式は 4μ と 1 の大小に無関係に実数となることは明らかであり、また、 $4\mu = 1$ のときは $0/0$ の形になるので極限值をとればよい。より具体的には

$$U(r, t) = \begin{cases} \frac{2\mu v_0}{\sqrt{1 - 4\mu}} \frac{1}{r} e^{-(t-r+1)/2\mu} \sinh\left(\frac{\sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu}(t - r + 1)\right) \theta(t - r + 1), & 4\mu < 1 \\ v_0 \frac{t - r + 1}{r} e^{-(t-r+1)/2\mu} \theta(t - r + 1), & 4\mu = 1 \\ \frac{2\mu v_0}{\sqrt{4\mu - 1}} \frac{1}{r} e^{-(t-r+1)/2\mu} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - 1}}{2\mu}(t - r + 1)\right) \theta(t - r + 1), & 4\mu > 1 \end{cases} \quad (1.3.23)$$

となる。はたしてこの解と (1.3.12) 式で求めた解は同じものなのであろうか。形だけを見ると想像もつかないが、(1.3.12) 式の k 積分を実行するとこれら 2 つの式がびたりと一致していることがわかる。

なお、この節で扱ったような一般解が存在するのは 1 次元、および、3 次元の場合に限定されることを注意しておく。

1.3.3 (1.3.12) 式と (1.3.22) 式の等価性について

(1.3.12) 式と (1.3.22) 式が等価であることはつぎのように証明される。(1.3.12) 式に含まれる $\cos(kr - \alpha(k))$ について、

$$\begin{aligned} \cos(kr - \alpha(k)) &= \cos(k - \alpha(k) + k(r - 1)) \\ &= \cos(k - \alpha(k)) \cos(k(r - 1)) - \sin(k - \alpha(k)) \sin(k(r - 1)) \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

と変形してから、(1.3.5) 式から導かれる

$$\cos(k - \alpha(k)) = \frac{k}{\sqrt{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2}}, \quad \sin(k - \alpha(k)) = \frac{\mu k^2 - 1}{\sqrt{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2}} \quad (1.3.25)$$

を用いて、 $\alpha(k)$ が消去された形にすると

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{(\mu k^2 - 1) \sin(k(r - 1)) - k \cos(k(r - 1))}{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2} \sin(kt) dk \quad (1.3.26)$$

となる。この時点で、被積分関数は k につき偶関数となるので、積分範囲 $(0, \infty)$ を $(-\infty, \infty)$ にして、2 で割っておく。つぎに、三角関数の積を積和公式で分解し、さらに、Euler 公式を用いて指数関数に直しておくと、

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{e^{ik(t-r+1)} - e^{-ik(t+r-1)}}{\mu k^2 - 1 - ik} + \frac{e^{-ik(t-r+1)} - e^{ik(t+r-1)}}{\mu k^2 - 1 + ik} \right] dk \quad (1.3.27)$$

となる. ここで, (1.3.26) 式にある分母を, 複素数を用いて因数分解し, 分子と共通する因子は約分した. さらに, この式 of 分母は (1.3.17) 式 of $\lambda_{(\pm)}$ を用いて

$$\mu k^2 - 1 - ik = \mu(k + \lambda_{(+)}i)(k + \lambda_{(-)}i), \quad \mu k^2 - 1 + ik = \mu(k - \lambda_{(+)}i)(k - \lambda_{(-)}i) \quad (1.3.28)$$

と因数分解されることに注意する. つぎに, $t+r-1$ は常に正なので, $e^{ik(t+r-1)}$ が付く項は半径無限大の上半円を加え, $e^{-ik(t+r-1)}$ が付く項は半径無限大の下半円を加えて閉じた積分路にする. ここで, 被積分関数の極 $k = \lambda_{(\pm)}i$ は下半面に, $k = -\lambda_{(\pm)}i$ は上半面に存在することに注意すると, これらの項は積分路内に極が存在しないので積分値はゼロとなる. したがって, $U(r, t)$ は

$$U(r, t) = -\frac{v_0}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{ik(t-r+1)}}{(k + \lambda_{(+)}i)(k + \lambda_{(-)}i)} + \frac{e^{-ik(t-r+1)}}{(k - \lambda_{(+)}i)(k - \lambda_{(-)}i)} \right] dk \quad (1.3.29)$$

のみを計算するとよい. ここで, $t-r+1$ は正の場合と負の場合があり得るが, これが負, すなわち, $t-r+1 < 0$ の場合は, $e^{ik(t-r+1)}$ については下半円を付け, $e^{-ik(t-r+1)}$ については上半円を付けて閉じた積分路とすると, この場合も積分路内に極が存在しないことになり, $t-r+1 < 0$, すなわち, 波動が伝播していない領域では $U(r, t) = 0$ となるのがわかる.

残るは, $t-r+1 > 0$ の場合だけで, $e^{ik(t-r+1)}$ が付く項は上周り, $e^{-ik(t-r+1)}$ が付く項は下周りの半円を付けて閉じた積分路とすると, このときは, 積分路内に極が残るので, 上周りと下周りでは留数に付く符号が異なることに注意して, 留数をひろう. これら留数を足し合わせ, $2\pi i$ 倍すると最終的に (1.3.22) 式が導かれる.

1.3.4 3次元モデルと弾性棒のばねモデルとの関係について

波動方程式 (1.3.2) で

$$U(r, t) = \frac{1}{r} V(r, t) \quad (1.3.30)$$

と変位の方を変換するとこの方程式は

$$\partial_t^2 V(r, t) = \partial_r^2 V(r, t) \quad (1.3.31)$$

と通常 of 空間 1 次元 of 波動方程式に変換される. これが 3 次元モデルで一般解が存在する理由でもある. また, 境界条件 (1.2.9) 式は

$$\mu \partial_t^2 V(1, t) = [\partial_r V(r, t) - V(r, t)]|_{r=1} \quad (1.3.32)$$

と変換される. さらに, 変数の方も $r-1 = x$ と置いてしまえば, これは, 半無限長の弾性棒を扱った前回の論文⁴⁾ of 「ばねモデル」に相当する. ただし, この式右辺 2 項目が, 錘に作用するばね of 力で, この場合はばね定数を 1 としたことになる.

1.3.5 残留変位について

ここでは, 2 次元, 3 次元 of 衝撃問題を解析してきたが, ここで得られた結果と, 前回の論文⁴⁾ で扱った 1 次元問題 of ときの歪み解である

$$\partial_x U(x, t) = -v_0 e^{-(t-x)/\mu} \theta(t-x) \quad (1.3.33)$$

およびこれを x で積分した変位解

$$U(x, t) = \mu v_0 [1 - e^{-(t-x)/\mu}] \theta(t-x) \quad (1.3.34)$$

とを比べてみよう. この 1 次元問題 of ときは, 時間が十分大きくなったとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = \mu v_0$ という残留変位が存在することになる. しかし, 3 次元問題 of ときは, (1.3.22) 式あるいは (1.3.23) 式からわかるように

$\lim_{t \rightarrow \infty} U(r, t) = 0$ となって残留変位は存在せず，衝撃後は元の位置に戻ることになる．2次元問題のときは解が Bessel 関数で与えられるため多少複雑になるが，(1.2.42) 式で $t \rightarrow \infty$ としたときは，超関数公式 (1.2.32) を用いると，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(r, t) = -\mu v_0 \left[\frac{(N_1(k) - \mu k N_0(k)) J_0(kr) - (J_1(k) - \mu k J_0(k)) N_0(kr)}{(J_1(k) - \mu k J_0(k))^2 + (N_1(k) - \mu k N_0(k))^2} \right]_{k=0} = 0 \quad (1.3.35)$$

となって，3次元のときと同様に残留変位は存在しない．

1.4 数値計算によるグラフ表示

ここで，Bessel 関数を使わずに解が求まる 1次元モデルの変位 (1.3.34) 式，および，3次元モデルの変位 (1.3.23) 式を数値的に求めグラフ化したものを図 1～3 に示す．ただし，1次元の変位 (1.3.34) 式に関しては変数の x を 3次元の r に合わせるため $x = r - 1$ として，

$$U(r, t) = \mu v_0 [1 - e^{-(t-r+1)/\mu}] \theta(t - r + 1) \quad (1.4.1)$$

としておく．

これらのグラフは，水平右向きに座標 r 軸，斜め上方向に時間 t 軸，上方向に変位 $U(r, t)$ をとり，立体的に表したものである．錘に与える初速度 v_0 は変位 U 全体の大きさを変える役割しかないので，ここではすべてのグラフで $v_0 = 1$ とした．また， r, t 軸のスケールは図に示すとおりであるが，変位 U のスケールは図を見やすくするために図毎に変えてある．

図 1 は (1.4.1) 式に基づいた 1次元モデルの図で， $\mu = 0.2$ としてある．この図から， $r = 1$ で発生した変位の変化が形を変えずにそのまま伝播していく様子がわかる．一度変化が起こってしまうと元には戻らないことも前に述べたとおりである．

図 2, 3 は (1.3.23) 式に基づく 3次元モデルの図で，図 2 では $\mu = 1$ ，図 3 では $\mu = 4$ としてある．これらの図では， $r = 1$ で発生した変位が伝播するにしたがい 3次元的に拡がるために，当然のことながら減衰するが，特に錘の質量 μ が小さい方の図 2 では初めに与えられるエネルギーが小さいためすぐに減衰してしまう．また，これら両図の場合は $4\mu > 1$ のため三角関数が入り込むが，減衰の小さい方の図 3 ではそのための振動が起こっていることが良く見てとれる．

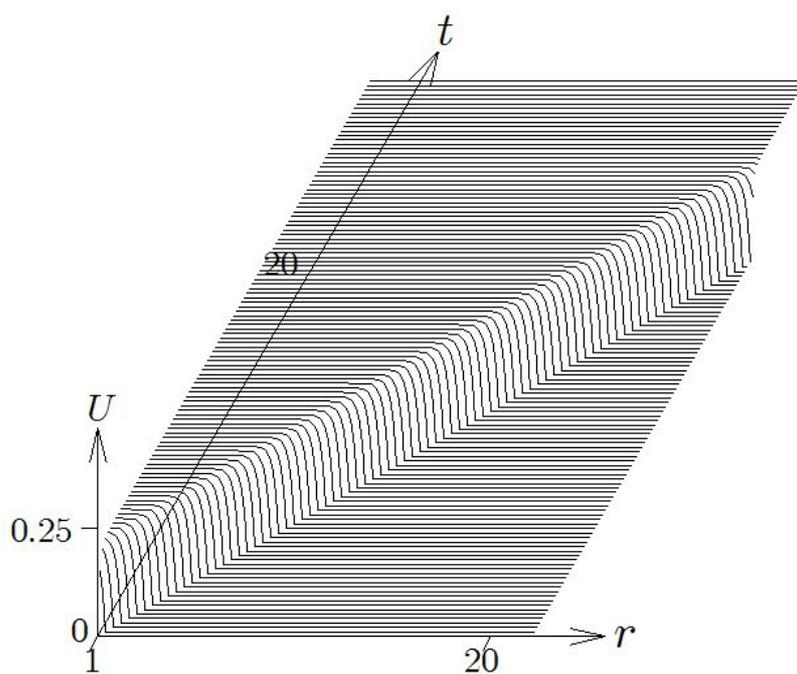


図1 1次元モデル $\mu = 0.2$

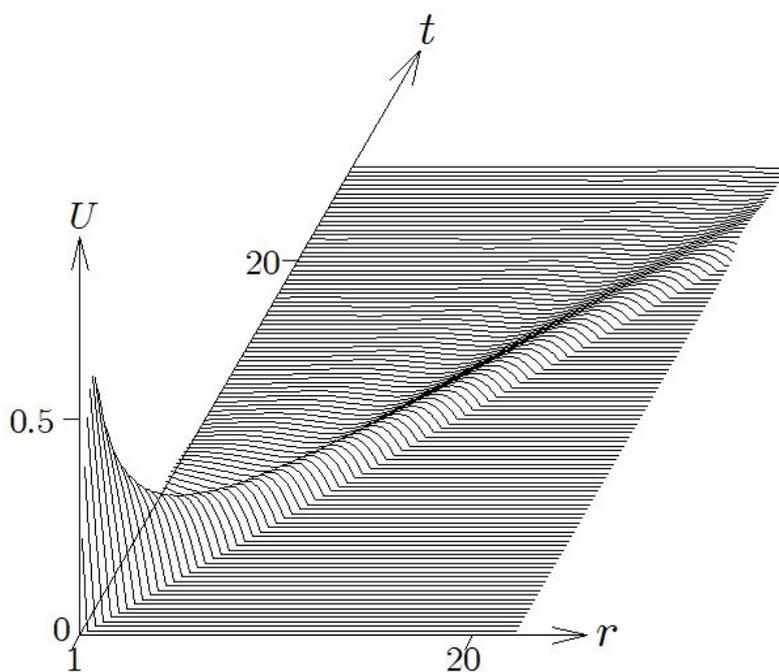


図2 3次元モデル $\mu = 1$

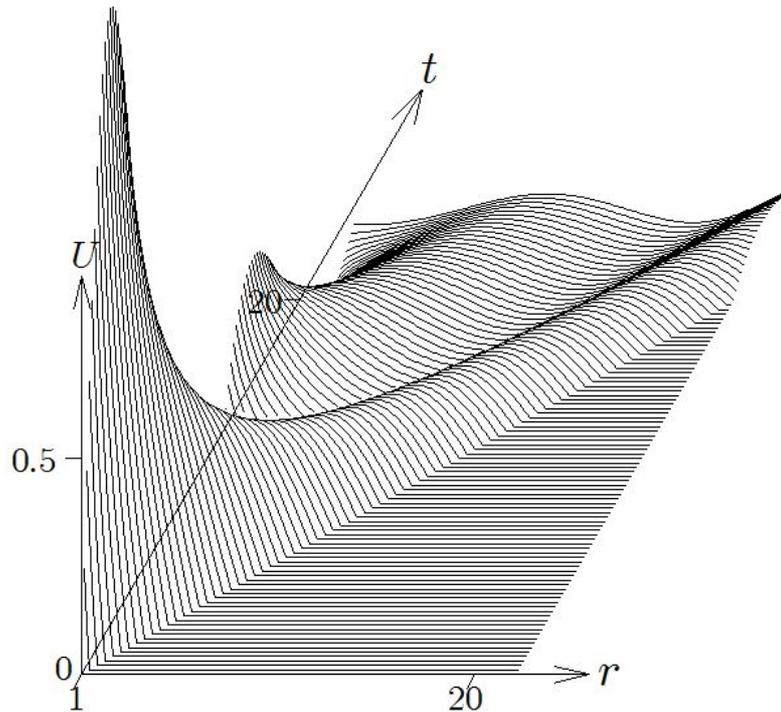


図3 3次元モデル $\mu = 4$

1.5 おわりに

この論文では、通常の波動方程式に従う空間2次元、および3次元の衝撃問題を解析した。2次元の場合の変位解は(1.2.42)式で与えられるが、この式は Bessel, Neumann 関数を含む複雑な積分式であり、この積分を実行することはかなり困難なものと思われる。一方、3次元問題の方は解が三角関数で与えられるため積分も実行可能であり、解の完全な振舞いを理解することができた。以後の論文ではさらに次元を拡張した衝撃問題を扱うことにする。

謝辞

この稿を書くにあたり、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただきコメントをいただいたことを、ここに謹んで感謝いたします。

参考文献

- 1) 中西襄・世戸憲治,「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析」, 数学・物理通信, 2巻3号, 2012年7月.
- 2) N. Nakanishi and K. Seto, "Exact expressions for the sums of the non-Fourier trigonometric series arising from time-dependent eigenvalue problems", Prog. Theor. Exp. Phys., 2013; doi: 10.1093/ptep/pts085.
- 3) 世戸憲治,「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析(その2) — 一般解から出発する方法 —」, 数学・物理通信, 3巻3号, 2013年6月.
- 4) 世戸憲治・中西襄,「半無限弾性棒の弾丸衝突問題に基づく Fourier 変換の拡張」, 数学・物理通信, 3巻2号, 2013年3月.

等比数列のコサインの有限乗積

Finite Products of the Cosines of Geometric Sequences

中西 襄⁴

Noboru NAKANISHI⁵

2.1 有限個のコサインの積

ジェームズ・グリック著「ファインマンさんの愉快的な人生, I」(岩波書店)の97ページに, ファインマン少年の友達が

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \quad (2.1.1)$$

であることを教えてくれたという話がでてくる. 証明は載っていないが簡単で, コサインの積和公式

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (2.1.2)$$

を使うと,

$$\begin{aligned} (2.1.1) \text{ の左辺} &= \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 40^\circ + \cos 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) - \frac{1}{2} \cos 20^\circ \right] = \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

である.

さて, これは孤立した結果なのだろうか. ちなみに,

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}, \\ \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

である. 度をラジアンに直すと, $[n = 1] \quad 60^\circ = \pi/3$, $[n = 2] \quad 36^\circ = \pi/5$, $72^\circ = 2\pi/5$, $[n = 3] \quad 20^\circ = \pi/9$, $40^\circ = 2\pi/9$, $80^\circ = 4\pi/9$ であるから, $2^k\pi/(2^n + 1)$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) と表せる. したがって, 一般に次の公式が成立するであろうと推測される.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{2^k\pi}{2^n + 1} \right) = \frac{1}{2^n}. \quad (2.1.5)$$

数学の公式集を調べてみたが, 載っていたのは三角関数の中が等差数列である場合のみで, (2.1.5) のように等比数列になっている公式は見つからなかった. 次節でこの推測が正しいことを証明する.

⁴京都大学名誉教授

⁵nbr-nak@trio.plala.or.jp

2.2 公式 (2.1.5) の証明

まず、次の恒等式が成立することを数学的帰納法で証明する.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} \cos((2r+1)\theta) \quad (2.2.1)$$

$n=1$ のときは両辺とも $\cos \theta$ に等しい. 帰納法の仮定とコサインの積和公式 (2.1.2) により,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \theta) &= \prod_{k=0}^{n-2} \cos(2^k \theta) \cdot \cos(2^{n-1} \theta) \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{r=0}^{2^{n-2}-1} \cos((2r+1)\theta) \cdot \cos(2^{n-1} \theta) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2^{n-2}-1} [\cos((2^{n-1}-2r-1)\theta) + \cos((2^{n-1}+2r+1)\theta)] \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

となる. (2.2.2) の第 1 項では $m = 2^{n-2} - 1 - r$, 第 2 項では $m = 2^{n-2} + r$ とおけば,

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{m=0}^{2^{n-2}-1} \cos((2m+1)\theta) + \sum_{m=2^{n-2}}^{2^{n-1}-1} \cos((2m+1)\theta) \right] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} \cos((2r+1)\theta) \quad (2.2.3)$$

を得る. したがって, (2.2.1) が証明された.

(2.2.1) を用いると,

$$S \equiv \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n + 1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left((2r+1)\frac{\pi}{2^n + 1}\right) \quad (2.2.4)$$

となる. ここで $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$ を用い, $m = 2^{n-1} - r$ において右辺を書き直すと,

$$S = -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \cos(m\varphi) \quad (2.2.5)$$

となる. ただし,

$$\varphi \equiv \frac{2\pi}{2^n + 1} \quad (2.2.6)$$

とおいた.

$$\sum_{m=1}^{2^{n-1}} \cos(m\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} e^{im\varphi} - 1 \right] \quad (2.2.7)$$

であるが, (2.2.7) の右辺角括弧内の第 1 項 (和) は円分方程式 $x^{2^n+1} - 1 = 0$ のすべての根の和だから, 根と係数の関係により 0 に等しいことがわかる. したがって,

$$\sum_{m=1}^{2^{n-1}} \cos(m\varphi) = -\frac{1}{2} \quad (2.2.8)$$

を得る. これを (2.2.5) に代入すれば $S = 1/2^n$ を得て, 証明が完結する.

2.3 拡張

公式 (2.1.5) の第 1 因子を最後にまわすことができる。すなわち、

$$\frac{\pi}{2^n + 1} = \pi - \frac{2^n \pi}{2^n + 1} \quad (2.3.1)$$

だから、これによってコサインは符号だけが変わるので、

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n + 1}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \varphi) = -\frac{1}{2^n} \quad (2.3.2)$$

となる。ここに、 φ は (2.2.6) で定義したものである。さらに、 $\cos(2^{n+r} \varphi) = \cos(2^r \varphi)$ ($r \geq 0$) であることを $r = 0, 1, \dots, m-1$ に対して使えば、(2.3.2) を

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^{m+k} \varphi) = -\frac{1}{2^n} \quad (m \geq 0) \quad (2.3.3)$$

と書くこともできる。

森口・宇田川・一松著「数学公式 II」(岩波全書) の 25 ページに

$$\prod_{k=1}^N \cos\left(\frac{k\pi}{2N+1}\right) = \frac{1}{2^N} \quad (2.3.4)$$

というコサインの有限乗積の公式⁶ が載っている。これの $N = 1, 2$ の場合は (2.1.4) に他ならない。 $N = 4$ の場合は、

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{16} \quad (2.3.5)$$

であるから、 $\cos(\pi/3) = 1/2$ を使うと (2.1.1) に一致する。面白いのは $N = 8$ の場合で、これと (2.1.5) の $n = 4$ の場合を比較すると、次の等式が得られることになる。

$$\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}. \quad (2.3.6)$$

$\cos \theta = -\cos(\pi \pm \theta)$ を使えば、(2.3.6) は

$$\prod_{k=0}^3 \cos\left(\frac{3 \cdot 2^k \pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \quad (2.3.7)$$

と書き直せる。

そこで、次のような拡張公式を考えてみよう (もちろん $\lambda = 1$ ならば (2.1.5) になる.)。

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda \cdot 2^k \pi}{2^n + 1}\right) = \frac{1}{2^n}. \quad (2.3.8)$$

ここに λ は奇数であるとする。偶数の場合はこの節の冒頭の議論により符号が変わるだけで奇数の場合に帰着する。 λ (奇数) が $2^n + 1$ で整除される場合は、明らかに左辺は -1 に等しいから、(2.3.8) は成立しない。したがって、 λ は $2^n + 1$ の倍数ではないものとする。

⁶公式集には証明がないので、念のため付録に証明を与える。

2.4 公式 (2.3.8) の証明

(2.3.8) を証明するために, (2.1.5) の証明と同じ議論を適用してみよう. そうすると, (2.2.4) のところが

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda \cdot 2^k \pi}{2^n + 1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\lambda(2r+1)\frac{\pi}{2^n + 1}\right) \quad (2.4.1)$$

となるから, 右辺が (2.2.5) のように書けるための必要十分条件 (これを「条件 A」と呼ぶ) は,

$$\frac{1}{\varphi}\left(\pi - \frac{\lambda(2r+1)\pi}{2^n + 1}\right) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}(\lambda - 1) - \lambda r \quad (2.4.2)$$

の絶対値に $r = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ を代入して得られる 2^{n-1} 個の正の整数の全体が, $2^n + 1$ を法として $\{1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}\}$ に一致することである.

もし λ と $2^n + 1$ が互いに素ならば, 条件 A は成立することを証明しよう.

$$F(r) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}(\lambda - 1) - \lambda r \quad (0 \leq r \leq 2^n) \quad (2.4.3)$$

と書くと, 写像 F は $\mathbb{Z}_{2^n+1} = \{0, 1, \dots, 2^n\}$ を $2^n + 1$ を法としてそれ自身に 1 対 1 に写す. なぜなら, 任意の r_1, r_2 に対し, $F(r_1) - F(r_2) = \lambda(r_1 - r_2)$ だが, もし $F(r_1) - F(r_2) \equiv 0 \pmod{2^n + 1}$ であれば, λ は $2^n + 1$ と互いに素なるゆえ, $r_1 - r_2 \equiv 0 \pmod{2^n + 1}$, すなわち $r_1 = r_2$ となるからである.

次に $F(2^{n-1}) \equiv 0 \pmod{2^n + 1}$ であることを証明する.

$$F(2^{n-1}) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}(\lambda - 1) - \lambda \cdot 2^{n-1} = -\frac{1}{2}(\lambda - 1)(2^n + 1) \quad (2.4.4)$$

で, λ は奇数だから, これは $2^n + 1$ で整除される.

$|F(r_1)| \equiv |F(r_2)| \pmod{2^n + 1}$ となるのは, どのような場合かを調べる. F は 1 対 1 だったから, $r_1 \neq r_2$ に対しては, これは $F(r_1) \equiv -F(r_2) \pmod{2^n + 1}$ に他ならない.

$$F(r_1) + F(r_2) = 2^n - (\lambda - 1) - \lambda(r_1 + r_2) = (2^n + 1) - \lambda(r_1 + r_2 + 1) \quad (2.4.5)$$

であるから, これが $2^n + 1$ で整除されるためには, λ が $2^n + 1$ と互いに素であることを使うと, $r_1 + r_2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^n + 1}$ でなければならないことがわかる. r_1, r_2 はともに 2^n 以下の非負整数だから, $r_1 + r_2 = 2^n$ である. 0 に対応する $r_1 = r_2 = 2^{n-1}$ の場合を除外し, $0 \leq r_1 \leq 2^{n-1} - 1$ とすれば, $2^{n-1} + 1 \leq r_2 \leq 2^n$ となる. したがって, $0 \leq r \leq 2^{n-1} - 1$ なる r をとれば, $2^n + 1$ を法として同じ $|F(r)|$ が重複して現れることはない. すなわち条件 A が満たされている.

以上により, λ と $2^n + 1$ が互いに素ならば⁷(2.3.8) が成立することが証明された.

ここまでやったところで, (2.3.8) は, 「 λ と $2^n + 1$ が互いに素」という余分な仮定なしに, 簡単に証明できることに気が付いた. それはサインの倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.4.6)$$

を用いる方法である. $\theta = \lambda \cdot 2^k \pi / (2^n + 1)$ (λ は整数) とおいて, k について 0 から $n-1$ までの積をとれば,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\lambda \cdot 2^{k+1} \pi}{2^n + 1}\right) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\lambda \cdot 2^k \pi}{2^n + 1}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda \cdot 2^k \pi}{2^n + 1}\right) \quad (2.4.7)$$

となる. ところで

$$\sin\left(\frac{\lambda \cdot 2^n \pi}{2^n + 1}\right) = \sin\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\pi}{2^n + 1}\right) = (-1)^{\lambda+1} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2^n + 1}\right) \quad (2.4.8)$$

⁷ λ が $2^n + 1$ と共約数を持つがその倍数でない場合は, $n \leq 8, \lambda \leq 9$ の範囲で $(n=3, \lambda=3), (n=5, \lambda=3), (n=5, \lambda=9), (n=6, \lambda=5), (n=7, \lambda=3), (n=7, \lambda=9)$ であるが, 最初のものは自明, 次の 3 つは (2.3.4) の $N=n$ の場合に帰着する.

である。したがって、(2.4.7)のサイン因子は、 λ が $2^n + 1$ の倍数でなければゼロにはならないので、 n 個ともすべてキャンセルすることがわかる。その結果、

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\lambda \cdot 2^k \pi}{2^n + 1}\right) = (-1)^{\lambda+1} \frac{1}{2^n} \quad (2.4.9)$$

が得られる。この証明は、なぜ公比が2でなければならないのか、なぜサインでなくコサインでないといけなのかを明瞭に示している。

2.5 公式間のコンシステンシー

2.3節で(2.3.4)の $N = 2^2 = 4$ の場合を(2.5.1)の $n = 3$ と $n = 1$ の場合の積に、 $N = 2^3 = 8$ の場合を(2.5.1)の $n = 4$ の場合と(2.3.8)の $n = 4$ 、 $\lambda = 3$ の場合の積に分解することを考えた。コサイン因子の数の勘定は、前者では $\underline{4} = \underline{3} + \underline{1}$ 、後者では $\underline{8} = 2 \cdot \underline{4}$ となっている。これをもっと進めて(2.3.4)の $N = 2^{n-1}$ の式

$$\prod_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2^n + 1}\right) = \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \quad (2.5.1)$$

を、すでに証明した公式の積に分解することを考えてみよう。

[1] $N = 16$ すなわち $n = 5$ 、 $2N + 1 = 2^n + 1 = 33$ の場合

(2.1.5) の $n = 5$ の場合に現れる数は $\{1, 2, 4, 8, 16\}$;

(2.3.8) の $n = 5, \lambda = 3$ の場合に現れる数は、33 を法として $\{3, 6, 12, -9, 15\}$;

(2.3.8) の $n = 5, \lambda = 5$ の場合に現れる数は、33 を法として $\{5, 10, -13, 7, 14\}$;

$33 = 11(2^1 + 1)$ なので、(2.1.5) の $n = 1$ の場合に現れるのは、 $\{11\}$ 。

以上をまとめると、絶対値について1から16までの整数がすべて現れている。

コサイン因子の数の勘定は $\underline{16} = 3 \cdot \underline{5} + \underline{1}$ となっている。

[2] $N = 32$ すなわち $n = 6$ 、 $2N + 1 = 2^n + 1 = 65$ の場合

(2.1.5) の $n = 6$ の場合に現れる数は $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;

(2.3.8) の $n = 6, \lambda = 3$ の場合に現れる数は、65 を法として $\{3, 6, 12, 24, -17, 31\}$;

(2.3.8) の $n = 6, \lambda = 7$ の場合に現れる数は、65 を法として $\{7, 14, 28, -9, -18, 29\}$;

(2.3.8) の $n = 6, \lambda = 11$ の場合に現れる数は、65 を法として $\{11, 22, -21, 23, -19, 27\}$;

$65 = 5(2 \cdot 6 + 1)$ なので、(2.3.4) の $N = 6$ の場合に現れる数は、 $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$;

$65 = 13(2^2 + 1)$ なので、(2.1.5) の $n = 2$ の場合に現れる数は、 $\{13, 26\}$ である。

以上をまとめると、絶対値について1から32までのすべての整数が現れている。

コサイン因子の数の勘定は $\underline{32} = 4 \cdot \underline{6} + \underline{6} + \underline{2}$ となっている。

[3] $N = 64$ すなわち $n = 7$ 、 $2N + 1 = 2^n + 1 = 129$ の場合

(2.1.5) の $n = 7$ の場合に現れる数は $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$;

(2.3.8) の $n = 7, \lambda = 5$ の場合に現れる数は、129 を法として $\{5, 10, 20, 40, -49, 31, 62\}$;

(2.3.8) の $n = 7, \lambda = 7$ の場合に現れる数は、129 を法として $\{7, 14, 28, 56, -17, -34, 61\}$;

(2.3.8) の $n = 7, \lambda = 11$ の場合に現れる数は、129 を法として $\{11, 22, 44, -41, 47, -35, 59\}$;

(2.3.8) の $n = 7, \lambda = 13$ の場合に現れる数は、129 を法として $\{13, 26, 52, -25, -50, 29, 58\}$;

(2.3.8) の $n = 7, \lambda = 19$ の場合に現れる数は、129 を法として $\{19, 38, -53, 23, 46, -37, 55\}$;

$129 = 3(2 \cdot 21 + 1)$ なので、(2.3.4) の $N = 21$ の場合に現れる数は、 $\{3, 6, 9, \dots, 63\}$;

$129 = 43(2^1 + 1)$ なので, (2.1.5) の $n = 1$ の場合に現れる数は, $\{43\}$ である.
 以上をまとめると, 絶対値について 1 から 64 までのすべての整数が現れている.
 コサイン因子の数勘定は $64 = 6 \cdot 7 + 21 + 1$ となっている.

[4] $N = 128$ すなわち $n = 8$, $2N + 1 = 2^n + 1 = 257$ (素数) の場合
 (2.1.5) の $n = 8$ の場合, および (2.3.8) の $\lambda = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59$ を考えると⁸,
 絶対値について 1 から 128 までの整数がすべて現れることが確かめられる.
 コサイン因子の数勘定は $128 = 16 \cdot 8$ となっている.

以上に見られるようになりに数論的に複雑な状況になっていて, 一般的な取り扱いは難しいと思われる.

2.6 無限乗積の場合

この原稿を世戸憲治氏に送ったところ, 次のような不思議な無限乗積の公式がありますとのコメントを頂いた.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3^k}\right) = \frac{\sin x}{x} \quad (|x| < 1). \quad (2.6.1)$$

もちろん, これは独立した 2 つの公式で, 前掲の公式集 88 ページを見ると, 前者は「オイラーの公式」⁹ というのだそう. やはり条件式 $|x| < 1$ がついている. これらの公式の証明は, タネさえ分かれば至極簡単である.

まず「オイラーの公式」については, 倍角の公式 (2.4.6) で $\theta = x/2^k$ とおき, k について 1 から N までの積を作ると,

$$\prod_{k=0}^{N-1} \sin \frac{x}{2^k} = 2^N \prod_{k=1}^N \sin \frac{x}{2^k} \cdot \prod_{k=1}^N \cos \frac{x}{2^k} \quad (2.6.2)$$

を得る. $x \neq 2\pi n$ (n は整数) ならばサイン因子はゼロにならないから,

$$\sin x = 2^N \sin \frac{x}{2^N} \prod_{k=1}^N \cos \frac{x}{2^k} \quad (2.6.3)$$

となる. ここで $N \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} \quad (2.6.4)$$

を得る. なお, 除外した $x = 2\pi n$ の場合も, 直接計算により $0 = 0$ で OK である.

第 2 の公式については, 3 倍角の公式

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta\right) \quad (2.6.5)$$

を用いる. (2.6.5) で $\theta = x/3^k$ とおき, 上と同じように k について 1 から N までの積を作ると,

$$\prod_{k=0}^{N-1} \sin \frac{x}{3^k} = 3^N \prod_{k=1}^N \sin \frac{x}{3^k} \cdot \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3^k}\right) \quad (2.6.6)$$

⁸ λ は全部素数だが, 47 だけが抜けていることに注意!

⁹もちろん, よく知られたオイラーの公式とは全く関係がない.

を得る. $x \neq 3\pi n$ (n は整数) ならばサイン因子はゼロにならないから,

$$\sin x = 3^N \sin \frac{x}{3^N} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3^k}\right) \quad (2.6.7)$$

となる. ここで $N \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3^k}\right) \quad (2.6.8)$$

を得る. なお, 除外した $x = 3\pi n$ の場合も, 直接計算により $0 = 0$ で OK である.

ところで, $|x| < 1$ という条件は一体どこから出てくるのだろうか. そもそも三角関数の中に π 因子なしの有理数に関与するという結果がでるはずはないであろう¹⁰.

2.7 付録 公式 (2.3.4) の証明

公式 (2.3.4) の証明をしておこう. 簡単のため, $\phi \equiv \pi/(2N+1)$ とおく. 証明すべき式は

$$T \equiv 2^N \prod_{k=1}^N \cos(k\phi) = 1$$

である. $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ により,

$$(-1)^N T = 2^N \prod_{k=N+1}^{2N} \cos(k\phi)$$

であるから,

$$(-1)^N T^2 = 2^{2N} \prod_{k=1}^{2N} \cos(k\phi)$$

となる. (通常の) オイラーの公式を使うと,

$$(-1)^N T^2 = e^{-iN(2N+1)\phi} \prod_{k=1}^{2N} (1 + e^{2ik\phi}) = (-1)^N \prod_{k=1}^{2N} (1 + \alpha_k)$$

となる. ただし, $\alpha_k \equiv (e^{2i\phi})^k$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) は, 円分方程式 $x^{2N+1} - 1 = 0$ の 1 以外の $2N$ 個の根である. したがって,

$$\prod_{k=1}^{2N} (x - \alpha_k) = \sum_{m=0}^{2N} x^m$$

である. ここで $x = -1$ とおけば,

$$\prod_{k=1}^{2N} (1 + \alpha_k) = \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m = 1$$

を得る. ゆえに, $T^2 = 1$ である. T は正の因子のみの積でもちろん正だから, $T = 1$ が従う.

¹⁰筆者の親友 Y 氏は若い時ハイゼンベルクのもとで研究をしたが, 彼があるとき出した計算結果に π と e の一次結合があるのを見たハイゼンベルクは, 「こういう結果が絶対に出ないということは証明できないが, これは間違いだと思う。」と言ったということである.

オイラー角による回転の疑問

Question of Rotations in terms of the Euler Angles

矢野 忠

Tadashi YANO¹¹

3.1 はじめに

オイラー角によって位置ベクトルの空間回転を表現するとき、はじめ z 軸のまわりの角 γ の回転 $R(\gamma\mathbf{z})$ を行い、つづいて y 軸のまわりの角 β の回転 $R(\beta\mathbf{y})$ を行う (y 規約の場合)。最後にもう一度 z 軸のまわりの角 α の回転 $R(\alpha\mathbf{z})$ を行う。

このとき、どの文献 [1] [2] [3] [4] を見てもオイラー角による回転 (y 規約) では

$$R(\alpha\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

$$R(\beta\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

$$R(\gamma\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

の 3 つの行列で表されている。

ここで、 $R(\alpha\mathbf{z})$ と $R(\gamma\mathbf{z})$ との行列の表示には全く疑問は生じないが、 $R(\beta\mathbf{y})$ は

$$R(\beta\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

ではないのかという疑問が生じる。

言い換えれば、どうやって

$$R(\beta\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

¹¹yanotad@earth.ocn.ne.jp

を導いたのであろうかという疑問である。

このエッセイでは本質的には同じだが、2通りのやり方でこの $R(\beta\mathbf{y})$ を導いてみよう。

3.2 $R(\beta\mathbf{y})$ の行列の導出法 1

y 軸のまわりの回転を考えると、役立つ行列表示は z 軸のまわりの回転

$$R(\beta\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。これは z 軸を回転軸として β だけ反時計回りにベクトルを回転させた行列を表している。しかし、この行列で z 軸をとったというのは単なる私たちの便宜上のことであって、これを z 軸ではなくて、 y 軸と名付けかえてやってもよい。

すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

とサイクリックに変更する¹²。同様に

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

とこちらもサイクリックに変更して

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

を計算すれば、これは y 軸のまわりの角 β の回転を表す式になる。

したがって

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos \beta - x \sin \beta \\ z \sin \beta + x \cos \beta \\ y \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta + z \sin \beta \\ y' &= y \\ z' &= -x \sin \beta + z \cos \beta \end{aligned}$$

が得られる。したがって

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

と表される。

¹²サイクリックに変更するのは座標系を右手系に保つためである。

これから

$$R(\beta\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

が導かれる.

3.3 $R(\beta\mathbf{y})$ の行列の導出法 2

3.2 節で求められた結果によって (3.1.2) についての疑問はなくなったが、ちょっと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

と置き換えるところが手作業的であって、数学としてはあまり格好良くない¹³. それでこの置き換えの操作を行列で表したい. そのために

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

同様に

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

であることを用いる. このとき (3.2.3) は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

と表される.

いま

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

とおけば, この O の逆行列は O の転置行列 O^T で

$$O^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 確かに

$$O^T O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

¹³そんなこだわりを捨てるのが本当の物理屋ではあろうが, ちょっとここではこだわってみる.

と O は直交行列であることが確かめられる.

(3.3.3) に左から O^T をオペレートすれば,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

となる.

いま

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \beta & 0 & \cos \beta \\ \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを用いれば, (3.3.5) から

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

が得られる.

したがって

$$R(\beta \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

が導かれる.

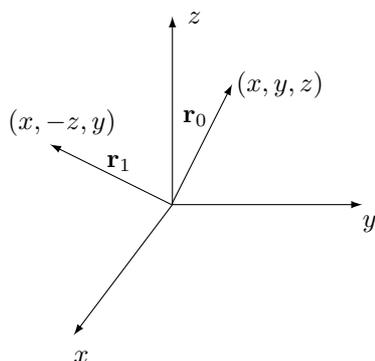
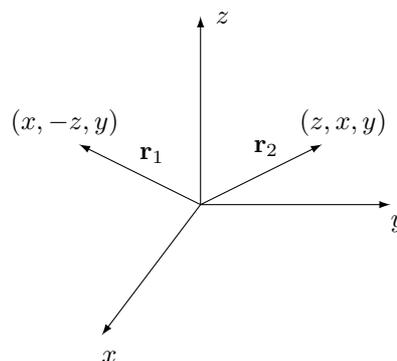
3.4 おわりに

このエッセイで述べたことは些細なことであり, 頭の鋭い人にはあまりに自明すぎておかしいであろう. しかし, [5] に問題 3.1.3 として出されていることを考えると自明でもないのかもしれない.

この解答は [6] にあるが, 付録 2 に引用しておく. これは英文でたったの 5 行である. くだくだと長く書くのは私の悪い癖かもしれない.

3.5 付録 1 ベクトルの回転による (3.3.4) の導出

3.3 節では (3.3.4) を導く手段として座標系の軸の名の付け替えを行ったが, これを軸の名の付け替えではなく, 位置ベクトル \mathbf{r}_0 を x 軸のまわりの $\pi/2$ の回転を行い, さらにその回転によって得られた位置ベクトル \mathbf{r}_1 を y 軸のまわりの $\pi/2$ の回転を行うことによって \mathbf{r}_2 を導くという方法で (3.3.4) を導くこともできる.

図 3.1: \mathbf{r}_0 の x 軸のまわりの $\pi/2$ の回転図 3.2: \mathbf{r}_1 の z 軸のまわりの $\pi/2$ の回転

この場合は便宜的に変数の名前を置き換えるのではなく、位置ベクトルの回転を続けて行い、新しい位置ベクトルと元の位置ベクトルとの関係からその変換の行列 (3.3.4) を導く。

まず図 3.1 の位置ベクトル \mathbf{r}_0 を

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.5.1)$$

とする。これを x 軸のまわりに $\pi/2$ の回転させれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

となる。回転後の位置ベクトル \mathbf{r}_1 は

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5.3)$$

である (図 3.1 参照)。この \mathbf{r}_1 をさらに z 軸のまわりに $\pi/2$ だけ回転させれば

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5.4)$$

となる。2 回目の回転後の位置ベクトル \mathbf{r}_2 は

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5.5)$$

である (図 3.2 参照)。

引き続いた 2 つの回転 (3.5.2), (3.5.4) を一つの式でまとめて表せば

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.5.6)$$

となる。

ここで

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.7)$$

であるから, (3.5.6) から (3.3.1) が得られる.

したがって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

への変換を表す行列が (3.3.4) であることを位置ベクトルの回転から導くことができる.

(3.3.1) は単に形式的な手段ではなく, 本質的にはこのようにして得られる.

3.6 付録2 Altmannの問題と解答

(Problem) Obtain $R(\beta\mathbf{y})$ in (3.1.2).

(Solution) Substitute β for α in $R(\alpha\mathbf{z})$ of (3.1.1). On cycling $|xyz\rangle \rightarrow |zxy\rangle$ this matrix must be $R'(\beta\mathbf{y})$ on the basis $|zxy\rangle$. Write down the three equations of transformation of this basis with $R'(\beta\mathbf{y})$. From them, write down the matrix A such that $R(\beta\mathbf{y})|xyz\rangle = A|xyz\rangle$. A is $R(\beta\mathbf{y})$.

(注意) このエッセイに合うように式の番号を変えている. 記号 $|xyz\rangle$ は私の記号でいえば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と同じと考えてよいであろう.

(2013.9.9)

参考文献

- [1] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 69
- [2] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝, 『応用群論』(裳華房, 1976) 122
- [3] 佐藤 光, 『群と物理』(パリティ物理学コース)(丸善, 1992) 165
- [4] 吉川圭二, 『群と表現』(理工系の基礎数学)(岩波書店, 1996) 121
- [5] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 70
- [6] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 277

編集後記

先日、3巻5号を発行したばかりであるのに、引き続いて3巻6号をお届けできるのは編集人としてはとてもうれしい。これは投稿原稿が常にあること、またこのサキュラーの存在意義を認めて下さる方がおられることを示している。

編集発行人は、3ヶ月に1回ないし2回の数日の編集業務と完成したPDFファイルをメールで発送するだけである。また、何回か編集段階でその号の全頁をプリントをして、それをもとに編集点検をするための紙代が経費のすべてである。

このような簡便なやり方で数学・物理通信を発行しているので、編集人の事情が許す限り発行を継続していくつもりである。皆様には今後ともご支持をお願いしたい。

なお、改訂した投稿規定を3巻5号に掲載してある。投稿原稿を作成されるときにはそれに準拠して下さい。編集業務が省力化できるので、ご協力をお願いします。

(矢野 忠)