数学・物理通信

4巻1号　　2014年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2014 年 3 月 31 日

目 次

Contents

剽窃事件顛末記
An Account of a Plagiarism Affair

中 西　襄 [1]
Noboru NAKANISHI [2]

1.1　はじめに

今年の初め，理研の小保方晴子さんらのグループが，普通の細胞にちょっとした刺激を与えることで万能細胞（「STAP 細胞」と命名）が出来るという論文を NATURE 誌上に発表し，各方面から大きな期待と賞賛の声が寄せられた．しかしそれも束の間，この論文は極めて疑わしいという声があちこちから上がるようになった．最も重大なのは，小保方さんが関与しない限り誰も STAP 細胞を再現できないということである．そして STAP 細胞が出来たことを証明する写真が，変造されていたり，他の実験のものが流用されていたことだった．しかし，前者は STAP 細胞不存在の証明にはならないし，後者は何らかの手違いという可能性を否定できない．本人の作為が明らかなのは，他の論文の文章の剽窃である．剽窃は，NATURE に発表された論文のみならず，その 3 年前に早稲田大学に提出された小保方さんの博士論文にも見つかった．これは彼女の作為の犯行であることを決定的に裏づけるものである．

論文の剽窃ということは，科学の世界でどれほど行われているものか，調査が非常に難しい．多分論文のいわゆるコピペ (copy and paste の略) は，常習的に行われているのではないだろうか．犯行がばれる確率は極めて小さいと思われる．実際，小保方さんの博士論文の冒頭の 20 ページにもわたるコピペは 3 年間ばれなかった．もし STAP 細胞など大それた論文を発表しなかったら，永久にばれなかったであろう．以下，私自身が剽窃事件に巻き込まれた実体験の記録を振り返ってみたいと思う．この場合も剽窃の犯人があまりにも大量にコピペをやったため，たまたま発覚したものである．しかも彼はその 3 年前から剽窃論文をいくつか書いていたのだった．

1.2　事件の発端

事件の発端は，1999 年 11 月 9 日の菅野浩明氏 [3] からの次のようなメールである．

「今日，基研のプレプリント・サーバーに気になる論文を見つけたので，お知らせします．hep-th/9911045-49 という一連の論文がそれです．論文のタイトルが気になったので，少し眺めてみましたが，その内容には，先生の量子重力理論に関する一連の論文を引き写したとしか思えないような部分が多く見られます．それにも関わらず，先生の論文は全く引用されていません．然るべき抗議をすべきと思いますが，いかがでしょうか.」

---

[1] 京都大学名誉教授
[2] nbr-nak@trio.plala.or.jp
[3] 現名古屋大学教授．彼はもと私のところの院生で，量子アインシュタイン重力に関した共著論文を書いたことがある．

そこでさっそく調査してみたところ，論文の著者は Mebarki et al. で，文章の盗用は私の原論文からではなく，それらをまとめた著書 N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990) の Chapter 5 からであった．この本は小嶋泉氏との共著であるが，Chapter 5 は量子アインシュタイン重力に関する章で，すべて私が執筆した部分である．論文は non-symmetric gravity[4] に関するものということになっているが，古典論の計算を少しやっただけで，肝心の正準交換関係から同時刻交換関係を計算することは全くせず，[5] 結果は上記の本のまる写しである．とくに最後の 2 論文がひどかった．しかし原論文の引用はすべて消されていた．これは犯人が犯行現場の指紋をすべて拭い取るのと同じで，引用文献から尻尾が掴まれないようにするためである．だからこれは徹底的になされていた．しかし，コピペした文章の内容は全く理解していないものとみえ，ちょっとチェックしてみたらすぐにわかるはずの数式のミスプリントも，そのままコピペされていた．これは盗用がどこからなされたかを確実に証明するもので，ミスプリントにも意外な効用があるものだとわかった．

1.3 Mebarki 論文の告発

剽窃されたのは初めての経験なので，どう対処すべきか小嶋氏と相談した．犯人側との交渉は，共著者である小嶋氏にやっていただくことをお願いした．それは，私はこの時すでに京大数理研を退官していたし，それに犯人と被害者が直接交渉すると問題がこじれるかもしれないと危惧したからでもある．このためこの後，彼にはずいぶん迷惑をおかけすることになってしまった．

とにかく，Mebarki らの論文の告発をすることにし，上記プレプリント・サーバーに次のような論文を連名で送付した (hep-th/9912039, 6 Dec 1999).

Notes on Unfair Papers by Mebarki *et al.* on "Quantum Nonsymmetric Gravity"

It is pointed out that the essential parts of some recent papers by Mebarki et al. (hep-th/9911045, hep-th/9911046, hep-th/9911048, hep-th/9911049, dated 6 Nov.1999) are taken from a book written by Nakanishi and Ojima, published in 1990.

The following four papers, which have appeared as E-prints very recently, have come to our attention.

[MMZ] N. Mebarki, A. Maireche and S. Zaim, $N = 1, D = 4$ Quantum Nonsymmetric supergravity (hep-th/9911045),

[MMBB] N. Mebarki, A. Maireche, A.Boudine and A.Benslama, Symmetries of Quantum Nonsymmetric Gravity (hep-th/9911046),

[MM] N. Mebarki and A. Maireche, Quantum Nonsymmetric Gravity Geometric Commutation Relations (hep-th/9911048),

[MMH] N. Mebarki, A. Maireche and M. Houchine, QNGT Sixteen Dimensional GL(4,R)-like Superalgebra (hep-th/9911049).

Taking advantage of the situation that nobody has discussed the quantum theory of *nonsymmetric gravity*, these authors pretended as if all of these papers were their original work. However, apart from some considerations at the Lagrangian level, the essential parts are taken from Chapter 5 of the following book published in 1990 *with absolutely no mention to it*:

[NO] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, Singapore, 1990).

---

[4] 昔アインシュタインが一般相対論と電磁理論を統一する目的で考えた非対称計量テンソルの理論で，もちろん完全な失敗作であった．

[5] 量子化が正しく行えていないと同時刻交換関係は計算できない．非対称テンソルの同時刻交換関係は対称の場合とは同じではないはずだから，コピペしたくても元がないわけだ．

Moreover, Mebarki *et al.* delete all the references to the original papers on quantum Einstein gravity by Nakanishi (partly with some collaborators), published in 1978-1985.

What they reproduce from the book [NO] are not merely contents but also bulk of sentences, though, of course, with straightforward modifications necessary for pretending as if those were their own sentences. As a result, it becomes very easy to identify which parts are taken by them. As for [MMZ] and [MMBB], see Appendix.

Aside from Introduction and Conclusion, *the whole papers of [MM] and [MMH] are taken almost faithfully* (with some portions skipped and with some mistakes committed) *from Section 5.6 (pp.319-333) of [NO] and from Section 5.5 (pp.312-318) of [NO], respectively.* Mebarki *et al.* have copied even simple misprints of a mathematical expression in [NO], which could easily have been corrected if they had checked mathematical formulae.

The geometric commutation relation and the sixteen dimensional superalgebra or choral symmetry (named by Nakanishi) are very remarkable results *characteristic to quantum Einstein gravity.* To derive them, one must make full use of the equal-time commutation relations (between field operators and their time derivatives), whose calculations are extremely elaborate. Mebarki *et al.* write merely canoninal commutation relations but one can find no evidence that they have actually calculated the equal-time commutation relations (between field operators and their derivatives) of quantum nonsymmetric gravity. The expressions must be *different* from those of quantum Einstein gravity. Therefore there is no reason to believe that the geometric commutation relation and the sixteen dimensional superalgebra remain valid in quantum nonsymmetric gravity.

We hope that Mebarki, Maireche and their collaborators refrain from the unfair conduct shameful as scientists.

Appendix: 論文 [MMZ] と [MMBB] におけるコピペ個所 (計 7ヵ所) の具体的指摘 [省略]

12 月 7 日，プレプリント・サーバーの www administrator からの返事があった．彼は，彼らの論文で acknowledge された 5 人の物理学者（Strominger, Vilenkin のような著名人を含む）に問い合わせたところ，すべて著者と話したことも逢ったことさえもないという返事だったということである．完全なインチキ論文であることがはっきりしたので，Mebarki らの論文は永久に受け付けないことにしたということであった．

その 3 日後，www administrator から，より詳しい説明が届いた．剽窃以外にも，名前の盗用，所属の詐称（共著者が Harvard になっている）があり，著者に問い合わせても返事がないので，彼らの論文は取り消し処分にするとのことであった．名前を盗用された Farhi, Vilenkin, Abbott からのメールのコピーも添えられていた．いずれも全く寝耳に水のような話に驚いている．さらに Mebarki は，問題の論文以外にも，以前に 3 編のいかがわしいプレプリントを提出していたようである．彼らの論文は過去，現在，未来にわたってすべて追放されることになった．

12 月 11 日われわれは，万一剽窃論文がどこかの雑誌に掲載された場合，著作権問題が発生しかねないので，著書の出版元である World Scientific に一部始終を連絡した．

1.4 事件のその後の展開

これで剽窃事件は一件落着と思っていたら，とんでもなかった．その後半年近くにわたって，いろんなことが起こるのである．明白な不正の存在に対して，人々がどういう反応を示すか，まさに人間模様を見る思いである．

まず 12 月 7 日早々にきたメールは，Mebarki と同じくアルジェリア出身の Dou という人だった．彼は同国

人が犯した不正を深く恥じ，謝罪した．次に来たのは，超弦理論のブルドッグともいうべき人物 Lubos Motl[6] で，彼は Mebarki に直接メールをして，このような最低限のモラルもない人間は物理学界から去れと言っている．また，数理研によく客員として来る Sternheimer は “Well done!” とのみコメントしてきた．

ここまでは，すべて正常な反応だった．ところが 12 月 11 日になって，雲隠れしていたはずの張本人，自称 Professor の N. Mebarki から，直接メールが来た．まず，アルジェリアではインターネットがうまくつながらず，対応が遅れたことを詫び，ついで次のように書いてきた．

Concerning the papers hep-th/9911045, hep-th/9911046, hep-th/9911048, hep-th/9911049, I think

1) these are pre-preprints (not a published works) which can be criticized commented or discussed.

2) the content of these papers is quantum Non Symmetric gravity and not quantum Einstein's general relativity. Of course the first one is the generalized version of the second and most of mathematical relations can be recovered. The aim of these preliminary preprints is to show that the covariant operator formalism can be extended to NGT. Sorry for forgetting of references related to your book and the use may be the same notations and expressions. It is maybe a confusion regarding the form of the obtained expressions and relations. To avoid this misunderstanding and maybe confrontations of the pre-preprints we have decided to withdraw them from the hep-archives and have more contact with you concerning the physical content of the QNGT and if you need the details of our calculations we can send them to you as attached file in the near future. Dear sir we are very sorry that this problem have taken this dimension for just preliminary preprints which are by definition (and as far as we know) subject to criticism and discussion. It's question of conviction. Please understand our sincere intentions and we are pretty sure for your comprehension.

要するに，自分たちの論文は，非対称テンソルに基づく重力理論だからアインシュタイン重力とは違う．あなた方の本の引用を忘れたのは申し訳ない（!!　これだけたくさん盗用して「忘れられる」わけないよね．それより原論文の引用を消去するのを 1 個たりとも忘れなかったんだから)．　論文はほんの準備段階のもので，問題があるようなので取り下げた（うそつけ！www administrator によって削除されたくせに)．あなた方も自分たちの仕事に興味をもってほしいというようなずいぶん手前勝手なメールだ．もちろん，われわれは無視することにした．そしたら，12 月 16 日また Mebarki から，次のような呆れたメールが来た．

We are very sorry about what was happened concerning the pre-preprints of non symmetric gravitation theory and the big confusion about them so we have withdrawn all the indicated pre-preprints from the hep directory. I pay your attention, sir, that they were not (and they will not) be sent for publication. Finish with them (and forget them).

We have noticed also that you have sent notes (hep-th/9912039) to the hep archives, please withdraw your article and let us collaborate for more interesting physics problems.

つまり，自分たちの論文は取り下げたのだから，それを批判したあなた方の論文も取り下げてほしい，そして，もっとちゃんとした仕事をするために共同研究してほしいということだ．もしわれわれがこのコメントを取り下げたら，第三者からはわれわれの指摘に誤りがあったように錯覚されるだろう．そしてこんな詐欺師のインチキ野郎と共同研究などしたら，それこそわれわれの破滅につながりかねない．全くどこまでど厚かましい奴なのだろう．

12 月 18 日，今度は論文 [MMBB] の共著者の 1 人 Benslama から謝罪のメールが来た．Mebarki があなた方の本から剽窃していた事実は全然知らなかった．全く申し訳ないという内容である．しかし同一人物が www

[6]彼のメールの末尾には，標語 “Superstring/M-theory is the language in which God wrote the world” が書かれている．数年後，超弦理論を徹底的に批判した本 “Not Even Wrong” が出て，私はその著者 Woit のブログをしばしば訪れているが，ちょっとでも超弦理論にケチをつける意見が述べられると，必ず Lubos Motl は猛烈に咬みついてくるようだ．

administrator に宛てたメールは少しニュアンスが違っていて，自分が共著者にされていたこと自体知らなかったというふうに言っている．自分までもプレプリントが発表できなくなるので，あわてたのかも知れないが，同じ大学の同じ分野の同僚が勝手に自分を共著者にして論文を出しているのに全く気が付かなかったというのは，どう考えても不自然だ．

さて，年が改まって 2000 年 1 月 24 日，今度は Mebarki が所属するアルジェリアの Constantine 大学の物理学教室主任と理学部長からファックスで，フランス語の謝罪文が届いた．

1 月 28 日，1 か月半ぶりで Mebarki からかなり長いメールが来た．四面楚歌で大分参ったのか，今度は大分丁重な謝罪になった．まず，剽窃は自分の院生の A. Maireche（Harvard 所属を詐称した人物）がやったことで，自分の監督不行き届きだが，全く知らなかったなどと主張する．今頃になってそんなことが新たにわかったはずはないだろう．そして，ちゃんとあなた方の仕事を引用して，論文を書き直したから見てほしいなどと虫のいいことを言う．1 月 29 日，www administrator が，彼らとのやり取りを転送してきた．それによると，Mebarki は完全に Maireche の単独犯行だと言い張っているようだ．Maireche が勝手に自分のメール・アカウントを使って剽窃論文を投稿したのだというのである．しかし，去年 11 月 6 日に Mebarki に論文受け取りのメールが行っているはずで，今頃になってから知らなかったはあり得ないというと，アルジェリアではインターネット事情が悪く，連絡がうまくいかないのだと弁解する．www administrator は，他の 3 人の共著者 Boudine, Benslama, Haouchine にも連絡をとって，Mebarki の弁明について問いただしたが，自分たちに累が及ぶことを恐れて逃げ腰一点張りのようである．

私は Maireche の単独犯行説を覆すうまい手立てがあることに気付いた．それは彼らの論文の引用文献にあった 1997 年の Mebarki と Maireche の共著論文 3 編の存在である．それらのタイトルは，

“Sixteen dimensional *GL(4,R)*like superalgebra” (UC PUB39),

“Possibility of resolving the divergence problem in quantum nonsymmetric gravity”(UC PUB41)

“Geometric commutation relations in quantum nonsymmetric gravity”(UC PUB42)

である．UC PUB というのは，Constantine 大学の紀要のことだろう．第 1 のものと第 3 のものは，それぞれ多分論文 [MMH] と論文 [MM] と同様のものだろう．第 2 のタイトルは，in 以下を除き [NO] の 5.8.2 節のタイトルと全く同じである．Mebarki らはすでに少なくとも 3 年前から剽窃を繰り返していた可能性が高くなった．もしそうならば，Mebarki が 3 年間も Maireche の剽窃を気づかなかったなどという言い逃れは不可能だ．そこでこの事実を Constantine 大学の当局者に問い合わせ，もし論文が実在するのならば，コピーを送ってくれるよう依頼した．

2 月 21 日，Constantine 大学物理教室主任らからの調査報告がファックスで送られてきた．やはり上記の 3 論文に関してこちらが推定した通りであったとのことだった．そしてさらに雑誌に発表された論文

”The quantization of Nonsymmetric Gravity”, by Mebarki, Benslama, Boudine and Maireche, Physica Scripta, Vol. 55, 12-17, 1997)

にも剽窃があった由である．ということは，3 年前から Mebarki のみならず他の 2 人の B. も共犯だったわけだ．

仲介をやってくれていた小嶋氏はこれで剽窃事件は一件落着したと思い，海外出張のこともあるので，この話から手を引くつもりだった．ところが事件はまだまだ終わらなかった．3 月 10 日，今度は Slatnia という Constantine 大学の副学長で調査委員会の代表と名乗る人物から，調査報告のメールが送られてきた．それによると，Mebarki の処罰については現在考慮中であるが，本人の寄与を明確にした論文を書かせているので，ご意見を伺いたいとのことで，本人からの詫び状が添えられていた．彼によれば，Mebarki は 13 年前からこの大学にいるが，これまでなんら問題を起こしたことがないという．救ってやりたい彼の気持ちは分からないでもないが，しかしそれはこちらの知ったことではあるまい．こちらは剽窃された全くの被害者だ．犯人を救ってやる義理はないだろう．とにかくこちらは静観することにした．なお彼によれば，上記 3 編の論文は大学には存在しなかったとのことである．だんだん怪談めいてきたなあ．

そして 4 月 10 日，調査委員会代表の Slatnia から第 2 信がきた．Mebarki に対する処分が決まったことを述べたのち，Mebarki が改訂論文を書いたから見てほしいという．大学としてもこの問題は非常に憂慮しており，Mebarki 個人の咎にとどまらず，大学の名誉にもかかわることである，Constantine 大学の学長の名において

謝罪するので，告発状 hep-th/9912039 を取り下げてほしいと要請してきた．全く呆れた言い分である．これでは Mebarki の思惑通りで，こちらの方がお騒がせしたみたいな話になってしまう．もちろんこんな要求には応じられるわけはないであろう．

その少し前の 4 月 8 日，www administrator から，彼と Constantine 大学の連中とのメールのやりとりを転送してきた．彼は acknowledgement のインチキや，著者の所属の詐称の方を気にしていて，それに関する彼らの対応があまりにも遅く，本当のことを言っているとは信じらないという見解を述べている．小嶋氏はこれに対する返事をかねて，上記の Slatnia からのメールについてこちらの立場を説明した．Slatnia からは直接 www administrator へのメールも来たようだ．www administrator は投稿された不正な論文はすべて削除したが，告発状 hep-th/9912039 を削除する考えはないことを伝えてきた．プレプリント・サーバーは，過去の事実を記録に残しておくべきものだからである．

これでやっと Mebarki 事件は終結した．最後に私の述べた見解は次の通りである．

1. The papers of Mebarki et al. consist of the substantial part “plagiarism from our book” and the nominal part “quantum nonsymmetric gravity”, between which no logical connection has been established. If the former is deleted, there remains nothing significant as research.

2. We think that Mebarki is devoid of both minimum conscience as a scientist and minimum research ability as a scientist. Hence we do not want to spend time to save Mebarki any more. He should recall Lobos Motl’s advice to him dated 7 December 1999.

1.5 おわりに

振り返ってみると，Mebarki はごまかそうとして細工すればするほど，自ら墓穴を掘っていったように思われる．不思議なのは，プレプリントの投稿をしたという Maireche という彼の共著者である．Maireche はいつも Mebarki の影のようにくっついていながら，本人からの連絡は最後まで誰に対しても全くなかった．はたして彼は実在しているのだろうか．インチキがばれたときの責任転嫁用の，Mebarki が拵えた架空の人物なのではないかと疑われる．そのほかの共著者は，責任回避にばかり終始している．だがもちろん剽窃がばれていなければ，これらの論文を自分の業績として利用するつもりだっだのに違いない．

論文というものは，本来自分が書きたくてたまらないことを書くはずのものだ．他人の文章をコピペしたって少しもうれしくないだろうと思う．これは，論文を書く目的が科学的な成果を公開し報告するということから，自分の地位や名誉，予算獲得などの手段になってしまった結果である．それにしても丸写しするのは，よほど内容について自信がないからであろう．内容を理解して自分の文章にすれば，実質的に剽窃してもなかなかばれることはないと思われる．Mebarki の剽窃がばれたのは，あまりにも機械的なコピペをやったからである．もっと細工を凝らし，適当に引用もしていたら，ばれなかったかも知れないし，またばれても言い逃れができたかも知れない．

ベクトル代数再考

Vector Algebra Revisited

矢野　忠 [7]
Tadashi Yano [8]

2.1　はじめに

このエッセイは 2007 年 12 月の愛媛県数学教育協議会の機関誌に掲載されたものである [1]．その後，2011 年 3 月に一部を改訂していたが，その改訂版を発表していなかった．内容は特に目新しいものではないが，何かの参考になればと考えている．

ベクトル解析を学ぶのに Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} をつかってベクトル解析の初歩を学ぼう [2] というのが著者の年来の主張であったが, ベクトル代数のレベルでは Levi-Civita の記号を使わないでも面倒なベクトル代数の公式をそれほど手間をかけずに導けることを知った [3]．それはベクトル積で表されたベクトルを単に別の一文字のベクトルで表して後は 3 つのベクトルのスカラー積またはベクトル積の公式を使えばよい．このことについて少し述べてみたい．

2.2　2 つのベクトルの積

ベクトルとベクトルとの間には 2 つの積が定義されている．一つはスカラー積（内積）であり, もう一つはベクトル積（外積）である．

まずスカラー積はその名のごとくスカラーとなり,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \tag{2.2.1}$$

で定義される．ここで θ はベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ とのなす角であり, A, B はそれぞれベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の長さ（大きさ）である．

スカラー積はベクトルとベクトルの間に $\cdot$ をおいて表す．またこのスカラー積を成分で表せば

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{2.2.2}$$

となる．ここで, 添字は $1 = x, 2 = y, 3 = z$ を表している．以下ではこの表示を使う．

つぎにベクトル積はベクトルとなり, その大きさは

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta \tag{2.2.3}$$

[7]元愛媛大学工学部
[8]yanotad@earth.ocn.ne.jp

で定義される．ここで, 文字の意味はスカラー積の場合と同じである．またベクトル積の方向はベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ のつくる平面に垂直であり, いまベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ へと右ねじをねじるときそのねじの進む向きにとられる．ベクトル積はベクトルとベクトルとの間に $\times$ をおいて表す.

ベクトル積を成分で表せば

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1) \tag{2.2.4}$$

となる．ここで, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．

ベクトルに（普通の数である）スカラーをかける積（スカラー倍）も許されるが, これはベクトルとベクトルとの積ではない．これは単にもとのベクトルの長さを変えるだけである.

2.3　3 つのベクトルの積

3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ があるとしよう．このときにスカラー積とベクトル積の組み合わせがいくつあるか考えてみよう．まずスカラー積とベクトル積の記号である $\cdot$ と $\times$ 等を 3 つのベクトルの間に形式的においてみよう.

(a)　$\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
(b)　$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
(c)　$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
(d)　$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
(e)　$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
(f)　$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

これらの 6 つのうちで (d),(e),(f) は意味をなさない.

それを見てみよう．まず (d) で $\mathbf{A}$ はベクトルであり, また $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ もベクトルである．それを並べておいても意味をなさない．すなわち, そういう演算はベクトル代数では定義されていない．つぎに (e) では $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ はスカラーであるが, これとベクトル $\mathbf{A}$ のスカラー積は定義されていないから, 意味をなさない．最後に (f) も $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ はスカラーであるが, これとベクトル $\mathbf{A}$ のベクトル積は定義されていないから, 意味をなさない．したがって, 演算が意味をもつのは (a)〜(c) の 3 つの場合に限られる.

(a) はベクトル $\mathbf{A}$ のスカラー倍の演算であり, (b) は 3 つのベクトルのスカラー 3 重積といわれる．また (c) は 3 つのベクトルのベクトル 3 重積といわれる．4 つ以上のベクトルの積はすべてこれらの 3 つの場合に還元されるはずである．詳しいことはベクトル解析のテクストを見てもらうことにして最小限のことだけをこの 3 つの場合について述べよう.

まず (a) では $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ がスカラーでその大きさは $BC\cos\theta$ であるから, $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ で表されるベクトルは $\mathbf{A}$ と同じ方向のベクトルで大きさが $ABC\cos\theta$ のベクトルである.

つぎに (b) で $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ はスカラーで, ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を 3 つの辺にした平行六面体の体積を表している．これは成分を用いてつぎのように行列式で表すことができる.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{ABC}] \tag{2.3.1}$$

ここで, $[\mathbf{ABC}] \equiv \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を表し, これを Grassmann の記号という.

最後に (c) ではいま $\mathbf{V} \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ とおくと, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = 0$ および $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$ が成り立つので, ベクトル $\mathbf{V}$ はベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ に垂直である．したがって, ベクトル $\mathbf{V}$ はベクトル $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ のつくる平面内にあることがわかる．したがって,

$$\mathbf{V} = x\mathbf{B} + y\mathbf{C} \tag{2.3.2}$$

と表せる．この係数を求めれば,

$$x = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.3.3}$$
$$y = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{2.3.4}$$

となる [9] [4], [6]．すなわち, つぎの有名な公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{2.3.5}$$

が得られる．これは back-cab ルールといわれるが, なかなか印象的な覚え方である．

2.4 4 個以上のベクトルの積

ここでは網羅的に示すことをしないで, 応用の多いつぎの 3 つの場合だけを考えよう．

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.4.1}$$
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}[\mathbf{ABD}] - \mathbf{D}[\mathbf{ABC}] \tag{2.4.2}$$
$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B} \;\; \mathbf{B} \times \mathbf{C} \;\; \mathbf{C} \times \mathbf{A}] = [\mathbf{ABC}]^2 \tag{2.4.3}$$

ここで, $[\mathbf{ABC}] \equiv \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を表す．

ではこの 3 つの場合について調べてみよう．

まず (2.4.1) の導出を考えてみよう．この場合には (2.3.5) の関係を用いる．それにはまず $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とおけば,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \\
&= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{E}) \\
&= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})) \\
&= \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})] \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \qquad (2.4.1)
\end{aligned}$$

となる [10]．

これで (2.4.1) が証明できた．この証明のコツは $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とおいたところである．そうすれば, あとは誰にでも証明できる．このような置換をすることに気がつけば, (2.4.2),(2.4.3) の場合の導出も別に難しくはない．

つぎに (2.4.2) の導出を考えよう．この場合も $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とおけば,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{E} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{C}) \\
&= \mathbf{C}[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}] - \mathbf{D}[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}] \\
&= \mathbf{C}[\mathbf{ABD}] - \mathbf{D}[\mathbf{ABC}] \qquad (2.4.2)
\end{aligned}$$

上の式の変形を見てみるとまったく難しいところはない．また, この式を見ると (2.3.5) と類似性があるのに気がつく．したがって, (2.4.2) の記憶の仕方も (2.3.5) と関係させて覚えればよい．

[9] x, y の求め方については 2.6 節を参照せよ．

[10] $\mathbf{E} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ を成分で表して式を証明することもできる．しかし，この場合にはどういう形に整理するかの最後の式の形がわかっていなければ，最後の式の形にまとめるには少し洞察が必要だろう．ここの証明だと最後の式の形は自然に導かれる．いま $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の置換をしたことで (2.3.5) を使えるようにした．

最後に (2.4.3) の導出を考えよう．この場合は $\mathbf{E}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ に加えて $\mathbf{F}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ とおけば,

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\ \ \mathbf{B}\times\mathbf{C}\ \ \mathbf{C}\times\mathbf{A}] &= \mathbf{E}\cdot[\mathbf{F}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]\\ &= \mathbf{E}\cdot[\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{F})-\mathbf{A}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{C})]\\ &= (\mathbf{E}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{F})-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{F}\cdot\mathbf{C})\\ &= [\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})][\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]-[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})][\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\\ &= [\mathbf{ABC}]^2 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

最後から 2 番目の式で $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0,\ \ \mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$ であることを用いた．

ベクトル代数に出てくる公式にはいろいろあるが, ほとんどすべてここに示した方法で処理できるはずである．処理できないものがあるとすれば, それは個別に立ち入って考える必要があるだろう．

2.5 ベクトル代数の公式をつくる

基本となるベクトル代数の関係は 2.3 節の (2.3.1), (2.3.5) だと述べて, 2.4 節ではそれを用いて (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) の公式を証明した．ここで, 視点を変えると (2.3.1), (2.3.5) からいくつかのベクトル代数の公式をつくることができることがわかる．それについて考えてみよう．

まず, (2.3.1) を便宜的につぎのように書き換えておこう．

$$\mathbf{E}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\begin{vmatrix}E_1 & E_2 & E_3\\ C_1 & C_2 & C_3\\ D_1 & D_2 & D_3\end{vmatrix}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{E}) \tag{2.5.1}$$

ここで, いま $\mathbf{E}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ とおけば, これは 2.4 節で証明した (2.4.1) となることがわかる．私たちはいつも公式だとか定理だとかを誰か聡明な学者が考えたり，見出したりしたことであって, 凡人である私たちはそれを証明することしか考えないが, 自分で公式をつくることができる．もちろん, この公式はすでに知られていて新しい公式ではなかった．

同じように (2.3.5) を便宜的につぎのように書き換えておこう．

$$\mathbf{E}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\mathbf{C}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})-\mathbf{D}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.5.2}$$

ここで, いま $\mathbf{E}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ とおけば, これは 2.4 節で証明した (2.4.2) となることがわかる．この公式もすでに知られている公式ではあるが, 私たちの視点からいえば, 自分たちでつくることができたはずの公式であった．

これ以外にベクトル代数の重要な公式があるかどうかをベクトル解析のテキストとか公式集で探したが, これほど重要な公式は他にはない．

強いてあげると二つの恒等式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0 \tag{2.5.3}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{D})+(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})=0 \tag{2.5.4}$$

くらいである．もちろん, ベクトル解析の本とか演習書を見れば他の式も載っているが, それらはあくまで演習用であってその重要性は少ない．この二つの式は (2.3.5),(2.4.1) を用いて簡単に証明できる．

2.6 (2.3.2) の係数 x, y の導出

[4] に述べた方針にしたがって (2.3.2) の係数 x, y を求めてみよう．

(2.3.2) から $\mathbf{V}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は

$$\mathbf{V}=x\mathbf{B}+y\mathbf{C} \tag{2.3.2}$$

と表せる．

いま

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=0 \tag{2.6.1}$$

であるから，

$$x(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+y(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=0 \tag{2.6.2}$$

が得られる．これから

$$\frac{x}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}}=-\frac{y}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}=k \tag{2.6.3}$$

となる．いまこの比の値を k とおいた．

そうすると

$$x=k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.6.4}$$

$$y=-k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{2.6.5}$$

となる．k の値を決めることができれば，x,y が決まる．

(2.3.2) は恒等式であるから，ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ をできるだけ簡単な場合を選んで，定数 k を決めればよい．

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k} \tag{2.6.6}$$

$$\mathbf{B}=B_x\mathbf{i} \tag{2.6.7}$$

$$\mathbf{C}=C_y\mathbf{j} \tag{2.6.8}$$

ととれば [11]，

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=A_yB_xC_y\mathbf{i}-A_xB_xC_y\mathbf{j} \tag{2.6.9}$$

が得られる．一方

$$k[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}]=k(A_yB_xC_y\mathbf{i}-A_xB_xC_y\mathbf{j}) \tag{2.6.10}$$

であるから，(2.6.9),(2.6.10) を比べれば

$$k=1 \tag{2.6.11}$$

と求められる．これで (2.3.2) の x,y は (2.3.3),(2.3.4) であることが示された．

2.7 ∇ を含む演算

ベクトル代数が Levi-Civita の記号を導入しないでも, それほど面倒な手間をかけずに計算できるということがわかったから,

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.7.1}$$

を 1 個または 2 個含むいくつかの演算子もベクトル代数の演算を用いて簡単に導出できると予想できるが, まさにその通りである．そのことについては [7] にわかりやすくて, よい説明があるのでそれを参照してほしい．

[7] に注意がしてあるが, $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=(\nabla\mathbf{A})\nabla-\nabla^2\mathbf{A}$ を発見的に導くときには (2.3.5) を

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{2.7.2}$$

と置き換えてから使う必要がある．

[11] このとり方は $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の一つのとり方であるが，[5] では $\mathbf{A}=\mathbf{i},\mathbf{B}=\mathbf{j},\mathbf{C}=\mathbf{i}$ とっている．係数 k の値を求めることだけなら，もちろんこのとり方でいいが，とり方があまり特殊すぎると係数 k の値が求められないことがあるので (2.6.6)-(2.6.8) のようなとり方をしてある．

2.8 おわりに

ベクトル代数に関する限りここで示したような二つのベクトルのベクトル積を一つの文字で置き換えて一つのベクトルのように扱えば, 4 個以上のベクトルの積はベクトルのスカラー 3 重積とベクトル 3 重積およびベクトルのスカラー倍で表すことができる．それで Levi-Civita の記号を用いることは必要ではない.

ただ, Levi-Civita の記号とその縮約公式を覚えておけば, ほとんど万能的に使えるのでその有用性は変わらないが, そのためにテンソル解析の初歩を学ぶ必要がある．それを避けたい人にはここで示された方法が役立つであろう.

2.9 付録 (2.3.2) の係数 x, y の誤った導出

以下はちょっと見たら，(2.3.2) の係数 x, y の正しい導出のようであるが，実は導出になっていない．私は論理的に正しい導出だと長い間思い違いしていたので，自分の恥を曝すことになるが，教育的な配慮からここに掲載しておく.

どこが論理的に悪いのかは一目瞭然であろうが，注意をしておくと $\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}$ と $\mathbf{C}\cdot\mathbf{V}$ の $\mathbf{V}$ に証明したい公式 (2.3.5) を用いているところがよくない．以下で用いた K. O. さん [12] のアイディアではもともと (2.3.5) ではなく，(2.4.1) を用いていたが，結局その証明に (2.3.5) を用いれば，同じ論理的な矛盾に陥る.

[6] に述べられた K.O. さんの方針にしたがって (2.3.2) の係数 x, y を求めてみよう.

(2.3.2) から $\mathbf{V} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ は

$$\mathbf{V} = x\mathbf{B} + y\mathbf{C} \tag{2.3.2}$$

と表せる.

この $\mathbf{V}$ と $\mathbf{B}$ とのスカラー積をとれば,

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})x + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})y = \mathbf{B}\cdot\mathbf{V} \tag{2.9.1}$$

が得られ, $\mathbf{V}$ と $\mathbf{C}$ とのスカラー積をとれば,

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})x + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})y = \mathbf{C}\cdot\mathbf{V} \tag{2.9.2}$$

が得られる.

後で必要になるので, まず $\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}$ と $\mathbf{C}\cdot\mathbf{V}$ とを計算しておこう．(2.3.5) を用いて

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\cdot\mathbf{V} &= \mathbf{B}\cdot[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\\ &= \mathbf{B}\cdot[\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})]\\ &= (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\mathbf{V} &= \mathbf{C}\cdot[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\\ &= \mathbf{C}\cdot[\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})]\\ &= (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}) \end{aligned} \tag{2.9.4}$$

となる.

したがって, (2.9.1),(2.9.3) および (2.9.2),(2.9.4) から

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})x + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})y = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.9.5}$$

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})x + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})y = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.9.6}$$

---

[12] ある先生の名前が入っていたが，どうも実名を出すのは本人の名誉にかかわるのでイニシャルにした.

が得られる．いま, 方程式の構造がわかりやすいように

$$
\begin{aligned}
a &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\\
b &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\\
c &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}\\
d &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\\
e &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}
\end{aligned}
$$

とおけば, (2.9.5), (2.9.6) は

$$ax + by = ae - bd \tag{2.9.7}$$

$$bx + cy = be - cd \tag{2.9.8}$$

となる。

ここで, (2.9.7) $\times c$ および (2.9.8) $\times b$ を計算すれば,

$$c(ax + by) = c(ae - bd) \tag{2.9.9}$$

$$b(bx + cy) = b(be - cd) \tag{2.9.10}$$

であるから, (2.9.9) から (2.9.10) を辺々引き算すると

$$(ac - b^2)x = (ac - b^2)e \tag{2.9.11}$$

したがって, $ac - b^2 \neq 0$ のとき

$$x = e = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.9.12}$$

が得られる．

同様に (2.9.7) $\times b$ および (2.9.8) $\times a$ を計算すれば,

$$b(ax + by) = b(ae - bd) \tag{2.9.13}$$

$$a(bx + cy) = a(be - cd) \tag{2.9.14}$$

であるから, (2.9.13) から (2.9.14) を辺々引き算すると

$$(b^2 - ac)y = -(b^2 - ac)d \tag{2.9.15}$$

したがって, $ac - b^2 \neq 0$ のとき

$$y = -d = -(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{2.9.16}$$

が得られる．

(2007. 9. 29)(2011. 3.29 改訂)(2014.3.30 三訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，ベクトル代数再考,『研究と実践』（愛数協）, 第 96 号 (2007) 23-29

[2] 矢野　忠,『数学散歩』(国土社, 2005) 143-161,『物理数学散歩』(国土社, 2011) 72-90

[3] マージナウ, マーフィ (佐藤次彦･国宗真訳),『物理と化学のための数学 I』改訂版 (共立全書, 1959) 157-159

[4] 矢野　忠,『数学散歩』(国土社, 2005) 136-138, 『物理数学散歩』(国土社, 2011) 65-67

[5] 堀源一郎,『ハミルトンと四元数』(海鳴社, 2007) 79-80

[6] 矢野　忠, 「数学散歩」への便り, 『研究と実践』(愛数協), 第 88 号 (2005) 1-6

[7] ファインマン, レイトン, サンズ, 『ファインマン物理学』III 電磁気学 (岩波書店, 1986) 20-26

弾性棒の横方向衝撃解析
Analysis of Loading Transverse Impulse to an Elastic Rod

世戸　憲治 [13]
Kenji Seto [14]

3.1　はじめに

現著者と中西襄は，弾性棒の縦方向振動を誘発する衝撃問題を解析してきた [1),2),3)]．すなわち，弾性棒の一端に，弾丸を弾性棒の長さ方向に衝突させたとき弾性棒内に発生する縦波としての波動を固有関数の重ね合わせとして求め，非 Fourier 級数になるその和を Lagurre 多項式を用いて求めることに成功した．

今回の論文では，一端を固定された弾性棒の他端に錘を付け，この錘に弾性棒の長さ方向とは垂直な方向に初速度を与えた場合の弾性棒の横振動を解析する．そのためここでは，弾性棒の曲げ歪み，剪断歪みを取り入れた解析を行う．弾性棒の曲げに関する理論としては，Timoshenko beam が古くから知られている [4)]．これは剪断変形を含まない曲げだけであるが，剪断変形をも含むものとしては，Mindlin よる理論が良く知られている [5)]．しかし，この論文で設定したような動的衝撃問題に応用し，境界条件，初期条件を満たす完全な解を求めた例はないように思われる．

3.2 節では，Lagrange 形式を用いて解くべき方程式を導入し，3.3 節で固有値，固有関数を用いた方程式の解法を展開し，境界条件，初期条件を満たす解を固有関数の重ね合わせの形で求める．3.4 節では，数値計算による結果のグラフを表示する．付録 A では (3.2.7) 式の導出方法について述べる．付録 B では剪断変形を含まない純曲げの場合を，また，付録 C では逆に，曲げを含まない純剪断の場合について述べる．

3.2　方程式の導入

3.2.1　Lagrange 形式による方程式の導入

次ページ図 1 に示すように，一様な弾性棒の下端を埋め込みによる完全固定とし，上端に錘を付けたものを用意する．この錘に弾性棒の長さ方向に対し垂直方向の初速度を与えたときの弾性棒の横振動を解析する．なお，ここでの解析は棒の曲げ変形と剪断変形の両方を考慮するが，系全体に作用する重力については考慮しないこととする．

初めに設定すべき諸量として，まず，弾性棒の振動部分の長さを錘も含めて ℓ とし，Young 率，剛性率，密度，断面積，断面 2 次モーメントを，それぞれ，E, G, ρ, A, I とする [15]．弾性棒に取り付けた剛体としての

[13] 北海学園大学名誉教授
[14] seto@pony.ocn.ne.jp
[15] 方向性のない完全に一様な物体では $G = E/[2(1+\nu)]$ である．ここに ν は Poisson 比である．また，断面が半径 r の円のときは，$A = \pi r^2$，$I = \pi r^4/4$ である．

錘の質量は m，厚さは $\ell\epsilon$ とする．ただし，以下ではこの ϵ は無限小量として扱う．また，この錘に初速度として与える速度は v_0 とする．

棒の下端を原点として，初めに棒が静止していたときの棒に沿って x 軸をとる．棒の主軸が点 x, 時刻 t で傾いた角度を $\theta(x,t)$ とし，また，断面が傾いた角度を $\phi(x,t)$ とする．ここでは剪断変形を考慮するので，一般に，$\theta \neq \phi$ であり，$\theta - \phi$ が剪断による変形角である．また，点 x, 時刻 t で棒が横方向に変位した長さを $V(x,t)$ とする．この横方向変位 V と主軸の傾き角 θ とは

$$V(x,t) = \int_0^x \sin\theta(x',t)dx' \tag{3.2.1}$$

の関係で結ばれる．

解くべき方程式は Lagrange の方法に従って導入するものとし，初めにこの Lagrangian を作っておく．まず，振動しているときの弾性棒の単位体積あたりのエネルギーは

$$\begin{aligned} T =& \frac{1}{2}\rho {V_t}^2 = \frac{1}{2}\rho\Big(\int_0^x \partial_t \sin\theta(x',t)dx'\Big)^2, && \text{運動エネルギー} \\ U_1 =& \frac{EI}{2A}{\phi_x}^2, && \text{曲げ歪みエネルギー} \\ U_2 =& \frac{1}{2}G\gamma^2, \quad \gamma = \theta - \phi, && \text{剪断歪みエネルギー} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

で与えられる．ここに，V_t，ϕ_x などの添え字はそれらの変数での微分を表す．運動エネルギーとしてはこの他に，錘の横方向振動による

$$T_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}m{V_t}^2(\ell,t) \tag{3.2.3}$$

が存在する．

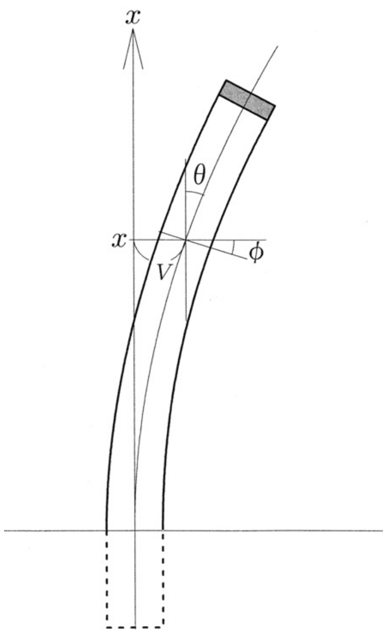

図 1　棒の横方向衝撃問題

なお，ここでは，弾性棒の横方向振動を解析することが目的なので，主軸方向の伸縮は考慮外とする．また，棒および錘の回転エネルギー，x 軸方向の速度による運動エネルギーについては，これらを小さいものとして無視することにする．

(3.2.2) 式に示す各エネルギーを用いて，弾性棒と錘を含めたこの系全体の Lagragian $\mathcal{L}$ を，

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell (T - U_1 - U_2)Adx + T_{\mathrm{w}} \tag{3.2.4}$$

と定義する [16]．さらにこれから作用積分 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}dt \tag{3.2.5}$$

とし，ここで，θ, ϕ を独立変数として $\mathcal{I}$ の変分をとる．はじめに簡単な方の ϕ の変分をとると

$$EI\phi_{xx} + GA(\theta - \phi) = 0 \tag{3.2.6}$$

を得る．これは，棒の回転運動を無視したときに成立する dx 間の曲げモーメント $EI\phi_x$ の差と剪断力が作るモーメントとの釣り合いを示す式である．つぎに θ の変分を考えるが，θ は V を定義する積分の被積分関数の中に内部変数として含まれているので通常の変分法とは異なり，Euler-Lagrange 方程式に帰着しない．この θ 変分の導出方法については付録 A で扱うことにし，結果のみを記すと

$$\Big[\int_x^\ell \rho AV_{tt}(x',t)dx' + mV_{tt}(\ell,t)\Big]\cos\theta + GA(\theta - \phi) = 0 \tag{3.2.7}$$

[16] 厳密にはこの積分は $\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\ell(1-\epsilon)}\cdots$ と定義すべきであるが，被積分関数はデルタ関数のようなものを含まないという了解のもとにこのような書き方をする．

となる．この式は点 x より上にある部分の慣性力の軸に垂直な成分とそれより下にある部分が上におよぼす剪断力との釣り合いを示す.

(3.2.1) 式より,

$$V_x = \sin\theta \tag{3.2.8}$$

であるが，以下では，主軸の傾き角 θ は小さいものとして線形近似

$$\sin\theta \cong \theta, \qquad \cos\theta \cong 1 \tag{3.2.9}$$

を採用する．この近似で，(3.2.7) 式は

$$\int_x^{\ell} \rho A V_{tt}(x',t)dx' + mV_{tt}(\ell,t) + GA(\theta-\phi) = 0 \tag{3.2.10}$$

となり，また，(3.2.8) 式は

$$V_x = \theta \tag{3.2.11}$$

となる．以下では，$V(x,t)$, $\phi(x,t)$ を未知関数として方程式を解くために，この (3.2.11) 式を用いて θ を消去し，方程式 (3.2.6) (3.2.10) を

$$EI\phi_{xx} + GA(V_x-\phi) = 0 \tag{3.2.12}$$

$$\int_x^{\ell} \rho A V_{tt}(x',t)dx' + mV_{tt}(\ell,t) + GA(V_x-\phi) = 0 \tag{3.2.13}$$

と書き換えておく.

3.2.2 変数の無次元化

長さに関しては，弾性棒の長さ ℓ を単位として 1 とする．また，時間に関しては，弾性棒の横振動が伝播する速度は定義されないので，ここでは仮に棒の軸方向に伝播する波，すなわち縦波の伝播速度 $\sqrt{E/\rho}$ で棒の長さ ℓ を伝播する時間を時定数 τ として

$$\tau \equiv \ell/\sqrt{E/\rho} \tag{3.2.14}$$

と定義しておき，この τ を時間の単位として 1 とする．具体的には x, t, V の各変数を改めて

$$x/\ell \;\to\; x, \qquad t/\tau \;\to t, \qquad V/\ell \;\to\; V \tag{3.2.15}$$

と置くことにする．さらに，つぎの無次元量

$$\alpha = \frac{G}{E}, \qquad \beta = \frac{I}{A\ell^2}, \qquad \mu = \frac{m}{\rho A\ell} \tag{3.2.16}$$

を定義する [17]．この置き換えで方程式 (3.2.12) (3.2.13) は

$$\beta\phi_{xx} + \alpha(V_x-\phi) = 0 \tag{3.2.17}$$

$$\int_x^1 V_{tt}(x',t)dx' + \mu V_{tt}(1,t) + \alpha(V_x-\phi) = 0 \tag{3.2.18}$$

と変換される．なお，これら 2 式の差をとると

$$\int_x^1 V_{tt}(x',t)dx' + \mu V_{tt}(1,t) - \beta\phi_{xx} = 0 \tag{3.2.19}$$

となるが，これをさらに x で微分すると

$$V_{tt} + \beta\phi_{xxx} = 0 \tag{3.2.20}$$

となる．この式は V と ϕ の関係を与える重要な式となる.

[17] 注 13 で示したように方向性のない一様物体では Poisson 比 ν を用いて $\alpha = 1/[2(1+\nu)]$ となる．また断面が半径 r の円のときは $\beta = r^2/(4\ell^2)$ である．μ は錘の質量の弾性棒のそれに対する比である.

3.2.3 境界条件と初期条件

境界条件として，弾性棒の付け根 $x=0$ は固定された埋め込みになっているので，

$$V(0,t)=0, \qquad \phi(0,t)=0 \tag{3.2.21}$$

が要請される．また，この点 $x=0$ は固定されているので加速度 V_{tt} もゼロであるが，(3.2.20) 式から

$$\phi_{xxx}(0,t)=0 \tag{3.2.22}$$

となる．さらに，(3.2.19) 式で $x=1$ とおくと

$$\mu V_{tt}(1,t)=\beta\phi_{xx}(1,t) \tag{3.2.23}$$

となるが，これは錘の運動方程式に他ならない．この式の右辺は弾性棒が錘に与える剪断力である．また，$x=1$ の点では，錘を横方向に動かすための剪断力は存在するが，錘の回転運動が無視できる範囲内では曲げモーメントもゼロになると考えてよく，条件

$$\phi_x(1,t)=0 \tag{3.2.24}$$

を要請する．以上が，境界条件である．

初期条件として，$t=0$ のとき弾性棒は直立していて，

$$V(x,0)=0, \qquad \phi(x,0)=0 \tag{3.2.25}$$

を要請する．初速度に関しては弾性棒の上に付けた錘部分だけが，無次元化速度 v_0 を持つものとし，

$$V_t(x,0)=\begin{cases} v_0, & x\geq 1-\epsilon \\ 0, & x<1-\epsilon \end{cases} \tag{3.2.26}$$

とする [18]．

3.3 方程式の解法

3.3.1 波動方程式の導入

V と ϕ に関する連立微積分方程式 (3.2.17) (3.2.18) を解くにあたって，初めに V, ϕ それぞれが独立した形の方程式を求めておく．(3.2.18) 式から ϕ を求め (3.2.17) 式に代入すると

$$\alpha\beta V_{xxx}-\beta V_{ttx}-\alpha\int_x^1 V_{tt}dx'-\mu\alpha V_{tt}(1,t)=0 \tag{3.3.1}$$

となるが，この式を x で微分すると

$$\alpha\beta V_{xxxx}+(\alpha-\beta{\partial_x}^2)V_{tt}=0 \tag{3.3.2}$$

となる．同様に，(3.2.17) 式から V_x を求め，x で 2 度微分した (3.2.18) 式に代入すると

$$\alpha\beta\phi_{xxxx}+(\alpha-\beta{\partial_x}^2)\phi_{tt}=0 \tag{3.3.3}$$

と，ϕ の方程式は V が満たす式とまったく同じ形のものとなる．これらの式がこの場合の波動方程式となる．

[18] 無次元化速度 v_0 とは，次元を持った速度 v_0 を $\sqrt{E/\rho}$ で割ったもの．

3.3.2 固有値と固有関数

ここで，V, ϕ に対し，2 変数 x, t を変数分離し，単一振動数 ω の波形

$$V(x,t)=E(x,\omega)\sin(\omega t), \qquad \phi(x,t)=\varPhi(x,\omega)\sin(\omega t) \tag{3.3.4}$$

を仮定する．これで初期条件の (3.2.25) 式は満足される．この形を (3.2.20) 式に適用すると

$$\omega^2 E(x,\omega)=\beta\varPhi_{xxx}(x,\omega) \tag{3.3.5}$$

を得る．これから，$\varPhi(x,\omega)$ の方が求められれば $E(x,\omega)$ の方はこの式から求められることになる．

なお，境界条件 (3.2.21) (3.2.22) 式の変数分離した形は

$$E(0,\omega)=0, \qquad \varPhi(0,\omega)=0, \qquad \varPhi_{xxx}(0,\omega)=0 \tag{3.3.6}$$

となる．これだけの準備をした上で，ϕ に関する方程式 (3.3.3) を解いてみる．この方程式に変数分離の式 (3.3.4) を適用すると

$$\alpha\beta\varPhi_{xxxx}+\beta\omega^2\varPhi_{xx}-\alpha\omega^2\varPhi=0, \quad \text{or} \quad \big[\alpha\beta D^4+\beta\omega^2 D^2-\alpha\omega^2\big]\varPhi(x,\omega)=0 \tag{3.3.7}$$

を得る．ここに，$D=d/dx$ なる微分演算子である．この方程式の演算部分を

$$\alpha\beta D^4+\beta\omega^2 D^2-\alpha\omega^2=\alpha\beta\big[D^2-\lambda_{(+)}^2\big]\big[D^2+\lambda_{(-)}^2\big] \tag{3.3.8}$$

と因数分解する．ここに，$\lambda_{(\pm)}^2$ は

$$\lambda_{(\pm)}^2\equiv\pm\frac{-\beta\omega^2\pm\sqrt{\beta^2\omega^4+4\alpha^2\beta\omega^2}}{2\alpha\beta} \tag{3.3.9}$$

と定義した ω に依存する正定数である．

この定義を用いて方程式 (3.3.7) の解は，三角関数と双曲線関数の線形結合で表わされ，

$$\varPhi(x,\omega)=a\Big[\frac{\sin(\lambda_{(-)}x)}{\lambda_{(-)}^3}+\frac{\sinh(\lambda_{(+)}x)}{\lambda_{(+)}^3}\Big]+b\big[\cos(\lambda_{(-)}x)-\cosh(\lambda_{(+)}x)\big] \tag{3.3.10}$$

と求められる．ここに，a,b は任意定数，また，この解は初めから $x=0$ での境界条件 (3.3.6) 式を満たすように作ったものである．残る $x=1$ での境界条件 (3.2.23) (3.2.24) 式を満足させなければならないが，これらの条件を変数分離した形で書くと

$$\mu\omega^2 E(1,\omega)+\beta\varPhi_{xx}(1,\omega)=0 \tag{3.3.11}$$

および

$$\varPhi_x(1,\omega)=0 \tag{3.3.12}$$

となる．先に簡単な方の条件式 (3.3.12) を解 (3.3.10) 式に課すと，

$$a\Big[\frac{\cos(\lambda_{(-)})}{\lambda_{(-)}^2}+\frac{\cosh(\lambda_{(+)})}{\lambda_{(+)}^2}\Big]-b\big[\lambda_{(-)}\sin(\lambda_{(-)})+\lambda_{(+)}\sinh(\lambda_{(+)})\big]=0 \tag{3.3.13}$$

となる．これから係数 a, b の比が決まるが，ここでは規格化は後で決めることにして，係数 a, b を

$$a=\lambda_{(-)}\sin(\lambda_{(-)})+\lambda_{(+)}\sinh(\lambda_{(+)}), \qquad b=\frac{\cos(\lambda_{(-)})}{\lambda_{(-)}^2}+\frac{\cosh(\lambda_{(+)})}{\lambda_{(+)}^2} \tag{3.3.14}$$

と決めておく．$\varPhi$ が求められると E の方は (3.3.5) 式から

$$E(x,\omega)=\frac{\beta a}{\omega^2}\big[-\cos(\lambda_{(-)}x)+\cosh(\lambda_{(+)}x)\big]+\frac{\beta b}{\omega^2}\big[\lambda_{(-)}^3\sin(\lambda_{(-)}x)-\lambda_{(+)}^3\sinh(\lambda_{(+)}x)\big] \tag{3.3.15}$$

と求められる．

最後に残る境界条件 (3.3.11) 式にこの解 (3.3.10) (3.3.15) 式を適用すると，

$$a\Big[\frac{\sin(\lambda_{(-)})}{\lambda_{(-)}} - \frac{\sinh(\lambda_{(+)})}{\lambda_{(+)}} + \mu\cos(\lambda_{(-)}) - \mu\cosh(\lambda_{(+)})\Big] \\ + b\big[\lambda_{(-)}^2\cos(\lambda_{(-)}) + \lambda_{(+)}^2\cosh(\lambda_{(+)}) - \mu\lambda_{(-)}^3\sin(\lambda_{(-)}) + \mu\lambda_{(+)}^3\sinh(\lambda_{(+)})\big] = 0 \quad (3.3.16)$$

となるが，(3.3.14) 式の a，b を代入して，整理すると，

$$2 + \Big(\frac{\lambda_{(+)}}{\lambda_{(-)}} - \frac{\lambda_{(-)}}{\lambda_{(+)}}\Big)\sin(\lambda_{(-)})\sinh(\lambda_{(+)}) + \Big(\frac{\lambda_{(-)}^2}{\lambda_{(+)}^2} + \frac{\lambda_{(+)}^2}{\lambda_{(-)}^2}\Big)\cos(\lambda_{(-)})\cosh(\lambda_{(+)}) \\ - \mu\Big(\frac{\lambda_{(-)}^3}{\lambda_{(+)}^2} + \lambda_{(-)}\Big)\sin(\lambda_{(-)})\cosh(\lambda_{(+)}) + \mu\Big(\frac{\lambda_{(+)}^3}{\lambda_{(-)}^2} + \lambda_{(+)}\Big)\cos(\lambda_{(-)})\sinh(\lambda_{(+)}) = 0 \quad (3.3.17)$$

と大変長い式になる．この式によって $\lambda_{(\pm)}$ の中に含まれる振動数 ω の値が決まる．すなわち，この式が固有値方程式となる．とは言っても ω を未知数とするこの式はかなり複雑な超越方程式であり解析的に解くことはもちろん不可能であろう．この ω の値は離散的に求められるはずで，正の ω の値の小さい方から固有値 ω_i，$(i = 1, 2, 3, \cdots)$ と呼ぶことにする．また，これら固有値を (3.3.10) (3.3.15) 式に代入した $\varPhi(x, \omega_i)$，$E(x, \omega_i)$ が固有関数となる．ただし，これらはまだ規格化されたものではない．

3.3.3　固有関数の直交性と規格化

固有値とは限らない 2 個の振動数 ω，ω' を考え，それらに対応する関数を $\varPhi(x, \omega)$，$\varPhi(x, \omega')$ とする．ただし，以下では数式簡略化のため

$$\varPhi = \varPhi(x, \omega), \qquad \varPhi' = \varPhi(x, \omega') \quad (3.3.18)$$

と略記することにする．$\varPhi$ が満たす方程式 (3.3.7) を用いると恒等式

$$\frac{d}{dx}\big(\omega^2\varPhi'_{xxx}\varPhi_{xx} - \omega'^2\varPhi_{xxx}\varPhi'_{xx}\big) = (\omega^2 - \omega'^2)\varPhi_{xxx}\varPhi'_{xxx} + \frac{(\omega\omega')^2}{\beta}\frac{d}{dx}(\varPhi_x\varPhi' - \varPhi\varPhi'_x) \quad (3.3.19)$$

が容易に証明される．この式を x について 0 から 1 まで積分すると

$$(\omega^2 - \omega'^2)\int_0^1 \varPhi_{xxx}\varPhi'_{xxx}dx = \big(\omega^2\varPhi'_{xxx}\varPhi_{xx} - \omega'^2\varPhi_{xxx}\varPhi'_{xx}\big)\Big|_0^1 - \frac{(\omega\omega')^2}{\beta}\big(\varPhi_x\varPhi' - \varPhi\varPhi'_x\big)\Big|_0^1 \quad (3.3.20)$$

となる．ここで，$\varPhi$，$\varPhi'$ が (3.3.6) (3.3.12) の境界条件を満たすものとすると，この式右辺の 2 項目は消去され，また，1 項目の $x = 0$ での値もゼロとなるので，この式は

$$\int_0^1 \varPhi_{xxx}\varPhi'_{xxx}dx = \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2}\big(\omega^2\varPhi'_{xxx}\varPhi_{xx} - \omega'^2\varPhi_{xxx}\varPhi'_{xx}\big)\Big|_{x=1} \quad (3.3.21)$$

となる．ここで，(3.3.5) 式を用いて，$\varPhi_{xxx}$，$\varPhi'_{xxx}$ を E，E' に変換すると

$$\int_0^1 EE'dx = \frac{\beta}{\omega^2 - \omega'^2}\big(E'\varPhi_{xx} - E\varPhi'_{xx}\big)\Big|_{x=1} \quad (3.3.22)$$

となる．固有関数の直交性を導出するには，最後の境界条件 (3.3.11) 式を適用する必要があるが，このままでは直交式を作ることはできない．その理由は，ここで扱っている系が弾性棒と錘とが一体となったものなので，この式の両辺に $\mu E(1, \omega)E(1, \omega')$ を加える必要がある．あるいは，同じことであるが，つぎの重み関数

$$\rho_\epsilon(x) = 1 + \mu\frac{\theta(x - 1 + \epsilon)}{\epsilon} \quad (3.3.23)$$

を導入し，この積分を重み付きに変更する．ここに，θ は単位階段関数である [19]．この重み関数を用いると (3.3.22) 式の積分は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \rho_\epsilon(x)EE'dx = \frac{1}{\omega^2-\omega'^2}\big[E'(\mu\omega^2 E+\beta\Phi_{xx}) - E(\mu\omega'^2 E'+\beta\Phi'_{xx})\big]\Big|_{x=1} \tag{3.3.24}$$

となる．これで境界条件 (3.3.11) 式を適用し，ω, ω' を固有値としたときは右辺の 2 個の小括弧中がゼロとなるので，これらが異なる固有値のときは右辺がゼロとなり，固有関数の直交性が示せる．同じ固有値の場合は分母もゼロとなってしまうので，初めに ω' を固有値 ω_i と置き，その後，$\omega\to\omega_i$ という極限値をとる．結果として，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \rho_\epsilon(x)E(x,\omega_i)E(x,\omega_j)dx = {N_i}^2\delta_{i,j} \tag{3.3.25}$$

なる固有関数の直交性が導出される．ここに，規格化定数 ${N_i}^2$ は

$${N_i}^2 \equiv \frac{1}{2\omega_i}E(1,\omega_i)\big[\partial_\omega\big(\mu\omega^2 E(1,\omega)+\beta\Phi_{xx}(1,\omega)\big)\big]\Big|_{\omega=\omega_i} \tag{3.3.26}$$

と定義した．この結果から，$E(x,\omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる．なお，この式右辺の計算には (3.3.14) 式の a, b を代入した (3.3.10) (3.3.15) 式の Φ, E を用いることになるが，実際にこれを解析的に実行しようとすると大変面倒なことになる．次節では，数値的に解析した例を示す．

3.3.4 最終的な解の構成

最終的な解を構成するには初期条件を満たすようにしなければならない．そこで，弾性棒の横方向変位 $V(x,t)$ を固有関数で展開し，

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i E(x,\omega_i)\sin(\omega_i t) \tag{3.3.27}$$

と置く．K_i は展開係数である．これで初期位置の (3.2.25) 式はすでに満たしているので，あとは初速度の (3.2.26) 式を満たすようにすればよい．この式を時間で微分し $t=0$ とすると，

$$V_t(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i K_i E(x,\omega_i) \tag{3.3.28}$$

となるが，この両辺に $\rho_\epsilon(x)E(x,\omega_j)$ を掛けてから x について 0 から 1 まで積分する．左辺については (3.2.26) 式，右辺については固有関数の直交性 (3.3.25) 式を用いると容易に積分でき，係数 K_i が，

$$K_i = v_0\mu\frac{E(1,\omega_i)}{\omega_i {N_i}^2} \tag{3.3.29}$$

と決定される．これを元の (3.3.27) 式に戻してやると

$$V(x,t) = v_0\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E(1,\omega_i)}{\omega_i {N_i}^2}E(x,\omega_i)\sin(\omega_i t) \tag{3.3.30}$$

と横方向変位 $V(x,t)$ が求められる．あるいは，${N_i}^2$ の定義 (3.3.26) 式を代入して，

$$V(x,t) = 2v_0\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E(x,\omega_i)\sin(\omega_i t)}{\big[\partial_\omega\big(\mu\omega^2E(1,\omega)+\beta\Phi_{xx}(1,\omega)\big)\big]\Big|_{\omega=\omega_i}} \tag{3.3.31}$$

と表わすこともできる．

[19] ここでの ρ, θ は (3.2.2) 式に出てくる弾性棒の密度 ρ，主軸の傾き角 θ と記号的に重複しているが，この節ではこれら記号はすでに使われていないので混同の怖れはないものとする．

$V(x,t)$ が求められたので，(3.2.18) 式から $\phi(x,t)$ を求めることができる．この式から

$$\phi(x,t) = V_x(x,t) + \frac{1}{\alpha}\int_x^1 V_{tt}(x',t)dx' + \frac{\mu}{\alpha}V_{tt}(1,t) \tag{3.3.32}$$

となるが，ここで求められた (3.3.31) 式の $V(x,t)$, さらに (3.3.15) 式の $E(x,\omega_i)$ を代入する．x に依存しない項がでるが，これは (3.3.16) 式で相殺される．残りの項は，(3.3.9) 式で定義された $\lambda_{(\pm)}^2$ が満たす式

$$\alpha\beta\lambda_{(\pm)}^4 \pm \beta\omega^2\lambda_{(\pm)}^2 - \alpha\omega^2 = 0 \tag{3.3.33}$$

を利用するとうまく (3.3.10) 式の $\Phi(x,\omega_i)$ にまとめることができ，結果は

$$\phi(x,t) = 2v_0\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Phi(x,\omega_i)\sin(\omega_i t)}{\left[\partial_\omega\left(\mu\omega^2 E(1,\omega) + \beta\Phi_{xx}(1,\omega)\right)\right]\Big|_{\omega=\omega_i}} \tag{3.3.34}$$

となる．ただしこの結果を見ると，これはわざわざ計算するには及ばない．なぜなら， (3.2.18) 式は V, ϕ について線形の式なのでそれぞれの固有関数 E, Φ に同じ係数を掛け和をとることで元の V, ϕ が作られるはずだからである．

3.4　数値計算によるグラフ表示

ここでは，これまでの解析に基づき具体例に沿った数値計算を試みる．以下，すべての量は無次元化した系のものとする．弾性棒の長さを $\ell = 1$ とし，断面は半径 $r = 0.08$ の円，Poisson 比は $\nu = 0.2$ とし，錘の質量は $\mu = 0.2$，初速度 $v_0 = 0.1$ とする．この設定で

$$\alpha = 0.41667, \qquad \beta = 0.0016 \tag{3.4.1}$$

となる．これを固有値方程式 (3.3.17) に代入し固有値を求めると初めの 10 個は

$$\begin{aligned} &\omega_1 = 0.1037, \quad \omega_2 = 0.6914, \quad \omega_3 = 1.8979, \quad \omega_4 = 3.5146, \quad \omega_5 = 5.3935 \\ &\omega_6 = 7.4244, \quad \omega_7 = 9.5372, \quad \omega_8 = 11.6895, \quad \omega_9 = 13.8568, \quad \omega_{10} = 16.0255 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

と求められ，(3.3.14) (3.3.15) (3.3.26) 式を用いて規格化された固有関数 $E(x,\omega_i)/N_i$ を数値的に描くと以下の図 2 のようになる．各図の下の数字はモード番号であるが，どの固有関数もモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．

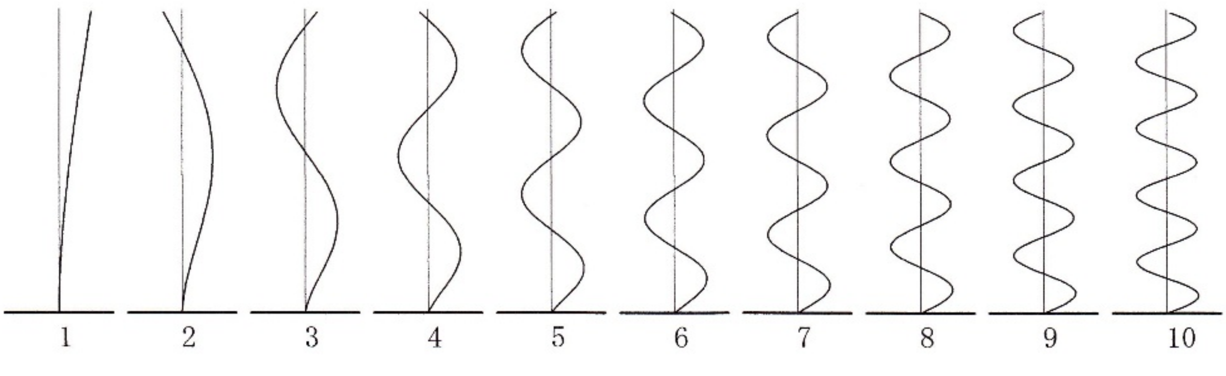

図 2　規格化された固有関数 $E(x,\omega_i)/N_i$

固有値，固有関数はできるだけ多く求めるべきである．ここでは，解を固有関数の重ね合わせとして求める段階で，固有値，固有関数は初めの 10 個までをとることにした．ただし，実際には，固有値を 4 個まで取れば，後はそれ以上いくら取っても数値的にはほとんど差が出ない．

実際にこの弾性棒がどのように振動するかを見るために，(3.3.31) 式の $V(x,t)$ を x で微分し，主軸の傾き角 $\theta(x,t)$ を求め，それと (3.3.34) 式で求めた断面の傾き角 $\phi(x,t)$ をもとに，弾性棒の長さ方向を 100 等分した各点毎に θ, ϕ の値を求め振動の様子を再現するための動画を作成した．ただし，この紙面ではそのすべてを見せることはできないので，無次元時間 $t = 10$, 20, 30, 40, 50, 60 の 6 枚に限って以下の図 3-1 から図 3-6 に示す．これらの図の中で，振動する弾性棒の右および左に描かれた赤色，青色の曲線は，それぞれ，各点での曲げ歪み，および剪断歪み $\theta - \phi$ の大きさを示すものである．曲げ歪みの定義に関しては少し問題がある．すなわちここで，曲げ歪みという言葉を使ったが，これは，弾性棒の縦方向歪みや剪断歪みあるいはもっと一般的な歪みテンソルとは全く異なるものである．断面の傾き角 ϕ を x で微分したものは一般には長さの逆数の次元を持つからである．ここでは，曲げによって生じる断面の一番外側における縦方向歪み $r\phi_x$ を曲げ歪みの定義ということにしておく．

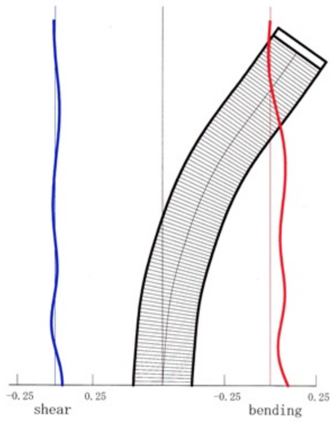

図 3-1 振動の様子 $t = 10$

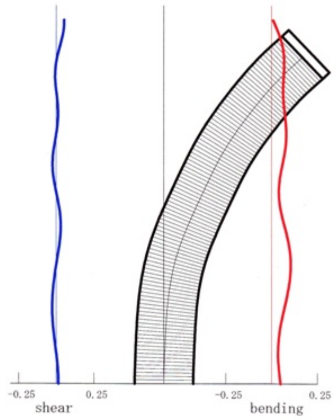

図 3-2 振動の様子 $t = 20$

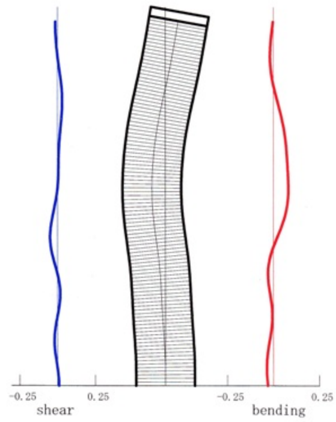

図 3-3 振動の様子 $t = 30$

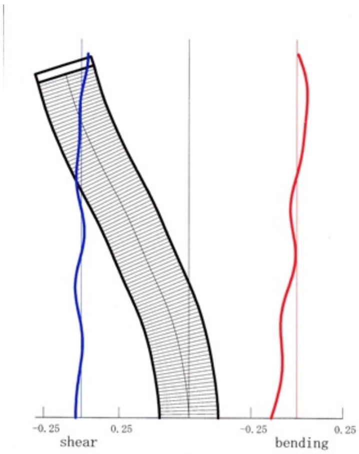

図 3-4 振動の様子 $t = 40$

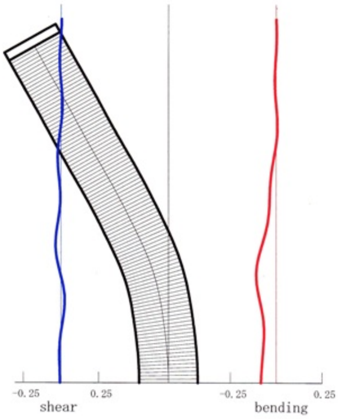

図 3-5 振動の様子 $t = 50$

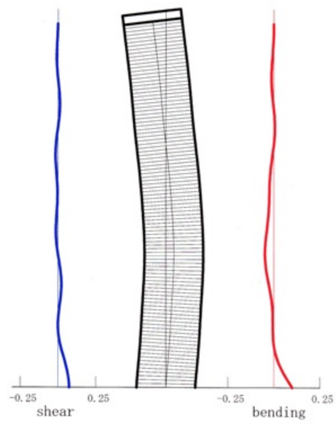

図 3-6 振動の様子 $t = 60$

これらの図から棒の先端部は無次元時間であよそ 60 で一周期の運動をしていることがわかる．これは第 1 モードの ω_1 から求めた周期 $= 2\pi/\omega_1 = 60.5899$ とほぼ一致する．

以下に示す図 4 から図 8 は，横方向に時間 t 軸，斜め上方向に x 軸，上方向に各変位をとり三次元的に描いたグラフである．図に示す各軸のスケールはすべて無次元化されたものである．図 4 は横方向変位 V, 図 5 は主軸の傾き角 θ, 図 6 は断面の傾き角 ϕ, 図 7 は剪断歪み $\theta - \phi$, 図 8 は曲げ歪み $r\phi_x$ を描いたものである．

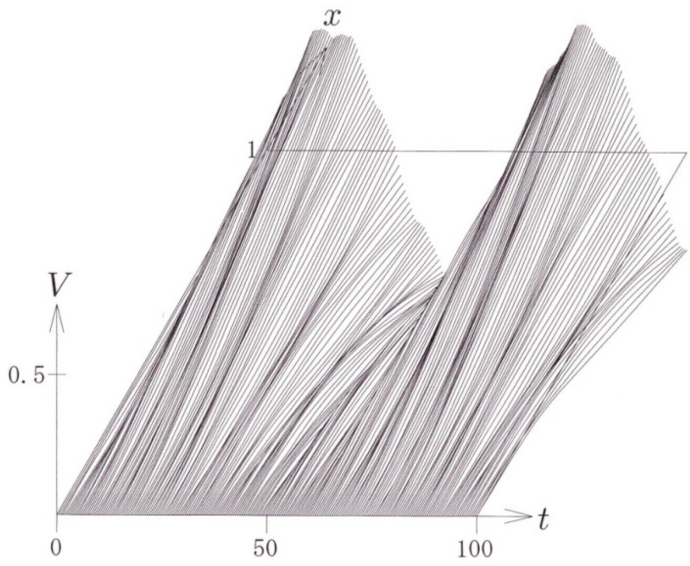

図 4 三次元表示 横方向変位 V

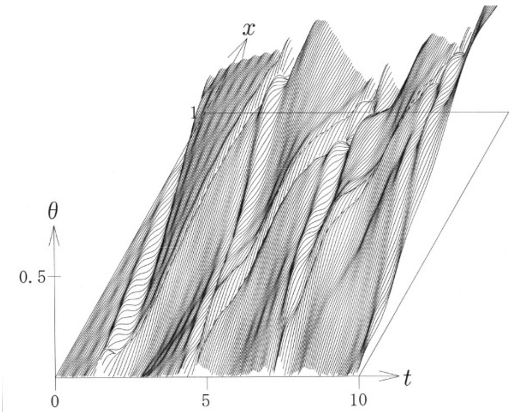

図 5 三次元表示 主軸の傾き角 θ

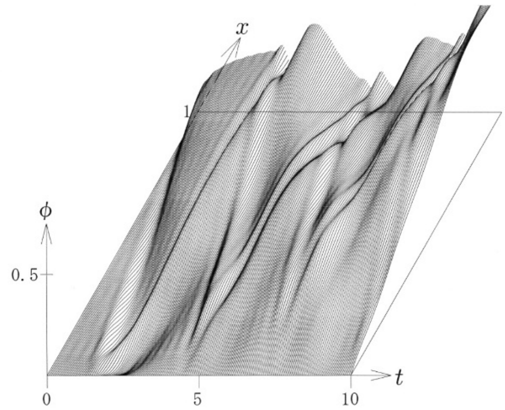

図 6 三次元表示 断面の傾き角 ϕ

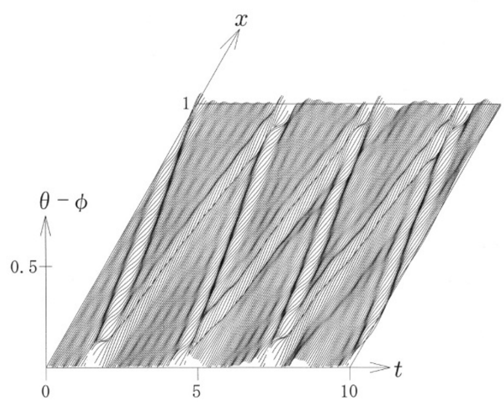

図 7 三次元表示 剪断歪み $\theta - \phi$

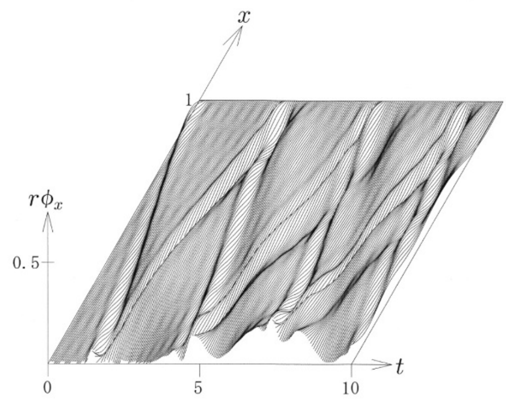

図 8 三次元表示 曲げ歪み $r\phi_x$

ここで，図 4 に関しては，ゆっくりした振動を見るために時間のスケールが 0 から 100 までに対し，それ以下の図では速い振動を見るために時間のスケールが 0 から 10 までになっていることに注意する．

特に，図 7 から剪断波が，付録 C で示すように速度 $\sqrt{\alpha} \fallingdotseq 0.6455$ で伝播しているのが良く見てとれる．弾性棒の先端に取り付けられた錘に衝撃が与えられることで先端部に剪断歪みが発生し，この歪みが速い速度で

下部に伝播していき反射して戻ってくることを繰り返している．図 8 に示すように，この剪断波が通過したところには曲げ歪みが発生し，特に弾性棒の下部で曲げ歪みは成長していき，全体の大きな曲げを発生させる．このようにこの振動は，図 5 以下に示す速い変化によって，図 4 に示すゆっくりした遅い振動が作られていると考えられる．

付録 A　(3.2.7) 式の導出

(3.2.5) 式の作用積分 $\mathcal{I}$ を θ で変分をとるときは，(3.2.2) 式の U_1 は関与しないので，そのときの $\mathcal{I}$ は

$$\mathcal{I} = \int \Big[\int_0^\ell \Big(\frac{1}{2}\rho {V_t}^2(x,t) - \frac{1}{2}G(\theta-\phi)^2 \Big) A dx + \frac{1}{2} m {V_t}^2(\ell,t) \Big] dt \tag{3.A.1}$$

となる．この式で θ の変分をとると

$$\delta\mathcal{I} = \int \Big[\int_0^\ell \Big(\rho V_t(x,t)\delta V_t(x,t) - G(\theta-\phi)\delta\theta \Big) A dx + m V_t(\ell,t)\delta V_t(\ell,t) \Big] dt \tag{3.A.2}$$

となり，これを時間について部分積分すると

$$\delta\mathcal{I} = -\int \Big[\int_0^\ell \Big(\rho V_{tt}(x,t)\delta V(x,t) + G(\theta-\phi)\delta\theta \Big) A dx + m V_{tt}(\ell,t)\delta V(\ell,t) \Big] dt \tag{3.A.3}$$

となる．(3.2.1) 式より，δV を $\delta\theta$ で表わすと

$$\delta V(x,t) = \int_0^x \cos\theta(x',t)\delta\theta(x',t)dx' \tag{3.A.4}$$

となるので，これを代入すると，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{I} = -\int \Big[\int_0^\ell \Big(\rho A V_{tt}(x,t) \int_0^x \cos\theta(x',t)\delta\theta(x',t)dx' \Big) dx + GA \int_0^\ell (\theta-\phi)\delta\theta(x,t)dx \\ + m V_{tt}(\ell,t) \int_0^\ell \cos\theta(x,t)\delta\theta(x,t)dx \Big] dt\end{aligned} \tag{3.A.5}$$

となる．ここで，x および x' の 2 重積分のところは，積分順序を入れ替えて，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{I} = -\int \Big[\int_0^\ell \Big(\int_{x'}^\ell \rho A V_{tt}(x,t)dx \Big) \cos\theta(x',t)\delta\theta(x',t)dx' + GA \int_0^\ell (\theta-\phi)\delta\theta(x,t)dx \\ + m V_{tt}(\ell,t) \int_0^\ell \cos\theta(x,t)\delta\theta(x,t)dx \Big] dt\end{aligned} \tag{3.A.6}$$

となる．ここで，積分変数 x, x' を交換し，まとめ直すと，

$$\delta\mathcal{I} = -\int\int_0^\ell \Big[\Big(\int_x^\ell \rho A V_{tt}(x',t)dx' \Big) \cos\theta(x,t) + GA(\theta-\phi) + m V_{tt}(\ell,t)\cos\theta(x,t) \Big] \delta\theta(x,t) dx dt \tag{3.A.7}$$

となる．この変分をゼロと置くと，

$$\Big[\int_x^\ell \rho A V_{tt}(x',t)dx' + m V_{tt}(\ell,t) \Big] \cos\theta + GA(\theta-\phi) = 0 \tag{3.A.8}$$

と (3.2.7) 式が得られる．

付録 B　剪断歪みのない純曲げの場合

弾性棒が非常に細長い場合，すなわち，その長さが太さに比べ十分に大きい場合，剪断歪みは曲げ歪みに比べ無視できると考えられる．このような純曲げの状態のときはこれまでの解析をかなりの程度簡単化することができる．このような状況では (3.2.16) 式における β の値が α に比べ十分に小さく，すなわち，$\beta \ll \alpha$ となっている．しかしここで，$\beta = 0$ と置いてしまうと波動方程式そのものが成立しなくなるので，ここでは α が無限に大きくなるという極限で考えてみる．これは弾性棒の剛性率 G を無限に大きくすると考えてもよく，その結果，剪断歪みが起こらなくなった状態である．

まず，(3.2.17) 式で $\alpha \to \infty$ としても ϕ_{xx} が有限値をとるには，

$$\phi = V_x\big(=\theta\big) \tag{3.B.1}$$

でなければならない．また，この極限で波動方程式 (3.3.2) (3.3.3) は

$$V_{tt} = -\beta V_{xxxx}, \qquad \phi_{tt} = -\beta\phi_{xxxx} \tag{3.B.2}$$

となる．つぎに，$\lambda^2_{(\pm)}$ の定義 (3.3.9) 式で $\alpha \to \infty$ とすると

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lambda^2_{(\pm)} = \frac{\omega}{\sqrt{\beta}} \equiv k^2 \tag{3.B.3}$$

となり，この値を k^2 と定義する．以後，ω の代わりにこの k を用いることにする．特に，$\pm$ の符号に依存しなくなることが重要である．この極限値としての k を用いて (3.3.14) (3.3.10) (3.3.15) の a, b, $\varPhi(x,k)$, $E(x,k)$ を書き直すと

$$a = k\big[\sin(k) + \sinh(k)\big], \qquad b = \frac{1}{k^2}\big[\cos(k) + \cosh(k)\big] \tag{3.B.4}$$

$$\begin{aligned} \varPhi(x,k) &= \frac{a}{k^3}\big[\sin(kx) + \sinh(kx)\big] + b\big[\cos(kx) - \cosh(kx)\big] \\ E(x,k) &= \frac{a}{k^4}\big[-\cos(kx) + \cosh(kx)\big] + \frac{b}{k}\big[\sin(kx) - \sinh(kx)\big] \end{aligned} \tag{3.B.5}$$

となる．また，固有値方程式 (3.3.17) は

$$1 + \cos(k)\cosh(k) - \mu k\sin(k)\cosh(k) + \mu k\cos(k)\sinh(k) = 0 \tag{3.B.6}$$

と元のものに比べるとかなりの程度簡素化される．この式から固有値 k_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ が決まる．

時間に依存する最終的な解 $V(x,t)$, $\phi(x,t)$ は，(3.3.31) (3.3.34) から

$$V(x,t) = \frac{4v_0\mu}{\sqrt{\beta}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i E(x,k_i)\sin(\sqrt{\beta}{k_i}^2 t)}{\Big[\partial_k\big(\mu k^4 E(1,k) + \varPhi_{xx}(1,k)\big)\Big]\Big|_{k=k_i}} \tag{3.B.7}$$

$$\phi(x,t) = \frac{4v_0\mu}{\sqrt{\beta}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i \varPhi(x,k_i)\sin(\sqrt{\beta}{k_i}^2 t)}{\Big[\partial_k\big(\mu k^4 E(1,k) + \varPhi_{xx}(1,k)\big)\Big]\Big|_{k=k_i}} \tag{3.B.8}$$

と求められる．ここで，∂_ω を $1/(2\sqrt{\beta}k)\partial_k$ で置き換えた．(3.B.5) 式から $E_x(x,k) = \varPhi(x,k)$ なので，この結果から (3.B.1) 式は自動的に満たされている．

付録 C　曲げ歪みがない純剪断の場合

弾性棒がその太さに比べ短い場合は，曲げよりも剪断歪みの方が大きく効いてくると考えられる．曲げモーメント $EI\phi_x$ をゼロとすると，断面の傾き角 ϕ は一定値となるが，$\phi(0) = 0$ なので，ϕ の値は恒等的にゼロと

なる．このときは，Lagrangian (3.2.4) において U_1 は不要となり，T と $\phi = 0$ とした U_2 が残る．したがって，作用積分 (3.2.5) 式で ϕ の変分をとる必要はなくなってしまうので，式 (3.2.6) および (3.2.12) (3.2.17) の各式は存在しなくなる．(3.2.18) 式はそのまま残り $\phi = 0$ とすると

$$\int_x^1 V_{tt}(x', t)dx' + \mu V_{tt}(1, t) + \alpha V_x = 0 \tag{3.C.1}$$

となる．これを x で微分すると，

$$V_{tt} = \alpha V_{xx} \tag{3.C.2}$$

を得る．これは波動が速度 $\sqrt{\alpha}$ で伝播する通常の波動方程式である [20].

(3.C.1) 式で $x = 1$ と置くと，

$$\mu V_{tt}(1, t) = -\alpha V_x(1, t) \tag{3.C.3}$$

と $x = 1$ での境界条件が得られる．もちろん，$x = 0$ では

$$V(0, t) = 0 \tag{3.C.4}$$

である．すなわち，この系は弾性棒の縦振動における衝撃問題と本質的に同じ問題になる．この種の問題はすでに発表してきたとおりで，ここではこれ以上，扱わないことにする．

参考文献

1) 中西襄・世戸憲治,「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析」，数学・物理通信，2 巻 3 号 (2012.7) 3-23.

2) N. Nakanishi and K. Seto, "Exact expressions for the sums of the non-Fourier trigonometric series arising from time-dependent eigenvalue problems", Prog.Theor.Exp.Phys., 2013; doi: 10.1093/ptep/pts085.

3) 世戸憲治・中西襄,「半無限弾性棒の弾丸衝突問題に基づく Fourier 変換の拡張」，数学・物理通信，3 巻 2 号 (2013.3) 3-13.

4) Timoshenko, S. Theory of Elasticity (McGraw-Hill:New York) 1934.

5) Mindlin, R.D. Influence of ratatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.18 No.1, pp.31-38,1951.

謝辞　この原稿を書くにあたり，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，たくさんのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします.

[20] 無次元速度が $\sqrt{\alpha}$ というのは，次元を持った量で言うと (3.2.16) 式から $\sqrt{\alpha}\sqrt{E/\rho} = \sqrt{G/\rho}$ となる．

編集後記

今年の冬の気象は異常というほかない．そして，雪があのような形で道路を塞ぎ多くの集落が孤立するとは誰しも考えが及ばなかったにちがいない．雪は実害の少ない時は雪見酒または墨絵のような雪景色となり，他方大雪で冷える時にはよく白い悪魔とか冬将軍などと言われている．雪には功罪 2 面がある．大雪の降る地方は，あまり降らない地方に比べ遥かに住みにくい．

話は変わり今回の投稿論文を読んでみると，それぞれの分野の根源的な問の追及に力を注いでおり興味深い．いわゆる微分積分学（この範囲を明確に限定することはできないが）にはまだ研究の余地はあるのかと問われれば，ほとんどの人はないと答えるでしょう．しかし，編者の一人（新関）はあると答える．理由は，数学教育を考えた場合にはまだ研究の余地はある．すなわち，古来有名な定理や公式等の証明法の多様性につながる証明の簡潔性が得られる．これらは，簡潔な叙述は数学教育にとって大変重要である．

（新関章三）