数学・物理通信

4巻5号　　2014年9月

編集　新関章三・矢野　忠

2014 年 9 月 10 日

目 次

Contents

Bessel 関数と Aharonov-Bohm 効果

Bessel function and Aharonov-Bohm Effect

世戸 憲治 [1)]
Kenji SETO[2)]

1.1 はじめに

Aharonov-Bohm 効果は不思議な現象である．古典力学では，磁場のないところを電子が通過してもその動きに影響が出ることはないが，量子力学では磁場がなくともそのベクトルポテンシャルさえ存在すれば電子の動きはそれに左右されるということである．

1959 年にこの論文が発表された当初は，たくさんの疑義が起こりその信憑性が疑われた．すなわち，Aharonov と Bohm はこの論文の中で，無限に長く，しかもその太さは極限的にゼロに近いソレノイドを想定し，このソレノイドに対し垂直に入射する電子波の問題を Bessel 関数を用いて解いている．しかし，これが批判される的でもあった．第 1 に無限に長いソレノイドは現実に存在しないし，第 2 にその太さがゼロというのでは，そこでの磁束密度はデルタ関数的になってしまうので，そんなものは数学的トリックにすぎないというものである．しかし，この論文が発表された 27 年も後の 1986 年になって，日本人の外村彰らによるリング状ソレノイドを用いた実験によって，この効果の正しいことが検証された．

量子力学を初めて学んだとき Schrödinger 方程式というのが不本意ながら腑に落ちないで悩んだことがある．第 1 に，この方程式はなぜ線形なのか．単に解きやすくするためなのか．それも，なぜ斉次線形なのか．第 2 に，エネルギーやポテンシャルなどという古典論では方程式を解きやすくするために 2 次的に導入されたものが，なぜこの方程式には初めから入ってくるのか．もしかすると，もっと基本的なものがより深いところにあって，Schrödinger 方程式はそこから 2 次的にでてくるものではないかという呪縛に襲われてしまった．これは私のみならず量子力学を学ぶ人，誰もが抱く疑問ではないだろうか．この点で Aharonov-Bohm 効果は，ここで述べた疑問を払拭するのに少しは役立ったと言えそうだが，もう少し解析しやすいものであればよかったのにと思う．Schrödinger 方程式が提唱されたのが 1926 年，それから 33 年も経ってようやく Aharonov-Bohm 効果が提起され，それからさらに 27 年も経ってから実験的に確かめられたというのは遅すぎではないか．それだけ，理論的にも実験的にも難しかったということか．

この Aharonov-Bohm 効果については，大貫義郎先生が書かれた本「物理学最前線 9」（共立出版 1987）に詳しく紹介されている．この本の中にも，無限に長い太さゼロのソレノイドを用いた場合の計算例が載っている．これを勉強したときに，ソレノイドの太さを有限の値にしたときも同じように計算できるはずと思い込み，Bessel 関数の練習問題としてやってみた．結果は出るには出たが，和の形が残ってしまいコンパクトにまとめることはできなかった．しかし，途中の計算は大貫先生のものより丁寧に書いたので，Aharonov-Bohm 効果を初めて勉強される方の参考になればと願うものである．

[1)] 北海学園大学名誉教授
[2)] seto@pony.ocn.ne.jp

1.2 方程式の導入

有限の半径 r_0 の無限に長いソレノイドを考え，このソレノイドを大きさ Φ の磁束が貫いているものとする．デカルト座標 (x, y, z) の z 軸がソレノイドの中心軸と重なるようにとり，ソレノイドからの距離 r を

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2.1}$$

とする．このとき，点 $\boldsymbol{x}$ でのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Big(-\dfrac{y\Phi}{2\pi r^2}, \dfrac{x\Phi}{2\pi r^2}, 0 \Big), & r \geq r_0 \\ \Big(-\dfrac{y\Phi}{2\pi {r_0}^2}, \dfrac{x\Phi}{2\pi {r_0}^2}, 0 \Big), & r < r_0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

で与えられ，これから磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (0, \quad 0, \quad 0), & r \geq r_0 \\ \Big(0, 0, \dfrac{\Phi}{\pi {r_0}^2} \Big), & r < r_0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

と，ソレノイドの外側ではベクトルポテンシャルは存在するが磁束密度はゼロとなる．したがって，古典的に考えれば，ソレノイドの外側を電子が通っても何の影響も及ぼさないが，量子論ではそうはいかないことをこれから解き明かしていく．

ここでは，質量 μ, 電荷 e の電子が x 軸の正方向から，z 軸上にあるソレノイドに向かって入射したときどのような散乱が起きるかを，時間に依存しない場合の Schrödinger 方程式

$$H\Psi = E\Psi \tag{1.2.4}$$

を用いて解析していく．ここに，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の中を運動するときの Hamiltonian H は,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Big(\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie}{c\hbar} \boldsymbol{A} \Big)^2 \tag{1.2.5}$$

で与えられる．c は光速度である．この Hamiltonian を (1.2.2) 式の $\boldsymbol{A}$ を用いて，2 次元の極座標 (r, θ) に変換すると,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Big(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \Big)^2 \Big] \tag{1.2.6}$$

となる．ここに，無次元定数 α を

$$\alpha = -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \tag{1.2.7}$$

と定義した．これで，ベクトルポテンシャルの効果は 1 個のパラメータ α に集約されたことになる．

つぎに入射波を決めておく必要があるが，その前に，量子論における「流れのベクトル」を定義しておく．時間依存型の Schrödinger 方程式

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{1.2.8}$$

を用いると，連続の方程式

$$\frac{\partial (\Psi^* \Psi)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{1.2.9}$$

を導くことができる．ここに，流れのベクトル $\boldsymbol{j}$ を

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2i\mu} \Big[\Psi^* \Big(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{ie}{c\hbar} \boldsymbol{A} \Big) \Psi - \Psi^* \Big(\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{ie}{c\hbar} \boldsymbol{A} \Big)^* \Psi \Big] = \frac{\hbar}{2i\mu} \big(\Psi^* \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \Psi - \Psi^* \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \Psi \big) - \frac{e}{\mu c} \boldsymbol{A} \Psi^* \Psi \tag{1.2.10}$$

と定義する．ここで，入射波 Ψ_{inc} を，正の定数 k を用いて,

$$\Psi_{inc} = e^{-ikx - i\alpha\theta}, \qquad |\theta| < \pi \tag{1.2.11}$$

と導入する．この入射波を用いて流れのベクトル (1.2.10) を求めてみると

$$\boldsymbol{j}_{inc} = (-\hbar k/\mu, 0, 0) \tag{1.2.12}$$

となって，これは速度 $\hbar k/\mu$ で x 軸の正方向から負方向に向かって進む波を表す．ベクトルポテンシャルが存在しないときは，入射波は e^{-ikx} でよいが，これが存在する場合は，(1.2.10) 式のベクトルポテンシャルの項を相殺させるために，入射波には (1.2.11) 式のように α 依存性を持たせる必要がでてくることに注意する．

ここで，速度 $\hbar k/\mu$ で進む電子のエネルギー E を

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu}k^2 \tag{1.2.13}$$

とおくと，解くべき方程式は (1.2.4) (1.2.6) 式より，

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\alpha\Big)^2 + k^2\Big]\varPsi = 0 \tag{1.2.14}$$

となるが，ここで一つ注意が必要である．実は，ベクトルポテンシャルから派生するパラメータ α を消去してしまうことが可能である．実際，波動関数に位相変換 $\varPsi \ \rightarrow \ e^{-i\alpha\theta}\varPsi$ を施すとこのパラメータは見かけ上消えてしまうが，その代わり，α が整数でない限り波動関数は多価関数になってしまう．逆の言い方をすると，α が整数の場合は，波動関数の一価性を保ちながらベクトルポテンシャルの影響を完全に消し去ることができる．そこで，α が整数とは限らない一般の場合に対し，α の Gauss 記号を取ったものを $n = [\alpha]$ とし，変換

$$\varPsi \ \rightarrow \ e^{-in\theta}\varPsi, \qquad \alpha \ \rightarrow \ n + \alpha \tag{1.2.15}$$

を施す．この新しい α の範囲は $0 \leq \alpha < 1$ となる．このとき，方程式 (1.2.14) はこの変換に対し不変であるが， (1.2.11) で定義された入射波も不変であることを注意しておく．それゆえ以後，すべての $\varPsi$, α はこの定義し直されたものとして話を進めることにする．また，この入射波は $\lim_{\theta\to\pm\pi}\varPsi_{inc}$ で一意的ではなくなるが，これは方程式 (1.2.14) に従う解ではないので，入射波として採用することはかまわない．一価性を持たなければならないのはこれに散乱波を加えた方程式 (1.2.14) の解の方である．

1.3 散乱問題の解

ここまで準備した上で方程式 (1.2.14) を解いてみよう．まず波動関数 $\varPsi$ を，整数 m を用いて変数分離し，

$$\varPsi(r,\theta) = R(r)e^{im\theta} \tag{1.3.1}$$

と置いてみると，方程式は

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}(m+\alpha)^2 + k^2\Big]R = 0 \tag{1.3.2}$$

となる．この方程式の解としては，Bessel 関数 $J_{|m+\alpha|}(kr)$, Neumann 関数 $N_{|m+\alpha|}(kr)$，第 1 種，第 2 種 Hankel 関数 $H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)$, $H^{(2)}_{|m+\alpha|}(kr)$ が存在するが，ここでは，$J_{|m+\alpha|}(kr)$ と $H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)$ を 2 個の独立な解として採用する．したがって，A_m，B_m を任意定数として，R の解は

$$R(r) = A_m J_{|m+\alpha|}(kr) + B_m H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr) \tag{1.3.3}$$

と表される．以下では，後の計算がスムースに運ぶよう波数 k に対して，正の微小な虚数部 ϵ を持つものとして

$$k \ \rightarrow \ k + i\epsilon \tag{1.3.4}$$

として扱うことにする．これは断熱近似の一種である．

ここで，ソレノイドの表面は遮蔽されていて電子波は内部に侵入しないものとして，波動関数は $r = r_0$ のところでゼロになるものと仮定する．すなわち，

$$A_m J_{|m+\alpha|}(kr_0) + B_m H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0) = 0 \tag{1.3.5}$$

となり，これより係数 B_m を消去して (1.3.3) 式を

$$R(r) = A_m\left[J_{|m+\alpha|}(kr) - \frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)\right] \tag{1.3.6}$$

と書いておく．ここで，Hankel 関数は実軸上にゼロ点を持たないことに注意する．

さてここで，方程式 (1.2.14) の一般解は，ここで求めた解の整数 m による重ね合せとして得られるので，

$$\varPsi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\theta}\left[J_{|m+\alpha|}(kr) - \frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)\right] \tag{1.3.7}$$

と表される．あと残る仕事はこの解を入射波と散乱波に分解することである．

デルタ関数に関する公式

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} = \delta(\theta-\theta'), \qquad |\theta|,\ |\theta'| < \pi \tag{1.3.8}$$

を用いて (1.2.11) 式の入射波 $\varPsi_{inc}$ を

$$\varPsi_{inc} = \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta-\theta')e^{-ikr\cos\theta' - i\alpha\theta'}d\theta' = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta}\int_0^{\pi}\cos[(m+\alpha)\theta']e^{-ikr\cos\theta'}d\theta' \tag{1.3.9}$$

と変形しておく．これは入射波を Fourier 級数に展開した式と考えられる [3]．

ここで，“*Higher Transcendental Functions*”, ed.Erdélyi *et.al.* Vol.2, p.21, (31), MacGrawHill, (1953) から Bessel 関数の積分表示式

$$J_\nu(z) = \frac{e^{i\nu\pi/2}}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)dt - \sin(\nu\pi)\int_0^{\infty} e^{-\nu t + iz\cosh t}dt\Big], \qquad 0 < \arg z < \pi \tag{1.3.10}$$

を引用する [4]．この公式を適用するには，$\arg z > 0$ でなければならないが，$z = kr$ としたとき，(1.3.4) 式により，k には正の虚数部を持たせているので，ここでの処方箋として使うことができる．(1.3.7) 式の波動関数のうち，$J_{|m+\alpha|}(kr)$ の方だけにこの表示式を適用すると

$$\begin{aligned}\varPsi =& \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i|m+\alpha|\pi/2}A_m}{\pi}e^{im\theta}\int_0^{\pi}\cos(|m+\alpha|t)e^{-ikr\cos t}dt \\ -&\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i|m+\alpha|\pi/2}A_m e^{im\theta}\left[\frac{\sin(|m+\alpha|\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-|m+\alpha|t + ikr\cosh t}dt + e^{-i|m+\alpha|\pi/2}\frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)\right]\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

を得る．この式と (1.3.9) の入射波の式とを比べると，すべての m に対し，

$$A_m = e^{-i|m+\alpha|\pi/2} \tag{1.3.12}$$

[3] $\alpha = 0$ の場合，この式は平面波を球面波で展開する式の 2 次元版： $e^{ikr\cos\theta} = J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(kr)\cos(m\theta)$ となる．

[4] この式は，Bessel 関数 $J_\nu(z)$ を変形 Bessel 関数 $I_\nu(z)$ に $I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(iz)$ を用いて変換し,「数学公式 3」(岩波全書) p.186, 下から 3 番目の式を使ってから元の Bessel 関数に戻すことでも得られる．

ととることにすると，この式の右辺第 1 項はちょうど入射波になることがわかる．したがって残りの第 2 項目が散乱波となるので，これを Ψ_{scat} と書くことにすると，

$$\Psi_{scat} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta}\left[\frac{\sin(|m+\alpha|\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-|m+\alpha|t+ikr\cosh t}dt + A_m \frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)\right] \tag{1.3.13}$$

が得られる．つぎに，この式に含まれる m の和をとることを考えるが，大括弧中の 2 項目に関しては難しいので，1 項目の方だけの和をとることにする．積分と和の順序が交換できるものとして，和の部分だけを抽出し，$-\infty$ から -1 までの部分と，0 から ∞ までの部分に分けて求めると，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(|m+\alpha|\pi)e^{im\theta-|m+\alpha|t} = \sin(\pi\alpha)\Big(\frac{e^{-\alpha t}}{1+e^{-t+i\theta}} + \frac{e^{\alpha t}}{1+e^{t+i\theta}}\Big) \tag{1.3.14}$$

となる．したがって，(1.3.13) 式大括弧中の 1 項目で和を取ったものは，

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(\frac{e^{-\alpha t}}{1+e^{-t+i\theta}} + \frac{e^{\alpha t}}{1+e^{t+i\theta}}\Big)e^{ikr\cosh t}dt = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha t+ikr\cosh t}}{1+e^{-t+i\theta}}dt \tag{1.3.15}$$

となるので，(1.3.13) 式は

$$\Psi_{scat} = -\left[\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha t+ikr\cosh t}}{1+e^{-t+i\theta}}dt + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\theta}\frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr)\right] \tag{1.3.16}$$

と書き換えられる．

最終的にはこの式から，散乱における微分断面積を求める．そのため，r が十分に大きいところでの漸近形を求める必要がある．(1.3.4) 式のように波数 k には正の虚部を持たせていることから，r が十分大きいとき，ikr の虚部も大きくなり，またその実部は負なので，上式 1 項目の積分において $e^{ikr\cosh t}$ のところは t の絶対値が大きくなるにつれ急激にゼロになると考えられる．したがって，この積分に寄与するのは t がゼロの近傍だけと考えられるので，この積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha t+ikr\cosh t}}{1+e^{-t+i\theta}}dt \approx \frac{1}{1+e^{i\theta}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikr\cosh t}dt = \frac{2}{1+e^{i\theta}}K_0(-ikr) \tag{1.3.17}$$

と近似してかまわない．この最後の等式にある K_0 は第 2 種変形 Bessel 関数で,「数学公式 3」p.187 にある公式

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\nu t-z\cosh t}dt \tag{1.3.18}$$

を用いた．さらに，この「数学公式 3」から変形 Bessel 関数 p.173 と Bessel 関数，Hankel 関数 p.154 の z が大きいときの漸近式，ただし，Bessel 関数 $J_\nu(z)$ は後で必要なため，

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}, \qquad J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\Big), \qquad H^{(1)}_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-(2\nu+1)\pi/4)} \tag{1.3.19}$$

を引用しておく．これら $K_\nu(z)$, $H^{(1)}_\nu(z)$ の漸近式を用いると (1.3.16) 式の散乱波の r が十分大きいときの漸近形は

$$\Psi_{scat} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi k}}e^{-\pi i/4}\left[i\frac{\sin(\pi\alpha)}{1+e^{i\theta}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}(A_m)^2 e^{im\theta}\frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}\right]\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{1.3.20}$$

となる．これを 2 次元散乱波の r が大きいところでの標準形

$$\Psi_{scat} \approx \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}}e^{ikr} \tag{1.3.21}$$

に直すと，角度依存部分 $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k}}e^{-\pi i/4}\left[i\frac{\sin(\pi\alpha)}{1+e^{i\theta}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}(A_m)^2 e^{im\theta}\frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}\right] \tag{1.3.22}$$

となる．これから散乱微分断面積 $\sigma(\theta)$ は，

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{\pi k}\left|i\frac{\sin(\pi\alpha)}{1+e^{i\theta}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}(A_m)^2 e^{im\theta}\frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)}\right|^2 \tag{1.3.23}$$

と求められる．これが有限の半径 r_0 を持つ無限に長いソレノイドにおける電子散乱における微分断面積である．

ここでソレノイドの太さを無限に小さくして $r_0 \to 0$ の極限をとると $\lim_{r_0\to 0} H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0) = \infty$ なので絶対値の中の 2 項目は消え，

$$\sigma(\theta) = \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k\cos^2(\theta/2)} \tag{1.3.24}$$

となる．これから $\alpha = 0$ の場合は散乱は起こらないが，$\alpha \neq 0$ の場合は散乱が起こる．これが Aharonov と Bohm が最初に得た結果である．

1.4 数値計算

微分断面積を表す (1.3.23) 式で m の和が残ってしまったのは残念であるが，ここで数値計算をした結果を示す．その前に，この微分断面積の α 依存性を明示して $\sigma(\theta,\alpha)$ と書くことにすると，対称性を表す式

$$\sigma(-\theta,0) = \sigma(\theta,0), \qquad \sigma(-\theta,1-\alpha) = \sigma(\theta,\alpha) \tag{1.4.1}$$

が成立する．この第 1 式は簡単で和変数 m の符号を替えるとよい．第 2 式については，この変換を施したあと，絶対値の中の 1 項目については，$\sin\big((1-\alpha)\pi\big) = \sin(\alpha\pi)$ なることと分母分子に $e^{i\theta}$ を掛け，2 項目については和変数 m の符号を替えてから，$m \to m+1$ と置き換える．全体に $e^{i\theta}$ がつくが，これは絶対値をとることで消えて元の定義式に戻る．この変換式から，$\alpha = 0,\ 1/2$ のとき，微分断面積は θ の偶関数となることがわかる．

数値計算をするとき，式に含まれるパラメータはできるだけ少ない方がよい．ここでは，(1.3.23) 式を r_0 で割った $\sigma(\theta)/r_0$ が α と kr_0 の 2 個のパラメータになるので，以下では，この $\sigma(\theta)/r_0$ を数値的に求めることにする．もう一つ問題となるのは，m の和をどこまでとるかである．Bessel 関数 $J_\nu(z)$ は，z を固定して考えたとき，ν の値が z を超えるあたりから急速にゼロに近づき，逆に $H^{(1)}_\nu(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$ の方はその虚部に Neumann 関数を含むため急速に大きくなる．ここでは，kr_0 に 10 を加え整数化したものを $M = [kr_0 + 10]$ とし，m の和は $-M$ から $+M$ までとることにした．

以下の図 1, 2 に $kr_0 = 1,\ \ \alpha = 1/4,\ 1/2$ の場合の図を示す．これらの図の中で，赤色で描かれた曲線が，これらパラメータの各値に対応するものである．また，これと比較するために $\alpha = 0$ の場合，すなわち Aharonov-Bohm 効果が起こらない場合の曲線を青色で描いておいた．図 3, 4 は $kr_0 = 0.1,\ 10,\ \ \alpha = 1/4$ の場合のグラフである．

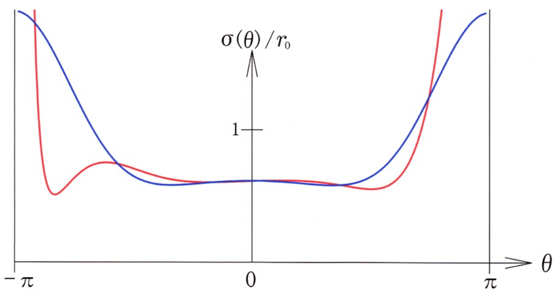


図 1　$kr_0 = 1,\ \ \alpha = 1/4$

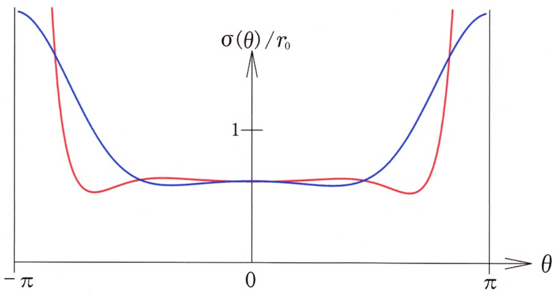


図 2　$kr_0 = 1,\ \ \alpha = 1/2$

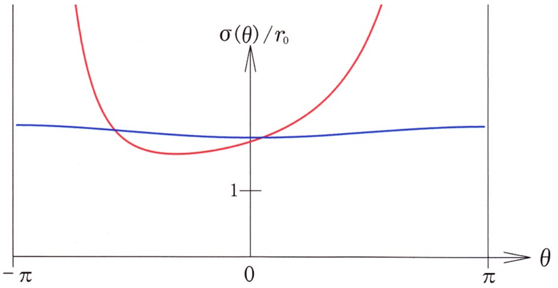


図 3　　$kr_0 = 0.1,\ \ \alpha = 1/4$

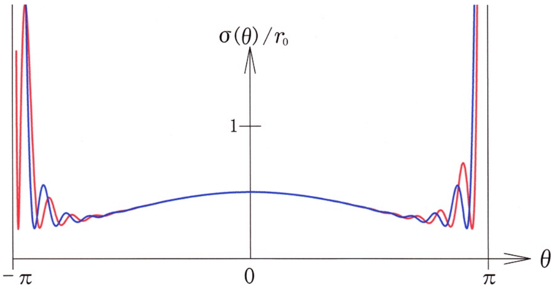


図 4　　$kr_0 = 10,\ \ \alpha = 1/4$

(1.4.1) 式で示したとおり，図 1 の $\alpha = 1/4$ の場合は，θ に関し左右非対称になるが，$\alpha = 1/2$ とした図 2 では左右対称となる．また，この図 1 を $\theta = 0$ の周りに左右を反転させると，$\alpha = 3/4$ の場合のグラフになる．

図 3 は kr_0 の値を 0.1 と小さくした場合であるが，この図では赤線と青線の大きな違いから，Aharonov-Bohm 効果が顕著に現れていることがわかる．しかし，図 4 のように $kr_0 = 10$ と大きくすると，この効果は θ が $\pm\pi$ に近い後方散乱でしか現れない．このことは，kr_0 が大きくなるにしたがい電子の動きは粒子的になり，古典論に近づくことを意味する．なお，図 3 と図 4 では縦軸のスケールが違っていることに注意する．

1.5　おわりに

最後に，本筋とは関係ないことを述べておく．初めに (1.3.23) 式を得たときは，このまま m の和をとることは無理としても，kr_0 が十分に大きい場合は， Bessel 関数の漸近形が使えるので和をとることが可能であろうと考えた．電子の波長は非常に小さいという理由から多くの場合でこの条件は満たされるであろう．そこで (1.3.19) 式の $J_\nu(z)$，$H_\nu^{(1)}(z)$ の漸近形を用いて，残された和の部分を求めてみると

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (A_m)^2 e^{im\theta} \frac{J_{|m+\alpha|}(kr_0)}{H^{(1)}_{|m+\alpha|}(kr_0)} \approx e^{-ikr_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(m\theta - \frac{1}{2}|m+\alpha|\pi + \frac{1}{4}\pi)} \cos\left(kr_0 - \frac{2|m+\alpha|+1}{4}\pi\right)$$
$$= \pi i e^{-2ikr_0}\delta(\theta) - i\frac{\sin(\alpha\pi)}{1+e^{i\theta}} \tag{1.5.1}$$

となって驚くなかれ，ちょうど 1 項目の符号を替えたものが出てきてキャンセルが起こり，デルタ関数の部分だけが残る．これは明らかに間違いである．この理由がよくわからなかったので，中西襄先生にお伺いしたところ，つぎのような返事が返ってきた.「和をとってから漸近形にしたものと，先に各項の漸近形をとってから和を求めたものは一般には一致しない.」ということで，つぎのような例を示された．

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1+(-\log x)^m}{m!} = e + e^{-\log x} = e + \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} e \tag{1.5.2}$$

となるが，先に各項の漸近形をとってしまうとこの和は $1/x$ となり，$x \to \infty$ でゼロとなる．よく，和を取ることと積分することの順序は交換できない場合があるというのと同じことらしい．しかし，よく考えてみると，Bessel 関数の漸近形で変数 z が十分に大きいときというのは何に比べて大きいのか．地球は大きいかと問われても比べるものがないと答えようがないのと同じである．Bessel 関数の漸近形というのは，変数 z が次数の ν に比べて十分に大きいところで使うものである．ここで問題にしているのは，z を固定し，次数についてマイナス無限からプラス無限までの和をとることであるから，初めから漸近形を使うのは無理な話だったのである．

ここまできて，(1.3.13) 式の Ψ_{scat} から，r が十分大きいときの漸近形 (1.3.20) 式を得るのに，1 項目については和をとってから漸近形を求め，2 項目については和がとれなかったために，和を残したまま漸近形にしてしまった．この処置は正しかったのだろうか心配になってきた．そこで，この 1 項目について先に漸近形にしてから後で和をとっても同じ結果になるかを確かめてみた．(1.3.13) 式の 1 項目にある積分で，

$$\int_0^\infty e^{-|m+\alpha|t + ikr\cosh t}dt \approx \int_0^\infty e^{ikr\cosh t}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{ikr\cosh t}dt = K_0(-ikr) \tag{1.5.3}$$

と r が十分大きいときの漸近形にし，残る和を求めてみると，

$$-\frac{K_0(-ikr)}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta}\sin(|m+\alpha|\pi) = -\frac{2\sin(\alpha\pi)K_0(-ikr)}{\pi(1+e^{i\theta})} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{\sin(\alpha\pi)e^{\pi i/4}}{1+e^{i\theta}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{1.5.4}$$

となって，漸近形 (1.3.20) 式の 1 項目とぴたりと一致する．2 項目については，和をとることはできなかったが，数値計算のところで述べたように，kr_0 の値を固定したとき，和をとるのは，無限和とはいえ実際は kr_0 より少し大きいところまでとれば十分なので，kr の値が kr_0 に比べ十分大きければ問題はないものと考えられる．

[**謝辞**]　今回もこの稿を書くにあたり，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，たくさんのコメントをいただきました．ここに謹んで感謝いたします.

$(-1)^2 = +1$ と $i^2 = -1$

$(-1)^2 = +1$ **and** $i^2 = -1$

森田克貞 [5)]
Katsusada MORITA[6)]

要約

整数に対する「掛け算の規則」から出発すれば，整数を (ゼロを含む) 自然数の順序対の同値類として定義する，整数に対する坪郷の方法 (1967) が結果として導かれることを示す．この方法では，複素数に対する Hamilton の記法と類似の計算法が適用でき，当たり前の式 $(-1)^2 = +1$ は虚数単位 i に対する定義式 $i^2 = -1$ と同じように定義と見なせる．この方法は実数の場合にも一般化される．いずれの場合も，分配の法則は既知のものから，単なる代数計算で示せる．普通，加法に関する逆元の定義と分配の法則を使えば,「掛け算の規則」が説明できると言われているが，坪郷の方法は，この逆，即ち,「掛け算の規則」が分配の法則を導くと言う論理になっている．従って，分配の法則→「掛け算の規則」→分配の法則という，論理のループが存在することになる．

2.1 掛け算の規則

中学生になれば，誰でも，整数や分数に対する，次の「掛け算の規則」を習う．

$$\begin{cases} \text{正数} \times \text{正数} = \text{正数} \\ \text{正数} \times \text{負数} = \text{負数} \\ \text{負数} \times \text{正数} = \text{負数} \\ \text{負数} \times \text{負数} = \text{正数} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

さらに，無理数や実数を習うと，上の正数・負数は正の実数・負の実数と解釈される．整数に対するこの「掛け算の規則」を式で表すと次のようになる．今，a, b, c, d を自然数として，

$$\begin{cases} ac > 0 \longrightarrow \text{正の整数同士の積は正の整数} & \text{(2.1.2a)} \\ a(-d) = -ad < 0 \longrightarrow \text{正の整数と負の整数の積は負の整数} & \text{(2.1.2b)} \\ (-b)c = -bc < 0 \longrightarrow \text{負の整数と正の整数の積は負の整数} & \text{(2.1.2c)} \\ (-b)(-d) = bd > 0 \longrightarrow \text{負の整数同士の積は正の整数} & \text{(2.1.2d)} \end{cases}$$

[5)] 名古屋大学大学院理学研究科物理学教室客員研究員
[6)] kmorita@cello.ocn.ne.jp

一般に，負号を含む「掛け算の規則」はすべて，加法に関する逆元の定義と分配の法則から導かれるが，負号の約束 $-a = (-1)a$ と，整数の積の交換則・結合則を使えば，負号を含む「掛け算の規則」 (2.1.2b, c) は説明できる．(2.1.2d) で $b = d = 1$ と置くと，

$$(-1)^2 = +1 \tag{2.1.3}$$

を与えるので，任意の自然数 $b > 1, d > 1$ に対する (2.1.2d) も，負号の約束と整数の積の性質だけから説明できる．従って，(2.1.2d) を代表する (2.1.3) が一般に「マイナス × マイナス=プラス」を意味する．普通，(2.1.3) は (-1) が 1 の加法に関する逆元であるという定義および分配の法則から，

$$0 = (1 + (-1))(-1) = -1 + (-1)^2 \tag{2.1.4}$$

のように示せる．(実数の場合も含めて) 以上を，この小論では，分配の法則 → 「掛け算の規則」と理解する．なお，(2.1.2b) と (2.1.2c) は同等であるが，この小論では,「掛け算の規則」は 4 通り (2.1.2a∼d) からなると見なす.

さて，(2.1.2a∼d) を 1 つの式に纏めることを考える．その方法には，2 通りある．まず，よく知られた絶対値の記号を使うやり方である．今，a を整数 (一般に実数) として，その絶対値を

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0 \to \mathrm{sgn}(a) = +1 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \to \mathrm{sgn}(a) = -1 \text{ のとき}) \\ 0 & (a = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

と定義すれば，(2.1.2a∼d) は 1 つの式

$$ab = \mathrm{sgn}(ab)|ab|, \quad \mathrm{sgn}(ab) = \mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(b) \tag{2.1.6}$$

に書き直せる．

この小論では，次節で，もう 1 つの方法を提案する．これは，坪郷の方法 [1] に導く——つまり，整数に対する（符号も含めた）積法則を与える——もので，(2.1.2a∼d) を負号を隠した形で 1 つの式に統合する．そのためには，同値類という考え方が基本的役割を果たすことが分かる．再び，整数の場合から始めよう．

2.2 自然数から整数へ

上の (2.1.6) は 1 つの式だけれど，それは見かけだけで，依然負号を含んでいるので，(2.1.2a∼d) を変形して，負号を含まない形に書き直すことを考える．そのためには，正の整数 a を $a = [a, 0]$，負の整数 $-b$ を $-b = [0, b]$ と表すのがもっとも自然であろう ($0 = -0$ だから，$a = b = 0$ と置いて，$0 = [0, 0]$ を得ることに注意しておく)．すると，(2.1.2a∼d) を次のように書き直せる．

$$\begin{cases} [a, 0][c, 0] = [ac, 0] \longrightarrow \text{正の整数同士の積は正の整数} & \text{(2.2.7a)} \\ [a, 0][0, d] = [0, ad] \longrightarrow \text{正の整数と負の整数の積は負の整数} & \text{(2.2.7b)} \\ [0, b][c, 0] = [0, bc] \longrightarrow \text{負の整数と正の整数の積は負の整数} & \text{(2.2.7c)} \\ [0, b][0, d] = [bd, 0] \longrightarrow \text{負の整数同士の積は正の整数} & \text{(2.2.7d)} \end{cases}$$

もちろん，a, b, c, d は自然数．このままでは，4 通りの「掛け算の規則」(2.1.2a∼d) をそのまま 4 つの式に書き直しただけに過ぎないが，以下で示すように，上の 4 つの式は 1 つの積法則に纏まる．従って，負号を隠す記法では,「掛け算の規則」は積法則の定義と同義になる．特に，(2.2.7d) で $b = d = 1$ と置けば，$[0, 1]^2 = [1, 0]$ が得られるが，$-1 = [0, 1], 1 = [1, 0]$ と置いたのだから，この結果は (2.1.3) に他ならない．すなわち，このア

プローチに成功すれば，(2.1.3) は定義と見なされるのである．ならば，分配の法則はどう考えるのだという疑問が直ぐ生まれる．これについては，自然数のペアの和を定義してから，改めて考える．

(2.1.2a∼d) を形式上 1 つの式 (2.1.6) に纏めたように，(2.2.7a∼d) を別のスタイルの 1 つの式に纏めることを考えよう．

(i) (2.2.7a) で，$a \to a-b, c \to c-d$ と置き変える．ただし，$a > b, c > d$ とする．

$$[a-b,0][c-d,0] = [(a-b)(c-d),0] \tag{2.2.8a}$$

(ii) (2.2.7b) で，$a \to a-b, d \to d-c$ と置き変える．ただし，$a > b, d > c$ とする．

$$[a-b,0][0,d-c] = [0,(a-b)(d-c)] \tag{2.2.8b}$$

(iii) (2.2.7c) で，$b \to b-a, c \to c-d$ と置き変える．ただし，$b > a, c > d$ とする．

$$[0,b-a][c-d,0] = [0,(b-a)(c-d)] \tag{2.2.8c}$$

(iv) 最後に (2.2.7d) で，$b \to b-a, d \to d-c$ と置き変える．ただし，$b > a, d > c$ とする．

$$[0,b-a][0,d-c] = [(b-a)(d-c),0] \tag{2.2.8d}$$

まず，(2.2.8a∼d) の左辺が同一の式になる条件は

$$[a-b,0] \quad = \quad [a-b+b,b] = [a,b], \qquad a > b \tag{2.2.9a}$$

$$[c-d,0] \quad = \quad [c-d+d,d] = [c,d], \qquad c > d \tag{2.2.9b}$$

$$[0,d-c] \quad = \quad [c,d-c+c] = [c,d], \qquad d > c \tag{2.2.9c}$$

$$[0,b-a] \quad = \quad [a,b-a+a] = [a,b], \qquad b > a \tag{2.2.9d}$$

であることが分かる．一般的に書けば，

$$[a,b] = [a',b'] \Longleftrightarrow a+b' = a'+b \tag{2.2.9e}$$

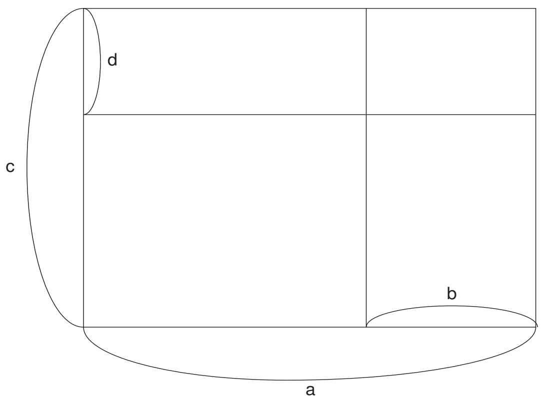
となる．[7] 自然数のペアを構成する成分に元々 0 が含まれていたから，(2.2.9a∼d) において，順に，$b=0, d=0, c=0, a=0$ の場合も含まれねばならない．それ故，(2.2.9e) は，ゼロを含む自然数に対して要求される．特に，$a'=b'=0$ と置けば，$[a,a]=[0,0]$．従って，(2.2.9a) および (2.2.9b) は，それぞれ，$a=b$ および $c=d$ の場合にも成り立つ．同様に，(2.2.9c) および (2.2.9d) は，それぞれ，$d=c$ および $b=a$ の場合にも成り立つ．今後，自然数というときには，0 も含むと理解されたい．このような条件が満たされるとき，(2.2.8a∼d) の左辺はすべて $[a,b][c,d]$ に等しいことが分かる．ただし，自然数 a と b，c と d の各々の大小関係まで含めれば，$2 \times 2 = 4$ 通りあることに変わりはない．次に，同じ条件 (2.2.9e) によって，(2.2.8a∼d) の右辺もすべて同一の式になるかどうか調べる．

[7] (2.2.9e) は，直ぐ後で述べるように，0 を含む自然数の順序対に対する，いわゆる同値関係で，普通，等号の代わりに $\sim$ という記号を使う．実際，(2.2.9e) が，反射律，対称律，推移律という同値律を満たすことは容易に分かる．今，$\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ を 0 を含む自然数の集合とすれば，$[a,b]$ 全体の集合は，$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ であるが，上の同値関係で類別した時の商集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ は同値類全体の集合で，各同値類から任意に代表元を選ぶ事が出来る．それを改めて，$[a,b]$ と書くと，$[a,b]$ は上の等号で結ばれた同値関係を満たすのである．

そこで，次のような幾何学的考察から始めよう．右図の示すように，左下の長方形の面積は大きな長方形の面積から，横や縦に長い長方形の面積を引いて，引きすぎた，右上の小さな長方形の面積を加えて得られるので，$a > b > 0, c > d > 0$ の時，

$$(a-b)(c-d) = ac + bd - (ad + bc) \tag{2.2.10}$$

が成り立つ．従って，(2.2.8a) の右辺は



$$[(a-b)(c-d), 0] = [ac + bd - (ad + bc), 0] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.11a}$$

となる．ただし，ここで，(2.2.9a) を使った．同様に，$a > b > 0, d > c > 0$ の時，($c \leftrightarrow d$ と入れ替えた) (2.2.10) および (2.2.9c) を使って，(2.2.8b) の右辺は

$$[0, (a-b)(d-c)] = [0, ad + bc - (ac + bd)] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.11b}$$

さらに，$b > a > 0, c > d > 0$ の時，(2.2.8c) の右辺は ($a \leftrightarrow b$ と入れ替えた)(2.2.10) および (2.2.9c) から，

$$[0, (b-a)(c-d)] = [0, bc + ad - (bd + ac)] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.11c}$$

となる．最後に，$b > a > 0, d > c > 0$ の時，(2.2.8d) の右辺は ($a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d$ と入れ替えた)(2.2.10) および (2.2.9a) から，

$$[(b-a)(d-c), 0] = [bd + ac - (bc + ad), 0] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.11d}$$

を得る．このようにして，(2.2.8a∼d) の右辺はすべて，同一の式 $[ac + bd, ad + bc]$ になった．同一の式といっても，この結果は，(2.2.11a∼d) の左辺から分かるように，元々 a と b，c と d，各々の大小関係に依存していることに注意されたい．とにかく，(2.2.8a∼d) は確かに，次の 1 つの式に纏められたことになる．

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.12}$$

もっとも，すでに説明したように，左辺は a と b，c と d の各々の大小関係をすべて数え合わせると 4 通りあり，それに応じて，右辺も，(2.2.11a∼d) の 4 通りある．1 つの式といっても,「掛け算の規則」(2.2.7a∼d) が 4 通りあったことを，このような形で引きずっている．[8] この大小関係に拘わらず，上式が成り立つことを，(2.2.7a∼d) は 1 つの式に纏められたといったわけである．なお，(2.2.9e) 下で述べたように，(2.2.12) は $a = b$ または/および $c = d$ の場合にも成り立つ．$[a, a] = [0, 0]$ だから，この場合，(2.2.12) は $[0, 0][c, d] = [a, b][0, 0] = [0, 0][0, 0] = [0, 0]$ を意味する．以上，(2.2.9e) を満足する，自然数の順序対 $[a, b]$ の積は「掛け算の規則」 (2.2.7a∼d) だけで一意的に決まったので，それは整数に対する（符号も含めた）積法則と呼ぶに相応しい．一方，和は成分ごとの和でなくてはならない．これらの和・積の法則を纏めると，(2.2.12) を再録して，

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \tag{2.2.13a}$$

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc] \tag{2.2.13b}$$

[8] (2.2.12) が (2.2.9e) に従うダッシュをつけた量に対しても成り立つことは，(2.2.11a∼d) の各々の場合について，調べれば直ぐ分かる．

になる．もちろん，(2.2.9e) の関係にある，ダッシュ付きの自然数，a', b', c', d' も同じ関係式を満たす．

次に，(2.2.9e) を満足する，自然数の順序対 $[a, b]$ の集合 (を $R(\mathbb{N})$ と書く) は整数環 [9]$\mathbb{Z}$ に同型である事を示す．実際，$a \geq b$ の時には，同値関係により，$[a, b] = [a - b, 0]$ となり，逆に，$a \leq b$ の時には，同値関係により，$[a, b] = [0, b - a]$ となる．従って，$R(\mathbb{N})$ の任意の元は，a, b を自然数として，$[a, 0]$ か $[0, b]$ の形に書ける．$[a, b] + [0, 0] = [0, 0] + [a, b] = [a, b]$ から $R(\mathbb{N})$ のゼロ元は，$[0, 0]$ となり，後ほど，整数 $[a, 0], a > 0$ は正の整数 a を，$[0, b], b > 0$ は負の整数 $-b$ を表している (これはこの節の出発点でもあった) ことを証明するので，$R(\mathbb{N}) = (-\mathbb{N}^*) + \{0\} + \mathbb{N}^*$ と書ける．ただし，$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$．すなわち，$R(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ が示せた (環の性質はこれから調べる)．[10]

乗法に関する単位元は $[a, b][1, 0] = [1, 0][a, b] = [a, b]$ から $[1, 0]$ となることが分かるが，$[a, b]$ の和に関する逆元 $-[a, b]$ は

$$[a, b] + (-[a, b]) = [0, 0] \tag{2.2.14}$$

によって定義される．しかし，$[a, a] = [0, 0]$ から $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [0, 0] = [a, b] + (-[a, b])$ により，$-[a, b] = [b, a]$ となる．従って，$[a, b]$ で a と b を交換したら，負号が付くという約束が生まれる．特に，乗法に関する単位元 $[1, 0]$ の和に関する逆元は $-[1, 0] = [0, 1]$ である．一般に，$[0, a] = -[a, 0]$ である．従って，$a \equiv [a, 0]$ と定義すれば，$-a \equiv [0, a]$ となり，$a - b = [a, 0] - [b, 0] = [a, 0] + [0, b] = [a, b]$ と書ける．それ故，

$$\begin{cases} [a, b] = a - b \quad (\text{は } a > b \text{ の時 正の整数}) \\ [a, a] = [0, 0] = 0 \\ [a, b] = -[b, a] = -(b - a) \quad (\text{は } a < b \text{ の時 負の整数}) \end{cases} \tag{2.2.15}$$

とおくことになる．

さて，(2.2.13a,b) が，和・積に関して，交換・結合の法則を満たすことは，自然数のそれから明らかだが，分配の法則も容易に確かめられる．簡単ではあるが，念の為，その証明を以下に記す．

$$\begin{aligned} ([a, b] + [c, d])[e, f] &= [a + c, b + d][e, f] = [(a + c)e + (b + d)f, (b + d)e + (a + c)f] \\ &= [(ae + bf) + (ce + df), (be + af) + (de + cf)] \\ &= [ae + bf, af + be] + [ce + df, cf + de] = [a, b][e, f] + [c, d][e, f] \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

ただし，$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}, [a, b], [c, d], [e, f] \in \mathbb{Z}$．今一度論理を纏めておくと，(2.2.7a∼d) から出発するアプローチでは，(2.1.3) は定義であり，その場合，整数に対する分配の法則は自然数に対するそれから，単なる代数計算で導ける．和・積についての他の法則も同様．つまり，最初は「マイナス × マイナス=プラスは定義だから慣れて覚える以外ない.」といって，あとで「(2.1.3) は分配の法則から導ける.」という順番で教える教育的配慮は的を得ていると言える．両方とも正しいステートメントで「導く」方が《数学を学んできた》という満足感を与えるから．

---

[9] 環とは，和・積のもとで閉じた集合で，和・積について，交換・結合・分配の法則が成り立ち，0 と呼ばれる加法に関する単位元を持ち，加法に関する逆元が存在するもの (乗法に関する単位元 1 を持つ場合，単位的環と言う．テキストで述べる環は全て単位的環である)．単位的環において，0 と異なるすべての元が乗法に関する逆元を持つとき，体という．環の任意の元に対しては，自由に減法ができるが，ある数から，それより大きくはない数しか減ずることができない (すなわち，そのような減法の結果得られる数ならば，元の環に属する) ときには，半環という．従って，半環の場合には，加法に関する逆元は定義出来ない．(ゼロを含む) 自然数の集合は単位的半環であるが，整数の集合は単位的環をなす．(単位的) 半環の場合には，自由に減法ができないので，それができる (単位的) 環に昇格させるには工夫がいる．以下で述べる坪郷の方法は，本来，この立場から眺められた．

[10] 脚注 7) の用語を使えば，$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = R(\mathbb{N})$ と書いているのであるが，和・積の代数的演算のみに関心を持つので，次のような物理屋の直感も許されよう．同値関係 (2.2.9e) によって等しくなる，無限に多くの元は 1 つの元と見なす．例えば，$[3, 0], [4, 1], [5, 2], [6, 3], \cdots$ はすべて等しいので，それを 1 つの整数 3=[3, 0] と置くのである．$R(\mathbb{N})$ の任意の元は，(2.2.9e) を満たす $[a, b]$ であるから，同値関係で結ばれるすべての元を 1 つの元と見なせば，$R(\mathbb{N})$ の任意の元 (同値類の代表元) は，$[a, 0]$ か $[0, b]$ と書ける．それで，ここでの目的のためには，単に，$R(\mathbb{N}) = \{[a, 0], [0, b]; a, b \in \mathbb{N}\}$ となると理解してよいのではないかという感覚 (文献 [2] では，$R(\mathbb{N})$ の元 (同値類) を整数と呼ぶと定義している)．また，$[a, 0]$ は $a > 0$ のとき，正の整数 a を，$[0, b]$ は $b > 0$ のとき負の整数 $-b$ を表すので，上の結論が得られる．a か b が 0 のときには，$[0, 0] = 0$ と置いている．

以上,「掛け算の規則」 (2.1.2a∼d)→(2.2.7a∼d) から得られた新しい結果を纏めれば,

$$\begin{cases} \text{整数は同値関係 (2.2.9e) を満たす自然数の順序対[a, b]で与えられる} \\ \text{同値関係 (2.2.9e) を満たす自然数の順序対の和・積は (2.2.13a, b) で与えられる} \end{cases}$$

となる．これは，整数に対する，坪郷の定義 [1] と同じである．以降，(2.2.13a, b) にもとずく，自然数から整数への拡大の方法を，坪郷の方法と呼ぶ (同じ定義が，集合論についての詳しい解説付きで，文献 [2] にも見られる)．すなわち，整数に対する，坪郷の方法の原点は,「掛け算の規則」にあったと言える (脚注 9) を参照).

2.3 整数から分数へ

次に，$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{N}^*$ の直積集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ の元を $(p,q), p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*$ などと書き，それらの間に次の同値関係を考える．[11)]

$$(p,\,q)\sim(r,s)\Longleftrightarrow ps=qr \tag{2.3.17}$$

この同値関係によって，$\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ を類別する : $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/\sim$. そして，$(p,q)$ を含む同値類の代表元を $[p,q]$ と書くと，(2.3.17) の同値関係から

$$[p,q]=[r,s]\Longleftrightarrow ps=qr \tag{2.3.18a}$$

となり，その集合 $R(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)$ に加法と乗法を次のように定義する [1].

$$[p,q]+[r,s] \quad = \quad [ps+qr,qs] \tag{2.3.18b}$$

$$[p,q]\times[r,s] \quad = \quad [pr,qs] \tag{2.3.18c}$$

このときも，和・積に関する交換・結合・分配の法則は容易に示せる．ここでは，分配の法則が成り立つことだけ確かめておく．

$$\begin{aligned}([p,q]+[r,s])[t,u] &= [ps+qr,qs][t,u]=[(ps+qr)t,qsu]=[(pt)s+(rt)q,squ] \\ &= [(pt)su+(rt)qu,squ^2]=[pt,qu]+[rt,su]=[p,q][t,u]+[r,s][t,u]\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

特に，$q=1$ の時は $[p,1]\equiv p$ と書き，$p<0$ ならば，負の整数，$p>0$ ならば，正の整数を表す．$R(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)$ のゼロ元は $[0,r]=[0,1],\ r\in\mathbb{N}^*$，[12)] 乗法に関する単位元は，$[r,r]=[1,1],\ r\in\mathbb{N}^*$，[13)]$[p,q]$ の加法に関する逆元は $[-p,q],\ p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*$ [14)]，$[p,q],p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*$ の乗法に関する逆元は，$p\neq0$ として，

$$\begin{array}{ll} [q,p] & p>0\ \text{のとき} \\ [-q,-p] & p<0\ \text{のとき} \end{array}$$

となる．[15)] 従って，$R(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)$ は体の性質を持つことが分かる．これが，有理数体 $\mathbb{Q}$ である．なお，(2.3.18c) が正・負の有理数に対する「掛け算の規則」を満たしていることは容易に分かる．実際，p が正 (負) の整数の時，$[p,q]$ は正 (負) の有理数ゆえ，有理数に対する「掛け算の規則」は，(2.3.18c) により，整数に対するそれと同じであることが分かる．

[11)] 文献 [2] における有理数の定義も坪郷の定義 [1] と同じである．(2.3.17) は，すでに証明されている，整数の積の交換・結合の法則を使うと，同値法則を満たすことが示せる．
[12)] なぜなら，$[p,q]+[0,r]=[pr,qr]=[p,q]$ ゆえ.
[13)] なぜなら，$[p,q][r,r]=[pr,\,qr]=[p,q]$ ゆえ.
[14)] なぜなら，$[p,q]+[-p,q]=[pq-qp,qq]=[0,q^2]=[0,1],q\in\mathbb{N}^*$ はゼロ元ゆえ．ここで，整数の「掛け算の規則」を $q(-p)=-qp$ の形で使った.
[15)] なぜなら，$p>0$ のときは，$[p,q][q,p]=[pq,qp]=[r,r]=[1,1]$ となり，$p<0$ のときには，$[-q,-p]$ が $R(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)$ の元となり，$[p,q][-q,-p]=[-pq,-pq]=[1,1]$ ゆえ．ここで，整数の「掛け算の規則」を $p(-q)=-pq=q(-p)$ の形で使った.

2.4 有理数から実数へ

このテーマは，高木貞治の名著 [3] の附録 (一) 無理数論に詳しい．

任意の実数 a に収束する有理数列 $\{a_n\}$ が存在することから来る構成法によると，実数 $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$ の和・積を

$$a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n),\ \ ab = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) \tag{2.4.1}$$

で定義する．すると，有理数の和・積に関する性質がそのまま実数に当てはまる (極限の性質を使う)．つまり，実数の積も「掛け算の規則」を満足するわけである．

極限の考えを用いて，実数を定義する方法に加え，整数に対する坪郷の方法を，実数の場合に一般化しよう．今，非負の実数の集合を $\mathbb{R}^{+,0}$ と置く．このとき，α, β, γ を任意の非負の実数とすると，和 $\alpha + \beta$ や積 $\alpha\beta$ が再び $\mathbb{R}^{+,0}$ の元として一意的に定まり，和・積についての交換・結合・分配の法則を初め，ゼロ元 0 の意味や単位元 1 の意味など，すべて自然数の場合と同じような形式で成り立つ．また，これも，自然数の場合と同じであるが，加法に関する逆元は存在しないので，脚注 9) の数学用語を使うと，$\mathbb{N}$ と同様，$\mathbb{R}^{+,0}$ は単位的半環をなす．しかも，正の実数には乗法に関する逆元が存在する．これらのことを使って，実数 x を非負の実数の順序対 (α, β) の同値類として，以下のように定義する．

まず，同値関係

$$(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta') \longleftrightarrow \alpha + \beta' = \alpha' + \beta \tag{2.4.2}$$

を設定する．この同値関係は同値法則を満たすことが分かる．そこで，直積集合 $\mathbb{R}^{+,0} \times \mathbb{R}^{+,0}$ の同値類 (の集合=商集合) $\mathbb{R}^{+,0} \times \mathbb{R}^{+,0}/\sim$ を考える．$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+,0} \times \mathbb{R}^{+,0}$ を含む同値類の代表元を $[\alpha, \beta]$ と置き，その集合 $R(\mathbb{R}^{+,0})$ における和と積を次のように定義する．

$$[\alpha, \beta] + [\gamma, \delta] \;=\; [\alpha + \gamma, \beta + \delta] \tag{2.4.3a}$$

$$[\alpha, \beta][\gamma, \delta] \;=\; [\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma] \tag{2.4.3b}$$

ここで，δ も勿論，$\mathbb{R}^{+,0}$ の元である．このとき，$x = [\alpha, \beta]$ の集合 $R(\mathbb{R}^{+,0})$ が実数の集合 $\mathbb{R}$ に等しいことが，$\mathbb{R}^{+,0}$ が単位的半環をなす事に注意すれば，整数の場合に 2.2 で説明したのと殆ど同じ方法で示せる．例えば，$R(\mathbb{R}^{+,0})$ のゼロ元は $[0, 0]$，乗法に関する単位元は $[1, 0]$, $[\alpha, \beta]$ の加法に関する逆元は，$-[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$ となる．また，$\alpha > \beta$ のときには，同値関係 $(\alpha, \beta) \sim (\alpha - \beta, 0)$ により，あるいは，$\alpha < \beta$ のときには，同値関係 $(\alpha, \beta) \sim (0, \beta - \alpha)$ により，すべての実数は $[\alpha, 0]$ か $[0, \beta]$ と書ける．従って，$\alpha \equiv [\alpha, 0], \alpha > 0$ は正の実数に，$-\beta \equiv [0, \beta], \beta > 0$ は負の実数に対応する．さらに，(2.2.7a∼d) において，$a, b, c, d \to \alpha, \beta, \gamma, \delta$ と置き換えると，正・負の整数という言葉が正・負の実数という言葉に置き換わる．従って，実数の積法則 (2.4.3b) が実数に対する「掛け算の規則」から導けるのは，(2.2.10) は a, b, c, d が不等式 $a > b > 0, c > d > 0$ を満たす任意の実数である場合にも，幾何学的に証明出来る [4, 5] ことから明らかである．なお，実数の加法・乗法に関する，交換・結合・分配の法則も $\mathbb{R}^{+,0}$ が単位的半環をなすことにより，整数の場合に証明した方法がそのまま使える．(2.1.3) も (2.4.3b) で $\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1$ と置けばよい．

しかしながら，整数の場合と大きく違う点がある．それは，整数は体をなさないけれど，実数の集合 $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ + \{0\} + \mathbb{R}^-$ は体をなすことである．ここで，$\mathbb{R}^+$ は正の実数の集合，$\mathbb{R}^-$ は負の実数の集合を表す．今，$\alpha = [\alpha, 0] > 0$ を $\mathbb{R}^+$ の元とすると，積法則 (2.4.3b) から $\alpha^{-1} = [\alpha, 0]^{-1} = [\alpha^{-1}, 0]$ が乗法に関するその逆元となり，$-\beta = [0, \beta] < 0$ を $\mathbb{R}^-$ の元とすると，積法則 (2.4.3b) から $(-\beta)^{-1} = [0, \beta]^{-1} = [0, \beta^{-1}]$ が乗法に関するその逆元となる．[16] $\mathbb{R}$ のゼロでない元は，$\mathbb{R}^+$ の元か，$\mathbb{R}^-$ の元のいずれかでしかないから，以上により，$\mathbb{R}$ が体をなすことが証明出来た．実数の除法に関しては，任意の実数 $x \neq 0, y$ に対して，$xz = y$ なる z が一意的に存在することを言えばよい．一般に，$x = [\alpha, \beta], y = [\gamma, \delta], z = [\zeta, \eta]$ であるが，すべての実数は $[\alpha, 0]$ か $[0, \beta]$ と書けるから，$\alpha > 0$ として，$x = [\alpha, 0], y = [\gamma, 0]$ のときは，$z = [\alpha^{-1}\gamma, 0]$, $x = [0, \alpha], y = [0, \gamma]$

[16] ここで，$(-\beta)^{-1} = -\beta^{-1}$ を使ったが，これは負号の約束を使えば，定義 (2.4.3b) から明らかな $(-1)^2 = +1$ から．

のときも同様に $z=[\alpha^{-1}\gamma,0]$, $\quad x=[0,\alpha], y=[\gamma,0]$ のとき，および，$x=[\alpha,0], y=[0,\gamma]$ のときには，$z=[0,\alpha^{-1}\gamma]$ と選べばよい．このように実数の加減乗除は (2.4.3a, b) にもとずいて矛盾なく行われる．

2.5 実数から複素数へ

実数体 $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を考えると，その元は (x,y) などと書ける 2 元数である．この直積集合に対して，和と積を次のように定義したものは，複素数に対する Hamilton の記法と言われる．その相等・和・積は

$$(x,y) = (x',y') \longleftrightarrow x=x' \text{ かつ } y=y' \tag{2.5.1a}$$

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \tag{2.5.1b}$$

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2) \tag{2.5.1c}$$

で定義され [17)]，和・積について，交換・結合・分配の法則が成り立つ他，

(a) 実数 $x\equiv(x,0)$ は普通の四則演算に従う．

(b) 虚数単位を $i\equiv(0,1)$ で定義すれば，$z=(x,y)=x+iy$ が普通の複素数の書き方である．

(c) $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)\equiv-1$ は実数の演算のみによる．

(d) $xi=(x,0)(0,1)=(0,x)=(0,1)(x,0)=ix$ ゆえ，i は実数と交換する．

(e) 複素共役は $\overline{(x,y)}=(\overline{x},-y)=(x,-y)$ で与えられ，$|z|^2=(x,y)\overline{(x,y)}=\overline{(x,y)}\,(x,y)=x^2+y^2$ となる．

(f) (x,y) の乗法に関する逆元は $(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ で与えられる (ただし，$x^2+y^2\neq0$).

が証明される．ここで，注意したいのは，虚数単位 i の定義式 $i^2=-1$ が実数の計算のみで導かれたことである．これは，複素数を 2 元数で表したときの積の定義からの直接の帰結であり，$(-1)^2=+1$ が，整数を自然数の順序対の同値類で表したときの，自然数の計算のみによる積の定義に含まれていたことと同じ事情である．

2.6 終わりにかえて

以上，$(-1)^2=+1$ と言う何でもない式は，虚数単位 i の定義式 $i^2=-1$ を実数の計算のみで導く Hamilton の記法と類似した (2.2.13a,b) から導かれ，その意味では，両方とも定義に過ぎないのではないか，と言う簡単なことを述べてきた．

普通，負数を含む「掛け算の規則」は環の性質から次のように導く．[18)] 環の任意の元 $a\neq0$ の加法に関する逆元 $-a$ は

$$a+(-a)=0 \tag{2.6.1}$$

によって定義される．この式に，例えば，右から $b\neq0$ をかけ，分配の法則を使うと，

$$[a+(-a)]b=ab+(-a)b=0\to(-a)b=-ab \tag{2.6.2}$$

[17)] 示野信一「複素数とはなにか」(講談社，2012) によると，実数の順序対 (x,y) が体になるような積の規則は本質的に (2.5.1c) しかないことを，Weierstrass が 1884 年に証明しているらしい．その文献は分からないので，以下では，(1 パラメータしか含まない) 次のようなごく簡単な証明を試みる．(2.5.1c) を $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2+\mu y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)$ と一般化する．ただし，$\mu=0$ のときは，$(0,y)$ が零因子となるので，μ はゼロでない実数となる．また，$\mu\to\mu/|\mu|$ として，$\mu=\pm1$ に限れる．ここで，$(x_2,y_2)=(x_1,y_1)^{-1}$ となるのは，$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(1,0)$ を意味するが，この式が成り立つのは $\mu<0$ のときに限ることが容易に示せる．従って，$\mu=-1$.

[18)] 以下，(2.6.6) 直ぐ下の但し書きを除いて，$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ とする．

が得られる．同様に，$b \neq 0$ として，

$$b + (-b) = 0 \tag{2.6.3}$$

の左から $a \neq 0$ をかけて，分配の法則を使うと，

$$a[b + (-b)] = ab + a(-b) = 0 \to a(-b) = -ab \tag{2.6.4}$$

を得る．次に，(2.6.3) に，左から $(-a) \neq 0$ を掛けると，(2.6.2) を用いて，

$$(-a)[b + (-b)] = 0 \to (-a)b + (-a)(-b) = 0 \to -ab + (-a)(-b) = 0 \to (-a)(-b) = ab \tag{2.6.5}$$

となる．$a > 0, b > 0$ の時，$ab > 0$ だから，(2.6.2), (2.6.4), (2.6.5) [19] と合わせて，負号を含む「掛け算の規則」が証明されたことになる．

それに対し,「掛け算の規則」を負数が最初に現れる整数の段階で定義として認めれば，坪郷による整数の積の定義が積法則として導かれ，分配の法則も成り立つと言うのがこの小論の主張である．坪郷の方法は，実数の場合にも一般化できることが示せたので，実数の場合も，分配の法則は「掛け算の規則」から，単なる代数計算で証明される．

最後に，足立恒雄著の本 [5] に，16〜17 世紀にかけて活躍した，オランダの科学者，シモン・ステヴィンが (2.6.5) を証明している，という記述があることを付け加えておきたい．筆者は残念ながら，そこで引用されているステヴィンの著作集に最早近づくことが出来ないので，全くの受け売りに過ぎないのだが，以下にステヴィンの証明と言われるものを紹介する．

(2.2.13b) は

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc) \tag{2.6.6}$$

において，a, b, c, d を自然数に制限したものと同じである．ただし，自然数の範囲で許されない減法は除いている．そのために，$a - b = [a, b]$ ($a > b$ のとき)，または $-(b - a) = [a, b]$ ($a < b$ のとき)，と書き，自然数の順序対 (の同値類の代表元) $[a, b]$ においては，自然数 a, b の大小関係は自由にとれるから，$[a, b]$ は正・負の整数を表し，整数の積法則 (2.2.13b) が「掛け算の規則」(2.1.7a∼d) から導かれた．(2.6.6) は，$a > b > 0, c > d > 0$ の時には幾何学的に証明される事はすでに述べた．この証明に基づいて，(2.6.6) はその制約を除いても正しいとするのであるが，実際，ステヴィンの証明は，ここで $b > 0, d > 0$ は保ちながら $a = c = 0$ とおけば，

$$(-b)(-d) = bd \tag{2.6.7}$$

が得られると言うものであるらしい．(2.6.2), (2.6.4) も同様に導ける．実は，(2.6.6) は分配の法則およびそれから導かれる (2.6.2)，(2.6.4)，(2.6.5) から得られ，(2.6.7) は (2.6.5) に他ならないので，上の結果は勿論正しいのであるが，長方形の面積の計算だけに基づく以上，条件 $a > b > 0, c > d > 0$ を外すことはできないと言う意味で，ステヴィンの証明自身は正しいとは言えない [5]．いずれにしても，通常の考えでは,「掛け算の規則」は加法に関する逆元の定義および分配の法則と矛盾しないという要請によって導かれる．それに対し，ここで導いた坪郷の方法では，(2.6.6) で文字の入れ替え $a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d$ を行った，全部で 4 通りを別々に考え，各々が幾何学的に証明される場合だけを用いて，同値類の考えに基づけば,「掛け算の規則」を満足する積法則が先に存在し，その結果，分配の法則が成り立つと言う図式になっている．つまり，二つの順序関係が逆転しているのである．言い換えれば，分配の法則→「掛け算の規則」→分配の法則という，論理のループが存在する．2.2 で示したように，坪郷の方法は，負号 $-$ を使わない「掛け算の規則」に出発点があったと言えるが，我々はすでに，負号 $-$ の便利さに慣れきっているため，$[0, 1]^2 = [1, 0]$ の代わりに $(-1)^2 = +1$，$[0, 2][0, 3] = [6, 0]$

[19] (2.6.5) において，$a = b = 1$ と置いたものが (2.1.3)．(2.1.3) はまた次のようにしても導ける．(2.6.5) は，負号の約束と実数の積についての交換・結合の法則を用いて，$(-a)(-b) = [(-1)a][(-1)b] = [(-1)a(-1)]b = [(-1)^2a]b = (-1)^2(ab) = ab$ と書けるので，$ab \neq 0$ として，$(-1)^2 = +1$．つまり，マイナス × マイナス=プラスを意味する $(-1)^2 = +1$ を導くのは分配の法則なので，逆に，$(-1)^2 = +1$ を含む「掛け算の規則」を定義とすれば，分配の法則が結果として導かれて初めて無矛盾となる．なお，(2.6.2), (2.6.4) は，(2.1.2d) の直ぐ下で述べたように，$(-a)b = [(-1)a]b = (-1)(ab) = -ab$，$a(-b) = a[(-1)b] = [a(-1)]b = [(-1)a]b = (-1)(ab) = -ab$ から導ける．それ故，分配の法則が必要なのは，2.1 で述べたように，(2.6.5) だけ，しかも，その式の $a = b = 1$ の場合だけである．

の代わりに $(-2)\times(-3)=6$ と書く習慣が身についており，その方が遙かに覚えやすく，経済的でもある．今更，負号 $-$ なしで済ますことなど出来ない時代に我々は生きているから，その意味では，負号を使わない「掛け算の規則」は,「論理的に可能かも知れませんが，時代逆行ですね.」との反論もあろう [20)]．しかしながら，上で述べた，論理のループの存在可能性以外にも，自然数→整数→分数 (有理数) →実数→複素数と言う数構造の拡大においては，ある数をそれ以前の数の順序対で表す方法は，論理的に正しい結果を与える (有理数→実数の段階では，実数の連続性を考える必要がある).「2 重化の方法」は特に複素数→超複素数という一般化において有用な方法論 [21)] を与えることが分かっている．

謝辞

この小論を詳しく読んで，多くの貴重なコメントを頂いた加瀬博己大同大学名誉教授に謝意を表します．さらに,「坪郷の方法」に関連して重要なコメントを頂いた平山実富山大学名誉教授に感謝します.

[20)] 筆者は，負号がどのような歴史的経緯で発明されたか知らないが，もし，負数を含む「掛け算の規則」が負号の発明前に整っていたとすれば，案外，整数を自然数のペアで表す方法を考えた人が古くにいたかも知れない (もっとも，同値類という考えがなければ，この方法は成功しない)．その後，負号が発明され，その便利さが圧倒的な支持を得て，ペアを考える方法は，完全に廃れたとも考えられる．しかし，この辺の歴史については，文献 [1] [2] はなにも触れていない．むしろ，文献 [5] の著者は「負数の現代的定義」として，自然数のペアを用いている (この「現代的」の意味は，明らかに，集合論に関連して述べているように思われる)．ちなみに，代数的数としての負数の存在をはじめて認めた人は，インドの Bhaskara(1150) であったらしい : 米山國藏著「數學之基礎」中巻 (1928).

[21)] 具体的には，Cayley-Dickson の 2 重化の方法があり，例えば，四元数は与えられた積法則に従う複素数の順序対，八元数は同じように与えられた積法則に従う四元数の順序対，一般に 2^n $(n>3)$ 次元の Cayley-Dickson 代数は同じように与えられた積法則をもつ 2^{n-1} 次元の Cayley-Dickson 代数の元の順序対で与えられる．

参考文献

[1] 坪郷勉,『複素数と 4 元数』(槙書店，1967; 第 3 刷 1974).

[2] 足立恒雄,『数 体系と歴史』(朝倉書店，2003).

[3] 高木貞治,『解析概論』(岩波書店，第 22 版，1959).

[4] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (Macmillan and Co. Limited, ST. Martini's Street, London, 1932).

[5] 足立恒雄,『数とは何か，そしてまた何であったか』(共立出版，2011).

コメント：分数式の対称和に対する不等式

Comment on “ An Inequality between Symmetric Sums of Fractional Expressions ”

植田洋平
Yohei UEDA[22)]

3.1　はじめに

先号（4 巻 4 号）に掲載された中西先生の記事,「分数式の対称和に対する不等式」が興味深かったのでコメントをさせて頂きます．それは別解を与えることです．

3.2　別解

中西先生の記事の不等式 (1.1.1) で，a, b, c を正数，$s = a + b + c$ とするとき，

$$\frac{s-a}{a} + \frac{s-b}{b} + \frac{s-c}{c} \geq 4\left[\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}\right] \tag{3.2.1}$$

は調和平均と相加平均，相乗平均の間に成り立つ不等式を用いれば簡単に解けます．おそらく高校生向けの問題なのでしょう．

(3.2.1) を分かりやすいように下のように変形します．

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 2\left[\frac{2}{\frac{1}{(\frac{a}{b})} + \frac{1}{(\frac{a}{c})}} + \frac{2}{\frac{1}{(\frac{b}{c})} + \frac{1}{(\frac{b}{a})}} + \frac{2}{\frac{1}{(\frac{c}{a})} + \frac{1}{(\frac{c}{b})}}\right] \tag{3.2.2}$$

ここで，調和平均と相加平均，相乗平均間に成立するつぎの不等式を思い出します．x, y を正数とするとき

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

ここで，等号は $x = y$ のときに成立します．

(3.2.2) の左辺と右辺にそれぞれ 3 つの項がありますが，それを 1 つの項に対して上の不等式を使っていきます．調和平均のほうの第 1 項から考えて行くと

$$\frac{2}{\frac{1}{(\frac{a}{b})} + \frac{1}{(\frac{a}{c})}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right]$$

[22)] youpin@jcom.home.ne.jp

が得られます.

同様にして

$$\frac{2}{\frac{1}{(\frac{b}{c})}+\frac{1}{(\frac{b}{a})}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right]$$

および

$$\frac{2}{\frac{1}{(\frac{c}{a})}+\frac{1}{(\frac{c}{b})}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right]$$

が得られますから，この３つの不等式を辺々加えると

$$\begin{aligned}\frac{2}{\frac{1}{(\frac{a}{b})}+\frac{1}{(\frac{a}{c})}}+\frac{2}{\frac{1}{(\frac{b}{c})}+\frac{1}{(\frac{b}{a})}}+\frac{2}{\frac{1}{(\frac{c}{a})}+\frac{1}{(\frac{c}{b})}} &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right] \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

が得られます.

今回の中西先生の記事を興味深く読ませて頂きました．また毎回エネルギッシュな論文を書かれており，拝読するのを楽しみにしています.

3.3 おわりに

植田さんのコメントを読んで，失礼かつ蛇足かとは思いましたが，私のわかり難かった点を補筆させて頂きました．趣旨はまったく変えていません（文責：矢野）.

(2014. 8. 28)

植田洋平氏のコメントへの返答

Reply to Y. Ueda's comment

中 西　襄 [23)]
Noboru NAKANISHI[24)]

4.1　はじめに

「数学・物理通信」第 4 巻 4 号に掲載された拙論説「分数式の対称和に対する不等式」の不等式の証明に関して，植田洋平氏から別証がある旨のコメントがあった．彼の提起した証明は，対称性を尊重した方法であり，大変エレガントである．彼は $n = 3$ の場合のみを扱っているので，簡単な演習問題ではあるが，一般の n の場合に拡張してみた．

4.2　一般の n の場合への拡張

証明すべき式は「分数式の対称和に対する不等式」の (1.3.1) 式である．すなわち，$n \geqq 3$，$a_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，$\sum_{k=1}^{n} a_k = s$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s - a_k}{a_k} \geqq (n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - a_k}$$

である．これに s の式を代入すれば，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{j \neq k} a_j}{a_k} \geqq (n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum_{j \neq k} a_j}$$

となる．

証明の道具は，正数に関し相加平均は調和平均よりも小さくはならないという周知の事実

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} x_k}{m} \geqq \frac{m}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x_k}}$$

[23)]京都大学名誉教授
[24)]nbr-nak@trio.plala.or.jp

である．特定の j につき，$m = n-1$，$x_k = \frac{1}{a_k}$ とおけば，

$$\sum_{k \neq j} \frac{1}{a_k} \geqq \frac{(n-1)^2}{\sum_{k \neq j} a_k}$$

という不等式を得る．これを使うと次のように証明ができる．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{j \neq k} a_j}{a_k} = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{a_k} \geqq \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{(n-1)^2}{\sum_{k \neq j} a_k} = (n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum_{j \neq k} a_j}.$$

第 1 段は和の順序変更，第 2 段は不等式の適用，第 3 段は使用文字の入れ替えである．

編集後記

まだまだ残暑厳しい折，皆様方は如何お過ごしでしょうか.
9 月に入って朝夕は涼しくなったものの日中は依然として夏そのものである．昨夏も異常気象と言われたが，今夏もそれに劣らずの異常ぶりであった．特に，広島県の異常な大雨による土石流での災害は本当に痛ましかった．地元の故老たちも，こんなことは初めてと言うばかり．予測も出来ない大雨は日本各地で記録されています.
前にも書きましたが，ブラジルで開かれた世界サッカー大会も無事終了し，結局わが日本は予選リーグで，ベスト 8 に入るどころか一度の勝ちもなかった.
余談が長くなった．お蔭様で今回もまた『数学・物理学通信』4 巻 5 号を皆様方に配信することが出来ました.
概観するに，論文の応募数で数学関係は物理関係よりも少ない傾向にある．もちろん完全に一致する必要はない．しかし，あまりにも不均衡であり続けるのは本サーキュラーの表題にそぐわない．従って，編集者の一人として出来るだけ不均衡は避けたいと思っています．今はそのための目標を探しているところです.

（新関章三）

物理関係の投稿者が多いのは事実ですが，そのテーマは圧倒的に数学関係が多いと思うのですが，如何でしょうか.

（矢野　忠）