数学・物理通信

4巻8号　　2014年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2014 年 12 月 18 日

目 次

Contents

Legendre関数と量子力学のポテンシャル問題(1) Legendre Function and a Potential Problem of Quantum Mechanics(1)

世戸 憲治[1]
Kenji SETO[2]

1.1 はじめに

Legendre 関数と言えば，3 次元の波動方程式を，極座標を用いて解くときにお目にかかるものと相場が決まっている．前回の論文「Legendre 関数と全無限弾性体の衝撃問題」(「数学・物理通信」4 巻 7 号) では，球対称に起こる弾性体の衝撃問題で，動径方向を記述する関数として Legendre 関数が現れる例を紹介した．ここでは，Legendre 関数が思わぬところで現れるものとして，量子力学のポテンシャル問題の例を紹介する．

1 次元の Schrödinger 方程式で，ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(x/x_0)} \tag{1.1.1}$$

という場合を考える．ここに，x_0 は長さの次元を持つ正の定数であり，また，V_0 はエネルギーの次元を持つ定数とする．この V_0 が負のときは谷型ポテンシャル，正のときは山型ポテンシャルとなる．このときの Schrödinger 方程式は，m, E を，それぞれ，電子の質量，エネルギーとして，

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{\cosh^2(x/x_0)}\Big]\Psi = E\Psi \tag{1.1.2}$$

となるが，ここでは，以下で扱う数式簡素化のため，変数を無次元化しておく．すなわち，座標 x, ポテンシャルの大きさ V_0, エネルギー E を，改めて，

$$x/x_0 \ \to\ x, \qquad \frac{2m{x_0}^2V_0}{\hbar^2}\ \to\ V_0, \qquad \frac{2m{x_0}^2E}{\hbar^2}\ \to\ E \tag{1.1.3}$$

と置き直す．この置き換えで，方程式は

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{V_0}{\cosh^2 x} + E\Big]\Psi = 0 \tag{1.1.4}$$

となる．

つぎの 2 節では，V_0 が負の谷型ポテンシャル，かつ，エネルギー E が負で束縛状態のときの解を求める．3 節では，同じく V_0 が負の谷型ポテンシャル，かつ，E が正で散乱状態の解を求める．また，4 節では，V_0 が正の山型の場合の散乱解を求める．

[1] 北海学園大学名誉教授
[2] seto@pony.ocn.ne.jp

なお，このポテンシャルを扱っている量子力学の教科書は少ないようで，私が知る範囲では，Landau and Lifshitz の "Quantum Mechanics" p.72, p.79 に簡単に触れている程度である．ここでは，このポテンシャル問題について，できるだけ完全な形でレビューする．

1.2 $V_0 < 0,\ E < 0$ で束縛状態のとき

初めに，V_0 が負の谷型ポテンシャル，かつ，E が負で束縛状態の場合の解を求める．ここでは，方程式 (1.1.4) を解くにあたって，変数を後の便宜上，

$$\nu(\nu+1) = -V_0, \qquad \mu^2 = -E \tag{1.2.1}$$

と置き換える．ここでは，$V_0 < 0,\ E < 0$ としているので，$\nu,\ \mu$ 共に実数である．さらに，独立変数 x を

$$\xi = \tanh x, \qquad |\xi| < 1 \tag{1.2.2}$$

と変換すると，方程式は

$$\Big[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-\xi^2}\Big]\Psi = 0 \tag{1.2.3}$$

となる．これは Legendre 陪微分方程式であり，その解は，定数係数を除いて，

$$\Psi = P_\nu{}^\mu(\xi) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\Big(\frac{1+\xi}{1-\xi}\Big)^{\mu/2} F\Big(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu;\frac{1-\xi}{2}\Big) \tag{1.2.4}$$

と与えられる．ここに，$P_\nu{}^\mu(\xi)$ は Legendre 陪関数 [3]，F は Gauss の超幾何関数である．

この解が，$E < 0$ の束縛状態の波動関数となるためには，$x \to \pm\infty$ ($\xi \to \pm 1$) でゼロとならなくてはならない．まず，$\xi \to 1$ としたとき，この超幾何関数の部分は 1 となることから，その漸近形は，

$$P_\nu{}^\mu(\xi) \xrightarrow{\xi\to 1} \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\Big(\frac{1+\xi}{1-\xi}\Big)^{\mu/2} \tag{1.2.5}$$

となるので，これがゼロに収束するためには，

$$\mu < 0 \tag{1.2.6}$$

でなければならない．したがって，μ は (1.2.1) 式から，

$$\mu = -\sqrt{|E|} \tag{1.2.7}$$

と与えられる．なお，ν については，同じく (1.2.1) 式から，

$$\nu = \frac{-1+\sqrt{1+4|V_0|}}{2} \tag{1.2.8}$$

となる．このときの根号の前に付く符号は，$P_\nu{}^\mu(\xi) = P^{\ \mu}_{-\nu-1}(\xi)$ が常に成立するので，正負のどちらを取っても同じになることを注意する．ここでは，プラスの方を採用しておき，$\nu > 0$ とする．

もう一つ，解 (1.2.4) 式の $\xi \to -1$ での様子を調べておかなければならない．そのため，超幾何関数に関する Gauss の変換式を用いると，長い式になるが，

$$\begin{aligned} P_\nu{}^\mu(\xi) = \Big(\frac{1+\xi}{1-\xi}\Big)^{\mu/2}\Big[&\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(1+\nu)}\Big(\frac{1+\xi}{2}\Big)^{-\mu}F\Big(1+\nu-\mu, -\nu-\mu, 1-\mu;\frac{1+\xi}{2}\Big) \\ &+\frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)}F\Big(-\nu, 1+\nu, 1+\mu;\frac{1+\xi}{2}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

---

[3] ここでの $P_\nu{}^\mu$ の定義は，"Higher Transcendental Functions" Bateman Manuscprit Project Vol.1 p.143, (6) による.「数学公式 3」(岩波全書) ではこの式の右辺に $e^{\mu\pi i}$ が付く．以後，ここで引用する公式はすべて "Higher Transcendental Functions" による．

となる．ここで，$\xi \to -1$ の極限をとる．$\mu < 0$ を考慮すると，大括弧中の 1 項目は 2 項目に比べ無視され，

$$P_\nu{}^\mu(\xi) \xrightarrow{\xi\to-1} \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)}\Big(\frac{1+\xi}{1-\xi}\Big)^{\mu/2} \tag{1.2.10}$$

となり，これがゼロとなるためには，$\Gamma(-\nu-\mu)$ が極の位置にあるとよい．したがって，

$$-\nu-\mu = -n, \qquad n = 0,1,2\cdots \tag{1.2.11}$$

となり，これから，$\mu = n-\nu$ となるが，μ は負でなければならないので，n の大きさはおのずと制限され，ν が整数でないときは，[ ] を Gauss 記号として $[\nu]$ まで，ν が整数のときは $\nu-1$ までとなる．この n の値を固有値，このときの関数 $P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)$ を固有関数と呼ぶことにする．いずれにしても，ν が正である限り，少なくとも 1 個の $n=0$ という固有状態が存在することになる．

以上の結果に，(1.2.7) (1.2.8) の μ, ν を代入してエネルギー E を求めると，

$$E_n = -\left[\frac{-1+\sqrt{1+4|V_0|}}{2} - n\right]^2, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{1.2.12}$$

と求まったことになる．ここで，整数 n の値は，大括弧中の値が正となるところまでとする．

これまでの固有状態の決め方から，固有関数は，ξ が正の方と負の方ではまったく異なる様相を持つのではないかと危惧されるが，そんなことはない．Legendre 関数の符号反転に関する公式 [4]

$$P_\nu{}^\mu(-\xi) = \cos\big((\nu+\mu)\pi\big)P_\nu{}^\mu(\xi) - \frac{2}{\pi}\sin\big((\nu+\mu)\pi\big)Q_\nu{}^\mu(\xi) \tag{1.2.13}$$

において，$\mu = n-\nu$ とおくと，

$$P_\nu{}^{n-\nu}(-\xi) = (-1)^n P_\nu{}^{n-\nu}(\xi) \tag{1.2.14}$$

となり，ここでの固有関数 $P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)$ は，n が偶数なら偶関数，n が奇数なら奇関数となる．

また，このときの固有関数は (1.2.9) 式大括弧中の 2 項目がなくなるので，$\mu = n-\nu$ とおくと，

$$P_\nu{}^{n-\nu}(\xi) = \frac{2^{n-\nu}\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)}(1-\xi^2)^{-(n-\nu)/2}F\Big(-n,\ 1+2\nu-n,\ 1+\nu-n;\ \frac{1+\xi}{2}\Big) \tag{1.2.15}$$

となる．この超幾何関数の部分は n 次の多項式となることに注意する．$\xi = \tanh x$ として，特に，$n = 0,\ 1,\ 2$ の場合を挙げると，

$$\begin{gathered} P_\nu{}^{-\nu}(\tanh x) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)(2\cosh x)^\nu}, \qquad P_\nu{}^{1-\nu}(\tanh x) = \frac{\tanh x}{\Gamma(\nu)(2\cosh x)^{\nu-1}} \\ P_\nu{}^{2-\nu}(\tanh x) = \frac{-1+(2\nu-1)\tanh^2 x}{2\Gamma(\nu)(2\cosh x)^{\nu-2}} \end{gathered} \tag{1.2.16}$$

となる．なお，(1.2.15) 式で，ν が整数の場合は，分子の $\Gamma(n-\nu)$ と分母の $\Gamma(-\nu)$ とで極が相殺されることに注意する．

以下，ここでの固有関数を規格化しておこう．2 個の固有値 $n,\ n'$ に属する固有関数 $P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)$，$P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)$ が満たす (1.2.3) 式の方程式を

$$\begin{gathered} \Big[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) - \frac{(n-\nu)^2}{1-\xi^2}\Big]P_\nu{}^{n-\nu}(\xi) = 0 \\ \Big[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) - \frac{(n'-\nu)^2}{1-\xi^2}\Big]P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi) = 0 \end{gathered} \tag{1.2.17}$$

[4] "Higher Transcendental Functions" Vol.1, p.144, (14)

と書いておき，この第 1 式に $P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)$, 第 2 式に $P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)$ を掛け，辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{d\xi}\Big[P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)-P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)\Big]=(n-n')(n+n'-2\nu)\frac{P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)}{1-\xi^2} \tag{1.2.18}$$

となり，これを ξ で -1 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}&\frac{P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi\\&=\frac{1}{(n-n')(n+n'-2\nu)}\Big[P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)-P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)\Big]_{-1}^{1}\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

となる．ここで，Legendre 陪関数の微分公式 [5],

$$(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{\mu}(\xi)=-\nu\xi P_\nu{}^{\mu}(\xi)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(\xi) \tag{1.2.20}$$

を用いて，右辺を変形すると

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi=\frac{1}{(n-n')(n+n'-2\nu)}\Big[nP_{\nu-1}^{n-\nu}(\xi)P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)-n'P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)P_{\nu-1}^{n'-\nu}(\xi)\Big]_{-1}^{1} \tag{1.2.21}$$

となる．固有関数は境界条件である

$$P_\nu{}^{n-\nu}(\pm1)=0,\qquad P_\nu{}^{n'-\nu}(\pm1)=0 \tag{1.2.22}$$

を満たすので，$n,\ n'$ が相異なる固有値のときは右辺がゼロとなり，固有関数の直交性がでる．$n,\ n'$ が同じ固有値になるときは，(1.2.19) 式そのものが許されなくなるので，別に計算をしなければならない．しかし，幸いなことに，公式集にこの結果が出ていて [6],

$$\int_0^1\frac{\big[P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)\big]^2}{1-\xi^2}d\xi=\frac{n!}{2(\nu-n)\Gamma(1+2\nu-n)},\quad n=0,1,2,\cdots,\quad n<\nu \tag{1.2.23}$$

となる．積分範囲が -1 から 1 のときは，(1.2.14) 式の偶奇性があるので，この結果が 2 倍されるだけである．

以上のことをまとめると，固有関数に関する直交性の式，

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)P_\nu{}^{n'-\nu}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi=N_n{}^2\delta_{n,n'},\qquad n,\ n'=0,1,2,\cdots,\qquad n,\ n'<\nu \tag{1.2.24}$$

が得られる．ここに，規格化定数 $N_n{}^2$ は，

$$N_n{}^2=\frac{n!}{(\nu-n)\Gamma(1+2\nu-n)} \tag{1.2.25}$$

と定義される．したがって，$P_\nu{}^{n-\nu}(\xi)/N_n$ が規格化された固有関数ということになる．

1.3 $V_0<0,\ E>0$ で散乱状態のとき

前節と同じく，V_0 が負の谷型ポテンシャル，エネルギー E が正で散乱状態のときを考える．ここで，散乱という言葉を使ったが，扱っているモデルは 1 次元なので，入射波に対し，反射波と透過波が存在するだけである．このときは，(1.2.1) 式における μ が虚数となるので，正定数 k を用いて，

$$\mu=ik\big(=\sqrt{-E}\big) \tag{1.3.1}$$

[5] "Higher Transcendental Functions" Vol.1, p.161, (19)
[6] "Tables of Integral Transforms" Bateman Manuscript Project, Vol.2, p.315, (9)

とおく．さらに，前節で得た解 (1.2.4) (1.2.9) 式に現れる因子について，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\mu/2} &= \left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^{\mu/2} = e^{ikx}, \\ \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{-\mu} &= \left(\frac{1+\tanh x}{2}\right)^{-\mu} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}\right)^{\mu} \xrightarrow{x\to-\infty} e^{-2ikx}\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

となることに注意して，前節で得た解から，$x \to \pm\infty$ の漸近形を求めてみる．初めに，(1.2.9) 式から，

$$P_\nu{}^{ik}(\tanh x) \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{\Gamma(-ik)}{\Gamma(1+\nu-ik)\Gamma(-\nu-ik)}e^{ikx} + \frac{\Gamma(ik)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)}e^{-ikx} \tag{1.3.3}$$

また，(1.2.4) 式から，

$$P_\nu{}^{ik}(\tanh x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{\Gamma(1-ik)}e^{ikx} \tag{1.3.4}$$

となる．このうち，(1.3.3) 式右辺 1 項目が入射波，2 項目が反射波，(1.3.4) 式が透過波を表す．これらの式から，入射波に対する反射波の係数比 R, および入射波に対する透過波の係数比 T が

$$R = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(1+\nu-ik)\Gamma(-\nu-ik)}{\Gamma(-ik)\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)}, \qquad T = \frac{\Gamma(1+\nu-ik)\Gamma(-\nu-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)} \tag{1.3.5}$$

と求まり，さらに，反射係数 $|R|^2$, 透過係数 $|T|^2$ が，ガンマ関数の公式 $\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma) = \pi/\sin(\pi\gamma)$ を用いて，

$$|R|^2 = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\sin^2(\pi\nu)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad |T|^2 = \frac{\sinh^2(\pi k)}{\sin^2(\pi\nu)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad |R|^2+|T|^2 = 1 \tag{1.3.6}$$

と求められる．ここで，ν が整数のときは反射係数がゼロとなり，無反射になることがわかる．ただし，無反射と言ってもポテンシャルがまったく存在しないときとは違って，透過波の位相は変化する．

以下，このときの固有関数 $P_\nu{}^{ik}(\xi)$ の規格化について考察する．方法は前節の (1.2.17) - (1.2.21) 式と同じだが，Legendre 関数の添え字が異なってくるのでもう一度繰り返す．2 個の正定数 k, k' に対する固有関数 $P_\nu{}^{ik}(\xi)$, $P_\nu{}^{ik'}(\xi)$ が満たす (1.2.3) 式の形のものを，

$$\begin{aligned}\left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) + \frac{k^2}{1-\xi^2}\right]P_\nu{}^{-ik}(\xi) = 0 \\ \left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) + \frac{k'^2}{1-\xi^2}\right]P_\nu{}^{ik'}(\xi) = 0\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

と書いておく．ただし，$P_\nu{}^{ik}(\xi)$ については，この複素共役をとったものにしておく．この第 1 式に $P_\nu{}^{ik'}(\xi)$ を，第 2 式に $P_\nu{}^{-ik}(\xi)$ を掛けて辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{d\xi}\left[P_\nu{}^{-ik}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{ik'}(\xi) - P_\nu{}^{ik'}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{-ik}(\xi)\right] = (k^2-k'^2)\frac{P_\nu{}^{-ik}(\xi)P_\nu{}^{ik'}(\xi)}{1-\xi^2} \tag{1.3.8}$$

となり，これを -1 から 1 まで積分すると，

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_\nu{}^{-ik}(\xi)P_\nu{}^{ik'}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi = \Big[F(\xi)\Big]_{-1}^{1} \tag{1.3.9}$$

となる．ここに，関数 $F(\xi)$ を

$$F(\xi) = \frac{1}{k^2-k'^2}\left[P_\nu{}^{-ik}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{ik'}(\xi) - P_\nu{}^{ik'}(\xi)(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_\nu{}^{-ik}(\xi)\right] \tag{1.3.10}$$

と定義する．さらに，この式は，(1.2.20) の微分公式を使うと，

$$F(\xi) = \frac{1}{k^2-k'^2}\left[(\nu+ik')P_\nu{}^{-ik}(\xi)P_{\nu-1}^{ik'}(\xi) - (\nu-ik)P_\nu{}^{ik'}(\xi)P_{\nu-1}^{-ik}(\xi)\right] \tag{1.3.11}$$

となる．ここで，$\xi=\pm1$ の $F(\xi)$ を見積もるために，$\xi=\tanh x$ とおき，$x\to\pm\infty$ での値を見積もることにすると，(1.3.3) (1.3.4) 式が使える．初めに簡単な $x\to\infty$ の方から，(1.3.4) 式を用いて，

$$F(\tanh x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{ie^{-i(k-k')x}}{\Gamma(1+ik)\Gamma(1-ik')(k-k')} \tag{1.3.12}$$

となり，デルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\pm ikx}}{\pi k}=\pm i\delta(k) \tag{1.3.13}$$

を用いて，

$$(1.3.12)=\frac{\pi\delta(k-k')}{\Gamma(1+ik)\Gamma(1-ik)}=\frac{\sinh(\pi k)}{k}\delta(k-k') \tag{1.3.14}$$

と計算される．同じように，(1.3.3) 式を使って，$F(\tanh x)$ の $x\to-\infty$ の極限も計算できるが，こちらの方は項が多くなるためかなり面倒である．ここでは，途中の計算過程は抜きにして結果のみを記す．

$$F(\tanh x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\frac{2\sin^2(\pi\nu)+\sinh^2(\pi k)}{k\sinh(\pi k)}\delta(k-k') \tag{1.3.15}$$

となる．このときは，$\delta(k+k')$ という項も出てくるが，正の k,k' に対しては無効となるため省いている．これで (1.3.9) 式の積分が求まったわけで，結果は (1.3.14) から (1.3.15) を差し引いて，

$$\int_{-1}^{1}\frac{{P_\nu}^{-ik}(\xi){P_\nu}^{ik'}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi=N^2(k)\delta(k-k') \tag{1.3.16}$$

と得られる．ここに，規格化定数 $N^2(k)$ は

$$N^2(k)=\frac{2\big[\sin^2(\pi\nu)+\sinh^2(\pi k)\big]}{k\sinh(\pi k)} \tag{1.3.17}$$

と定義した．したがって，${P_\nu}^{ik}(\xi)/N(k)$ が規格化された固有関数ということになる．特に ν が整数で無反射のときは，

$$N^2(k)=\frac{2\sinh(\pi k)}{k} \tag{1.3.18}$$

とより簡単化される．

これで，束縛状態，散乱状態の両方の解が求められたので，固有関数の完全性の式を作ることができる．その前に，束縛状態と散乱状態の固有関数が直交することは，(1.3.7) - (1.3.11) 式までと同種の計算で確かめられ，

$$\int_{-1}^{1}\frac{{P_\nu}^{n-\nu}(\xi){P_\nu}^{ik}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi=0 \tag{1.3.19}$$

となることを注意しておく．

完全性の式は，束縛状態と散乱状態の両方からの寄与があるので，

$$\sum_{n=0}^{N<\nu}\frac{{P_\nu}^{n-\nu}(\xi){P_\nu}^{n-\nu}(\xi')}{{N_n}^2}+\int_0^\infty\frac{{P_\nu}^{-ik}(\xi){P_\nu}^{ik}(\xi')}{N^2(k)}dk=(1-\xi^2)\delta(\xi-\xi') \tag{1.3.20}$$

となる．ここに，n の和の上限 N は，ν を含まない，ν より小さい最大の整数とする．

1.4 $V_0\geq 0$ の場合

V_0 正の場合は，山型ポテンシャルで，障害型のものになる．この場合のエネルギー E は正となるので，(1.2.1) 式から，前節同様，μ は虚数となるので，正定数 k を用いて，

$$\mu=ik\big(=\sqrt{-E}\big) \tag{1.4.1}$$

とおく．同じく，(1.2.1) 式から，ν は (1.2.8) 式と同じように

$$\nu = \frac{-1+\sqrt{1-4V_0}}{2} \tag{1.4.2}$$

と解かれるが，この根号の中の符号によって，実数になる場合と複素数になる場合に分かれる．ここでは，これを

$$\nu = \begin{cases} -\frac{1}{2}+a, & 0 \le a\big(=\frac{1}{2}\sqrt{1-4V_0}\big) \le \frac{1}{2}, \qquad \text{for} \quad V_0 \le 1/4 \\ -\frac{1}{2}+i\alpha, & 0 < \alpha\big(=\frac{1}{2}\sqrt{4V_0-1}\big), \qquad \text{for} \quad V_0 > 1/4 \end{cases} \tag{1.4.3}$$

とおくことにする．

このときは，V_0 の符号が正に変わることによって，ν の定義域が変わるだけで，前節の議論がそのまま使える．前節で得た反射係数，透過係数の式 (1.3.6) において，このときの ν を代入すると，

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \frac{\cos^2(\pi a)}{\cos^2(\pi a)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad |T|^2 = \frac{\sinh^2(\pi k)}{\cos^2(\pi a)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad \text{for} \quad V_0 \le 1/4 \\ |R|^2 &= \frac{\cosh^2(\pi \alpha)}{\cosh^2(\pi \alpha)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad |T|^2 = \frac{\sinh^2(\pi k)}{\cosh^2(\pi \alpha)+\sinh^2(\pi k)}, \qquad \text{for} \quad V_0 > 1/4 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

となる．いずれの場合も $|R|^2+|T|^2=1$ となる．これらの式で，$E<V_0$ のときは，トンネル効果を表している．なお，この $E<V_0$ という条件は，k,a,α で表すと，$k^2<\frac{1}{4}-a^2$, または，$k^2<\frac{1}{4}+\alpha^2$ となる．

このときの固有関数 $P^{\,ik}_{-\frac{1}{2}+a}(\xi)$，$P^{\,ik}_{-\frac{1}{2}+i\alpha}(\xi)$ の規格化についても前節の議論がそのまま流用でき，(1.3.16) (1.3.17) 式から，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{P^{\,-ik}_{-\frac{1}{2}+a}(\xi)P^{\,ik'}_{-\frac{1}{2}+a}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi &= N^2(k)\delta(k-k'), \qquad \text{for} \quad V_0 \le 1/4 \\ \int_{-1}^{1} \frac{P^{\,-ik}_{-\frac{1}{2}+i\alpha}(\xi)P^{\,ik'}_{-\frac{1}{2}+i\alpha}(\xi)}{1-\xi^2}d\xi &= N^2(k)\delta(k-k'), \qquad \text{for} \quad V_0 > 1/4 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

となる．ここに，規格化定数 $N^2(k)$ は，

$$\begin{aligned} N^2(k) &= \frac{2\big[\cos^2(\pi a)+\sinh^2(\pi k)\big]}{k\sinh(\pi k)}, \qquad \text{for} \quad V_0 \le 1/4 \\ N^2(k) &= \frac{2\big[\cosh^2(\pi \alpha)+\sinh^2(\pi k)\big]}{k\sinh(\pi k)}, \qquad \text{for} \quad V_0 > 1/4 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

となる．また，これら固有関数の完全性の式は，束縛状態が存在しないので和の部分はなく，

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \frac{P^{\,-ik}_{-\frac{1}{2}+a}(\xi)P^{\,ik}_{-\frac{1}{2}+a}(\xi')}{N^2(k)}dk &= (1-\xi^2)\delta(\xi-\xi'), \qquad \text{for} \quad V_0 \le 1/4 \\ \int_{0}^{\infty} \frac{P^{\,-ik}_{-\frac{1}{2}+i\alpha}(\xi)P^{\,ik}_{-\frac{1}{2}+i\alpha}(\xi')}{N^2(k)}dk &= (1-\xi^2)\delta(\xi-\xi'), \qquad \text{for} \quad V_0 > 1/4 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

となる．

1.5 数値計算例

初めに，(1.2.15) 式で与えられる固有関数を数値的に求めたものを示す．以下の図 1 は，$\nu=4.5$ とした場合の $n=0,1,2,3,4$ の 5 個の固有関数 $P_\nu^{\,n-\nu}(\tanh x)$ をグラフ化したものである．これから，モード番号 n による偶奇性，また，これら固有関数は n と同じ個数のゼロ点を持つことがわかる．

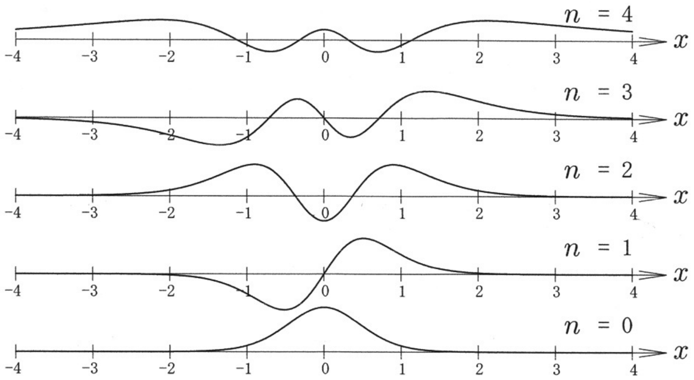

図 1　　固有関数

つぎに，(1.3.6) および (1.4.4) 式で求めた反射係数，透過係数を数値的に求めグラフにしてみる．ただし，ここではグラフの枚数を無用に増やさないために，これらの式に現れるパラメータ ν, a, α は，(1.2.8) および (1.4.3) 式で示すように，すべて V_0 で表されるので，ここでは，反射係数，透過係数のパラメータを V_0 と k の 2 個とし，V_0 の値を正負まとめて，グラフ化することにする．

以下の図 2 に反射係数，図 3 に透過係数のグラフを示す．これらのグラフは，横軸に V_0 を -5 から $+5$ までをとり，斜め方向に k 軸を 0 から $+5$ まで，上方向に反射係数，透過係数をとって 3 次元的に表したものである． ただし，図 2 と図 3 とでは，k 軸の取り方が逆向きになっていることに注意する．これは，グラフの手前側に高さが高い部分がきてしまうと非常に見難いものになってしまうのを避けるためである．

図 2 から，$V_0 < 0$ で谷型ポテンシャルのときは，k が少しでも大きくなるとほぼ無反射になることがわかるが，$V_0 = 0,\ -2$, ($\nu = 0,\ 1$ に相当) のところでは，k の値に関係なく無反射になっていることがわかる．さらに，$V_0 > 0$ のときは，山型の障害ポテンシャルとなるが，このとき，電子のエネルギー $E = k^2$ と山の高さ V_0 の関係を見るために，これらの値が等しくなる曲線 $V_0 = k^2$ を V_0-k 平面上で描いたものを赤点線で，また，その線上での関数値 $|R|^2$, $|T|^2$ を青線で示してある．図 3 から，この青線より手前にある部分でも透過係数は完全にはゼロとならずに，トンネル効果を起こしているのが見てとれる．

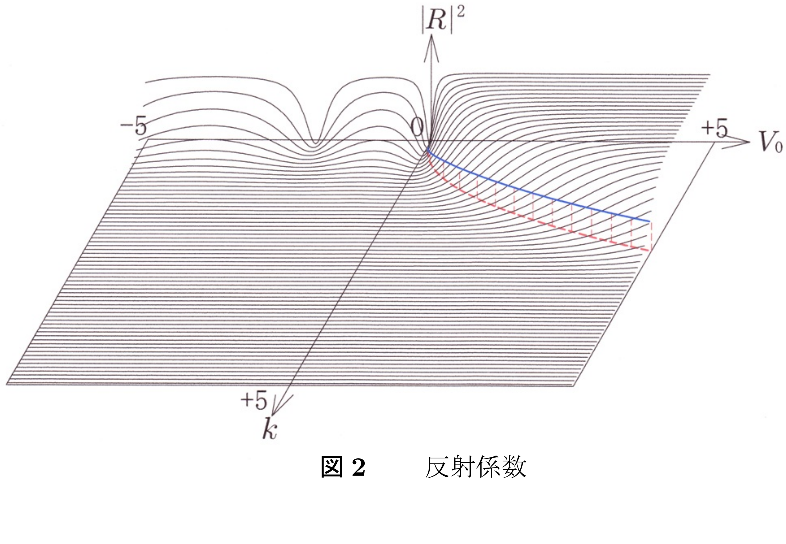

図 2　　反射係数

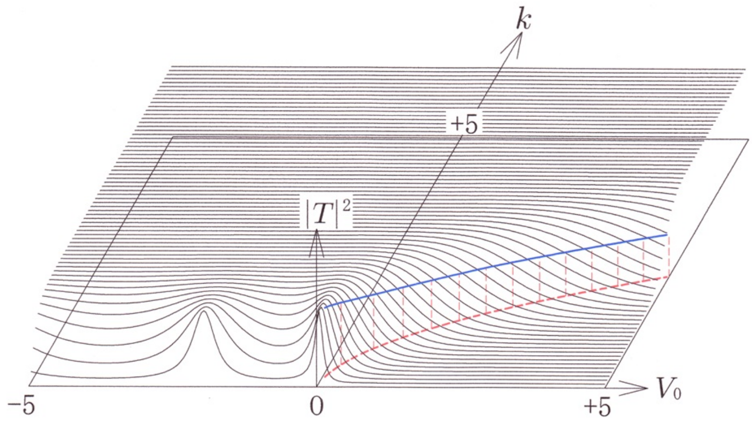

図 3　透過係数

1.6　おわりに

ここに出てくる数式のうち，デルタ関数を使ったもの，すなわち，(1.3.16) (1.3.20) (1.4.5) (1.4.7) の各式は，すべて数学の公式集には存在しないもので，今回，新しく作ったものである．これは公式集なるものがすべて年代が古く，デルタ関数などというものが一般に認められていなかった時代に作られたせいである．しかし，デルタ関数は一度使いだすとこれほど便利なものはないと思うのだが．

数学の公式集というと，扱っている公式の多さでは，やはり一番に Bateman Manuscript Project による "Higher Transcendental Functions" 全 3 巻と "Tables of Integral Transforms" 全 2 巻であろう．これを見ていると，数学屋はどういう動機付けで，こんなにもたくさんの公式を作るのかと不思議になってくる．ここで引用した (1.2.23) 式などはまさにそうで，こんな式を作る人は何に憑きつかれて作る気になったのか，そちらの方がむしろ知りたくなる．なお，この (1.2.23) 式に出てくる関数 ${P_\nu}^{n-\nu}(\xi)$ は，

$$ {P_\nu}^{n-\nu}(\xi) = \frac{2^{n-\nu} n! \mathit{\Gamma}(2\nu - 2n + 1)}{\mathit{\Gamma}(2\nu - n + 1)\mathit{\Gamma}(\nu - n + 1)} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}(\nu - n)} {C_n}^{\nu - n + \frac{1}{2}}(\xi) \tag{1.6.1} $$

と Gegenbauer の多項式を用いて表わすこともできるが [7]，これを使っても (1.2.23) 式と Gegenbauer 多項式の直交性の式とは結びつかないので，役には立たないようである．

［ 謝辞 ］
今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，特にコメントすることはないというお返事をいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

[7] "Tables of Integral Transforms" Bateman Manuscript Project, Vol.1, p.175 (4)

Legendre関数と量子力学のポテンシャル問題(2)

Legendre Function and a Potential Problem of Quantum Mechanics(2)

世戸 憲治[8]
Kenji Seto[9]

2.1 はじめに

思わぬところで，Legendre 関数に出会う例として，前回の論文「Legendre 関数と量子力学のポテンシャル問題 (1)」(「数学・物理通信」4 巻 8 号) で，ポテンシャルが $1/\cosh^2(x)$ に比例する場合を扱った．今回は，この類似問題として，1 次元の Schrödinger 方程式のポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{V_0}{\sinh^2(x/x_0)} \tag{2.1.1}$$

という場合を考える．ここに，x_0 は長さの次元を持つ正の定数であり，また，V_0 はエネルギーの次元を持つ正の定数とする．このときの Schrödinger 方程式は，m, E を，それぞれ，電子の質量，エネルギーとして，

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{\sinh^2(x/x_0)}\Big]\Psi = E\Psi \tag{2.1.2}$$

となるが，ここでは，以下で扱う数式簡素化のため，変数を無次元化しておく．すなわち，座標 x, ポテンシャルの大きさ V_0, エネルギー E を，改めて，

$$x/x_0 \;\to\; x, \qquad \frac{2m{x_0}^2V_0}{\hbar^2} \;\to\; V_0, \qquad \frac{2m{x_0}^2E}{\hbar^2} \;\to\; E \tag{2.1.3}$$

と置き直す．この置き換えで，方程式は

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{V_0}{\sinh^2 x} + E\Big]\Psi = 0 \tag{2.1.4}$$

となる．この方程式を，$x > 0$ の領域で，エネルギー E が正の散乱問題として解くことを試みる．

[8]北海学園大学名誉教授
[9]seto@pony.ocn.ne.jp

2.2 方程式の解法

2.2.1 散乱解

ここでは，方程式 (2.1.4) を解くにあたって，変数を後の便宜上，

$$\nu(\nu+1) = V_0, \qquad \mu^2 = -E \tag{2.2.1}$$

と置き換える．さらに，独立変数 x を

$$\xi = \coth x, \qquad 1 < \xi \tag{2.2.2}$$

と変換すると，方程式は

$$\Big[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-\xi^2}\Big]\Psi = 0 \tag{2.2.3}$$

となる．これは Legendre 陪微分方程式であり，その解は，定数係数を除いて，

$$\begin{aligned} &\Psi = P_\nu{}^\mu(\xi) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\Big(\frac{\xi+1}{\xi-1}\Big)^{\mu/2} F\Big(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu;\ \frac{1-\xi}{2}\Big) \\ \text{or}\quad &\Psi = Q_\nu{}^\mu(\xi) \equiv \frac{e^{\mu\pi i}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}}{\xi^{\nu+\mu+1}} F\Big(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\xi^2}\Big) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

と与えられる [10]．ここに，$P_\nu{}^\mu(\xi)$, $Q_\nu{}^\mu(\xi)$ は，それぞれ，第 1 種，第 2 種の Legendre 陪関数，F は Gauss の超幾何関数である．

(2.2.1) 式から，$E > 0$ のときは，μ が虚数となるので，実数 k を用いて，

$$\mu = -ik \tag{2.2.5}$$

とおく．このときの k の符号については正負どちらを取っても複素共役をとることで互いに移行できるので，ここでは $k > 0$ としておく．また，同じく (2.2.1) 式から，ν は

$$\nu = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4V_0}}{2} \tag{2.2.6}$$

となるが，ここで，根号の前の符号でプラスを採用すると，正の V_0 に対し，$\nu > 0$ となり，マイナスを採用すると $\nu < -1$ となることを注意しておく．

ここで，波動関数に対する境界条件として，$x \to 0$ $(\xi \to \infty)$ で $\Psi \to 0$ を課す必要があるが，その前に，Legendre 関数に対する (2.2.4) 式とは異なる表示式を提示しておく [11]．

$$\begin{aligned} P_\nu{}^\mu(\xi) = \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}}{\sqrt{\pi}}\Big[&\frac{\sin\big((\nu+\mu)\pi\big)}{2^{\nu+1}\cos(\nu\pi)}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\frac{1}{\xi^{\nu+\mu+1}}F\Big(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+1}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\xi^2}\Big) \\ &+ \frac{2^\nu\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\xi^{\nu-\mu}F\Big(\frac{\mu-\nu+1}{2},\ \frac{\mu-\nu}{2},\ \frac{1}{2}-\nu;\ \frac{1}{\xi^2}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} Q_\nu{}^\mu(\xi) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2}\Big[&\Gamma(\mu)\Big(\frac{\xi+1}{\xi-1}\Big)^{\frac{1}{2}\mu}F\Big(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu;\ \frac{1-\xi}{2}\Big) \\ &+ \frac{\Gamma(-\mu)\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Big(\frac{\xi-1}{\xi+1}\Big)^{\frac{1}{2}\mu}F\Big(-\nu,\ \nu+1,\ 1+\mu;\ \frac{1-\xi}{2}\Big)\Big], \quad |\xi-1| < 2. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

---

[10]「数学公式 3」(岩波全書) p.119

[11]「数学公式 3」(岩波全書) p.123, p.124

この (2.2.7) 式から，μ が虚数で，$\nu > 0$ のとき，$\xi \to \infty$ で，大括弧中の 1 項目はゼロに収束するが，2 項目は発散し，また，$\nu < -1$ のときは 2 項目はゼロに収束するが，1 項目が発散するので，いずれにしても，$P_\nu{}^\mu(\xi)$ は波動関数として失格となる．

一方，$Q_\nu{}^\mu(\xi)$ は，(2.2.4) 第 2 式より $\nu > -1$ であれば，もちろん，$\nu > 0$ であれば十分に，$\xi \to \infty$ でゼロに収束するので，波動関数として採用することが許され，

$$\Psi = Q_\nu{}^\mu(\xi) \tag{2.2.9}$$

となる．ここに，ν は，

$$\nu = \frac{-1+\sqrt{1+4V_0}}{2} \tag{2.2.10}$$

とし，以後，この正なる ν を採用することにする．

つぎに，$x \to \infty$ $(\xi \to 1)$ の極限でこの波動関数がどうなるかを見てみよう．(2.2.8) 式に含まれる因子について，$\mu = -ik$ として，元の変数に戻すと，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{-ik/2} &= \left(\frac{\coth x+1}{\coth x-1}\right)^{-ik/2} = e^{-ikx}\\ \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{-ik/2} &= \left(\frac{\coth x-1}{\coth x+1}\right)^{-ik/2} = e^{ikx}\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

となることに注意すると，

$$Q_\nu{}^{-ik}(\coth x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{e^{k\pi}}{2}\left[\Gamma(-ik)e^{-ikx} + \frac{\Gamma(ik)\Gamma(\nu-ik+1)}{\Gamma(\nu+ik+1)}e^{ikx}\right] \tag{2.2.12}$$

を得る．この大括弧中の 1 項目が，x 軸の正方向から負方向に向かって進む入射波，2 項目が $x = 0$ の壁に衝突して正方向に跳ね返る反射波である．このときの入射波に対する反射波の係数比を R とすると，

$$R = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(\nu-ik+1)}{\Gamma(-ik)\Gamma(\nu+ik+1)} \tag{2.2.13}$$

となり，この場合はすべての入射波が反射するので，当然のことながら，$|R| = 1$ となる．

2.2.2 波動関数の規格化

つぎに，ここでの関数 $Q_\nu{}^{-ik}(\xi)$ を規格化してみる．一般に異なる 2 つの k, k' とそれに属する関数 $Q_\nu{}^{-ik}(\xi)$, $Q_\nu{}^{-ik'}(\xi)$ が満たす (2.2.3) の形の方程式を

$$\begin{aligned}&\left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) + \frac{k^2}{1-\xi^2}\right]Q_\nu{}^{-ik}(\xi) = 0\\ &\left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + \nu(\nu+1) + \frac{k'^2}{1-\xi^2}\right]Q_\nu{}^{ik'}(\xi) = 0\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

と書いておく．ただし，$Q_\nu{}^{-ik'}(\xi)$ についてはその複素共役をとったものにしてある．この第 1 式に $Q_\nu{}^{ik'}(\xi)$ を，また，第 2 式に $Q_\nu{}^{-ik}(\xi)$ を掛けて辺々を引き算すると

$$\frac{d}{d\xi}\left[Q_\nu{}^{ik'}(\xi)(1-\xi^2)\frac{dQ_\nu{}^{-ik}(\xi)}{d\xi} - Q_\nu{}^{-ik}(\xi)(1-\xi^2)\frac{dQ_\nu{}^{ik'}(\xi)}{d\xi}\right] + (k^2-k'^2)\frac{Q_\nu{}^{-ik}(\xi)Q_\nu{}^{ik'}(\xi)}{1-\xi^2} = 0 \tag{2.2.15}$$

となり，これを ξ について，1 から ∞ まで積分すると，

$$\int_1^\infty \frac{Q_\nu{}^{-ik}(\xi)Q_\nu{}^{ik'}(\xi)}{\xi^2-1}d\xi = \big[F(\xi)\big]_1^\infty \tag{2.2.16}$$

となる．ただし，ここで，

$$F(\xi)=\frac{1}{k^2-k'^2}\Big[{Q_\nu}^{-ik}(\xi)(\xi^2-1)\frac{d{Q_\nu}^{ik'}(\xi)}{d\xi}-{Q_\nu}^{ik'}(\xi)(\xi^2-1)\frac{{Q_\nu}^{-ik}(\xi)}{d\xi}\Big] \tag{2.2.17}$$

とおいた．さらにここで，${Q_\nu}^{\mu}(\xi)$ に関する微分公式

$$(\xi^2-1)\frac{d{Q_\nu}^{\mu}(\xi)}{d\xi}=(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^{\mu}(\xi)-(\nu+1)\xi{Q_\nu}^{\mu}(\xi) \tag{2.2.18}$$

を用いると，

$$F(\xi)=\frac{1}{k^2-k'^2}\Big[(\nu-ik'+1){Q_\nu}^{-ik}(\xi)Q_{\nu+1}^{ik'}(\xi)-(\nu+ik+1)Q_{\nu+1}^{-ik}(\xi){Q_\nu}^{ik'}(\xi)\Big] \tag{2.2.19}$$

となる．つぎに，$F(\xi)$ の $\xi\to1,\ \infty$ での値を見積もらなければならないが，前にやったように，(2.2.4) 第 2 式から，

$$F(\xi)\xrightarrow{\xi\to\infty}0 \tag{2.2.20}$$

となる．つぎに，$\xi\to1$ のときどうなるかであるが，これは，元の変数 x に戻すと，(2.2.12) 式が利用でき，$e^{i(k+k')x}$，$e^{-i(k+k')x}$ に比例する項を除いて，その理由はあとで述べるが，

$$F(\coth x)\xrightarrow{x\to\infty}\frac{ie^{(k+k')\pi}}{4(k-k')}\Big[\frac{\Gamma(ik)\Gamma(-ik')\Gamma(\nu-ik+1)\Gamma(\nu+ik'+1)}{\Gamma(\nu+ik+1)\Gamma(\nu-ik'+1)}e^{i(k-k')x}-\Gamma(-ik)\Gamma(ik')e^{-i(k-k')x}\Big] \tag{2.2.21}$$

となる．ここで，デルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\pm ikx}}{\pi k}=\pm i\delta(k) \tag{2.2.22}$$

を用いると，

$$(2.2.21)=-\frac{\pi e^{2k\pi}}{2}\Gamma(ik)\Gamma(-ik)\delta(k-k')=-\frac{\pi^2e^{2k\pi}}{2k\sinh(k\pi)}\delta(k-k') \tag{2.2.23}$$

となる．(2.2.21) 式を求めるときに，$e^{i(k+k')x}$，$e^{-i(k+k')x}$ に比例する項を除いたのは，この項は $\delta(k+k')$ になり，正の k, k' に対しては効力を持たないためである．これで (2.2.16) 式の積分，すなわち，固有関数の直交性の式が求まった．

$$\int_1^\infty\frac{{Q_\nu}^{-ik}(\xi){Q_\nu}^{ik'}(\xi)}{\xi^2-1}d\xi=N^2(k)\delta(k-k') \tag{2.2.24}$$

ここに，規格化定数 $N^2(k)$ は

$$N^2(k)=\frac{\pi^2e^{2k\pi}}{2k\sinh(k\pi)} \tag{2.2.25}$$

と定義する．これから， ${Q_\nu}^{-ik}(\xi)/N(k)$ が規格化された固有関数となる．なお，ここでの $N(k)$ が ν に依存しないことは注目に値する．また，固有関数の完全性の式は，

$$\int_0^\infty\frac{{Q_\nu}^{-ik}(\xi){Q_\nu}^{ik}(\xi')}{N^2(k)}dk=(\xi^2-1)\delta(\xi-\xi') \tag{2.2.26}$$

となる．

ついでながら，この直交性の式，および完全性の式は，元の変数 x で表すと

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty{Q_\nu}^{-ik}(\coth x){Q_\nu}^{ik'}(\coth x)dx=N^2(k)\delta(k-k')\\&\int_0^\infty\frac{{Q_\nu}^{-ik}(\coth x){Q_\nu}^{ik}(\coth x')}{N^2(k)}dk=\delta(x-x')\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

となる．

2.3　おわりに

ここで扱った問題は，物理的にはつまらないもので，もし，ポテンシャルが

$$V(x) = \infty, \quad x \leq 0, \quad = 0, \quad 0 < x \tag{2.3.1}$$

としたら，波動関数は $\Psi = \sin(kx)$ となるだけの話と本質的に同じである．しかし，ここでは，第 1 種 Legendre 関数 ${P_\nu}^\mu(\xi)$ ではなく，第 2 種 Legendre 関数 ${Q_\nu}^\mu(\xi)$ が主役を演じるというまったく予期しないものであった点がおもしろいところである．

グラスマン代数における積分演算子

Integral Operator in the Grassmann Algebra

中 西　襄 [12]
Noboru NAKANISHI[13]

3.1　考える問題

よく知られているように，グラスマン数とは完全に反可換な「数」である．すなわちグラスマン代数とは，反可換性

$$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i \tag{3.1.1}$$

を満たすようなグラスマン数 $\{\xi_i\ (i=1,2,\cdots)\}$ [14] から生成される環 [15] のことである．${\xi_i}^2=0$ なので，もちろん逆元は存在しない．グラスマン数の無限小は定義できないが，グラスマン代数に 1 を添加した系において，グラスマン数 ξ_i に対する微分演算子 $\partial/\partial\xi_i \equiv \partial_i$ は，形式的に定義することができる．すなわち ∂_i は

$$\partial_i 1 = 0,\ \ \{\partial_i,\ \xi_j\} = \delta_{ij} \tag{3.1.2}$$

であるような線形演算子として定義される．しかし，${\xi_i}^2=0$ であるため，その逆演算子は定義できず，定積分に相当する

$$\int d\xi_i = 0,\ \ \int d\xi_i\ \xi_j = \delta_{ij} \tag{3.1.3}$$

のみが考えられている (ベレジン積分 [16]) ．これらの演算は，場の量子論のフェルミオン場の経路積分量子化に応用されている．

ところで，ある系の中では定義できない概念も，系を拡大すれば定義が可能になることがしばしばある．例えば，通常の代数方程式は実数の範囲内では必ずしも解がないが，$\sqrt{-1}\equiv i$ という新しい数を考え，複素数を導入すれば必ず解けるようになる．そこで同様の発想から，グラスマン代数において積分演算子を導入することを考えよう．

新しく提起することは，$\partial_i^{-1}\xi_i \equiv \zeta_i$ という可換量を添加してグラスマン代数を拡大することである．つまり，この式によって積分演算子 ∂_i^{-1} が定義できる系が構成できる．ただしこの系では，もはや ${\partial_i}^2=0$ は成立しなくなることに注意しなければならない．積分定数の面倒を避けるため，

$$\partial_i^{-1} 0 = 0 \tag{3.1.4}$$

[12] 京都大学名誉教授
[13] nbr-nak@trio.plala.or.jp

[14] グラスマン数の記号としては，ξ よりも θ が使われることの方が多い．また外積代数の要素と見做す場合には，u などのローマ字で表記される．

[15] 係数域は実数体もしくは複素数体とする．

[16] ディラック場の経路積分量子化をきちんと定式化するため，1966 年 F. A. Berezin によって導入された．

と定義しておく．

1 変数の場合には，

$$\partial_i^{-1} 1 = \xi_i, \tag{3.1.5}$$

$$\partial_i^{-1} \xi_i = \zeta_i, \tag{3.1.6}$$

$$\partial_i^{-1} \zeta_i = \xi_i \zeta_i \tag{3.1.7}$$

$$\partial_i^{-1} (\xi_i \zeta_i) = \frac{1}{2} {\zeta_i}^2 \tag{3.1.8}$$

のようになる．

多変数にすると，$\partial_i \zeta_j = \delta_{ij} \xi_j$ なので，

$$\partial_i^{-1} \xi_j = \delta_{ij} \zeta_i + \xi_i \xi_j, \tag{3.1.9}$$

$$\partial_i^{-1} \zeta_j = \xi_i \zeta_j \tag{3.1.10}$$

となる．

上述の積分との対応は

$$\int d\xi_i \cdots = (\partial_i^{-1} \cdots)\Big|_{\xi=0,\ \zeta=1} \tag{3.1.11}$$

である [(3.1.5) と (3.1.9) 参照].

3.2 基本定理

まず基本的事実は，このように拡張されたグラスマン代数系が，微分演算子およびその逆である積分演算子について閉じているということである．微分演算子については自明だから，積分演算子のついてのみ考察すればよい．

[定理]　ξ と ζ の任意の多項式に ∂_i^{-1} を作用させたものは，また ξ と ζ の多項式である．

まず準備として，任意の ζ，ξ，∂，∂^{-1} の積 F の次数 $N(F)$ を次のように定義する．$N(1) = 0$, $N(\xi) = 1$, $N(\zeta) = 2$, $N(\partial) = -1$, $N(\partial^{-1}) = 1$ とし，$N(F)$ は，F に現れる因子の次数の和とする．

非斉次多項式に関する等式が成立すれば，その各斉次部分で等式が成立するので，話を斉次式に限ってよい．したがって，以下ではすべて斉次式のみを扱う．定理の証明は，明らかに単項式

$$F \equiv \prod_r \xi_{k_r} \cdot \prod_q \zeta_{j_q} \tag{3.2.1}$$

に対し $\partial_i^{-1} F$ が ξ と ζ の多項式で書けることを示せばよい．まず 1 変数の場合，すなわち $k_r = j_q = i$ の場合は，ξ_i は 1 個以下であるから，

$$\partial_i^{-1} {\zeta_i}^n = \xi_i {\zeta_i}^n, \tag{3.2.2}$$

$$\partial_i^{-1} \xi_i {\zeta_i}^n = \frac{{\zeta_i}^{n+1}}{n+1} \tag{3.2.3}$$

となって，すべて積分が遂行される．多変数の場合，各添え字ごとにその番号が i と一致するときと，そうでないときとに分けて考える．例えは，$\zeta_j = \delta_{ij} \zeta_i + (1 - \delta_{ij}) \zeta_j \ (j \neq i)$ のようにすべての因子を書き改める．添え字が i に一致しない因子はすべて ∂_i^{-1} の外へ出せるから，すべて計算できることになる．したがって定理が証明された．

3.3 部分積分の公式

ライプニッツの公式は

$$\partial_i(FG) = \partial_i F \cdot G + (-1)^{N(F)} F \partial_i G \tag{3.3.1}$$

であるから，部分積分の公式は，

$$\partial_i^{-1}(\partial_i F \cdot G) = FG - (-1)^{N(F)} \partial_i^{-1}(F \partial_i G) \tag{3.3.2}$$

となる．とくに，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i F) = \zeta_i F - \partial_i^{-1}(\zeta_i \partial_i F), \tag{3.3.3}$$

$$\partial_i^{-1}(\zeta_i F) = \xi_i \zeta_i F + \partial_i^{-1}(\xi_i \zeta_i \partial_i F) \tag{3.3.4}$$

が成立する．そこで，(3.3.3)，(3.3.4) を繰り返し用いて $\partial_i^{-1}(\xi_i F)$ を変形することを考える．

[第 1 段]　(3.3.4) の F を $\partial_i F$ として，(3.3.3) に代入すれば，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i F) = \zeta_i F - \xi_i \zeta_i \partial_i F - \partial_i^{-1}(\xi_i \zeta_i {\partial_i}^2 F) \tag{3.3.5}$$

を得る．この右辺の最後の項は，(3.3.3) で F を $\zeta_i {\partial_i}^2 F$ として変形すると，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i \zeta_i {\partial_i}^2 F) = {\zeta_i}^2 {\partial_i}^2 F - \partial_i^{-1}(\xi_i \zeta_i {\partial_i}^2 F) - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F) \tag{3.3.6}$$

であるから，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i \zeta_i {\partial_i}^2 F) = \frac{1}{2}\Big[{\zeta_i}^2 {\partial_i}^2 F - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F)\Big] \tag{3.3.7}$$

を得る．これを (3.3.5) に代入すると，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i F) = \zeta_i F - \xi_i \zeta_i \partial_i F - \frac{1}{2}\Big[{\zeta_i}^2 {\partial_i}^2 F - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F)\Big]. \tag{3.3.8}$$

[第 2 段]　さらに，この最後の項は (3.3.4) の F を $\zeta_i {\partial_i}^3 F$ として計算すると，

$$\partial_i^{-1}({\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F) = \xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F + \partial_i^{-1}(\xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^4 F) \tag{3.3.9}$$

となる．ただし $\xi_i \partial_i \zeta_i = {\xi_i}^2 = 0$ を用いた．したがって (3.3.8) から，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i F) = \zeta_i F - \xi_i \zeta_i \partial_i F - \frac{1}{2}\Big[{\zeta_i}^2 {\partial_i}^2 F - \xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F - \partial_i^{-1}(\xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^4 F)\Big] \tag{3.3.10}$$

を得る．この最後の項はさらに (3.3.3) から

$$\partial_i^{-1}(\xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^4 F) = {\zeta_i}^3 {\partial_i}^4 F - 2\partial_i^{-1}(\xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^4 F) - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^3 {\partial_i}^5 F) \tag{3.3.11}$$

となるから，

$$\partial_i^{-1}(\xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^4 F) = \frac{1}{3}\Big[{\zeta_i}^3 {\partial_i}^4 F - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^3 {\partial_i}^5 F)\Big] \tag{3.3.12}$$

を得る．これを (3.3.10) に代入する．

以上の操作は何回でも繰り返せる．ゆえに第 $(m-1)$ 段に進むと，

$$\begin{aligned}\partial_i^{-1}(\xi_i F) = \zeta_i F - \xi_i \zeta_i \partial_i F - \frac{1}{2!}\Big[{\zeta_i}^2 {\partial_i}^2 F - \xi_i {\zeta_i}^2 {\partial_i}^3 F\Big] + \frac{1}{3!}\Big[{\zeta_i}^3 {\partial_i}^4 F - \xi_i {\zeta_i}^3 {\partial_i}^5 F\Big] \\ - \cdots + (-1)^{m-2}\frac{1}{(m-1)!}\Big[{\zeta_i}^{m-1} {\partial_i}^{2m-4} F - \xi_i {\zeta_i}^{m-1} {\partial_i}^{2m-3} F\Big] \\ + (-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\Big[{\zeta_i}^{m} {\partial_i}^{2m-2} F - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^{m} {\partial_i}^{2m-1} F)\Big]\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

が得られる．最後の項は $2m-1 > N(F)$ ならば 0 であるから，積分は遂行されてしまう．

3.4 積分の一般公式

(3.2.1) で与えられる一般の F の積分の具体的な式を求める[17]．簡単のため，ζ の積の部分を Z と書き，因子 ξ の個数を $n(=(N(F)-N(Z))/2)$ とする．すなわち

$$F = Z\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_n} \tag{3.4.1}$$

とする．部分積分の公式 (3.3.2) で F を ξ_i，G を F とし，${\xi_i}^2=0$ を用いると，

$$\partial_i^{-1}F = \xi_i F + \partial_i^{-1}[Z\xi_i\partial_i(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_n})] \tag{3.4.2}$$

である．したがって，

$$\partial_i^{-1}F = \xi_i F + \sum_{r=1}^{n}\delta_{ik_r}\partial_i^{-1}F|_{k_r=i} \tag{3.4.3}$$

が成立する．もちろん，$n=0$ ならば，右辺は第 1 項のみとなる．

念のため，公式 (3.4.3) のセルフ・コンシステンシーのチェックをしておこう．右辺の F に再びこの公式の右辺を代入すると，

$$\partial_i^{-1}F = \xi_i F + \sum_{r=1}^{n}\delta_{ik_r}\Big(\xi_i F|_{k_r=i} + \sum_{s=1}^{n}\delta_{ik_s}\partial_i^{-1}F|_{k_r=k_s=i}\Big) \tag{3.4.4}$$

となるが，$\xi_i F|_{k_r=i}=0$，かつ s についての和はなくなるので，元の式に戻る．

さて，話を戻して，

$$F^{(k_r)} \equiv (-1)^{r-1}Z\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{r-1}}\xi_{k_{r+1}}\cdots\xi_{k_n} \tag{3.4.5}$$

とおけば，

$$F|_{k_r=i} = \xi_i F^{(k_r)} \tag{3.4.6}$$

と書けるから，(3.3.13) を使うことができる．すなわち公式 (3.3.13) における F を $F^{(k_r)}$ とすると，この最後の項は

$$\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\Big[{\zeta_i}^m\partial_i^{2m-2}F^{(k_r)} - \partial_i^{-1}({\zeta_i}^m\partial_i^{2m-1}F^{(k_r)})\Big] \tag{3.4.7}$$

である．もし $2m-1 > N(F^{(k_r)}) = N(F)-1$ ならば第 2 項は 0 になる．すなわち $m=[N(F)/2]+1$ ならば第 2 項は 0 である（ただし，$[\,\cdot\,]$ はガウスの記号）．このとき，第 1 項については，微分の階数は $2[N(F)/2]$ であるから，$N(F)$ が偶数ならば 0 となる．$N(F)$ の偶奇は n の偶奇と同じであるから，$m=[N(F)/2]+1$ のところは，n が奇数のときのみ第 1 項だけが生き残る．したがって，以上の結果をまとめると，**積分の一般公式**

$$\partial_i^{-1}F = \xi_i F + \sum_{m=1}^{[N(F)/2]+1}\frac{(-1)^{m-1}}{m!}{\zeta_i}^m\sum_{r=1}^{n}\delta_{ik_r}(\partial_i^{2m-2}F^{(k_r)} - \xi_i\partial_i^{2m-1}F^{(k_r)}) \tag{3.4.8}$$

が得られる．ただし $m=[N(F)/2]+1$ の項は，n が奇数の場合のみ存在し，しかも ξ_i のかかっていない方の項のみである．なお，通常のグラスマン数の理論でよく知られているように，ξ のみの積は ${\partial_i}^2$ を作用させるとつねに 0 になるから，もし $p \geqq N(Z)+2 = N(F)-n+2$ ならば，${\partial_i}^pF^{(k_r)}=0$ が成り立つ．

簡単な具体例を挙げておこう．

$$\partial_i^{-1}(\xi_j\xi_k) = \xi_i\xi_j\xi_k + \zeta_i(\delta_{ij}\xi_k - \delta_{ik}\xi_j), \tag{3.4.9}$$

$$\partial_i^{-1}(\xi_j\xi_k\xi_l) = \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l + \zeta_i(\delta_{ij}\xi_k\xi_l - \delta_{ik}\xi_j\xi_l + \delta_{il}\xi_j\xi_k), \tag{3.4.10}$$

$$\partial_i^{-1}(\zeta_j\xi_k) = \xi_i\zeta_j\xi_k + \delta_{ik}\zeta_i\zeta_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{ik}{\zeta_i}^2. \tag{3.4.11}$$

[17] 2 節の方法でも原理的には求まるわけだが，展開すると項数が 3 の冪乗で増大するので，その整理が手に負えなくなる．

3.5　2 重積分演算子

始めに注意したように，$\partial_i{}^2$ は ζ を導入したため 0 ではなくなった．しかし，ζ を含まない量に対してはそれは 0 と同じであるから，やはり特別な演算子であるといえる．そこで 2 重微分演算子 $(\partial^2)_i \equiv \partial_i{}^2$ を定義する．

$$\begin{aligned}\partial_i{}^2(FG) &= \partial_i(\partial_i F \cdot G + (-1)^{N(F)} F \partial_i G)\\ &= \partial_i{}^2 F \cdot G + (-1)^{N(F)-1} \partial_i F \cdot \partial_i G + (-1)^{N(F)} \partial_i F \cdot \partial_i G + F \partial_i{}^2 G \\ &= \partial_i{}^2 F \cdot G + F \partial_i{}^2 G\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

であるから，$(\partial^2)_i$ はライプニッツ規則

$$(\partial^2)_i(FG) = (\partial^2)_i F \cdot G + F(\partial^2)_i G \tag{3.5.2}$$

を満たしていることがわかる．そこで，$(\partial^2)_i$ の逆演算子（2 重積分演算子）を $(\partial^{-2})_i$ と書く．

さて，部分積分の公式 (3.3.2) において F に $\partial_i^{-1} F$ を代入すれば，

$$(\partial_i^{-1})^2 F = \xi_i \partial_i^{-1} F + \partial_i^{-1}(\xi_i F) \tag{3.5.3}$$

である．右辺の第 1 項，第 2 項にそれぞれ公式 (3.4.8) と (3.3.13) を代入して計算すると，

$$\begin{aligned}(\partial_i^{-1})^2 F = &\sum_{m=1}^{[N(F)/2]+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \xi_i \zeta_i{}^m \sum_{r=1}^{n} \delta_{ik_r} \partial_i^{2m-2} F^{(k_r)} \\ &+ \sum_{m=1}^{[N(F)/2]+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \Big[\zeta_i{}^m \partial_i{}^{2m-2} F - \xi_i \zeta_i{}^m \partial_i{}^{2m-1} F\Big] \\ = &\sum_{m=1}^{[N(F)/2]+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \Big[\zeta_i{}^m \partial_i^{2m-2} F - \xi_i \zeta_i{}^m \Big(\partial_i^{2m-1} F - \sum_{r=1}^{n} \delta_{ik_r} \partial_i^{2m-2} F^{(k_r)}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

を得る．とくに，$n=0$，すなわち $F=Z$ の場合は，最後の項はなく，中央項も $\xi_i{}^2=0$ により落ちるから，

$$(\partial_i^{-1})^2 Z = \sum_{m=1}^{(N(Z)/2)+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \zeta_i{}^m \partial_i{}^{2m-2} Z \tag{3.5.5}$$

となる．この式は

$$(\partial^2)_i^{-1} Z = \sum_{m=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \zeta_i{}^m (\partial^2)_i{}^{m-1} Z \tag{3.5.6}$$

と書いてもよい．ただし，$p = N(Z)/2$ は Z の ζ の個数である．

(3.5.6) は $(\partial^2)_i$ を $\partial/\partial\zeta_i$ と同定して計算したものと一致する．(3.5.6) で $(\partial^2)_i$ を $\partial/\partial\zeta_i$ に置き換えた式は

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^{-1} Z = \sum_{m=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \zeta_i{}^m \Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^{m-1} Z \tag{3.5.7}$$

であるが，たしかに

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)[\text{右辺}] &= \sum_{m=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \zeta_i{}^{m-1} \Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^{m-1} Z + \sum_{m=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \zeta_i{}^m \Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^{m} Z \\ &= \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{m!} \zeta_i{}^m \Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^m Z - \sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m}{m!} \zeta_i{}^m \Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big)^m Z \\ &= Z\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

となっている．

このように，ζ に関する計算規則は通常の変数に関するものと全く同じなので，それと同定することができる．そうすると，逆に $\partial/\partial\xi$ を $\partial/\partial\zeta$ の「平方根」と同定することが可能であることがわかる．すなわち，$(\sqrt{\partial/\partial\zeta_i})\zeta_i \equiv \xi_i$ としてグラスマン数を導入するわけである．こうして普通の微積分学を「スーパー微積分学」に拡張できることになる．

3.6 おわりに

新しい可換量 ζ を導入すれば，グラスマン代数にコンシステントに積分演算子を導入できることがわかった．この ζ は通常の変数と同一視できるような量である．すなわち，グラスマン数 ξ とその微分演算子が正準反交換関係

$$\{\partial_i,\ \xi_j\} = \delta_{ij} \tag{3.6.1}$$

を満たすのに対して，ζ とその微分演算子は正準交換関係

$$[(\partial^2)_i,\ \zeta_j] = \delta_{ij} \tag{3.6.2}$$

を満たす．ただし $\zeta_j = \partial_j^{-1}\xi_j$ である．

これを場の量子論に翻訳してみよう．簡単のため，スピンのことは無視する．場の量子論では，同時刻においてフェルミオン場 $\psi(x)$ とその正準共役量 $\pi_\psi(x)$ に対し正準反交換関係

$$i\{\pi_\psi(x),\ \psi(y)\} = \delta^3(x-y) \tag{3.6.3}$$

を設定する (δ^3 は空間 3 次元デルタ関数)．また，ボソン場 $\phi(x)$ とその正準共役量 $\pi_\phi(x)$ に対しては，正準交換関係

$$i[\pi_\phi(x),\ \phi(y)] = \delta^3(x-y) \tag{3.6.4}$$

が成り立つ．

現在の素粒子の標準理論では，フェルミオン場もボソン場も独立に基礎場として導入されているが，こういう二元論的構成は統一場理論としては好ましくないという哲学がある．実際，かつてハイゼンベルクは，その晩年にフェルミオン場のみからすべての素粒子を説明しようという非線形場理論を提唱した [18]（もちろん彼の試みは失敗に終わったが）．上での考察は，フェルミオン一元論の構成の可能性に関し，次のことを暗示するように思われる：「もし $\pi_\psi(x)$ の逆オペレータが存在するようにできれば，ボソン場 $\phi(x)$ は $\pi_\psi(x)^{-1}\psi(x)$ によって定義すればよい．そのとき，$\phi(x)$ の正準共役量は $\pi_\psi(x)^2$ で与えられる.」もちろん現段階では，これは夢物語である．

[18] ディラック方程式を非線形化したもので，1950 年代末「宇宙方程式」の俗称で，横山隆一氏のマンガ「フクちゃん」にも登場するくらい有名になった．

編集後記

先日 4 巻 7 号を発刊したと思ったら，はやくも 4 巻 8 号の発行である．

ひとえにご投稿を下さる方々に私は足を向けて寝ることなどできないほど感謝している．お蔭で私が穴埋めのために原稿をあわてて書く必要がなくなった．有難いことである．

これまでに 1 巻 11 号，2 巻 6 号，3 巻と 4 巻は 8 号づつで合わせて 33 号を発行してきたことになる．今後も私が健康である限り続けて行きたい．

今年は寒い冬らしい．北国の方もおられるが，お互いに健やかに年を越したいものである．来年のことを言うと鬼が笑うかもしれないが，今年と同様にご投稿とご愛読をお願いしたい．

世戸憲治さんの論文の中に Bateman Manuscript Project による “Higher Transcendental Functions” 全 3 巻と “Tables of Integral Transforms” 全 2 巻のことが出てくる．どこかで読んだ話ではこれらの数学公式集は 1929 年のアメリカの大不況で大量の数学者が失業したが，その救済のためのニューディール政策で彼らの救済のための事業であったと聞く．もっともこの背景を知っても世戸さんの疑問に答えることにはならないのだが．

（矢野　忠）