

数学・物理通信

4卷3号 2014年6月

編集 新関章三・矢野 忠

2014年6月13日

目次

昔話：リーマン・ロッホの定理	3
1.1 はじめに	3
1.2 リーマン・ロッホの定理：動機	5
1.3 $L(A)$ と $\ell(A)$	6
1.4 層と層係数コホモロジー	7
1.5 層係数コホモロジーのド・ラム型表示とホッジ型表示	8
1.6 高次元の因子とベクトル・バンドル	9
1.7 ヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理と交点理論	10
1.8 K -理論と指数定理	11
1.9 ザリスキの批判	13
Bessel 関数と Airy 関数	15
2.1 はじめに	15
2.2 弾性棒の重力座屈	15
2.2.1 重力座屈とは	15
2.2.2 方程式の導入とその解法	16
2.2.3 重力座屈の具体例	17
2.3 線密度がリニアに変化する弦の振動	18
2.3.1 方程式の導入とその解法	19
2.3.2 固有関数の規格化	20
2.3.3 初期条件を与えた場合の解	21
2.4 量子力学の例	21
2.4.1 リニアポテンシャルの Schrödinger 方程式	21
2.4.2 Airy 関数の積分表示	24
2.4.3 Airy 関数の直交性と完全性	26
2.5 おわりに	27
編集後記	28

Contents

1. Akira ASADA: Old Tale: Riemann Roch Theorem
2. Kenji SETO: Bessel Function and Airy Function
3. Shozo NIIZEKI: Editorial Comments

昔話：リーマン・ロッホの定理

Old Tale: Riemann Roch Theorem

浅田 明¹
Akira ASADA²

C^* -代数や K -理論に関心のある人から K -理論誕生のきっかけになったリーマン・ロッホの定理について聞かれたので K -理論誕生の前後を中心に書いてみました。良く知られた話ですが何かの参考になれば幸いです。

1.1 はじめに

リーマン・ロッホの定理:

$$\ell(A) = n(A) - g + 1 + \ell(K - A),$$

は代数関数論—代数曲線論, あるいはコンパクトリーマン面 X の基本定理としてまず知った人が多いだろう。もちろんそののち高次元化としてのヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理, 更に指数定理とその新たな姿に興味をもった人はすくなくないはずである。

しかしリーマン・ロッホの定理を初めて知った時には何故これが基本定理か理解できなかった人も珍しくないだろう。 X の 0-次元チェインとしての $A = \sum_i n_i P_i$ や $n(A) = \sum_i n_i$, そして X の種数 (オイラー・ポワンカレ標数) g はなじみがあっても $\ell(A) = \dim L(A)$, $L(A)$ は極が A で押さえられる X の有理型関数の空間, $\ell(K - A)$ はなじみがすくなく意味が解りにくい。実際リーマン・ロッホの定理の有難味はその多くの応用を見て始めて解るところがある。これはほぼ同じ時期に見いだされた曲面 S のガウス・ボンネの定理:

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K dS,$$

が組み合わせ論か得られるオイラー標数 $\chi(S)$ がガウス曲率 K の積分であらわされるというそれだけで魅力的な定理であるのと対照的である。けれども現在ではリーマン・ロッホの定理とガウス・ボンネの定理は指数定理として統一的に理解されている。以下ではそこまでの歴史を概観する。

1940年代まで

リーマン・ロッホの定理はリーマンとロッホ (リーマンの弟子で20台で夭折した: リーマンは不等式 $\ell(A) \geq n(A) - g + 1$ を導いた。 $\ell(K - A)$ の項はロッホによる) 以後 代数関数論が基礎体 K の超越拡大 $K(x)$ の有限次拡大の理論として代数化できることから純代数的に証明しようと言う拡張 ([1]) と代数曲面 ([16]), 更にはより高次元の代数多様体—更には一般的多様体に拡張しようと言う拡張が問題とされた。しかし1940年代までの成果は代数曲線の場合の代数的証明と代数曲面への拡張で高次元の場合は殆ど手つかずだった。だがそのころまでに後で高次元への拡張に使われた道具: 代数的位相幾何, 大域の微分幾何—とくにファイバー・

¹asada-a@poporo.ne.jp

²Professor emeritus, Sinsyu University

バンドルとその特性類，そして調和積分と層の理論が整備された．またチャーンによってガウス・ボンネの定理の高次元化もなされた．

ヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理

高次元の場合因子 A は余次元 1 の (特異点があっても良い) 部分多様体から生成される自由加群の元だから 1 次元の場合より扱いにくい．この難点を克服したのがヴェイユによる因子の複素ライン・バンドルとしての解釈である．この見方では $L(A)$ は A で定まるバンドルの解析的切断の空間となる．一方 $L(K-A)$ は極が A で押さえられる X の有理型微分形式の空間 $D(A)$ であることが知られていた．リーマン・ロッホの定理は

$$\ell(A) - d(A) = n(A) - g + 1, \quad d(A) = \dim D(A)$$

と書き直されるがド・ラムの定理から類推すれば $\ell(A) - d(A)$ はオイラー標数 $\chi(S) = \dim H^2(S, \mathbb{R}) - \dim H^1(S, \mathbb{R}) + \dim H^0(S, \mathbb{R})$ と同様の特性数と見える．また右辺は位相的な量である．

リーマン・ロッホの定理を本来の $\ell(A)$ の計算という見方を離れ A から解析的に定義される量 $(\ell(A) - d(A))$ を位相的な量 $(n(A) - g + 1)$ であらわした定理と解釈してその高次元化に成功したのがヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理である ([3])．そこでは複素多様体 X 上の解析的ベクトルバンドル ξ の解析的切断の芽の層 $\Omega(\xi)$ の指標

$$\chi(\xi) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H^p(X, \Omega(\xi))$$

を位相的な量 (特性類) で表示している．これは高次元のガウス・ボンネの定理と類似している．

ヒルツェブルフの理論は一方で小平・スペンサーの調和積分論に基づく複素多様体論 ([2])，他方で特性類論やトムの同境界理論など同時期の大域解析や位相幾何での成果を利用したものだが私見ではリーマン・ロッホの定理の見方を転換したのが成功の第 1 の理由である．

グロタンディアックのリーマン・ロッホ定理と K -理論

ヒルツェブルフでは $\Omega(\xi)$ のコホモロジーをド・ラム型 (あるいはその複素解析版であるドルボール型) の定義に基づいて考えている．しかし $\Omega(\xi)$ はルレイの層係数コホモロジーと多変数関数論から見いだされた岡の層の解析的理論を組み合わせたカルタン・セールの解析的连接層の立場から $\Omega(\xi)$ (これは解析的连接層) のコホモロジーを扱うこともできる．さらにセールは (基礎体の標数が 0 でない場合を含む) 代数多様体で代数的连接層を定義し解析的连接層と同様に扱えることを示した．

グロタンディアックは代数的连接層を用いて任意の基礎体の上の代数多様体でのリーマン・ロッホ定理を与えた ([9],[10])．このとき現れたのが K -理論である．グロタンディアックの K -群は代数多様体 X 上の代数的连接層が拡大 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ が完全列: のとき $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ として定義されていて現在の K -理論の中では忘れられた感じがある．またグロタンディアックのリーマン・ロッホ定理は有理写像 $f: X \rightarrow Y$ についての定理で特に Y が一点のとき (基礎体が複素数であれば) ヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理になる．任意の Y の場合は現在でも指数定理から導くことはできていないようである．

ベクトル・バンドルから作られる現在の K -群はグロタンディアックの K -群をヒントにアティヤーとヒルツェブルフによって導入された．

指数定理

$\Omega(\xi)$ のコホモロジーはド・ラム型のほかにホッジ型の表示もできる．このときは

$$\chi(\xi) = \dim(\ker(\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)) - \text{codim}(\ker(\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)),$$

$\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger: \sum_{p=0}^n H^0(X, \Omega^{2p}(\xi)) \rightarrow \sum_{p=0}^n H^0(X, \Omega^{2p+1}(\xi))$ である．ゲルファンドはコンパクト多様体 M 上の楕円形偏微分作用素 D について

$$\begin{aligned} \text{index } D &= \dim(\ker D) - \dim(\text{coker } D) \\ &= \dim(\ker D) - \dim(\ker D^\dagger) \end{aligned}$$

を位相的に表示する事を問題として提出した ([4]). これに答えたのがアティヤ・シンガーの指数定理である ([5],[6],[7]). 指数定理はヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理と高次元のガウス・ボンネ定理を含む定理でそれ以後リーマン・ロッホ (型) の定理は指数定理の拡張として考えるのが主流となった.

指数定理の証明はいろいろあるが現在もっとも用いられているのは

$$\text{ind}D = \text{tre}^{-tDD^\dagger} - \text{tre}^{-tD^\dagger D}$$

となる事を使った証明である ([5],[7]). これは物理では超対称性の破れと解釈されアノマリーの計算などにもつかわれている ([11],[12]).

私見ではリーマン・ロッホ定理をめぐる研究ではヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理から指数定理に至る時期が研究の転換点である. この期間にリーマン・ロッホの定理について

$\ell(A)$ の計算 \rightarrow $\chi(A)$ の計算 \rightarrow $\chi(A)$ を偏微分作用素の指数とみる;

という視点の転換があった. 以下 古い話だがこの時期の研究を主に概観する.

1.2 リーマン・ロッホの定理 : 動機

$f(z)$ を正則関数とし $f(p_i) = 0, i = 1, \dots, n$, p_i では f は N_i -次の零点, また $q_j, j = 1, \dots, m$ では M_j -次の極をもつとする. このとき f の因子 (f) を

$$(f) = \sum_i N_i \cdot p_i - \sum_j M_j \cdot q_j,$$

で定義する. 定義から

$$(fg) = (f) + (g)$$

である. コンパクトリーマン面 X では正則関数は定数しかないから

$$(f) = (g) \Rightarrow f = cg, \quad c \in \mathbb{C}^\times$$

である. (f) は X の整数係数 0次元チェインだから X の上の有理型関数の研究は X の整数係数 0次元チェインの研究に帰着される.

有理関数 $r(z) = C \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z) = \prod_{i=1}^k (z - c_i)^{n_i}$, $Q(z) = \prod_{j=1}^\ell (z - c_j)^{m_j}$, $\deg P = n$, $\deg Q = m$ を $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の関数と見ると

$$(r(z)) = \sum_i n_i \cdot c_i - \sum_j m_j \cdot c_j + (m - n)p_\infty$$

であり $A = \sum_k n_k \cdot p_k$ が $\sum_k n_k = 0$ をみたせば $(R(z)) = A$ となる有理関数が存在する. しかしトーラス上の関数は \mathbb{C} の 2重周期関数だから基本領域でその留数の和は 0 になる. よって位数 1 の極 (または零点) をただ一つ持つ有利型関数はトーラスには存在しない. 位数 2 の極をただ一つもつ関数としてはワイヤストラウスの \wp -関数がある. \wp -関数は

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$$

となるから $w = \sqrt{4z^2 - g_2z - g_3}$ のリーマン面上の関数とみられる. ここでチェイン A の係数の和が 0 で負の係数の和が 2 以上なら

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

で関数 σ を定義すれば A を因子とするトーラス上の有理型関数 (2重周期関数) が $\sigma(z - c_i)$ の有理関数としてえられる.

X が (リーマン) 球面なら 1 点でだけ位数 1 の極 (または零点) を持つ有理型関数が存在するがトーラスなら極の位数は 2 以上で X により (f) の様子が違う. リーマン・ロッホの定理は極 (または零点) を指定した場合のリーマン面上の有理型関数の定量的な存在定理として開発された. ヤコビはすでに与えられたチェーンを因子とする有利型関数を具体的に (ϑ -関数を用いて) 書くことを問題にしているリーマンの目標はこの問題を解くことだったからその意味ではリーマン・ロッホの定理は中間的定理だったかもしれない.

1.3 $L(A)$ と $\ell(A)$

$A = \sum_k n_k \cdot p_k; n_k \in \mathbb{Z}, B = \sum_k m_k \cdot p_k$ を X の 0-次元チェーン, $n_k \geq m_k$ のとき $A \geq B$ とする.

$$L(A) = \{f | (f) + A \geq 0\} \cup \{0\}, \quad \ell(A) = \dim L(A)$$

と置く. g が X 上の有理型関数であれば対応

$$L(A) \ni f \Leftrightarrow fg \in L(A + (g))$$

で $L(A) \cong L(A + (g))$ だから $\ell(A) = \ell(A + (g))$ である.

$\ell(A)$ が評価できれば関数の存在定理がいろいろ導かれる. たとえば $\ell(n \cdot p) = \ell(n-1) \cdot p + 1$ であれば X には p で n 位の極をもちそれ以外では正則な有理型関数が定数倍を除いてただ一つ存在する.

$A = \sum_k n_k \cdot p_k$ のとき $n(A) = \sum_k n_k$ と置く. $n((f)) = 0$ である. また

$$\ell(0) = \ell((f)) = 1, \quad \ell(A) = 0, \quad n(A) < 0$$

となる. ただし 0 は 0-次元 0-サイクルである.

注意 リーマン球面では $n(A) = 0$ は $A = (f)$ となる有理型関数が存在する必要十分条件だが一般のリーマン面では十分条件ではない. この差はヤコビ多様体としてあらわされる.

X 上の有理型微分形式 ϕ にもその因子 (ϕ) が定義される. リーマン球面では dz の因子は $-2 \cdot p_\infty$ である. リーマン球面を 2 重に覆うリーマン面 (位相的にはリーマン球面) の有理型形式 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ は見かけ上特異点である $z = \pm 1$ では変数変換 $t^2 = 1 \pm z$ で正則になり無限遠点で 1 位の極をもつ. 無限遠点は 2 重だからこの場合も因子の位数は -2 である. 一方 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ はリーマン面 (位相的にはトーラス) 上で正則になる. 高次元の場合を含めて $\dim H^1(X, \mathbb{R}) = 2g$ であり X での正則 1 次微分形式の空間の次元は g である. リーマン面の場合 g は種数とよばれる.

例 $f(z) = \sqrt{1-z^{2(g+1)}}$ のリーマン面では

$$\frac{z^k}{\sqrt{1-z^{2(g+1)}}} dz, \quad 0 \leq k \leq g-1$$

が正則微分形式の空間の基底になる.

$$D(A) = \{\phi | A + (\phi) \geq 0\} \cup \{0\}, \quad d(A) = \dim D(A)$$

と置く. $\ell(A)$ を評価するリーマン・ロッホの定理 ([1]) は

$$\ell(A) - d(A) = n(A) - g + 1, \quad D(A) \cong L(A - K)$$

から導かれる. ただし K は canonical divisor と呼ばれる特別な因子であり $\ell(K) = g, n(K) = 2g$ である. よって $n(A) > 2g$ なら

$$\ell(A) = n(A) - g + 1$$

となる. 従って種数 g のリーマン面では $m > 2g$ であれば任意の点でそこで位数 m の極をもちそれ以外で正則な有理型関数が存在する.

1.4 層と層係数コホモロジー

ヒルツェブルフとグロタンディアックのリーマン・ロッホ定理を紹介する準備としてこの節と次節で層とそのコホモロジー論を、また6節でベクトル・バンドルの解説をする。また途中で層を使ったリーマン・ロッホ定理の略証をあたえる。

$p: \mathcal{F} \rightarrow X$ が $p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ がアーベル群、 p が $f_x \in \mathcal{F}_x$ の近傍 $U(f_x)$ と $U(x)$ の同相写像のとき (アーベル群の) 層と呼ぶ。なお \mathcal{F}_x が環 (または代数) や非可換群のときも層は考えられる。特に (可換) 環の場合は良く使われる。 $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が連続で各 \mathcal{F}_x から \mathcal{G}_x への準同型写像であるとき α を層の準同型写像とよぶ。層の完全列などはこれから定義される。

\mathcal{F}_x で良く使われるのは x の近傍での関数 (や微分形式) f に対し

$$f \cong g, \quad f|U(x) = g|U(x),$$

$U(x)$ は x のある近傍; で同値を定義しその同値類 f_x (f の x での芽) からなる群 (あるいは環) である。この場合 $\cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ の位相を f_x の近傍を

$$U(f_x; f, U(x)) = \{f_y; y \in U(x)\}$$

で定義して得られる層を (関数の) 芽の層という。正則関数の芽の層はハウスドルフだが微分可能関数の芽の層はハウスドルフではない。

$p \circ s(x) = x$ となる $s: U \rightarrow \mathcal{F}$ を U 上の切断と呼ぶ。 \mathcal{F} が正則関数の芽の層なら U 上の切断は U 上の正則関数である。

$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を X の開被覆, $s_{i_0, \dots, i_p}: U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \rightarrow \mathcal{F}$ を切断, $\{s_{i_0, \dots, i_p}\}$ の作る群を $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $\delta: C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を

$$\delta s_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1}}$$

で定義し (被覆の細分についての極限を取って) X の \mathcal{F} -係数コホモロジー $H^p(X, \mathcal{F})$ が定義される (X はパラコンパクトと仮定する)。定義から $H^0(X, \mathcal{F})$ は X から \mathcal{F} への切断の群であり $\dim X = m$ なら $H^q(X, \mathcal{F}) = 0, q > m$, である。さらにすべてのコホモロジー群が有限次元なら

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_p (-1)^p \dim(H^p(X, \mathcal{F}))$$

が定義できる。

注意. 今ではこの境界作用素 δ の定義は当然と受け取られるが, $;-$ 次閉形式 ϕ^p を局所的に $d\phi_U^{p-1}, \phi_U^{p-1} - \phi_V^{p-1} = d\phi_{UV}^{p-2}, \dots$, とかけば自然に $\delta\phi_{U_{i_0}, \dots, U_{i_k}}^{p-k}$ があらわれる。

層の順同型列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow^i \mathcal{G} \rightarrow^j \mathcal{H} \rightarrow 0$ が完全なときコホモロジーの完全列

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

が得られるから

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$$

が成り立つ。

具体的問題では $H^0(X, \mathcal{F})$ が重要で $\dim H^0(X, \mathcal{F})$ を知りたいことは多い。直接調べるのは難しい場合より調べやすい \mathcal{G}, \mathcal{H} があって $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ が完全列であればコホモロジー完全列を使って情報が得られる場合が良くある。そこで $\chi(\mathcal{F})$ などが意味をもつ。

$L(A)$ を x に局所化した群を $L(A)_x$; A を $U(x)$ に限定したときの因子を $A|U(x)$ とすれば 解析性から $L(A|U(x)) \subset L(A|V(x))$, $V(x) \subset U(x)$ となるので $L(A)_x$ は $\cup_{U(x)} L(A|U(x))$ で定義できる; $\Omega(A) = \cup_x L(A)_x$ ($L(A)$ の芽の層) とすれば $0 \rightarrow \Omega(A) \rightarrow \Omega(A + (p)) \rightarrow \mathbb{C}_x \rightarrow 0$ が完全だから

$$\chi(\Omega(A + (p))) = \ell(A) + 1$$

である. $H^0(X, \Omega(A)) = L(A)$, $\chi(\Omega(0)) = 1 - g$ だから帰納法で

$$\ell(A) - \dim(H^1(X, \Omega(A))) = n(A) + 1 - g$$

となる.

1.5 層係数コホモロジーのド・ラム型表示とホッジ型表示

切断で 1 の分解が出来るような層 \mathcal{F} 一微分可能な p -次微分形式の芽の層 C^p など一では $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$, $p \geq 1$ である. ポアンカレ補題から

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_t \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$$

が完全列である. これから Φ^p を p -次閉形式の芽の層とすれば

$$0 \rightarrow \Phi^p \rightarrow C^p \rightarrow \Phi^{p+1} \rightarrow 0$$

が完全で $H^p(X, \mathbb{C}_t) = H^p(X, \mathbb{C})$ だから

$$H^p(X, \mathbb{C}) \cong H^0(X, \Phi^p) / dH^0(X, C^{p-1})$$

というド・ラムの定理がえられる. ただし \mathbb{C}_t は複素数 (\mathbb{C}) に離散位相を入れて得られる層 $X \times \mathbb{C}$ である. この場合 $\chi(\mathbb{C}_t)$ は X のオイラー・ポアンカレ数である. 他の層でもコホモロジーでこうした表示が出来るときド・ラム型表示とよぶ.

一方 X がコンパクトのとき外微分作用素 d の共役を δ とし

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

とすれば

$$H^p(X, \mathbb{C}) \cong \ker(\Delta|_{H^0(X, C^p)})$$

と p -次調和形式の空間でコホモロジーがあらわされる. この型の表示をホッジ型表示と呼ぶ.

X が複素多様体のとき $z_k = x_k + iy_k$, $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$,

$$\begin{aligned} df &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right) = \partial f + \bar{\partial} f, \\ \partial f &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

が定義できる. これから X の微分形式は (p, q) という 2 重次数をもつ. さらに X がケーラー: エルミット計量 $\sum_{i,j} g_{ij} dz_i d\bar{z}_j$ に対応する微分形式 $\sum_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ が閉形式, であれば微分形式の空間から (p, q) -次形式への射影 $\Pi^{p,q}$ が

$$\Delta \Pi^{p,q} = \Pi^{p,q} \Delta$$

となることにより X のコホロジーは

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=r} H^{p,q}(X, \mathbb{C}), \quad H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H^{q,p}(X, \mathbb{C})$$

と分解される (ホッジ分解).

$\bar{\partial}f = 0$ と f が正則関数であるとは同値である. また $\bar{\partial}^2 = 0, \bar{\partial}\phi = 0$ となる微分形式 ϕ は局所的に $\bar{\partial}\psi$ と書ける (グロタンディアックの補題). $\phi = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ の形で f_{i_1, \dots, i_p} が正則関数になるとき ϕ を正則 p -形式とよぶ. 正則 p -形式の芽の層を Ω^p とすれば, グロタンディアックの補題とホッジ分解から

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

である (ドルボールの定理).

粗く言えばヒルツェブルフとグロタンディアックのリーマン・ロッホ定理は層のコホモロジーのド・ラム型表示を基礎にした理論だが指数定理はホッジ型表示にもとづく理論である.

1.6 高次元の因子とベクトル・バンドル

M を全空間, F を底空間, F をファイバー, G を構造群とするファイバー・バンドルは $U = U\}$ を X の開被覆として写像

$$g_{UV} : U \cap V \rightarrow G, \quad g_{UV}g_{VW}g_{WU} = e,$$

e は恒等写像で決まるから 以下では $\{g_{UV}\}$ でバンドルを表示する. $\{h_U\}, h_U \rightarrow G$ があって

$$g'_{UV} = h_U g_{UV} h_V^{-1}$$

となるとき $\{g_{UV}\}$ と $\{g'_{UV}\}$ は同値である. g_{UV} が解析的なら解析的, 微分可能なら微分可能バンドルとよぶ.

X が高次元複素多様体のとき因子は X の開被覆 $\{U\}$ があって $\{f_U\}, f_U$ は U で有理型関数で $f_U f_V^{-1} \neq 0, \infty$ で定義される.

$\{g_{UV}\} = \{f_U f_V^{-1}\}$ は (f_U は極をもって良いから必ずしも自明でない) X 上の複素ライン・バンドルを与える. また因子 D で定義されるバンドルと $D + (f), f$ は X 上の有理型関数, で定義されるバンドルは同値である. 従って X の因子の研究はライン・バンドルの研究に帰着される (ヴェイユ).

より一般に $\xi = \{g_{UV}\}$ を X の上のベクトル・バンドル ($GL(m, \mathbb{C})$ -バンドル) とする. なおリーマン面上の解析的ベクトル・バンドルの切断 (極はあっても良い) はすでに 30 年代, ヴェイユが超アーベル関数として導入していてそれに関するリーマン・ロッホ定理も得ていた (このヴェイユの定理はヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理から導かれる).

X の上の解析的ライン・バンドル全体は \mathbb{C}_d^\times を 0 にならない正則関数 (\mathbb{C}^\times への正則写像) の芽の層とすれば $H^1(X, \mathbb{C}_d^\times)$ となるからアーベル群になりそれから多くの有用な定理がえられる (同様に微分可能なライン・バンドル全体は 0 にならない微分可能関数の芽の層を \mathbb{C}_d^\times とすれば $H^1(X, \mathbb{C}_d^\times)$ であり

$$H^1(X, \mathbb{C}_d^\times) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$$

だから, これから第 1 チャーン類の定義, 性質が導かれる). したがってベクトル・バンドルについても何らかの方法で群構造が入れられれば良いと当時 (50 年代) 望まれていた. それに対する一つの答えが K -理論だと言えるだろう.

ベクトル値微分形式 ϕ_U の族が $g_{UV}\phi_V = \phi_U$ をみたすとき ξ に係数を持つ微分形式とよぶ. ξ に係数を持つ (p, q) -次形式の芽の層を $C^{p,q}(\xi)$, 正則関数の芽の層を $\Omega(\xi)$, 正則 p -次形式の芽の層を $\Omega^p(\xi)$ などと書く. ξ が解析的 (g_{UV} が正則写像) であれば

$$\bar{\partial}(g_{UV}\phi_V) = g_{UV}\bar{\partial}\phi_V$$

だから 接続を付け加えることなしに $\bar{\partial}$ は ξ の切断に働く微分作用素である. よって

$$0 \rightarrow \Omega(\xi) \rightarrow \bar{\partial} C^{0,1}(\xi) \rightarrow \bar{\partial} \dots$$

が完全列になる. 従って $H^p(X, \Omega(\xi))$ は $\bar{\partial}$ -closed な $(0, p)$ -形式の加群を $\bar{\partial}$ -exact な $(0, p)$ -形式の加群で割ったものと言うド・ラム型表示が出来る (ドルボールの定理). さらに X がコンパクトなら $\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}$ の解空間というホッジ型表示も出来る (小平).

特に X がケーラーであれば $2\square = \Delta$ となって $H^p(X, \Omega(\xi))$ は ξ に係数をもつ p -次正則形式の加群と同型になり (X がリーマン面のとき)

$$H^0(X, \Omega(A)) \cong L(A),$$

$$H^1(X, \Omega(A)) \cong D(A)$$

である. 更に X のコタンジェントバンドル $\{g_{UV}\}$ から $\{\det g_{UV}\}$ できまるバンドルを K とすると

$$H^p(X, \Omega(\xi)) \cong H^{n-p}(X, \Omega(K \otimes \xi^\dagger))^\dagger$$

となること (セール双対性) から $d(A) = \ell(K - A)$ が得られる.

1.7 ヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理と交点理論

リーマン・ロッホ定理 $\chi(\Omega(A)) = n(A) + 1 - g$ で $n(A)$ は A から $1 - g$ は X から決まる位相的量である ($2g = \dim H^1(X, \mathbb{R})$. $1 - g$ は X のオイラー・ポアンカレ数の半分).

$\ell(A)$ の評価というところから離れて $\chi(\Omega(\xi))$ を位相的量であらわせと解釈して ξ のチャーン類 $Ch(\xi) = \Pi_i(1 + \gamma_i)$ と X のチャーン類 $Ch(X) = \Pi_i(1 + \alpha_i)$ を使って

$$\chi(\Omega(\xi)) = \int_X ch(\xi)td(X), \quad ch(\xi) = \sum_i e^{\gamma_i}, \quad td(X) = \Pi Q(\alpha_i),$$

$Q(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$ と答えたのがヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理である ([3]).

なお代数多様体では ξ が自明のとき $\chi(\Omega)$ は算術種数とよばれイタリア学派の代数幾何では全く違う代数的定義が与えられていた. それを正則微分形式の空間の次元の交代和としてあらわしたのは小平である ([2]).

ラインバンドル $\{g_{UV}\}$ ではチャーン類は

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} (\log(g_{VW}) - \log(g_{UW}) + \log(g_{UV})) \right\}$$

の定める 2-次元コホモロジー類で, 因子 D からバンドルが造られればこれは D のコホロジー類 $c(D)$ である (重複度を込めて). さらに代数多様体では逆も成り立つ: ラインバンドルは因子から定義される (小平). 特に A が X の有理型関数の因子: $A = (f)$ であれば A から決まるバンドルは (正則バンドルとして) 自明であり逆も正しい.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}_d \rightarrow \mathbb{C}_d^\times \rightarrow 0$$

が完全列だからラインバンドルは位相的にはその (整係数) チャーン類で決まる. この場合チャーン類をド・ラムの意味であらわす 2 次の閉形式はバンドルの曲率である. チャーンはこの関係を高次元のベクトル・バンドルにまで拡張しガウス・ボンネの定理の高次元化に成功した.

リーマン面では $n(A)$ が A からきまるバンドルのチャーン類になる. また X のチャーン類は接バンドルのチャーン類だからリーマン面では Todd 類が $1 - g$ になってもととのリーマン・ロッホの定理となる.

高次元の場合 γ_i は仮想的なクラスだが ξ から導かれる旗多様体 $F_q (= GL(q, \mathbb{C})/\Delta(n, \mathbb{C}) = U(q)/T^q)$ -バンドル (の全空間) X_ξ まで ξ を引き上げると, ξ は (微分可能バンドルとして) T^q -バンドルになってここでは γ_i が実現される. $p: X_\xi \rightarrow X$ として

$$p^*: H^p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X_\xi, \mathbb{Z})$$

は中への同型で像は F_q のワイル群による作用で不変な元全体だから (ルレイ・ボレル) $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ の基本対称式は $H^*(X, \mathbb{Z})$ の元である. チャーン類の定義はいろいろあるがこれを定義にする流儀もある ([3]).

因子 D_1, D_2 については

$$c(D_1) \cup c(D_2) = c(D_1 \cdot D_2)$$

$D_1 \cdot D_2$ は D_1 と D_2 との重複度を考えた共通部分だから代数多様体ではヒルツェブルフの定理の右辺は代数幾何で古くから問題であった交点理論と関係がある ([10]; 代数曲面ではそのようなリーマン・ロッホ定理

$$\chi(D) = \frac{1}{2}D \cdot (D - K) + \frac{1}{12}(K^2 + c_2)$$

c_2 は第2チャーン類, が以前から知られていた. [17]). また3次元のリーマン・ロッホ定理として $\ell(A) + \delta$ を与える式が提出されていたが δ は0, 正または負という一見無意味な式だった. しかし $\ell(A) + \delta = \chi(A)$ とすればヒルツェブルフの式にあたるので意味がある.

X 上の $GL(n, \mathbb{C})$ -バンドルの集合も (非アーベル) コホモロジー集合として表示されるがラインバンドルのときはアーベル群になる. このときは完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\omega^\times \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}_\omega^\times \rightarrow C \xrightarrow{\rho} \Phi^{0,1} \rightarrow 0$$

$\rho(g) = \frac{1}{2\pi i} g^{-1} \bar{\partial} g$, を使って代数多様体では位相的に自明な解析的ラインバンドルの同値類の集合がトーラス $H^1(X, \mathbb{R})/\iota^*(H^1(X, \mathbb{Z}))$ (ι^* は $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ から誘導された写像) になることがわかる. このトーラスは複素構造が入る. また関数の因子となる因子とそうならない因子との差を表す. これはベクトルバンドルの集合に対しても何らかの群構造を入れることの有用性を示唆する.

1.8 K -理論と指数定理

ξ が解析的バンドルの時その正則切断の芽の層 $\Omega(\xi)$ は解析的连接層という性質があり (岡), これから $\dim H^p(X, \Omega(\xi))$ の有限性がえられ $\chi(\Omega(\xi))$ が定義できることが解る (カルタン・セール). ただし多変数関数論ではそののちコーン・ヘルマンダー等による偏微分方程式を用いる方法 ($\bar{\partial}$ -ノイマン問題) が有力になっている.

(標数 p を含む) 任意の体の上の代数多様体についても连接層は定義されコホモロジーの有限性が成り立つから $\chi(\mathcal{F})$, \mathcal{F} は代数的连接層, が定義できる. 層の完全列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ にたいしては $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$ だから连接層から生成された加群を $\mathcal{G} - (\mathcal{F} + \mathcal{H})$ で生成された群で割った剰余群を $K(X)$ とすれば χ は $K(X)$ から \mathbb{Z} への準同型である.

写像 $f: X \rightarrow Y$ があれば $\mathcal{F}|_{f^{-1}(p)}$ (とそのコホモロジー) を使って \mathcal{F} の順像 $f_!(\mathcal{F})$ が定義できる. 特に Y が一点であれば $f_!(\mathcal{F}) = \sum_n (-1)^n H^n(X, \mathcal{F})$ である. グロタンディアックのリーマン・ロッホ定理は

$$ch(f_!(\mathcal{F})td(Y)) = f_*(ch(\mathcal{F}td(X)))$$

で Y が一点のときヒルツェブルフのリーマン・ロッホ定理 (の任意の基礎体の上の代数多様体を含む形) となる ([9],[10]).

グロタンディアックの K -群の定義を位相的ベクトルバンドルに援用して現在の K -理論の元をつくったのはアチヤー・ヒルツェブルフであり、そこでは位相的リーマン・ロッホ定理というものも提出されたが、この定理はそれ以後これはあまり関心を引いていないようである。

一方調和積分論から

$$\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger : \sum_p H^0(X, \Omega^{2p}(\xi)) \rightarrow \sum_p H^0(X, \Omega^{2p+1}(\xi))$$

とすれば

$$\chi(\Omega(\xi)) = \dim(\ker(\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)) - \dim(\operatorname{coker}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger))$$

である。 E_1, E_2 を可微分多様体 M 上のベクトルバンドル $D : H^0(M, E_1) \rightarrow H^0(M, E_2)$ を微分作用素とする。

$$D = \sum_{|k| \leq m} C_k(x) \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = k_1 + \cdots + k_n$$

とし ξ_1, \dots, ξ_n を余接ベクトルとすれば

$$\sigma(D) = \sum_{|k|=m} C_k(x) \xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n}$$

は余接バンドルからえられる球バンドル $p : SM \rightarrow M$ の上のバンドル p^*E_1 から p^*E_2 への写像になる。これが同型るとき D を楕円型という。このとき $\sigma(D)$ は $K^0(BM/SM)$, BM はボールバンドル、の元を与える。 $ch(\sigma(D))$ を簡単のため $ch(D)$ と書く。

コンパクト多様体で定義された D が楕円型であれば $\ker D, \operatorname{coker} D$ はともに有限次元で

$$\operatorname{ind} D = \dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$$

が定義出来る。なお $\dim(\operatorname{coker} D) = \dim(\ker D^\dagger)$ だから

$$\operatorname{ind} D = \dim(\ker D) - \dim(\ker D^\dagger)$$

と定義しても良い。

ゲルファンドはこれが位相的量であらわされると予想し問題として提出した。それに答えたのがアチヤー・シンガーの指数定理

$$\operatorname{ind} D = \int_M \phi(ch(D)) td(M)$$

である。ただし $\phi : H_c^*(T^*M) \rightarrow H^*(M)$ はトム同型である。

指数定理では M の解析性は必要ないからヒルツェブルフの定理のほかにガウス・ボンネの定理（の高次元化）などもふくむ。ガウス・ボンネの場合使われるのは

$$d + \delta : \sum_{p=0}^n H^0(X, C^{2p}) \rightarrow \sum_{p=0}^n H^0(X, C^{2p+1}),$$

C^p は p -次可微分微分形式の芽の層、である。

しかしグロタンディアックの定理は（楕円型作用素の族についての指数定理はあるが）含まない。だがそれ以後の数学（と物理）への影響は指数定理のほうがはるかに大きい。方法論としてグロタンディアックは圏論的にリーマン・ロッホ定理を扱ったが指数定理は偏微分方程式一関数解析的に扱っていることは指摘するべきだろう。

なお K -理論は（微分作用素の族の指数定理ではパラメーターの空間の K -群の元として指数が定義されるなどの事はあるが）指数定理ではそれほど活躍しない。しかし $ch(D)$ の定義には K -理論が要るのでやはり大きな役割がある。

楕円型作用素から K -群のようなものを作るとそれはディラック作用素と K -群で生成されるので証明はディラック作用素について行えばよい.

$\lambda \neq 0$ であれば

$$DD^*\phi = \lambda\phi \leftrightarrow (D^*D)D^* = \lambda D^*\phi$$

だから 0 でない D^*D と DD^* の固有値とその重複度は一致する. これから指数の熱核をつかった表示

$$\text{ind}D = \text{tre}^{-tD^\dagger D} - \text{tre}^{-tDD^\dagger}$$

が得られ証明によく使われる ([4],[6]). なおこの式は物理的には超対称代数の生成元を Q, F をフェルミオン数として $\text{ind}Q = \text{tr}(-1)^F$ となると解釈されている ([11],[12]). 他にも経路積分の変数変換から指数定理を導く ([11]) などの議論もありこれらを数学的に正当化するのは将来の問題である.

1.9 ザリスキの批判

ヒルツェブルフがリーマン・ロッホの定理を $\ell(A)$ の評価から $\chi(A)$ の位相的量での表示と見たところからその後の K -理論, 指数定理への道が開かれた. しかしそのため $\ell(A)$ の評価という本来の目的が希薄になったとザリスキなどは批判している. ヒルツェブルフ以前は $\ell(A)$ を与える公式を探る努力がされていた. 例えば小平は A が非特異のとき $\ell(K+A)$ を与える式

$$\ell(K+A) = a(X) + a(A) - 1,$$

$a(X)$ は X の算術種数, を得ている ([2]). しかしそれ以後この方向の研究 (成果) はあまりないようである.

現在のところ $\ell(A)$ の評価には, 得られている高次元リーマン・ロッホ定理 ($\chi(A)$ の位相的表示) と $HP(X, \Omega(\xi))$ が $p \geq 1$ で消える条件を探す (消失定理) のが有力な方法のようである.

指数定理の右辺はホモロジー不変量である. より精密な不変量を表すものとしては η -不変量があり, 幾何学への応用のほか楕円形作用素の行列式の定義にも使われている. このときは (境界のない) コンパクト多様体上の微分作用素でなく開いた多様体上の作用素に適切な境界条件を入れたものが扱われある意味で指数定理の開いた (境界のある) 多様体上の作用素への拡張である ([8]). しかし本来のリーマン・ロッホの問題とはかなり離れている気がする. なお開いた多様体上の作用素の指数定理については富山大学の平山氏の研究があるが数学界ではあまり知られていないようなのが残念である.

物理ではループ空間のディラック作用素としてディラック・ラモン作用素が定義されその指数定理も得られているが定理を述べるにはいろいろ準備がいる ([15]). その上数学的にはディラック・ラモン作用素の定義さえ得られていない.

しかし X 上のループ空間 ΩX の特性類であるストリング類は X のチャーン・サイモン類と関係がありポット周期性から類推されるように $K^1(X)$ の理論と関係することは注意すべきだろう ([16]; 粗く言えばグロタンディアックのリーマン・ロッホ定理は $K^0(X)$ の理論である).

非可換幾何の方面ではコンヌ・モスコヴィッチの局所指数定理があるが, これも定理をのべるだけで多くの準備が必要である ([13]). これらの定理は指数定理の拡張ではあるが, もともののリーマン・ロッホ定理の問題意識とは ([14] などの仕事はあるが) 離れている気がする.

参考文献

- [1] 岩沢健吉：代数関数論，岩波書店，1952.
- [2] Kodaira,K.: Some results in the transcendental theory of algebraic variety, *Ann. Math.* 59(1954), 86-134.
- [3] Hirzebruch, F.: *Topological Method in Algebraic Geometry*, Springer, 1978
- [4] Gel'fand,I.M.: On elliptic differential equations, *Russian Mat. Surveys*,15(1960), 113-123 (*Uspekhi Mat. Nauka*,15(1960), 121-132); *Collected Works I*, 65-75.
- [5] Atiyah,M.F. Bott,R. Patodi, V.K.: On the heat equation and the index theorem, *Invent.Math.*19(1973), 279-330, 28(1975), 277-280.
- [6] Booss-Bavnbek, B. Bleecker,D.: *Topology and Analysis. The Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics*, Springer, 1985.
- [7] Berline,N. Getzler,E. Vergne,M.: *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer, 2004.
- [8] Merlose,R.B.: *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, Peters 1993.
- [9] Borel,A. Serre,J.P.: Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. Fr.*86(1958), 97-136.
- [10] Berthlot,P. et al(ed): *Théories des intersections et théorème de Riemann-Roch*, SGA6. *Lect. Notes in Math.* 225, Springer 1971.
- [11] Fujikawa,K.: *Path-Integrals and Quantum Anomalies*, Clarendon Press, 2004.
- [12] Alvarez-Gaume,L.: Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.* 90(1983), 161-173.
- [13] Higson, N.: The local index formula in noncommutative geometry. *Contemporary developments in K-theory*, Karoubi, M. (ed.), *ICTP Lect. Notes* 15(2003), 447-536.
- [14] Perrot,D.: A Riemann-Roch Theorem for one-dimensional complex groupoids, *Commun. Math. Phys.*218(2001), 373-391.
- [15] Alvarez, O. Killingback,T.P. Mangano, K. Windey,P.: String theory and loop space index theorem, *Commun. Math. Phys.* 111(1987), 1-10.
- [16] Asada,A.: Characteristic classes of loop group bundles and generalized string classes. *Colloq. Soc. Math. János Bolyai* 56(1992), 33-66.
- [17] Zariski,O.: *Algebraic Surfaces*, Springer 1995.

Bessel 関数と Airy 関数

Bessel Function and Airy Function

世戸 憲治³
Kenji SETO⁴

2.1 はじめに

この表題は「Bessel 関数と Airy 関数」としたが、Airy 関数は Bessel 関数と別物ではなく、その一種なので、正しくは「Bessel 関数としての Airy 関数」とすべきかもしれない。±1/3 次の Bessel 関数を特に Airy 関数と呼ぶことがある。イギリス、グリニッジ天文台長であった George Biddell Airy(1801-1892) によって研究されたためこの名がついた。Airy は虹の理論を展開する中で今日、Airy 積分と呼ばれるものを発見した(1838)。グリニッジ天文台を通る子午線を、経度零度と定め、世界標準時の起点としたのもこの Airy である。

2 階の線形常微分方程式で、微分の他に変数について 1 次の項を含むものは、±1/3 次の Bessel 関数で解くことができる。ここでは、このような例題を 3 つ挙げる。

2.2 弾性棒の重力座屈

2.2.1 重力座屈とは

鋼鉄の柱を真っすぐ鉛直に立てたとき、どのくらいの高さまで立てることができるだろうか。自分の重さで潰れてしまわないためには、柱の下部で自分の重力を上まわるだけの圧縮強度がなければならない。鋼鉄の圧縮強度を $\sigma_y = 200\text{MPa}$ 、密度を $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ とし、重力加速度を $g \cong 10\text{m/s}^2$ とする。立てる高さを $h[\text{m}]$ とすると、その下部にかかる圧力は ρgh 、これが圧縮強度以下でなければならないので、立てられる最大の高さは $h = \sigma_y / \rho g = 2500\text{m}$ ということになる。これは風もまったく吹かない理論上のものであるが、実際に立てるとなるとそうはいかない。たとえ風が吹かないとしても、真っすぐ立っていることが不安定になり、自分の重力のために折れ曲がりが生じるからである。これは縦方向に縮んで重力の位置エネルギーを下げるよりも、曲がることで位置エネルギーを下げる方が有利になるからで、これを重力座屈 (buckling by gravity) という。この現象についてより詳しく調べてみよう。

³北海学園大学名誉教授

⁴seto@pony.ocn.ne.jp

2.2.2 方程式の導入とその解法

高さ h の弾性棒が鉛直に立っているものとし、この下端を原点として上方向に x 軸をとる。ただし、この下端は埋め込みになっていて、その横方向変位、および傾き角はゼロとする。この弾性棒の密度、Young 率、断面積、断面 2 次モーメントを、それぞれ、 ρ , E , A , I とする。いまこの棒が傾いたとして、点 x で主軸の傾き角、および横方向変位を、それぞれ、 $\theta(x)$, $V(x)$ とすると、これら 2 つの間は

$$V(x) = \int_0^x \sin \theta(x') dx' \quad (2.2.1)$$

の関係で結ばれる。なお、ここでは剪断変形を考慮しないので、断面の傾き角も θ となる。このとき点 x で、単位体積あたりの曲げによる歪みエネルギー U_1 、および重力の位置エネルギー U_2 は、それぞれ、

$$U_1 = \frac{EI}{2A} \theta_x^2, \quad U_2 = \rho g \int_0^x \cos \theta(x') dx' \quad (2.2.2)$$

で与えられる⁵。したがって、弾性棒全体のエネルギー U は

$$U = \int_0^h (U_1 + U_2) A dx = \frac{EI}{2} \int_0^h \theta_x^2 dx + \rho g A \int_0^h \left[\int_0^x \cos \theta(x') dx' \right] dx \quad (2.2.3)$$

となるが、この右辺の 2 項目に関しては x' x の積分順序を入れ換えると、

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^h \theta_x^2 dx + \rho g A \int_0^h (h-x) \cos \theta(x) dx \quad (2.2.4)$$

と書き直される。ここで、このエネルギー U の θ に関する変分をとると、Euler-Lagrange 方程式として

$$EI \theta_{xx} + \rho g A (h-x) \sin \theta = 0 \quad (2.2.5)$$

という式を得る。さらに、傾き角 θ は小さいものとして線形近似 $\sin \theta \cong \theta$ と置くことにすると、

$$EI \theta_{xx} + \rho g A (h-x) \theta = 0 \quad (2.2.6)$$

という方程式を得る。これは線形の微分方程式なので解くことができる。

その前に、変数の無次元化をしておこう。まず、弾性棒の高さ h を長さの単位とし、変数 x を改めて

$$x/h \rightarrow x \quad (2.2.7)$$

とおき、曲げ易さの目安となる無次元量 μ を

$$\mu = \sqrt{\frac{\rho g A h^3}{EI}} \quad (2.2.8)$$

と導入すると、方程式 (2.2.6) は

$$\theta_{xx} + \mu^2 (1-x) \theta = 0 \quad (2.2.9)$$

となる。この方程式を解くために、独立変数 x と従属変数 θ をつぎのように

$$z = \frac{2}{3} \mu (1-x)^{3/2}, \quad \theta(x) = z^{1/3} f(z) \quad (2.2.10)$$

と変換する。この変換は答えがわかっているからできるようなものであるが、結果として、

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right) f = 0 \quad (2.2.11)$$

⁵ θ_x の添え字 x はその変数での微分を表す。以後この記法に従う。また、 U_1 の導出方法に関してははしかるべき教科書を参照された

となる。この解は $\pm 1/3$ 次の Bessel 関数で求まり、 C, D を任意定数として、

$$f(z) = CJ_{-1/3}(z) + DJ_{1/3}(z) \quad (2.2.12)$$

となる。これを元の変数に戻すと、

$$\theta(x) = \sqrt{1-x} \left[CJ_{-1/3} \left(\frac{2\mu}{3} (1-x)^{3/2} \right) + DJ_{1/3} \left(\frac{2\mu}{3} (1-x)^{3/2} \right) \right] \quad (2.2.13)$$

となる。ただし、全体に付く係数、 $(2\mu/3)^{1/3}$ は係数 C, D に含めることにした。方程式 (2.2.9) が簡単であるわりに、解は複雑な形をしている。このような $\pm 1/3$ 次の Bessel 関数は Airy によって初めて研究され Airy 関数と呼ばれることがあるが、その厳密な定義については 4 節で述べる。

Bessel 関数の微分公式

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \quad (2.2.14)$$

を用いて、この解 (2.2.13) 式を x で微分すると、

$$\theta_x(x) = C\mu(1-x)J_{2/3} \left(\frac{2\mu}{3} (1-x)^{3/2} \right) - D\mu(1-x)J_{-2/3} \left(\frac{2\mu}{3} (1-x)^{3/2} \right) \quad (2.2.15)$$

となる。ここで、この解に境界条件を付加してみよう。この弾性棒の下端 $x=0$ は埋め込みになっているので傾き角はゼロ、また、上端 $x=1$ では曲げモーメントがゼロ、あるいは曲率がゼロと言ってもよいが、これらを式で表わすと、

$$\theta(0) = 0, \quad \theta_x(1) = 0 \quad (2.2.16)$$

となる。初めに条件 $\theta_x(1) = 0$ を (2.2.15) 式に適用すると、右辺の 1 項目は $x=1$ でゼロとなるが、2 項目は定数項が残ってしまうので、 $D=0$ でなければならない。あとは、 $\theta(0) = 0$ を (2.2.13) 式に適用して

$$J_{-1/3} \left(\frac{2\mu}{3} \right) = 0 \quad (2.2.17)$$

となる。すなわち、 $2\mu/3$ は $-1/3$ 次 Bessel 関数のゼロ点でなければならない。このゼロ点を小さい方から、 $2\mu_i/3$, ($i=1, 2, 3, \dots$) とする。このうち、初めの 6 個を挙げると、

$$\frac{2\mu_i}{3} = 1.866, \quad 4.987, \quad 8.166, \quad 11.493, \quad 14.554, \quad 17.700 \quad (2.2.18)$$

という値になる。また、 $\theta(x)$ の μ_i 依存性を明示するために $\theta(x, \mu_i)$ と書くことにすると、

$$\theta(x, \mu_i) = C\sqrt{1-x} J_{-1/3} \left(\frac{2\mu_i}{3} (1-x)^{3/2} \right) \quad (2.2.19)$$

これが重力のために座屈した解を表す。

2.2.3 重力座屈の具体例

この重力座屈の具体的例を考えてみよう。 μ の定義 (2.2.8) 式に含まれる変数のうち、 ρ と E は材料で決まる定数である。ここでは、それを鋼鉄として、

$$\rho = 8000 \text{kg/m}^3, \quad E = 200 \text{GPa} \quad (2.2.20)$$

とする。また、 A と I は断面の形状で決まる定数である。ここでは、断面が半径 r の円となる円柱とし、

$$A = \pi r^2, \quad I = \frac{\pi}{4} r^4 \quad (2.2.21)$$

とする。このとき、 A/I は、

$$\text{円柱の場合} \quad \frac{A}{I} = \frac{4}{r^2} \quad (2.2.22)$$

となる。またこの他に、外半径が r 、内半径 $r-d$ 、つまり厚さが d の円筒を考える。ただし、この厚さは非常に薄く、 $d \ll r$ という条件を付けたときは、

$$A = \pi[r^2 - (r-d)^2] \cong 2\pi rd, \quad I = \frac{\pi}{4}[r^4 - (r-d)^4] \cong \pi r^3 d \quad (2.2.23)$$

となるので、 A/I は

$$\text{円筒の場合} \quad \frac{A}{I} = \frac{2}{r^2} \quad (2.2.24)$$

となり、円筒の厚さ d には関与しなくなる。つまり、座屈するかしないかは円筒を作る材料の厚さには無関係で外半径だけで決まることになる。このことは、不思議と思われるかもしれないが、材が薄くなればそれだけ重力の影響を受けにくくなるからであろう。

これらの値 (2.2.20) (2.2.22) および (2.2.24) 式と $g = 9.8\text{m/s}^2$ を (2.2.8) 式の μ に代入し、この値が、初めに座屈を起こす μ_1 に等しいとおくと、座屈するときの高さ h と半径 r の関係が求められる。これを以下の図 1 に示す。ここで、 r, h の単位は m とし、円柱の場合を実線で、また、円筒の場合を点線で示す。このグラフから、建築物としてはかなり大きめの半径 $r = 10\text{m}$ としても、円柱の場合で座屈する高さ h はおよそ 800m、円筒の場合で約 1000m という値である。これは弾性棒の下端が自重のために壊れてしまう高さ 2500m に比べるとかなり小さい値を示す。言い換えると、鉛直に立てた弾性棒は自重崩壊を起こす前に、重力座屈を起こしてしまうということである。

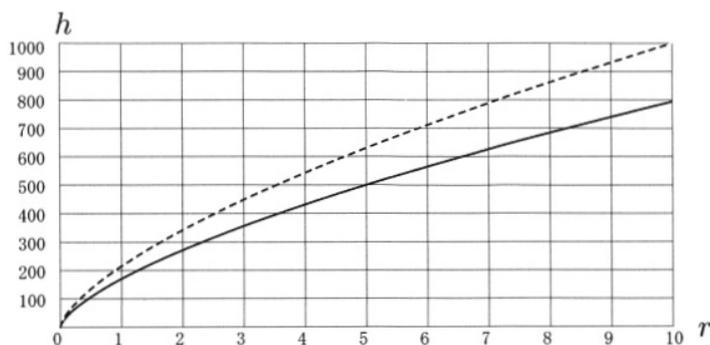


図 1 重力座屈

どのように重力座屈を起こすかということは、動的解析が必要である。しかし、この問題で動的解析をすると 4 階の微分方程式になってしまい、これまで知られている特殊関数では解けない問題になってしまう。ここでは、この問題を数値解析した概要だけを述べるに留める。座標 x 、時刻 t での θ を $\theta(x, t)$ とし、この時間依存部分を $\cos(\omega t)$ とし、方程式に代入し、境界条件を付けると、振動数 ω の値が固有値として求められる。これを ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) とする。この値は、 μ に依存して決まってくるが、この μ の値が大きくなるほど、各 ω_i の値は小さくなる。そして、 $\mu = \mu_1$ になったとき、 $\omega_1 = 0$ になる。これがここで述べた静的解に相当する。それ以上 μ を大きくするとそれまで正の実数で求まっていた ω_1 は虚数になる。さらに、一般に $\mu = \mu_i$ ($i = 2, 3, \dots$) になると、 $\omega_i = 0$ となり、それ以上 μ の値を大きくすると、 ω_i の値が虚数となる。 ω の値が虚数になるということは、 $\cos(\omega t)$ が双曲線関数 $\cosh(|\omega|t)$ に化けてしまい、これは時間と共に振幅が指数関数的に増大し崩壊することを意味する。

次節ではここでの計算式がそのまま生かされるまったく別のモデルを導入する。

2.3 線密度がリニアに変化する弦の振動

前節でみたように、2 階の常微分方程式で変数について 1 次の項を含むものは、 $\pm 1/3$ 次の Bessel 関数で解くことができる。このような例を古典力学の範囲で探してみると、最も分かりやすく、しかも動的解析もでき

る例として、線密度が場所によりリニアに変化する弦の振動がある。

2.3.1 方程式の導入とその解法

いま、線密度 ρ の弦が張力 T で有限の長さ ℓ だけ張られている。ただし、弦の太さが場所が変わるためこの線密度も場所毎に変化するものとする。この弦の一方の端を原点とし、弦に沿って x 軸をとる。時刻 t 、座標 x での弦の横方向変位を $V(x, t)$ 、および線密度を $\rho(x)$ としたとき、線形近似の範囲で、その波動方程式は、

$$\rho(x)V_{tt} = TV_{xx} \quad (2.3.1)$$

となる。ここで、弦の線密度が、 x の 1 次式

$$\rho(x) = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.3.2)$$

で表される場合を考える。つまり、 $x = 0$ では $\rho = \rho_0$ であるが、この値はリニアに減少していき、他端の $x = \ell$ ではゼロとなるようにしておく。

ここで、速度の次元を持つ c を

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_0}} \quad (2.3.3)$$

と定義し、この速度で弦の長さ ℓ を走る時間を

$$\tau = \ell/c \quad (2.3.4)$$

と定義する。ここで、 ℓ , τ を、それぞれ、長さ、時間の単位として、変数 x , t , V を改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad t/\tau \rightarrow t, \quad V/\ell \rightarrow V \quad (2.3.5)$$

と無次元化すると方程式は、

$$(1-x)V_{tt} = V_{xx} \quad (2.3.6)$$

となる。この方程式を解くために、変位 $V(x, t)$ を x , t について変数分離し、時間部分に関しては単一振動数 ω を持つものとし、

$$V(x, t) = X(x) \sin(\omega t) \quad (2.3.7)$$

とおく。この置き換えで方程式は

$$X_{xx} + \omega^2(1-x)X = 0 \quad (2.3.8)$$

となる。この方程式は ω を μ , X を θ と置き換えると (2.2.9) 式とまったく同じものである。したがって、ここでの境界条件を前節と同じに、 $x = 0$ は固定端、 $x = 1$ を自由端として、

$$X(0) = 0, \quad X_x(1) = 0 \quad (2.3.9)$$

とすると、前節の (2.2.9) 式から (2.2.19) 式までが、 μ を ω , θ を X と読み替えてそのまま使える。ここで、まとめ直すと、(2.2.17) (2.2.18) (2.2.19) 式から、振動数 ω は固有値方程式、

$$J_{-1/3}\left(\frac{2\omega}{3}\right) = 0 \quad (2.3.10)$$

で決まり、この解を小さい方から固有値 ω_i , ($i = 1, 2, 3, \dots$) とする。この初めの 6 個の値は

$$\frac{2\omega_i}{3} = 1.866, \quad 4.987, \quad 8.166, \quad 11.493, \quad 14.554, \quad 17.700 \quad (2.3.11)$$

で与えられる。また、 $X(x)$ の ω_i 依存性を明示するために固有関数を $X(x, \omega_i)$ と書くことにすると、

$$X(x, \omega_i) = \sqrt{1-x} J_{-1/3}\left(\frac{2\omega_i}{3}(1-x)^{3/2}\right) \quad (2.3.12)$$

となる。ただし、ここでは (2.2.19) 式の C を 1 とおいたが、これは規格化されたものではない。

2.3.2 固有関数の規格化

固有関数を規格化するには、固有値とは限らない2個の ω, ω' を用意し、これらに対応して (2.3.12) 式で ω_i を ω あるいは ω' としたものを $X(x, \omega), X(x, \omega')$ とする。これらの関数が満たす (2.3.8) 式の形の方程式を

$$X_{xx}(x, \omega) + \omega^2(1-x)X(x, \omega) = 0, \quad X_{xx}(x, \omega') + \omega'^2(1-x)X(x, \omega') = 0 \quad (2.3.13)$$

と用意する。この第1式に $X(x, \omega')$ を掛け、第2式に $X(x, \omega)$ を掛けて辺々の差をとると、

$$\frac{d}{dx} [X(x, \omega')X_x(x, \omega) - X(x, \omega)X_x(x, \omega')] + (\omega^2 - \omega'^2)(1-x)X(x, \omega)X(x, \omega') = 0 \quad (2.3.14)$$

を得る。これを積分して、

$$\int_0^1 (1-x)X(x, \omega)X(x, \omega')dx = \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} [X(x, \omega)X_x(x, \omega') - X(x, \omega')X_x(x, \omega)] \Big|_0^1 \quad (2.3.15)$$

となる。ここで、 ω, ω' を相異なる固有値 ω_i, ω_j としたときは、境界条件 (2.3.9) 式が満たされるので、この式の右辺はゼロとなる。これで相異なる固有値に属する固有関数の直交性が示される。同じ固有値になるときは、初めに $\omega' = \omega_i$ とおくと、この右辺は、 $X_x(1, \omega) = 0$ を用いて、

$$= \frac{-1}{\omega^2 - \omega_i^2} X(0, \omega)X_x(0, \omega_i) \quad (2.3.16)$$

となるので、ここで、極限 $\omega \rightarrow \omega_i$ をとると

$$= \frac{-1}{2\omega_i} [\partial_\omega X(0, \omega)] \Big|_{\omega=\omega_i} X_x(0, \omega_i) = \frac{1}{3} \left[J_{2/3} \left(\frac{2\omega_i}{3} \right) \right]^2 \quad (2.3.17)$$

となる。以上をまとめると、固有関数の直交性

$$\int_0^1 (1-x)X(x, \omega_i)X(x, \omega_j)dx = N_i^2 \delta_{i,j} \quad (2.3.18)$$

を得る。ここに、規格化定数 N_i を

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{3}} J_{2/3} \left(\frac{2\omega_i}{3} \right) \quad (2.3.19)$$

と定義する。したがって、 $X(x, \omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる。以下の図2に規格化された固有関数の初めの6個を示す。各図の下の数字はモード番号である。各固有関数ともモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ。

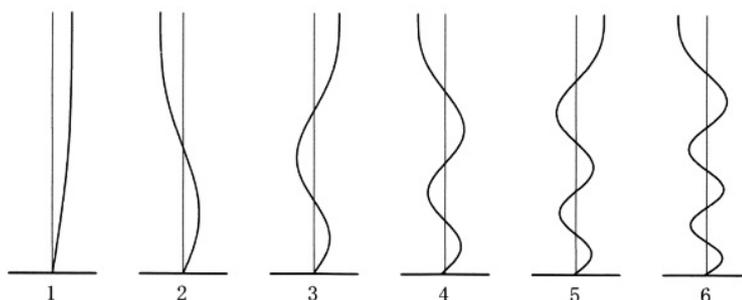


図2 固有関数

2.3.3 初期条件を与えた場合の解

ここでは最も簡単な初期条件の例として、 $t = 0$ での変位に対し、初期位置はすべての点でゼロ、初速度は点ごとに $v_0(x)$ として与えられるものとし、

$$V(x, 0) = 0, \quad V_t(x, 0) = v_0(x) \quad (2.3.20)$$

と設定した場合を考える。まず、変位 $V(x, t)$ を固有関数 $X(x, \omega_i)$ で展開し、係数を K_i として、

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) \quad (2.3.21)$$

とおく。これで、初期位置がゼロという条件はすでに満たされる。初速度に関しては、これを時間 t で微分し $t = 0$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i K_i X(x, \omega_i) = v_0(x) \quad (2.3.22)$$

となるので、両辺に $(1-x)X(x, \omega_j)$ を掛けて x 積分をすると、固有関数の直交性 (2.3.18) 式を用いて、係数が

$$K_j = \frac{1}{\omega_j N_j^2} \int_0^1 (1-x)v_0(x)X(x, \omega_j)dx \quad (2.3.23)$$

と求められる。これを (2.3.21) 式に戻すと、最終的な解

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i N_i^2} \left[\int_0^1 (1-x')v_0(x')X(x', \omega_i)dx' \right] X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) \quad (2.3.24)$$

が得られる。

2.4 量子力学の例

量子論的調和振動子の問題では、Schrödinger 方程式に入るポテンシャルは2次式の形になる。この解が指数関数と Hermite 多項式の積で表されることは、たいていの量子論の教科書に書かれているので、馴染み深いものである。しかし、ポテンシャルが1次式となると、扱われている教科書は無くはないが、ほんの少数にすぎない。ここでは、原子核の α 崩壊の理論などで使われる WKB 法の基本となる1次のポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式の解法について述べる。

2.4.1 リニアポテンシャルの Schrödinger 方程式

空間1次元の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi \quad (2.4.1)$$

において、ポテンシャル $V(x)$ が線形近似できるものとし、

$$V(x) = V(0) + V'(0)x \quad (2.4.2)$$

とおけると、 x の平行移動

$$x + \frac{V(0) - E}{V'(0)} \rightarrow x \quad (2.4.3)$$

によって、方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V'(0)x \right] \psi = 0 \quad (2.4.4)$$

となる。この方程式を $x = \pm\infty$ で $\psi = 0$ となる解を求めるのがここでの問題である。

ここで、 $V'(0)$ は正と仮定する。さらに、 $\hbar^2/(2mV'(0))$ が長さの 3 乗の次元を持つので、これから長さの次元を持つ量 ℓ を

$$\ell \equiv \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2mV'(0)}} \quad (2.4.5)$$

と定義し、この ℓ を長さの単位として、座標 x を

$$x/\ell \rightarrow x \quad (2.4.6)$$

と無次元化する。この操作で方程式 (2.4.4) は

$$\psi_{xx} - x\psi = 0 \quad (2.4.7)$$

となる。この方程式は x での 2 度微分と x の 1 次式を含むという点で、前節での方程式 (2.2.9) と同じタイプのものである。そこで、 $x > 0$ に対し、(2.2.10) 式と同種の

$$z = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad \psi = z^{1/3}g(z) \quad (2.4.8)$$

と変換してみると、方程式は

$$\frac{d^2g}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dg}{dz} - \left(1 + \frac{1}{9z^2}\right)g = 0 \quad (2.4.9)$$

となる。この方程式は $\pm 1/3$ 次の変形 Bessel 関数 (modified Bessel function) を用いて解くことができるが、これを解く前に変形 Bessel 関数について少し述べておく。この方程式の解としては、まず、

$$I_{\pm 1/3}(z) \equiv e^{\mp \pi i/6} J_{\pm 1/3}(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm 1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\pm \frac{1}{3} + n + 1)} \quad (2.4.10)$$

が存在するが、この $\pm 1/3$ 次の両方とも $z \rightarrow \infty$ で発散するので、この場合の解として採用することはできない。そこで、これら 2 個の解を線形結合した

$$K_{1/3}(z) \equiv \frac{\pi}{2} \frac{I_{-1/3}(z) - I_{1/3}(z)}{\sin(\pi/3)} \quad (2.4.11)$$

とすると、この関数 $K_{1/3}(z)$ は $z \rightarrow \infty$ で指数関数的にゼロに近づく関数となるので、この場合の解として採用することができる。後の都合に合わせて (2.4.9) 式の解を、適当な比例係数を付けて、

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2/3}\pi} K_{1/3}(z) \quad (2.4.12)$$

としておく。これに (2.4.8) 式を用いて元の変数に戻すと、

$$\psi(x) = \text{Ai}(x) \quad (2.4.13)$$

となる。ただし、この右辺の関数 $\text{Ai}(x)$ が、 $x > 0$ に対する Airy 関数と呼ばれるもので、

$$\text{Ai}(x) \equiv \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad x > 0 \quad (2.4.14)$$

と定義される。この関数は見かけは良くないが、これでも x について整関数 (entire function) である。

(2.4.10) (2.4.11) 式を用いてこの関数を初めの 2 項だけ展開してみると

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{1}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}x + \cdots \quad (2.4.15)$$

となる. この定数項は $I_{-1/3}$ から, また, 1 次の項は $I_{1/3}$ から出る項である. また, $x \rightarrow \infty$ での漸近形は, 変形 Bessel 関数 $I_\nu(z)$ の漸近式から,

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (2.4.16)$$

と求められ, 指数関数的に減少する関数である. この $x > 0$ という領域は, (2.4.2) (2.4.3) 式を用いて元の変数に戻ると, 電子が持つエネルギー E がポテンシャルより小さい $E < V(x)$ という領域であり, 古典論では行くはずのないところであるが, 量子論では電子波がこの領域まで染み出すことを意味する.

$x > 0$ での解が求められたので, つぎに, $x < 0$ の解を求めよう. (2.4.8) 式に代わって

$$z = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \psi = z^{1/3}g(z) \quad (2.4.17)$$

と変換してみると, こんどは,

$$\frac{d^2g}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dg}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)g = 0 \quad (2.4.18)$$

となる. これは通常の $\pm 1/3$ 次の Bessel の微分方程式であり, その解は $J_{\pm 1/3}(z)$ の線形結合で与えられる. その係数を C, D とすると

$$g(z) = CJ_{-1/3}(z) + DJ_{1/3}(z) \quad (2.4.19)$$

となり, (2.4.17) 式で元の ψ に戻すと,

$$\psi(x) = (2/3)^{1/3}\sqrt{-x} \left[CJ_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) + DJ_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) \right] \quad (2.4.20)$$

となる. この ψ が量子力学の波動関数であるためには, $x = 0$ でその値, および微係数が連続でなければならない. Bessel 関数の展開表示式

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (2.4.21)$$

を用いて, (2.4.20) 式の 1 項目, 2 項目を $x = 0$ の近傍で展開すると

$$\sqrt{-x}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) = \frac{1}{3^{-1/3}\Gamma(\frac{2}{3})} + \cdots, \quad \sqrt{-x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) = -\frac{1}{3^{-2/3}\Gamma(\frac{1}{3})}x + \cdots \quad (2.4.22)$$

これらを (2.4.20) 式に代入したとき, $x > 0$ での $\text{Ai}(x)$ の展開式 (2.4.15) と, 1 次の項まで一致させるには,

$$C = D = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/3} \quad (2.4.23)$$

と取るとよい. このとき (2.4.20) 式は

$$\psi(x) = \text{Ai}(x) \quad (2.4.24)$$

となる. ここに, $x < 0$ での Airy 関数を

$$\text{Ai}(x) \equiv \frac{\sqrt{-x}}{3} \left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right) \right], \quad x < 0 \quad (2.4.25)$$

と定義する. 実は, (2.4.14) 式で, $x > 0$ に対し定義した Airy 関数と, この式で $x < 0$ に対し定義した Airy 関数は, 見かけはまったく異なるが, 同じ関数の異なる表現にすぎない. これらはいずれも同じ 2 階微分方程式の解であり, それらを Taylor 展開したとき 0 次, 1 次の項が一致すればすべての項が一致するはずだから

である．実際，(2.4.14) 式の Airy 関数を $K_{1/3}(z)$ の定義 (2.4.11)，および $I_{\pm 1/3}(z)$ の定義 (2.4.10) を用いて展開すると，

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n! \Gamma(\frac{2}{3} + n) 3^{2n}} - \frac{1}{3^{4/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n! \Gamma(\frac{4}{3} + n) 3^{2n}} \quad (2.4.26)$$

となるが，これは，(2.4.25) 式の Airy 関数を，(2.4.21) 式を用いて展開したものと一致する．この意味で Airy 関数は x の整関数である．もっともこの展開式は，方程式 (2.4.7) で

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{3n+1} \quad (2.4.27)$$

とおき，代入してから x の冪をそろえ，すべての係数をゼロとおくと，係数 C_n , D_n に関する漸化式を得るので，初期値，

$$C_0 = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})}, \quad D_0 = -\frac{1}{3^{4/3} \Gamma(\frac{4}{3})} \left(= -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \right) \quad (2.4.28)$$

を与えると容易に求めることができる．

なお，この関数の $x \rightarrow -\infty$ での漸近形は，Bessel 関数 $J_\nu(z)$ のそれから，

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{\sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \quad (2.4.29)$$

と求められ， x が $-\infty$ に近づくとつれ，振動周期がゆっくりと小さくなりながら振幅の方もゆっくりとゼロに近づき振動を繰り返すことになる．なお，Airy 関数には $x \rightarrow \infty$ で発散する第 2 種 Airy 関数; $\text{Bi}(x)$ というのもあるが，ここでは必要もないので触れないことにする．以下の図 3 にこの Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ のグラフを示す．初めはすべての部分を (2.4.26) の展開式を用いて書こうとしたが， x の絶対値が大きくなると数値的に発散してしまうので，ここでは， $-50 \leq x \leq -14$ までを (2.4.29) の漸近式， $-14 \leq x \leq 5$ までを (2.4.26) の展開式， $5 \leq x \leq 25$ までを (2.4.16) の漸近式を用いて描いた．

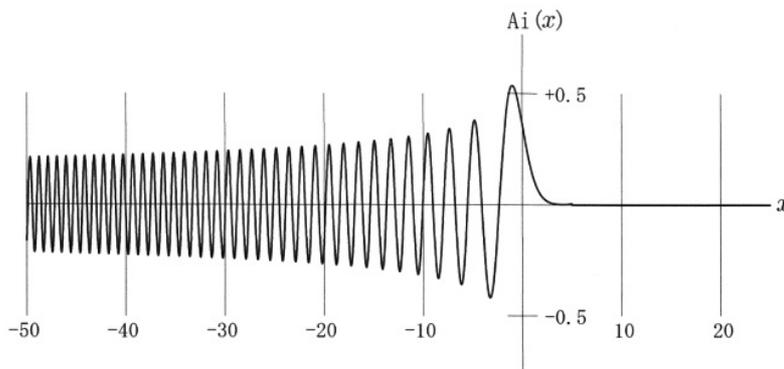


図 3 Airy 関数 $\text{Ai}(x)$

2.4.2 Airy 関数の積分表示

実は，Airy 関数は Bessel 関数で表すよりも Airy 積分で表す方がより簡単である．この関数は，

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{1}{3}t^3 - xt} dt \quad (2.4.30)$$

と積分で表すことができる．ここに，積分路は，複素平面上で t の偏角が $-\pi/3$ の無限遠から，偏角が $+\pi/3$ の無限遠までとする．式で表すと

$$\int_C = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{Me^{-(\pi/3)i}}^{Me^{(\pi/3)i}}, \quad \text{or} \quad = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{Me^{(\pi/3)i}} - \int_0^{Me^{-(\pi/3)i}} \right) \quad (2.4.31)$$

となる．この積分は積分路の両端で $e^{\frac{1}{3}t^3} \rightarrow e^{-\frac{1}{3}|t|^3}$ となるので，収束性は非常によく， x を複素数 z に拡張することもできる．この積分で表された関数がこれまで扱ってきた Airy 関数と一致することを示そう．まず，この積分表示が方程式 (2.4.7) を満たすことは，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x\right)\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (t^2 - x)e^{\frac{1}{3}t^3 - xt} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} e^{\frac{1}{3}t^3 - xt} \Big|_{Me^{-(\pi/3)i}}^{Me^{(\pi/3)i}} = 0 \quad (2.4.32)$$

となることからわかる．つぎに，この積分表示を x で展開すると (2.4.26) 式になることを示そう．まず， e^{-xt} の部分を Taylor 展開して，和と積分の順序が交換できるとし，

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{1}{3}t^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xt)^k}{k!} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\int_C e^{\frac{1}{3}t^3} t^k dt \right) x^k \quad (2.4.33)$$

となるが，この積分路を (2.4.31) 式の最後の形とし， $t \rightarrow e^{(\pi/3)i}t$ ，および $t \rightarrow e^{-(\pi/3)i}t$ と置き直すと，

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin\left(\frac{1}{3}(k+1)\pi\right) \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}t^3} t^k dt \right) x^k \quad (2.4.34)$$

となる．ここで，この積分の部分は $\frac{1}{3}t^3 = \xi$ と変数変換すると，gamma 関数の定義式になるので，

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}t^3} t^k dt = 3^{\frac{1}{3}(k-2)} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\frac{1}{3}(k-2)} d\xi = 3^{\frac{1}{3}(k-2)} \Gamma\left(\frac{1}{3}(k+1)\right) \quad (2.4.35)$$

となる．また，分母にある $k!$ は gamma 関数の 3 倍数公式を用いて，

$$k! = \Gamma(k+1) = \frac{3^{k+1}}{2\pi\sqrt{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}(k+1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}(k+2)\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}(k+3)\right) \quad (2.4.36)$$

となるので，(2.4.34) 式は

$$\text{Ai}(x) = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{-\frac{1}{3}(2k+5)} \sin\left(\frac{1}{3}(k+1)\pi\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}(k+2)\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}(k+3)\right)} x^k \quad (2.4.37)$$

となる．ここで， n を非負整数として， $k = 3n$ の場合， $k = 3n+1$ の場合と $k = 3n+2$ の場合の 3 通りに分解してみる．もっとも， $k = 3n+2$ の場合は上の式の \sin の部分がゼロになるので，残りの 2 通りを調べればよい． $k = 3n$ の場合は，

$$\frac{1}{3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n! \Gamma\left(\frac{2}{3} + n\right) 3^{2n}}$$

となるが，これは (2.4.26) 式の第 1 項目に他ならない．また， $k = 3n+1$ の場合は，

$$-\frac{1}{3^{4/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n! \Gamma\left(\frac{4}{3} + n\right) 3^{2n}}$$

となり，これは (2.4.26) 式の第 2 項目である．かくして，これらの和として (2.4.26) 式が再現される．

Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ の積分表示式 (2.4.30) では積分路を複素 t 平面の偏角が $-\pi/3$ の無限遠から， $\pi/3$ の無限遠までとしたが，実際は， t^3 の実部が負であればよいので，厳密に言えば，偏角が $-\pi/2$ から $-\pi/6$ までの間の無限遠から，偏角が $\pi/6$ から $\pi/2$ までの間の無限遠までとすることができる．ここで，ぎりぎりの $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで，つまり虚軸に沿った積分路とした場合を考える．(2.4.30) 式で $t \rightarrow it$ と置くと，

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{1}{3}t^3 + xt)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{1}{3}t^3 + xt)} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (2.4.38)$$

と実積分で表されることになる．ただし，この積分表示にした場合は，収束性がかなりの程度落ちることを覚悟しなければならない．まず，この積分の被積分関数は $t \rightarrow \infty$ で収束しないが，積分自体は，

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = \frac{1}{t^2 + x} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2t}{(t^2 + x)^2} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (2.4.39)$$

と部分積分することでその収束性が示される。また、これが方程式 (2.4.7) を満たすことは、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x\right)\text{Ai}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (t^2 + x) \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = -\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \Big|_0^\infty \quad (2.4.40)$$

となり、この最後の項は $t=0$ で明らかにゼロ、また、 $t \rightarrow \infty$ でも超関数的にはゼロとみなせ、きわどいところで、(2.4.7) 式を満たすことになる。

さらに、この (2.4.38) 式を用いて変数 x についての展開式を作ると 1 次の項まではうまく計算ができ、(2.4.15) 式が再現されるので、この積分表示 (2.4.38) 式が Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ と一致することが保障される。しかし、それ以上の項を求めようとするとき発散積分になってしまい実行不能に陥る。これは、(2.4.33) 式で行ったような和と積分の順序変更ができなくなるからである。また、この (2.4.38) 式は、変数 x に少しでも虚数部を持たせると e^{ixt} の部分が t の値によって発散してしまう。したがって、必ず実数 x に制限し、収束性に注意して使えば、この積分表示式は使い易い式と言える。

2.4.3 Airy 関数の直交性と完全性

Airy 関数の直交性はちょっと変わっている。量子論的調和振動子、井戸型ポテンシャル、水素原子等の電子が有限領域に局在する問題では、電子が持つエネルギーは固有値として離散的、すなわち飛び飛びに決まり、それらに属する固有関数としての波動関数は直交性を持つ。ここで扱った問題の場合、エネルギーはどこに消えてしまったのだろうか。(2.4.6) (2.4.3) 式をさかのぼるとエネルギーは座標 x のところに和の形で入っていたことになる。ここで、(2.4.3) 式のように x を平行移動するのは辞めにして、無次元化したエネルギーを

$$\xi = \frac{V(0) - E}{\ell V'(0)} \quad (2.4.41)$$

と定義し、この ξ と無次元化した x を用いて、固有関数としての波動関数を表すと $\psi = \text{Ai}(x + \xi)$ となる。この場合は電子が動く範囲は無次元領域なので、エネルギーは連続固有値となり、固有関数同士の直交性は Kronecker- δ ではなく、Dirac- δ になるはずである。実際、(2.4.38) の積分表示式を用いると 2 個のエネルギー固有値 ξ, ξ' に属する Airy 関数の直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x + \xi) \text{Ai}(x + \xi') dx = \delta(\xi - \xi') \quad (2.4.42)$$

を容易に示すことができる。この左辺に (2.4.38) 式の指数関数を用いた方を代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x + \xi) \text{Ai}(x + \xi') dx = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i[\frac{1}{3}(t^3+t'^3)+(x+\xi)t+(x+\xi')t']} dt dt' dx \quad (2.4.43)$$

となるが、このうちの x 積分だけをとりだすと、超関数公式を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+t')x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{i(t+t')x}}{i(t+t')} \Big|_{-M}^M = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin((t+t')M)}{\pi(t+t')} = 2\pi \delta(t+t') \quad (2.4.44)$$

となるので、(2.4.43) 式の積分は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x + \xi) \text{Ai}(x + \xi') dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi - \xi')t} dt \quad (2.4.45)$$

となり、この積分も (2.4.44) 式と同様に、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi - \xi')t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin((\xi - \xi')M)}{\pi(\xi - \xi')} = \delta(\xi - \xi') \quad (2.4.46)$$

となるので, (2.4.42) の直交性の式がいつも簡単に証明される. また, この式は変数の役目を入れ替えると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x + \xi)\text{Ai}(x' + \xi)d\xi = \delta(x - x') \quad (2.4.47)$$

となり, これは完全性の式と見做されるので, $(-\infty, \infty)$ で積分可能な任意の連続関数 $f(x)$ について, 変換,

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(\xi + x)f(x)dx \quad (2.4.48)$$

を施すと, その逆変換,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x + \xi)g(\xi)d\xi \quad (2.4.49)$$

が可能となる. この変換は変換の核となる部分が $x + \xi$ と和の形で入るところが, 変わったところである.

参考までに, $(-\infty, \infty)$ で定義される Fourier 変換

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(\xi)d\xi \quad (2.4.50)$$

または, $[0, \infty)$ で定義される Fourier-Bessel 変換,

$$g(\xi) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(\xi x)f(x)xdx, \quad f(x) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(x\xi)g(\xi)\xi d\xi, \quad \nu > -1 \quad (2.4.51)$$

では, 核の部分はすべて $x\xi$ と積の形になっているので, ここで得られた $x + \xi$ という和で入る変換はまったく別のめずらしいタイプであることがわかる.

2.5 おわりに

岩波全書の「数学公式3」には, 1000本を超す Bessel 関数に関する公式が載っているが, Airy 関数(積分)は, p.181, p.188にある2本だけである. Airy 関数に関しては, 取り扱っている文献がほとんど存在しないことと, 例えあっても証明なしの公式羅列だけのものや, 明らかなミス, それも著者のミスなのか, 翻訳ミスあるいは入力ミスなのかわからないものが多い. この関数が活躍する場面はもっと他にもたくさんあるはずなので, ここでは, でき得る限り証明を入れ, ミスのない解説をするよう心掛けた.

微分方程式 (2.4.7) の解としての Airy 積分 (2.4.30) 式は実によく考えられたものと感心してしまう. 指数関数を使うことで, x 微分が積分変数 t の多項式に化けている. この考え方を拡張していくと, 例えば, 4階の微分方程式とその解,

$$\psi_{xxxx} + \alpha\psi_{xx} - x\psi = 0, \quad \psi(x) \simeq \int_D e^{\frac{1}{5}t^5 + \alpha\frac{1}{3}t^3 - xt} dt$$

というのも作れる. ここに, 積分路 D は t の偏角が $-\pi/5$ の無限遠から, 偏角 $\pi/5$ の無限遠までとする. ただ, こんなことを無闇にやってみてもその応用例が作れないと拡張する意味がない. やはり, 意義ある拡張などというものは一朝一夕には作れないものなのだろう.

なお, Airy 積分に関しては, 森本安夫氏が「WKB 近似とトンネル効果」数学・物理通信 3 巻 3 号 (2013 年 3 月) に書かれている. ここでは, Bessel 関数を一切使わずに Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ の漸近形を求めており, 参考になる.

謝辞

この稿を書くにあたり, 京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただきコメントをいただきました. ここに謹んで感謝いたします.

編集後記

皆様お元気でお過ごしのことと存じます。

つい1週間ほど前は夏の太陽の輝く晴れの日もありましたが、先日梅雨入りしてからは急に涼しくなり、雨や曇りの毎日です。このために健康の維持が大変です。

また、日本全体の気候を見るに北海道の各地が30から35度前後とテレビで言っており、この夏、天候の異常ぶりが気になります。

ところで、間もなく4年に一度開かれるサッカーワールドカップが始まるためか、日本中どここのチャンネルもサッカー関連の放送ばかりです。日本はベストエイトを目指しているとか。そんな中で開催国のブラジルでは深刻な貧困の問題や環境問題をほったらかしにして何がサッカーだ、とばかりにデモや交通ストが行われているといます。治安は大丈夫でしょうか。

余談が長くなりましたが、おかげさまで「数学・物理通信」4巻3号を発行できることは喜ばしいことです。近頃は論文の応募数では数学分野よりも物理分野の方々の投稿が多いようです。もっともそれは両分野の特性によるのかもしれませんが。

私の関係する数学の分野の大学の理工系学部の微分積分学のテキストも書き換えが必要な時期が来ているような気がします。この試みについては近いうちにこの「数学・物理通信」で発表したいと思っています。

(新関章三)